

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

FACULTE DES SCIENCE

DEPARTEMENT DE PHESIQUE

N° :...../2018



DOMAINE : Sciences de la matière

FILIERE : Physique

OPTION : PHYSIQUE THEORIQUE

Mémoire présenté pour l'obtention
Du diplôme de Master Académique

Par: TARFAYA CHAHIRA

Intitulé

**Solution de l'équation de Schrödinger pour les
atomes Hydrogéoïde dans l'espace
Non commutatif**

Soutenu le 26 /06 /2018 devant le jury composé de:

Y. Sabri	Université M'SILA	Président
M.DEBABI	Université M'SILA	Rapporteur
A.Boufarech	Université M'SILA	Examineur 1
A.Ghoumide	Université M'SILA	Examineur 2

Année universitaire : 2017/2018

Remerciements

Je remercie tout d'abord Allah le tout puissant, pour m'avoir donnée la force et la patience, la santé et la volonté pour réaliser ce modeste travail.

Je remercie mes chers parents qui m'ont aidé à être ce que je suis et qui m'ont entouré avec leur amour et affection. Je remercie leur dévouement, leur consacre de temps et leur présence constante au cours de toutes ces années d' « études ». Je ne saurais jamais les remercier assez pour leur bien. « Merci, ce travail est la vôtre ». Je vous aime...

Je témoigne une immense reconnaissance à Monsieur M.DEBABI mon encadreur au département de physique de l'Université Mohamed BOUDIAF pour m'avoir assisté et orienté tout au long de mon parcours étudiant et surtout dans l'établissement de ce rapport de mémoire.

Je le remercie également d'avoir cru en moi ainsi qu'en mes capacités de mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier Monsieur Y.SABRI, A.BOUFARECH et A.GHOUMID qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury.

Un grand merci particulier à mes collègues et mes amies pour les sympathiques moments qu'on a passés ensemble, je les remercie pour leur confiance, leur disponibilité et leur fidélité.

Finalement, je suis profondément reconnaissante à toute personne qui m'a aidé de près ou de loin, directement ou indirectement durant ce passage.

Dédicace

*Je dédie ce travail à mes chers parents, qu'ils trouvent
ici le témoignage de ma profonde gratitude pour leur amour,
leur encourage et leur soutien tout au long de mes études, que ALLAH les
bénisse.*

*A mes chers sœurs
et mes chers frères.*

A tous mes chères amies.

*A tous mes collègues de promotion
A tous ceux que j'aime.*

*A tous ceux qui m'aiment.
Je dédie le fruit de mes efforts.*

Table des Matières

Chapitre 1 : Introduction	(1)
--	-----

Chapitre 2: solution de l'équation de Schrödinger dans espace ordinaire

1. Introduction.....	(5)
2. Algèbre d'espace-temps.....	(5)
3. Equation Schrödinger.....	(5)
4. Etude en coordonnée sphérique.....	(6)
4.1 Etude la partie angulaire.....	(7)
4.1.1 Fonctions propres et valeurs propres de \hat{L}_z	(7)
4.1.2 Fonctions propres et valeurs propres de L^2	(8)
4.2 Etude la partie radiale	(10)
4.2.1 L'atome d'hydrogène	(12)

Chapitre 3 : Géométrie non-commutative et Solution l'équation

Schrödinger dans l'espace non-commutative

1. Introduction.....	(29)
2. Algèbre d'espace-temps non-commutative.....	(29)
3. La quantification de Weyl – Le produit de Moyal	(20)
3.1 Les propriétés du produit star (produit de Moyal) :.....	(20)
4. Le décalage "Bopp shift".....	(23)
5. Atome d'hydrogène sur un espace non commutatif:.....	(24)
6. Hamiltonien non commutatif.....	(25)

Chapitre 4 : Solution de L'équation de Schrödinger Pour les Atomes Hydrogénéoïde

1. Introduction.....	(29)
----------------------	------

2. Hamiltonien du système.....	(29)
3. Atome Hydrogénoïde dans L'espace Non commutative.....	(30)
4. Etude la partie la partie angulaire	(34)
5. Etude la partie radial	(34)
Conclusion.....	(36)
Références.....	(37)
Conclusion Générale.....	(41)

Chapitre 1:

Introduction Générale

Chapitre 1 : Introduction Générale

Puisque la physique classique est totalement inadéquate pour décrire les phénomènes observés à l'échelle atomique, il est nécessaire d'élaborer un nouveau cadre conceptuel de la physique. Cette nouvelle théorie de l'univers physique est conventionnellement appelée la "mécanique quantique".

La mécanique quantique se constitue en 1925, avec les contributions de De Broglie, Schrödinger, Heisenberg et Born, il peut être définie comme l'ensemble des lois physiques s'appliquant à l'échelle de l'infiniment petit.

La mécanique quantique est une révolution scientifique majeure qui a modifié radicalement un certain nombre de concepts de base de la physique. Inventée pour les "besoins de la cause" c'est-à-dire pour expliquer les faits expérimentaux à l'échelle atomique, la mécanique quantique a été maintes fois testée et ses prédictions sont expérimentalement vérifiées à un niveau de précision absolument extraordinaire et ce jusqu'aux échelles actuellement atteintes dans l'exploration de la structure de la matière à savoir $10^{-19} - 10^{-20} \text{ cm}$

Historiquement, le passage de la mécanique classique à la mécanique quantique relativiste s'est effectué à partir d'une généralisation de l'équation de Schrödinger à un système relativiste. L'étude d'un système microscopique est basée sur la résolution de cette équation.

L'équation de Schrödinger est l'équation fondamentale de la mécanique quantique non relativiste. Elle joue en mécanique quantique le même rôle que l'équation de Newton, de Lagrange ou de Hamilton en mécanique classique ou les équations de Maxwell en électromagnétisme. Elle décrit l'évolution temporelle de l'état d'un objet quantique en cherchant ce qu'on appelle la fonction d'onde ainsi le spectre d'énergie des différents états possible. Nous allons étudier cette équation dans ce travail par la méthode de séparation des variables.

Le père de la mécanique quantique est le physicien Max Planck qui a introduit la célèbre constante $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ cette constante est le fondement de la réalité physique, puisqu'on la retrouve dans la formulation du principe d'incertitude de Heisenberg qui rend impossible la mesure simultanée de la position et de l'impulsion d'une particule, car l'incertitude Δx sur la mesure de sa position et l'incertitude Δp sur son impulsion doivent satisfaire à la relation $\Delta x \cdot \Delta p \simeq \hbar$. C'est ainsi que la position x et l'impulsion p deviennent des

Chapitre 1 : Introduction Générale

opérateurs \hat{x} et \hat{p} agissant sur l'espace des états qui est un espace de Hilbert leur commutateur est donné par:

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0 \quad \text{et} \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \quad (1.1)$$

Les opérateurs \hat{x} et \hat{p} engendrent l'algèbre des observables quantiques, qui est non commutative et enfin on peut dire que l'algèbre des fonctions de l'espace des phases en physique quantique introduit un nouveau type de géométrie.

La géométrie non commutative [1, 2,3] est une géométrie où les coordonnées de l'espace-temps ne commutent pas, et est une reformulation et une généralisation de la géométrie ordinaire en des termes algébriques et d'analyse fonctionnelle. Elle utilise les mêmes outils que la mécanique quantique.

La mécanique quantique sur espace non-commutatif (MQNC), dans un premier temps, été proposée par Heisenberg [4] dans les années 30 puis développée par Snyder [5] à la fin des années 40 dans l'espoir que les propriétés de non-localisable induite par la non-commutativité des coordonnées d'espace permettraient de résoudre le problème des divergences à courte distance (ultra violette) de la théorie des champs.

Le titre de mon travail de mémoire de master en physique théorique est : Solution de l'équation de Schrödinger pour les atomes hydrogénoïde dans l'espace non commutative

Ce premier chapitre nous avons rappelé les éléments essentiels de la physique modern

Dans le deuxième chapitre, on va résoudre l'équation Schrödinger pour l'atome hydrogène dans espace ordinaire.

Dans le troisième chapitre, on a décrit brièvement les notions de la géométrie non commutative et en effet la solution l'équation Schrödinger pour l'atome hydrogène dans l'espace non-commutative

Dans le quatrième et dernier chapitre, on va résoudre l'équation de Schrödinger pour les atomes hydrogénoïde de type muoniques dans le formalisme de la géométrie de l'espace non commutative.

Et on finalise notre mémoire par une conclusion générale.

**Chapitre 2 : Solution de l'équation Schrödinger
pour
l'atome d'Hydrogène dans l'espace-ordinaire**

1. Introduction

Dans Ci-dessous nous étudierons seulement des systèmes simples, l'atome d'hydrogène et les atomes Hydrogénéoïde, la molécule diatomique. Nous montrerons que ces systèmes peuvent se réduire au mouvement d'une particule dans un potentiel $V(r)$ ne dépendant que de la distance r , telle potentiel harmonique $\frac{1}{2}kr^2$ et le potentiel coulombien $-\frac{\lambda}{r}$ pour lesquels des solutions exactes existent et qui constituent très souvent un modèle de départ satisfaisant pour l'étude des systèmes plus réalistes. Nous considérerons surtout les solutions stationnaires des états liés. Comme les potentiels étudiés sont asymétriques sphériques, il est clair que des opérations de rotation laissent l'Hamiltonien invariant. Il en résulte que les états stationnaires sont alors simultanément fonctions propres des opérateurs du moment angulaire.

2. Algèbre d'espace-temps

En mécanique quantique ordinaire, les relations de commutation canoniques dans l'espace de phase prennent la forme [06]:

$$\begin{cases} [x_i, x_j] = 0 \\ [p_i, p_j] = 0 \\ [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \end{cases} \quad (2,1)$$

3. Equation de Schrödinger

L'équation de Schrödinger pour l'atome d'hydrogène sera écrite en faisant l'approximation que le noyau (dont la masse est 1836 fois celle de l'électron) constitue l'électron le centre de gravité du système où il est immobile, ce qui revient à négliger son énergie cinétique. En 1925 Schrödinger proposa son équation et montre que la solution correspondant permet de retrouver les niveaux d'énergie par Bohr (1913) pour l'atome hydrogène.

L'équation de Schrödinger, donc :

$$H\psi(\vec{r}, t) = E\psi(\vec{r}, t) \quad (2,2)$$

Où En repèrent l'énergie non relativiste total du system et H est l'opérateur Hamiltonien, qui donnée par :

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r). \quad (2,3)$$

Où

- \mathbf{P} Représentant l'impulsion tell que $\vec{P} = -i\hbar\vec{\nabla}$.
- $\vec{\nabla}$ l'opérateur de dérivés partiels.

Donc L'équation de Schrödinger devient [06, 07, 14]:

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(r) \right) \psi(\vec{r}, t) = E\psi(\vec{r}, t) \quad (2,4)$$

4. Etude en coordonnée sphérique

L'opérateur Laplacian Δ s'écrit dans les coordonnées sphériques comme [08]:

$$L^2 = -\hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\}$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \quad (2,5)$$

On obtient l'opérateur du carré du moment cinétique :

$$L^2 = -\hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} \quad (2,6)$$

Où $0 < r < +\infty$, et θ, φ les angles polaire satisfont $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Donc la relation (2,5), de la forme equivanlant:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\hat{L}^2}{\hbar^2 r^2}. \quad (2,7)$$

On peut écrire l'opérateur Hamiltonien en coordonnée sphérique comme :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\hat{L}^2}{\hbar^2 r^2} \right\} + V(\vec{r}) \quad (2,8)$$

Alors on écrit l'équation de Schrödinger en coordonnées sphériques comme [14]:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\hat{L}^2}{r^2} \right\} + V(r) \right] \psi(r, \theta, \varphi) = E\psi(r, \theta, \varphi). \quad (2,09)$$

Les trois opérateurs H , \hat{L}_z et \hat{L}^2 commutent : ils ont donc un ensemble commun de fonctions propres $\psi(r, \theta, \varphi)$.

La séparation des variables, permet nous d'écrire la fonction d'onde comme [07]:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r)Y_{l,m_l}(\theta, \varphi). \quad (2,10)$$

Où

- $R_{nl}(r)$ est la partie radiale de la fonction d'onde qui dépend seulement de rayon r .
- $Y_{l,m_l}(\theta, \varphi)$ représente la partie angulaire dépend des angles θ et φ .
- n est appelé nombre quantique principal
- l est le nombre quantique orbital.
- m le nombre quantique magnétique $-l < m < +l$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\hat{L}^2}{r^2} \right\} + V(r) \right] R_l(r)Y_{l,m_l}(\theta, \varphi) = E_{n,l}R_l(r)Y_{l,m_l}(\theta, \varphi) \quad (2,11)$$

4.1-Etude la partie angulaire

Pour calculer $Y_{l,m_l}(\theta, \varphi)$ faisons la séparation des variables suivante [07]:

$$Y_{l,m_l}(\theta, \varphi) = T(\theta)\Phi_m(\varphi). \quad (2,12)$$

4.1.1-Fonctions propres et valeurs propres de \hat{L}_z

Les fonctions propres $\Phi(\varphi)$ dépendent de la seule variable φ et doivent satisfaire à l'équation suivante (toujours en u.a.) où m est un scalaire quelconque :

On a [09] :

$$\begin{cases} \hat{L}_z = \hbar m \\ \hat{L}_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{cases} \quad (2,13)$$

Par identifier [07, 09] :

$$-i \frac{d\phi(\varphi)}{d\varphi} = m \phi(\varphi) \quad (2,14)$$

On utilise l'intégral dont les solutions sont de la forme :

$$\phi_m(\varphi) = A e^{im\varphi} \quad (2,15)$$

Cette solution doit prendre la même valeur pour $\varphi = 2\pi$ que pour $\varphi = 0$ (uniformité). Les arguments de l'exponentielle doivent satisfaire à $(m \cdot 2\pi = 0 + k\pi)$.

$m = k$ doit donc être un entier. La constante A est déterminée par la normalisation de ϕ :

$$1 = \int_0^{2\pi} \phi * \phi d\phi = A^2 \int_0^{2\pi} d\phi = 2 \pi A^2 \rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Donc :

$$\phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \quad (2,16)$$

Ainsi, la composante selon Z du moment cinétique de l'électron dans l'atome d'hydrogène ne peut prendre que les valeurs entières, positives, négatives ou nulle.

4.1.2-Fonctions propres et valeurs propres de L^2

Les opérateurs associés à L^2 et \hat{L}_z , qui commutent, ont un ensemble commun de fonctions propres. L^2 dépend de θ et φ , \hat{L}_z dépend de φ seul. Les fonctions propres $\phi(\varphi)$ de \hat{L}_z ayant été déterminées, ces solutions communes ne peuvent être que de la forme [07] et [10] :

$$Y_{l,m_l}(\theta, \varphi) = T(\theta) \phi_m(\varphi) \quad (2,17)$$

En remplaçant (2,17) dans (2,18) :

$$Y_{l,m_l}(\theta, \varphi) = T(\theta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}. \quad (2,18)$$

Chapitre 2 : Solution de l'équation Schrödinger pour l'atome d'Hydrogène dans l'espace-ordinaire

D'où l'équation aux valeurs propres de L^2 [07] :

$$-\hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} Y_{l,m_l}(\theta, \varphi) = l(l+1) Y_{l,m_l}(\theta, \varphi) \quad (2,19)$$

On pose $\lambda = l(l+1)$ où l est un entier positif ou nul de valeur absolue supérieure ou égale à m . En d'autres termes $-l \leq m \leq l$ où λ est un scalaire

En remplaçant (2,17) dans (2,19) :

$$\left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} T(\theta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} = \lambda T(\theta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \quad (2,20)$$

En développant le premier membre

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} T(\theta) \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} T(\theta) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \right) \right\}$$

Dans le dernier terme se transforme selon

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (e^{im\varphi}) = -m^2$$

la fonction Φ , déjà connue, disparaît alors de l'équation où ne figure plus que T [11]:

$$\left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - m^2 \frac{1}{\sin^2 \theta} \right\} T(\theta) = \lambda T(\theta) \quad (2,21)$$

On pose $K = m^2$, m étant un entier positif.

Nous reportons cette valeur K dans l'équation que nous modifions en effectuant le changement de variable $\omega = \csc \theta$, la fonction $T(\theta)$ devenant $P(\omega)$ c'est à dire

On dérivé ω :

$$d\omega = -\sin \theta d\theta. \quad (2,22)$$

Si nous prenons l'inversé de la 1^{er} dérivation

$$\frac{d}{d\omega} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \rightarrow \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} = -\frac{d}{d\omega}. \quad (2,23)$$

On multiplie l'équation (2,23) par $\sin^2 \theta$ devient :

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} = -\sin^2 \theta \frac{d}{d\omega} \quad (2,24)$$

Et on a aussi : $\sin^2 \theta = 1 - \omega^2$

Donc la relation (2,21) devient de la façon suivant [12]:

$$\frac{d}{d\omega} \left\{ (1 - \omega^2) \frac{dP(\omega)}{d\omega} \right\} + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - \omega^2} \right) P(\omega) = 0 \quad (2,25)$$

Dans le cas général, cette équation différentielle du deuxième ordre a 2 solutions indépendantes qui deviennent infinies pour $\omega = \pm 1$.

Une des solutions peut être finie pour toute valeur de ω :

- Pour $m = 0$, $P(\omega)$ sera un polynôme de Legendre
- Pour $m \neq 0$, une solution toujours finie ne sera possible.

Dans ce dernier cas, la solution sera un polynôme de Legendre associé $P_l^m(\omega)$

$$P_l^m(\omega) = (1 - \omega^2)^{|m|/2} \frac{d^{|m|}}{d\omega^{|m|}} P_l(\omega) \quad (2,26)$$

Les fonctions propres de \mathbf{L}^2 s'écrivent alors solution de la partie angulaire de l'équation Schrödinger sera donc :

$$Y_{l,m_l}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1 - \omega^2)^{|m|/2} \frac{d^{|m|}}{d\omega^{|m|}} P_l(\omega). \quad (2,27)$$

On peut écrire

$$Y_{l,m_l}(\theta, \varphi) = N_{lm} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

Où N_{lm} étant constante de normalisation. Ces fonctions sont appelées harmoniques sphériques.

4.2-Etude la partie radiale

Les conditions requises pour la forme d'onde provoquent la quantification spontanée de l'énergie des états liés. Elles ont été vues à l'œuvre en proposant des harmoniques sphériques : c'est le caractère monovalué de la fonction d'onde qui engendre la quantification de la composante L_z du moment cinétique.

D'après la projection, nous multiplions et divisons par $Y_{l,m_l}(\theta, \varphi)$ l'équation (2,11) devient [08]:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} + v(r) \right] R_l(r) = E_{n,l} R_l(r) \quad (2,28)$$

Il reste déterminer la fonction propre et valeur propre de $R_l(r)$ associées aux valeurs propre E de l'énergie de l'électron.

Ou l'équation (2,28) deviant (2,29) :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + v(r) \right] R_l(r) = E_{n,l} R_l(r). \quad (2,29)$$

D'introduire la fonction d'onde réduite $u(r) = rR_l(r)$, utilisant cette définition, on a donc $R_l(r) = \frac{u(r)}{r}$ et on multipliant l'équation (2,29) par r et remplace $u(r)$ on trouvera l'équation suivant :

$$R_l(r) = \frac{u(r)}{r} \quad (2,30)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r) + \left(v(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right) u(r) = E_{n,l} u(r). \quad (2,31)$$

Cette équation est identique à l'équation de Schrödinger à une dimension dans un potentiel effectif [12]:

$$V_{\text{eff}}(r) = v(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \quad (2,32)$$

4.2.1 L'atome d'hydrogène

L'atome d'hydrogène est un exemple important du succès de la mécanique quantique. Il s'agit de l'un des seuls problèmes exactement soluble avec l'oscillateur harmonique et à des applications technologiques et fondamentales importantes [13]

Dans cette section, nous étudierons un modèle simplifié de l'atome d'hydrogène. Nous considérerons cet atome comme formé d'un électron sans spin et non relativiste placé dans le champ coulombien d'un proton.

Pour l'atome d'hydrogène, le potentiel coulombien s'écrit [06, 07] :

Chapitre 2 : Solution de l'équation Schrödinger pour l'atome d'Hydrogène dans l'espace-ordinaire

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} \quad (2,33)$$

Pour la tome hydrogène l'équation Schrödinger de la partie radiale est :

$$-\frac{2m}{\hbar^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r) + \left[-\frac{e^2}{r} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] u(r) = E_{n,l} u(r). \quad (2,34)$$

Le potentiel effectif correspondant admet des solutions d'énergie positive et d'énergie négative. Pour ces premières ($E > 0$), on obtient un continuum d'énergies possibles correspondant à des états non liés. Dans le second cas ($E < 0$), on obtient des énergies discrètes correspondant à des états liés du proton et de l'électron. Ce sont ces dernières qui nous intéresserons dans cette section.

Puisque l'on s'intéresse à $E < 0$. En divisant l'équation radiale. L'équation(2,35)par E de chaque côté, on obtient

$$-\frac{\hbar^2}{2mE} \frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r) + \left[-\frac{e^2}{Er} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mEr^2} \right] u(r) = 0. \quad (2,35)$$

On peut défini k réel : $k = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar^2}$. (2,36)

$$\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r) + \left[\frac{2me^2}{\hbar^2} \frac{1}{kr} + \frac{l(l+1)}{k^2 r^2} \right] u(r) = u(r) \quad (2,37)$$

Et en utilisé le changement de variable

$$\rho_0 = \frac{2me^2}{\hbar^2 k}, \quad \text{et } \rho = kr. \quad (2,38)$$

on trouve :

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} u(\rho) = \left[1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] u(\rho). \quad (2,39)$$

Pour trouver les bonnes solutions physiques de cette équation, on utilise la méthode polynômiale. On considère le cas où $\rho \rightarrow \infty$. On a alors approximativement, le terme potentiel est négligeable il reste :

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} u(\rho) = u(\rho). \quad (2,40)$$

La solution générale de l'équation (2,40) est de la forme :

$$u(\rho) = A e^{-\rho} + B e^{\rho}. \quad (2,41)$$

Puisque la solution physique doit rester finie à $\rho \rightarrow \infty$, dans ce cas $B = 0$ et donc :

$$u(\rho) = A e^{-\rho} \quad (2,42)$$

Dans la limite opposé $\rho \rightarrow 0$ (et pour $l \neq 0$), le terme centrifuge en $\frac{1}{\rho^2}$ domine et l'équation radiale prend la forme approximative

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} u(\rho) = \frac{l(l+1)}{\rho^2} u(\rho). \quad (2,43)$$

Dont la solution général est de la forme [08,12]:

$$u(\rho) = A_1 \rho^{-l+1} + B_2 \rho^{-l}. \quad (2,44)$$

A $\rho \rightarrow 0$, e^{-l} diverge et donc $B_2 = 0$. On a donc

$$u(\rho) = A_1 \rho^{-l+1}, \quad (2,45)$$

Effectuons par conséquent le changement de fonction :

$$u(\rho) = \rho^{-l+1} e^{-\rho} v(\rho). \quad (2,46)$$

On va dériver la premier ordre :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\rho)}{\partial \rho} &= \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^{-l+1} e^{-\rho} v(\rho)) \\ \frac{\partial u(\rho)}{\partial \rho} &= \rho^{-l} e^{-\rho} \left[(l+1-\rho) + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right] v(\rho) \end{aligned} \quad (2,47)$$

et la deuxième dérive :

$$\frac{\partial^2 u(\rho)}{\partial \rho^2} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho^{-l} e^{-\rho} \left[(l+1-\rho) + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right] v(\rho) \right]$$

Chapitre 2 : Solution de l'équation Schrödinger pour l'atome d'Hydrogène dans l'espace-ordinaire

$$= \rho^{-l} e^{-\rho} \left[\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + 2(l+1-\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{l(l+1)}{l} - 2l - 2 + \rho \right] v(\rho). \quad (2,48)$$

En remplace(2,48)dans l'équation (2,39) :

$$\begin{aligned} & \rho^{-l} e^{-\rho} \left[\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + 2(l+1-\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{l(l+1)}{l} - 2l - 2 + \rho \right] v(\rho) \\ &= \left[1 - \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] \rho^{-l+1} e^{-\rho} v(\rho) \end{aligned}$$

Donc :[15]

$$\rho \frac{\partial^2 v(\rho)}{\partial \rho^2} + 2(l+1-\rho) \frac{\partial v(\rho)}{\partial \rho} + (\rho_0 - 2(l+1))v(\rho) = 0. \quad (2,49)$$

La solution $v(\rho)$ peut s'exprimer comme une série de puissances en ρ :

$$v(\rho) = \sum_{p=0} (C_p \rho^p). \quad (2,50)$$

Nous calculons les dérivées premier et seconde de $v(\rho)$:

$$\frac{\partial v(\rho)}{\partial \rho} = \sum_{p=0} (p C_p \rho^{p-1}) = \sum_{j=-1} ((j+1)C_{j+1}\rho^j) = \sum_{j=0} ((j+1)C_{j+1}\rho^j)$$

Puisque : $p - 1 = j$

$$\frac{\partial^2 v(\rho)}{\partial \rho^2} = \sum_{j=0} (j(j+1)C_{j+1}\rho^{j-1}). \quad (2,51)$$

En remplace les drèves premier et deuxième de $v(\rho)$ dans l'équation (2,49) :

$$\rho \sum_{j=0} j(j+1)C_{j+1}\rho^{j-1} + 2(l+1-\rho) \sum_{j=0} (j+1)C_{j+1}\rho^j + (\rho_0 - 2(l+1)) \sum_{j=0} C_j \rho^j = 0$$

On a :

$$\rho \sum_{j=0} (j+1)C_{j+1}\rho^j = \sum_{j=0} (j+1)C_{j+1}\rho^{j+1} = \sum_{j=-1} jC_j \rho^j = \sum_{j=0} jC_j \rho^j$$

Donc :

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j(j+1) + 2(l+1)(j+1))C_{j+1}\rho^j + \sum_{j=0}^{\infty} (\rho_0 - 2(j+l+1))C_j\rho^j = 0. \quad (2,52)$$

Egalant les termes de puissance égale de ρ , on obtient

$$(j(j+1) + 2(l+1)(j+1))C_{j+1} + (\rho_0 - 2(j+l+1))C_j = 0$$

OU ENCORE

$$C_{j+1} = \frac{2(j+l+1) - \rho_0}{j(j+1) + 2(l+1)(j+1)} C_j. \quad (2,53)$$

On considère pour commencer le cas où j est grand, ce qui correspond à ρ grand car les grandes puissances de j dominent. Dans ce cas, on a

$$C_{j+1} = \frac{2j}{j(j+1)} C_j = \frac{2}{j+1} C_j$$

On a gardé ici $j+1 = m \Rightarrow j = m-1$

$$C_m = \frac{2}{m} C_{m-1} = \frac{2}{m} \times \frac{2}{m-1} C_{m-2} = \frac{2}{m} \times \frac{2}{m-1} \times \frac{2}{m-2} C_{m-3} = \dots = \frac{2^m}{m} C_0$$

Dans cette approximation, on peut ainsi écrire :

$$v(\rho) = C_0 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2^p}{p} \rho^p = C_0 e^{2\rho}. \quad (2,54)$$

Donc :

$$u(\rho) = \rho^{l+1} e^{-\rho} v(\rho) = C_0 \rho^{l+1} e^{\rho}. \quad (2,55)$$

Pour les grandes valeurs de ρ , cette solution diverge. Ceci n'est pas admissible physiquement et par conséquent on doit en conclure que la série doit se terminer à une puissance finie de ρ de façon à éviter cette divergence. Il doit donc exister une valeur maximale de l'indice de sommation qui est telle que

$$C_{j_{\max}+1} = \frac{2(j_{\max} + l + 1) - \rho_0}{(j_{\max} + 1)(j_{\max} + 2l + 2)} C_{j_{\max}} = 0. \quad (2,56)$$

On pose :

$$2(j_{\max} + l + 1) - \rho_0 = 0. \quad (2,57)$$

Chapitre 2 : Solution de l'équation Schrödinger pour l'atome d'Hydrogène dans l'espace-ordinaire

On put définir le n est appelé nombre quantique principal comme suit : [15]

$$j_{\max} + l + 1 = n. \quad (2,58)$$

Donc :

$$\rho_0 = 2n. \quad (2,59)$$

En utilisant l'équation (2,36) et (2,38)

$$E = -\frac{k^2 \hbar^2}{2m} = -\left[\frac{me^4}{2\hbar^2} \right] \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (2,60)$$

Avec : $e^4 = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2$.

En utilisant la relation (2,37) et (2,60) on peut prendre :

$$K = \left(\frac{me^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} \right) \frac{1}{n} = \frac{1}{an} \quad (2,61)$$

Et

$$\rho = \frac{r}{an} \quad (2,62)$$

Avec a est le rayon de Bohr défini comme suit :

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} \quad (2,63)$$

En remplaçant cette équation dans (2,30) [13] :

$$R_l(r) = \frac{1}{r} \rho^{l+1} e^{-\rho} v(\rho) \quad (2,64)$$

Avec $v(\rho)$ est un polynôme de degré $j_{\max} = n - l - 1$ on peut écrire :

$$v(\rho) = L_{n-l-1}^{2l+1}(2\rho) \quad (2,65)$$

Avec L_{n-l-1}^{2l+1} étant l'expression d'un polynôme dérivé de polynôme de Laguerre $L_k(x)$ par la relation :

$$L_k^s(x) = \frac{d^s}{dx^s} L_k(x) \quad (2,66)$$

Chapitre 2 : Solution de l'équation Schrödinger pour l'atome d'Hydrogène dans l'espace-ordinaire

Et la fonction d'onde définit comme suivent l'équation (2,12):

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r)Y_{l,m_l}(\theta, \varphi)$$

Alors la fonction d'onde, normalisée à l'unité, d'état quantique (n, l, m) et en remplacé l'équation (2,18) et (2,65) dans (2,11) [11, 14] :

$$\psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi) = \sqrt{\left(\frac{2}{na_1}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} \left(\frac{2r}{na_1}\right)^l e^{-\frac{r}{na_1}} L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{an}\right) Y_{l,m_l}(\theta, \varphi) \quad (2,67)$$

$$\text{Et } Y_{l,m_l}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} (-1)^m P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (2,68)$$

Avec la fonction radiale définir comme suivent :

$$R_l(r) = \sqrt{\left(\frac{2}{na_1}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} \left(\frac{2r}{na_1}\right)^l e^{-\frac{r}{na_1}} L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{an}\right)$$

Chapitre 3 : Géométrie non-commutative

et

l'équation Schrödinger

dans

l'espace non-commutative

1. Introduction

La géométrie non commutative est une géométrie où les coordonnées de l'espace-temps ne commutent pas, elle a été conçue à la fois pour répondre à des Besoins en mathématiques et pour permettre d'abord de certains problèmes de physique théorique. [16]

2. Algèbre d'espace-temps non-commutative :

L'algèbre non commutative dans la forme générale présente par les relations suivantes [17] [18] [19] [20] :

$$\begin{cases} [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij} \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\sigma_{ij} \\ [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \end{cases} \quad (3,1)$$

Les quantités θ_{ij}, σ_{ij} sont des paramètres antisymétriques réelles pouvant dépendre des opérateurs \hat{p} et \hat{x} et satisfaisant à :

$$\begin{cases} \theta(ij) = \varepsilon_{ij}\theta \\ \sigma_{ij} = \varepsilon_{ij}\sigma \end{cases} \quad (3,2)$$

Avec : $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji} = 1$

Lorsque on pose $\sigma^2 \rightarrow 0$ ou $\theta \rightarrow 0$ nous trouvons les relations de la mécanique quantique ordinaire (commutative).

La non commutativité n'est réalisée que sur les opérateurs position par le biais des paramètres (Non commutativité positionnelle). [18]

L'algèbre au-dessus se réécrit donc :

$$\begin{cases} [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij} \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \\ [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \end{cases} \quad (3,3)$$

Où θ_{ij} sont des paramètres réels antisymétriques et ont une dimension de $[longueur]^2$, et jouent un rôle analogue à \hbar dans la mécanique quantique ordinaire.

Dans l'espace-phase non commutatif la construction des théories de jauge se fait de la même manière qu'en théorie de jauge sur un espace ordinaire.

- Les champs ordinaires remplacés par les champs non commutatifs.
- Le produit ordinaire remplacé par le nouveaux produit connait par le produit de Moyal Weyl (produit star).

Il très important de noter que les relations de commutation dans l'espace non commutatif, satisfait par nouveaux produit connue par le produit star.

3. La quantification de Weyl – Le produit de Moyal

La quantification de Weyl est une technique utilisée pour décrive la mécanique quantique à partir de l'espace de phase de la mécanique classique.

C'est une prescription qui nous permet d'associer un opérateur quantique à une fonction classique qui dépend des variables de l'espace de phase (variables canoniques).

$\tilde{f}(k)$ transformation de Fourier [20, 21, 22] :

$$\begin{cases} f(x) = (2\pi)^{-D/2} \int d^D k e^{-ik_m x_m} \tilde{f}(k) \\ g(x) = (2\pi)^{-D/2} \int d^D l e^{-il_m x_m} \tilde{g}(l) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \tilde{f}(k) = (2\pi)^{-D/2} \int d^D x e^{ik_m x_m} f(x) \\ \tilde{g}(l) = (2\pi)^{-D/2} \int d^D x e^{il_m x_m} g(x) \end{cases} \quad (3,4)$$

On définit le symbole de Weyl par :

$$\begin{cases} w(f) = (2\pi)^{-D/2} \int d^D k e^{ik_m x_m} \tilde{f}(k) \\ w(g) = (2\pi)^{-D/2} \int d^D l e^{il_n x_n} \tilde{g}(l) \end{cases} \quad (3,5)$$

Si $f(x)$ $g(x)$ est fonction réelle alors l'opérateur de Weyl est hermitien.

3.1 Les propriétés du produit star (produit de Moyal) :

Le formalisme du star-produit initié par Weyl et Wigner pour permettenue description de la mécanique quantique en termes d'espace des phases [19], on put décentrer Les propriétés du produit star.

1- le produit star entre exponentiels :

En utilisant la formule de Campbell-Baker-Hausdorff [19, 24, 25,26] :

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}[[A,B],B] - \frac{1}{12}[[A,B],A] + \dots} \quad (3,6)$$

Et on a

$$[[A, B], A] = [[A, B], B] = 0 \quad (3,7)$$

En utilisant (3,6) et (3,7) on trouve

$$e^{ikx} * e^{iqx} = e^{i(k+q)x + \frac{-1[[ikx, iqx]]}{2} + \frac{1}{12}[[ikx, iqx], iqx] + \dots} \quad (3,8)$$

En utilisant $[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}$ la relation (3,8) devient :

$$e^{ikx} * e^{iqx} = e^{i(k+q)x + \frac{-i}{2}k\theta q} \quad (3,9)$$

2- représentation de l'espace d'impulsion :

Le produit de deux opérateurs de Weyl de deux fonctions soit égal à l'opérateur de Weyl associé au produit star de deux fonctions :

$$w(f) w(g) = w(\overline{f * g}) \quad (3,10)$$

On calcule le premier terme :

$$w(f) w(g) = (2\pi)^{-D/2} \int d^D k e^{ik_m \hat{x}^m} \tilde{f}(k) (2\pi)^{-D/2} \int d^D l e^{il_n \hat{x}^n} \tilde{g}(l) \quad (3,11)$$

En utilisant (3,7), (3,8) l'équation (3,11) devient :

$$\begin{aligned} w(f) w(g) &= (2\pi)^{-D/2} (2\pi)^{-D/2} \iint d^D k d^D l \tilde{f}(k) \tilde{g}(l) e^{i(k_m + l_m) \hat{x}^m} e^{\frac{1}{2}[[ik_m \hat{x}^m, il_n \hat{x}^n]]} \\ &= (2\pi)^{-D/2} (2\pi)^{-D/2} \iint d^D k d^D l \tilde{f}(k) \tilde{g}(l) e^{i(k_m + l_m) \hat{x}^m} e^{-\frac{i}{2} \theta^{mn} k_m l_n} \quad (3,12) \end{aligned}$$

On pose $q=k+l$ donc :

$$w(f) w(g) = (2\pi)^{-D/2} (2\pi)^{-D/2} \iint d^D k d^D q \tilde{f}(k) \tilde{g}(q-k) e^{iq_m \hat{x}^m} e^{-i(\theta^{mn} k_m q_n)/2} \quad (3,13)$$

Avec : $\theta^{mn} k_m l_n = \theta^{mn} k_m q_n$

Deuxième terme :

$$w(\overline{f * g}) = (2\pi)^{-D/2} \int d^D q (\overline{f * g})(q) e^{iq_m \hat{x}^m} \quad (3,14)$$

Par identification

$$(\overline{f * g})(q) = (2\pi)^{-D/2} \int d^D k \tilde{f}(k) \tilde{g}(q - k) e^{-i(\theta^{mn} k_m q_n)/2} \quad (3,15)$$

Et on a aussi :

$$(f * g)(x) = (2\pi)^{-D/2} \int d^D q \overline{(f * g)} e^{iq_m \hat{x}^m} \quad (3,16)$$

En remplacé (3,15) l'équation (3,16) devient :

$$(f * g)(x) = (2\pi)^{-D/2} (2\pi)^{-D/2} \int d^D l d^D k \tilde{f}(k) \tilde{g}(l) e^{i(k+l)\hat{x}^m} e^{\frac{i}{2} k \theta l} \quad (3,17)$$

On pose : $(2\pi)^{-D/2} \int d^D l = d^4 l$ et $(2\pi)^{-D/2} \int d^D k = d^4 k$

Donc l'équation :

$$(f * g)(x) = \int d^4 l d^4 k e^{i(k+l)\hat{x}^m} e^{-i(k \theta l)/2} \quad (3,18)$$

3- l'associativité :

$$h(x) = (2\pi)^{-\frac{D}{2}} \int d^D p e^{-ip_m \hat{x}^m} \tilde{h}(p) \rightarrow \tilde{h}(p) = (2\pi)^{-\frac{D}{2}} \int d^D x e^{ip_m \hat{x}^m} f(x) \quad (3,19)$$

En utilisant la propriété (3,17) et, (3,18), (3,4) on trouve [19]:

$$[(f * g) * h](x) = \int \tilde{f}(k) \tilde{g}(l) \tilde{h}(p) e^{i(k+l+p)x} e^{-i(k \theta l)/2} e^{i[(k+l)\theta l]/2} d^4 k d^4 l d^4 p$$

$$[f * ((g * h))](x) = \int \tilde{f}(k) \tilde{g}(l) \tilde{h}(p) e^{i(k+l+p)x} e^{-i(l \theta p)/2} e^{i[\theta k(l+p)]/2} d^4 k d^4 l d^4 p$$

Donc :

$$(f * g) * h = f * (g * h) = f * g * h \quad (3,20)$$

4- produit star sous le signe intégral :

En utilisant (3.17) nous pouvons immédiatement effectuer l'intégration sur x qui donnera un $d^4(k + l)$

En raison de l'antisymétrie de θ , l'exposant disparaît ainsi :

$$\int (f * g)(x) d^4 x = \int d^4 k \cdot \tilde{f}(k) \tilde{g}(-k) = \int (f \cdot g)(x) d^4 x \quad (3,21)$$

5- La conjugaison complexe :

$$(f(x) * g(x))^* = f(x)^* * g(x)^* \quad (3,22)$$

6- le produit star est non commutatif :

$$f(x) * g(x) \neq g(x) * f(x) \quad (3,23)$$

Par contre :

$$f(x) * g(x) = g(x) * f(x)|_{\theta \rightarrow -\theta} \quad (3,24)$$

Lorsque $\theta = 0$ on trouve :

$$f(x) * g(x) = g(x)f(x) \quad (3,25)$$

7- Règle de Leibniz :

$$\partial_\mu(f * g) = \partial_\mu f * g + f * \partial_\mu g \quad (2,26)$$

4. Le décalage "Bopp shift":

On peut écrire les opérateurs d'espace-temps non commutatifs \hat{x} et \hat{p} en termes des opérateurs ordinaires de positions et d'impulsions en utilisant la transformation suivante : [17, 27, 28,20]

$$x_i = \hat{x}_i + \frac{1}{2}\theta_{ij}\hat{p}_j \quad (3,27)$$

$$\hat{p}_j = p_j \quad (3,28)$$

En peut démontrer cette relation, en prend particule dans un champ extérieur sur espace non commutatif comme exemple.

On peut extraire un hamiltonien :

$$\hat{H} = \alpha^i(\hat{p}_i - g \tilde{A}_i) + mg - g\tilde{A}_0 \quad (3,29)$$

Et on a aussi :

$$\hat{x}^i = i[H, \hat{x}^i] = \alpha^i + g \frac{\theta_{ij}}{2} \overline{\partial^\mu A_\mu} \quad (3,30)$$

$$\text{Avec } \overline{\partial^\mu A_\mu} = \partial_k A_k|_{\hat{x}_i - \theta_{ij} p_j}, \text{ et } \alpha^\mu = 1$$

On fait de même pour l'impulsion :

$$\hat{p}^i = i[H, \hat{p}^i] = g \overline{\partial^\mu A_\mu} \quad (3,31)$$

On remarque que les équations (3,30) et (2,31) permettent d'écrire :

$$x^i = \hat{x}^i + \frac{\theta_{ij}}{2} \quad (3,32)$$

5. Atome d'hydrogène sur un espace non commutatif :

L'équation de Schrödinger sur un espace-temps non commutatif aura la forme [09] :

$$\hat{H}(\hat{P}, \vec{\hat{x}}) * \hat{\psi}(\vec{\hat{x}}, t) = E_{nc} \hat{\psi}(\vec{\hat{x}}, t) \quad (2,33)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\vec{\hat{x}}, t) = \left[\frac{\vec{P}^2}{2m} + V(\vec{\hat{x}}) \right] * \psi(\vec{\hat{x}}, t) \quad (2,34)$$

Le produit star entre l'opérateur du potentiel et la fonction d'onde est défini comme :

$$V(\vec{\hat{x}}) . \psi(\vec{\hat{x}}, t) \rightarrow V(\vec{\hat{x}}) * \psi(\vec{\hat{x}}, t) \quad (2,35)$$

Mezincescu [17] et [28, 29] a démontré la relation suivante :

$$V(\vec{\hat{x}}) * \psi(\vec{\hat{x}}) = V\left(\vec{\hat{x}} - \frac{\vec{P}}{2}\right) \psi(\vec{\hat{x}}, t) \quad (2,36)$$

Démonstration :

$$V(\vec{\hat{x}}) * \psi(\vec{\hat{x}}) = V(\vec{\hat{x}}) \psi(\vec{\hat{x}}) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\right)^n \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} V(\vec{\hat{x}}) \theta^{i_1 j_1} \dots \theta^{i_n j_n} \partial_{j_1} \dots \partial_{j_n} \psi(\vec{\hat{x}})$$

On a: $\partial_{j_n} = \frac{\partial}{\partial x^{j_n}}$ et $iP_{j_n} = \hbar \frac{\partial}{\partial x^{j_n}}$ avec $\hbar = 1$

On replace ∂_{j_k} par : $\partial_{j_n} = iP_{j_n}$

$$V(\vec{\hat{x}}) * \psi(\vec{\hat{x}}) = V(\vec{\hat{x}}) \psi(\vec{\hat{x}}) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{2}\right)^n \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} V(\vec{\hat{x}}) \theta^{i_1 j_1} \dots \theta^{i_n j_n} (i)^n P_{j_1} \dots P_{j_n} \psi(\vec{\hat{x}})$$

On pose : [17] $\hat{P}^{j_n} = \theta^{i_n j_n} P_{j_n}$

$$V(\vec{\hat{x}}) * \psi(\vec{\hat{x}}) = V(\vec{\hat{x}}) \psi(\vec{\hat{x}}) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} V(\vec{\hat{x}}) \hat{P}^{j_1} \dots \hat{P}^{j_n} \psi(\vec{\hat{x}})$$

La transformation de Fourier de $V(\vec{\hat{x}})$:

$$\partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} V(\vec{\hat{x}}) \hat{P}^{j_1} \dots \hat{P}^{j_n} \psi(\vec{\hat{x}}) = (i)^n \int dk \exp(ikx) (k \cdot \hat{P})^n \hat{V}(k) \psi(\vec{\hat{x}})$$

Donc :

$$V(\vec{x}) * \psi(\vec{x}) = V(\vec{x}) \psi(\vec{x}) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (i)^n \int dk \exp(ikx) (k \cdot \hat{P})^n \hat{V}(k) \psi(\vec{x})$$

$$V(\vec{x}) * \psi(\vec{x}) = V(\vec{x}) \psi(\vec{x}) + \int dk \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{2}\right)^n (k \cdot \hat{P})^n e^{(ikx)} \hat{V}(k) \psi(\vec{x})$$

$$V(\vec{x}) * \psi(\vec{x}) = V(\vec{x}) \psi(\vec{x}) + \int dk \left(e^{(-\frac{i}{2}k \cdot \hat{P})} - 1 \right) e^{(ikx)} \hat{V}(k) \psi(\vec{x})$$

$$V(\vec{x}) * \psi(\vec{x}) = V(\vec{x}) \psi(\vec{x}) + \int dk e^{(-\frac{i}{2}\hat{P} + ikx)} \hat{V}(k) \psi(\vec{x}) - \int dk e^{(ikx)} \hat{V}(k) \psi(\vec{x})$$

$$V(\vec{x}) * \psi(\vec{x}) = V(\vec{x}) \psi(\vec{x}) + \int dk e^{i(x - \frac{\hat{P}}{2})k} \hat{V}(k) \psi(\vec{x}) - V(\vec{x}) \psi(\vec{x})$$

$$V(\vec{x}) * \psi(\vec{x}) = \int dk e^{ik(x - \frac{\hat{P}}{2})} \hat{V}(k) \psi(\vec{x})$$

$$V(\vec{x}) * \psi(\vec{x}) = V\left(x - \frac{\hat{P}}{2}\right) \psi(\vec{x}) \quad (2,37)$$

En résumé, en mécanique quantique non commutative on peut utiliser l'équation de Schrödinger avec la multiplication et les coordonnées de l'espace- temps ordinaires à condition de décaler l'argument de potentiel d'une quantité égale à $\frac{\hat{P}}{2}$.

6. Hamiltonien non commutatif :

L'Hamiltonien non relativiste représentant l'atome d'hydrogène a l'expression suivante :

$$H(x, p) \rightarrow H(\hat{x}, \hat{p}) \quad (2,38)$$

$$H(\hat{x}, \hat{p}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{x}) \quad (2,39)$$

Est le potentiel central créé par le proton de charge + |q| (le potentiel de Coulomb)

$$V(r) = -\frac{Ze}{r} \quad (2,40)$$

En termes de coordonnées non commutatives on écrit [23, 29,31]:

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} = -\frac{Ze^2}{\sqrt{\hat{x}_i \hat{x}_i}} \quad (2,41)$$

Nous utilisons maintenant le nouveau système de coordonnées :

$$x_i = \hat{x}_i + \frac{\theta_{ij}}{2\hbar} \hat{P}_j \quad (2,42)$$

$$P_i = \hat{P}_j \quad (2,43)$$

Avec x_i, P_i (sans chapeau) désigne les coordonnées et les moments commutatifs

Satisfaisant les commutateurs suivants : (1.1)

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0 \quad \text{et} \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar$$

Dans le nouveau système de coordonnées, l'énergie cinétique $\frac{P^2}{2m}$ reste invariante, par contre le potentiel coulombien devient : [17, 30, 33]

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{Ze^2}{\sqrt{\hat{x}_i \cdot \hat{x}_i}} = -\frac{Ze^2}{\sqrt{\left(x_i - \frac{\theta_{ij}}{2\hbar} \hat{P}_j\right) \left(x_i - \frac{\theta_{ik}}{2\hbar} \hat{P}_k\right)}}$$

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{Ze^2}{\sqrt{\left(x_i x_i - \frac{x_i}{\hbar} \theta_{ij} \hat{P}_j + O(\theta^2)\right)}}$$

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{Ze^2}{\sqrt{r^2 - \frac{x_i}{\hbar} \theta_{ij} \hat{P}_j + O(\theta^2)}}$$

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{Ze^2}{r \sqrt{1 - \frac{x_i}{\hbar r^2} \theta_{ij} \hat{P}_j + O(\theta^2)}}$$

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{Ze^2}{r} \left(1 - \frac{x_i}{\hbar r^2} \theta_{ij} \hat{P}_j + O(\theta^2)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{Ze^2}{r} \left(1 + \frac{x_i}{2\hbar r^2} \theta_{ij} \hat{P}_j + O(\theta^2)\right)$$

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{Ze^2}{r} - \frac{Ze^2}{2\hbar r^3} x_i \theta_{ij} \hat{P}_j + O(\theta^2) \quad (2,44)$$

Posons : [23]

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \theta_k \quad \text{et} \quad \begin{cases} \epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij} \\ \epsilon_{ikj} = \epsilon_{kji} = \epsilon_{jik} \end{cases} \quad (2,45)$$

Donc : (2,44) à l'aide de (2,44) devient :

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{eZ^2}{r} - \frac{Ze^2}{4\hbar r^3} \sum x_i \epsilon_{ijk} \theta_k \hat{P}_j$$

on encore :

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{Ze^2}{r} - \frac{Ze^2}{4\hbar} \frac{(\vec{L} \cdot \vec{\theta})}{r^3} + O(\theta^2) \quad (2,46)$$

Donc l'opérateur Hamiltonien dans l'espace non commutative devient :

$$\begin{aligned} H(\hat{x}, \hat{p}) &= \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \\ &= \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} - \frac{Ze^2}{4\hbar} \frac{(\vec{L} \cdot \vec{\theta})}{r^3} \end{aligned} \quad (2,47)$$

D'après cette expression on remarque que le non commutativité de l'espace - temps est introduit sous forme d'une perturbation.

Chapitre 4 : Solution de L'équation de Schrödinger

Pour

les Atomes Hydrogénéoïde

1. Introduction

Un atome Hydrogénoïde est un atome constitué d'un noyau et d'un seul électron à l'image de l'atome d'hydrogène qui est l'élément chimique le plus simple. Son étude permet de comprendre les principes de la structure atomique.

Nous nous proposons dans cette section d'étudier le mouvement d'un électron dans le champ d'un noyau de charge $+Ze$. Le cas $Z = 1$ correspond à l'atome d'hydrogène proprement dit, $Z = 2$ à l'hélium ionisé une fois He^+ , $Z = 3$ au Li^{++} , $Z = 4$ au Be^{+++} etc. En outre, le cas de valeurs de Z élevées pour resservir à étudier, en première approximation, le mouvement des électrons intérieurs (K) des atomes lourds, soit faible par la présence des électrons de couches plus élevées. Enfin, les atomes alcalins (Li, Na, ...) pour lesquels l'électron de la couche extérieure se trouve sur un état $|s\rangle$ pourrait également être décrits à l'aide du modèle Hydrogénoïde.

2. Hamiltonien du système

Le système étudié a priori comme un problème à deux corps : le noyau et l'électron. Dans le cas de l'atome d'hydrogène on est en présence de deux particules : l'électron et le proton dont la masse est très supérieure à celle de l'électron. Lorsque l'interaction entre deux particules ne dépend que de la distance qui les sépare, on peut réduire l'étude du système à celle d'un problème à un corps dans le référentiel du centre de masse du système, le corps étant alors une particule fictive, de masse égale à la masse réduite[32] :

$$\mu = \frac{mm_p}{m + m_p} \quad (4,1)$$

La masse du proton m_p vaut environ 1836 fois celle de l'électron, le centre de masse est très proche de celui du proton la masse réduite vaut presque celle de l'électron et on peut donc considérer que l'électron évolue à la distance r d'un proton pratiquement au repos. C'est l'approximation généralement employée dans l'étude de l'atome Hydrogénoïde.

Nous allons donc étudier les états liés d'un électron dans le champ coulombien du noyau. L'énergie potentielle de l'électron dans le système est donnée par :

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} = -\frac{Z\hbar^2}{r} \quad (4,2)$$

L'Hamiltonien du système, qui a pour expression

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r)$$

Ne dépend pas explicitement du temps, puisque $V(r)$ n'en dépend pas, et sa valeur moyenne est donc une constante du mouvement. Nous allons donc chercher les états stationnaires caractérisés par l'énergie E , et décrits par la fonction d'onde [32]

$$\psi(r) = \varphi(r)e^{-\frac{i}{\hbar^2}Et} \quad (4,3)$$

3. Atome Hydrogéoïde dans L'espace Non commutative

Pour résoudre de l'équation de Schrödinger pour les atomes Hydrogéoïde en introduisant dans l'équation de Schrödinger un potentiel de type muoniques [33 ,34],

Les atome muoniques sont des atomes hydrogéoïde, peuvent être formés dans lesquels un muon est lié à un noyau de charge Ze ; de tels états sont appelés des atomes muoniques. Les muons sont des électrons lourds n qu'ils sont la même charge électrique e et spin $\frac{1}{2}$ mais sont environ 207fois plus lourds, le potentiel donc est [33, 34] :

$$V^c(r) = \begin{cases} -\frac{Ze^2}{r} & , \quad r > R \\ -\frac{Ze^2}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) & , \quad r < R \end{cases} \quad (4.4)$$

En représentant l' Hamiltonien sous la forme :

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + V^c(r) \quad (4.5)$$

Ou

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{Ze^2}{r} \quad (4.6)$$

L'Hamiltonien d'un atome Hydrogénéé, on assimile V à une perturbation. Il est manifeste que [34]

$$V^c(r) = \begin{cases} 0 & , \quad r > R \\ \frac{e^2}{r} - \frac{Ze^2}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) & , \quad r < R \end{cases} \quad (4.7)$$

Les fonctions propre .de l'Hamiltonien \hat{H}_0 sont bien connues [34]. En particulier, la fonction d'onde. D'état fondamental est de la forme ($a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \approx 0.53 \times 10^{-8} \text{cm}$)

$$\psi_0(r) = \left(\frac{Z^3}{\pi a_0^3} \right)^{1/2} e^{-Zr/a_0} \quad (4.8)$$

Et

$$E_0^{(0)} = -\frac{m_e(Ze^2)^2}{2\hbar^2} \quad (4.9)$$

Le déplacement de niveau énergétique d'état fondamental du fait de la non-punctualité du noyau (autrement dit ,sous l'action de la perturbation $V(r)$) vaut

$$\begin{aligned} \Delta E_0 &= E_0^{(1)} = \int V(r) |\psi_0(r)|^2 d^3r \\ \Delta E_0 &= Ze^2 |\psi_0(r)|^2 \int_0^R \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2r} + \frac{r^2}{2R^3} \right) 4\pi r^2 d^3r \\ \Delta E_0 &= \frac{2\pi}{5} Ze^2 R^2 |\psi_0(r)|^2 \\ \Delta E_0 &= \frac{2}{5} Z^4 \left(\frac{R}{a_0} \right)^2 \frac{e^2}{a_0} \end{aligned} \quad (4.10)$$

(Avec le calcul de l'intégrale on a tenu compte du fait que la fonction d'onde $\psi_0(r)$ demeure, au sien du noyon $r \leq R \sim \gg (10^{-12} - 10^{-13}) \text{cm}$, presque constante , et c 'est pour cette raison qu'on a sorti la grandeur $|\psi_0(r)|^2 \approx |\psi_0(0)|^2$ de sous le signe de l'intégrale).

La valeur numérique du rapport

$$\left| \frac{E_0^{(1)}}{E_0^{(0)}} \right| = \frac{4}{5} Z^2 \left(\frac{R}{a_0} \right)^2 \approx (8 \cdot 10^{-10}) Z^{8/3} \quad (4.11)$$

Potentielle muoniques dans l'espace non commutative

$$V^{NC}(r) = \begin{cases} 0 & , \quad r > R \\ \frac{Ze^2}{r} - \frac{Ze^2}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) & , \quad r < R \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} V^{NC}(\hat{r}) &= \frac{Ze^2}{\hat{r}} - \frac{3Ze^2}{2R} + \frac{Ze^2}{2R^3} \hat{r}^2 \\ &= \frac{Ze^2}{\sqrt{\hat{x}_i \hat{x}_i}} - \frac{3Ze^2}{2R} + \frac{Ze^2}{2R^3} \hat{x}_i \hat{x}_i \end{aligned} \quad (4.13)$$

En remplace $\hat{x}_i = x_i + \frac{\theta_{ij}}{2\hbar} \hat{P}_j$ dans (4.13) :

$$\begin{aligned} V^{NC}(\hat{r}) &= \frac{Ze^2}{\sqrt{\left(x_i + \frac{\theta_{ij}}{2\hbar} P_j\right) \left(x_i + \frac{\theta_{ij}}{2\hbar} P_j\right)}} - \frac{3Ze^2}{2R} + \frac{Ze^2}{2R^3} \left(x_i + \frac{\theta_{ij}}{2\hbar} P_j\right) \left(x_i + \frac{\theta_{ij}}{2\hbar} P_j\right) \\ &= \frac{Ze^2}{\sqrt{\left(x_i x_i - \frac{\theta_{ij}}{\hbar} P_j x_i + O(\theta^2)\right)}} - \frac{3Ze^2}{2R} + \frac{Ze^2}{2R^3} \left(x_i x_i - \frac{\theta_{ij}}{\hbar} P_j x_i + O(\theta^2)\right) \\ &= \frac{Ze^2}{r} \left(1 - \frac{\theta_{ij}}{2\hbar r^2} x_i P_j + O(\theta^2) \right) - \frac{3Ze^2}{2R} + \frac{Ze^2}{2R^3} \left(r^2 - \frac{\theta_{ij}}{\hbar} x_i P_j + O(\theta^2) \right) \\ &= \frac{Ze^2}{r} - \frac{3Ze^2}{2R} + \frac{Ze^2}{2R^3} r^2 + \frac{Ze^2}{4\hbar r^3} \sum \epsilon_{ijk} \theta_k x_i \hat{P}_j - \frac{Ze^2}{4\hbar R^3} \sum \epsilon_{ijk} \theta_k x_i \hat{P}_j \end{aligned}$$

Puisque : $\theta_{ij} = \epsilon_{ijk} \frac{\theta_{ijk}}{2}$

$$\begin{aligned} \sum \epsilon_{ijk} \theta_k x_i P_j &= (x_2 P_3 - x_3 P_2) \theta_1 + (x_3 P_1 - x_1 P_3) \theta_2 + (x_1 P_2 - x_2 P_1) \theta_3 \\ &= L_1 \theta_1 + L_1 \theta_2 + L_1 \theta_3 \\ &= \vec{L} \vec{\theta} \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} V^{NC}(\hat{r}) &= \frac{Ze^2}{r} - \frac{3Ze^2}{2R} + \frac{Ze^2}{2R^3} r^2 + \frac{Ze^2}{4\hbar} \vec{L} \vec{\theta} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) \\ &= \frac{Ze^2}{r} + \frac{Ze^2}{2R} \left(\frac{r^2}{R^2} - 3 \right) + \frac{Ze^2}{4\hbar} \vec{L} \vec{\theta} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) \end{aligned}$$

Donc :

$$V^{NC}(\hat{r}) = V^C(r) + \frac{Ze^2}{4\hbar} \vec{L} \vec{\theta} \quad (4.14)$$

Donc on put écrire opérateur de Hamiltonien dans espace NC comme suivent :

$$\begin{aligned} \hat{H} &= H_0 + V^{NC}(\hat{r}) = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} - \frac{Ze^2}{r} + V^{NC}(\hat{r}) \\ &= \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + \frac{Ze^2}{2R} \left(\frac{r^2}{R^2} - 3 \right) + \frac{Ze^2}{4\hbar} \vec{L} \vec{\theta} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$= \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + \frac{Ze^2}{2R} \left(\frac{r^2}{R^2} - 3 \right) + W \quad (4.16)$$

avec

$$W = \frac{Ze^2}{4\hbar} \vec{L} \vec{\theta} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) \quad (4.17)$$

Donc l'équation Schrödinger dans l'espace non commutative :

$$\hat{H}\psi(\vec{r}, \theta, \varphi, t) = E\psi(\vec{r}, \theta, \varphi, t) \quad (4.18)$$

En remplace l'équation (4.12) et(4.15) dans (4.18):

$$\begin{aligned} \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\hat{L}^2}{r^2} \right) + \frac{Ze^2}{2R} \left(\frac{r^2}{R^2} - 3 \right) + \frac{Ze^2}{4\hbar} \vec{L} \vec{\theta} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) \right] \psi(\vec{r}, \theta, \varphi, t) = \\ E \psi(\vec{r}, \theta, \varphi, t) \end{aligned} \quad (4.19).$$

Considérant $[\hat{H}, \hat{L}_z] = 0$, par conséquent, suivant le principe fondamental de la mécanique quantique, ces opérateurs ont une base commune des vecteurs propres les fonctions propres de $\hat{H}_k(r, \varphi)$ dépendant de ont la forme :

$$\psi(\vec{r}, \theta, \varphi, t) = R_l(r) Y_{l, m_l}(\theta, \varphi) \quad (4.20)$$

Où $R_l(r)$ et $Y_{l, m_l}(\theta, \varphi)$ constituent la partie radiale et la partie angulaire de la fonction d'onde respectivement.

4. Etude la partie angulaire

L'étude de la partie angulaire pour les atomes Hydrogéoïde est le même que l'étude de la partie angulaire pour l'atome hydrogène dans le cas ordinaire (on a vue dans chapitre 2).

5. Etude la partie radial

En remplace l'équation (4.20) et on projecté la fonction harmonique sur l'équation (4.19) on trouve :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{l(l+1)}{r^2} - r \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(\frac{Ze^2}{2R} \left(\frac{r^2}{R^2} - 3 \right) + \frac{Ze^2 m \theta_k}{4} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) - E \right) \right] R_l(r) = 0 \quad (4.22)$$

On pose:

$$U(r) = r R_l(r) \quad (4.23)$$

On trouve:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} U(r) - \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{Ze^2}{2R} \left(\frac{r^2}{R^2} - 3 \right) + \frac{Ze^2 m \theta_k}{4} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3} \right) - E \right) U(r) = 0 \quad (4.24)$$

Pour résoudre l'équation différentielle dernier ont recherche les comportements asymptotique de $U(r)$

1. r tend vers l'infini ($r \rightarrow \infty$)

Il suffit de négliger dans (4.24) les termes en $\frac{l(l+1)}{r^2}$ et $\frac{Ze^2 m \theta_k}{4r^3}$, la solution est alors immédiate :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} U(r) - \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(\frac{Ze^2}{2R} \left(\frac{r^2}{R^2} - 3 \right) + \frac{Ze^2 m \theta_k}{4R^3} - E \right) U(r) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} U(r) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(\frac{Ze^2}{2R} \left(3 - \frac{m \theta_k}{2R^2} \right) + E - \frac{Ze^2}{2R^3} r^2 \right) U(r) = 0 \quad (4.25)$$

On pose :

$$E_0 = \frac{Ze^2}{2R} \left(3 - \frac{m \theta_k}{2R^2} \right) + E \text{ et } k = \frac{Ze^2}{R^3}$$

Alors :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} U(r) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E_0 - \frac{k}{2} r^2 \right) U(r) = 0 \quad (4.26)$$

La solution pour cette immédiate à partir des résultats obtenu pour oscillateur harmonique unidimensionnel.

Si l'on définit $\alpha = \left(\frac{2\mu}{\hbar^2} \right)^{1/4}$ et $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$

On a, en ne tenant pas compte de facteur de normalisation

$$U(r)_n = e^{-\frac{\alpha^2 r^2}{2}} H_n(\alpha r) \quad (4.27)$$

Correspondant à

$$E_n = \left(n_n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \quad (4.28)$$

Où

$$E_n = E_\theta \quad (4.29)$$

n_n ,Étant de entier positif ou nul et H les polynômes d' Hermite, d'où (à un facteur prés),

$$\psi = e^{-\frac{\alpha^2 r^2}{2}} H_n(\alpha r) \quad (4.30)$$

2. Dans l'autre limite asymptotique (r tend vers zéro) l'équation différentielle

accepte une singularité essentielle ($r = 0$) et la solution diverge (McLauren). Cette limite fera l'objet d'une etude prochaine eneffet:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} U(r) - \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(\frac{Ze^2 m \theta_k}{4r^3} \right) U(r) = 0 \quad (4.31)$$

Conclusion :

Dans notre travail est la résolution de l'équation de Schrödinger pour les atomes hydrogénoïde de type muoniques dans le formalisme de la géométrie de l'espace non commutative. Cette non commutativité a été considéré comme une perturbation indépendante du temps. Elle a conduit à un simple déplacement de vecteur de position \mathbf{x}_i à un vecteur équivalent $\hat{\mathbf{x}}$ défini par la relation $:\hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_i + \frac{\theta_{ij}}{2\hbar} \hat{\mathbf{P}}_j$ qui dépend de paramètre du non commutativité θ . On montre que le comportement asymptotique de l'atome hydrogénoïde loin du noyau est analogue du comportement asymptotique de l'oscillateur harmonique.

Référence

Références

- [1] MThomas KRAJEWSKI, non-commutative geometry and fundament interaction, Ph.D. Thesis, **math-ph/9903047**.
- [2] A. Connes, *nonDifferentialGeometry*, Publ. Math. I.H.E.S. 62 257-360(1985).
- [3] A. Connes, *noncommutativeGeometryYear 2000*, **math.QA/0011193**.
- [4] W. Heisenberg : "Letter to R. Peierls (1930), in 'Wolfgang Pauli, Scientific Correspondence', Vol. III, p.15, Ed. K. Von Meyenn", (Springer Verlag1985)
- [5] H.S. Snyder, "Quantizedspace-time", Phys.Rev., 71, 38 (1947)
- [06] C. Tannoudji, F. Laloë Mécanique Quantique, université de Paris 6. (1973).
- [07] Prof. Minh Quang TRAN, Cours Physique générale IV, 2009, <https://crppwww.epfl.ch/phsgen4/>
- [08] E. Kartheuser, Elements de mécaniquequantique , Tome 2, cour à département physique l'université de Liège.
- [09] P.J. Mulders, Quantum Mechanics, Lectures given in the academic year 2005-2006
- [10] Patrick Chaquin, Cours d'atomique, liaison chimique et spectroscopie, université pierre et curie. [http:// www.lct.jussieu.fr/pagesperso/ Chaquin](http://www.lct.jussieu.fr/pagesperso/Chaquin)
- [11] B. Cagnac, Physique atomique, tome 1. Expériences et principes fondamentaux, Dunod université
- [12] Claude ASLANGUL, Applications de la Mécanique Quantique, université pierre et curie, 2005-2006.
- [13] Alexandre Blais, cours Mécanique quantique II, Université de Sherbrooke, 2008
- [14] Claude Aslangul, Mécanique quantique _ Tome 2, Développements et applications à basse énergie, De Boeck Supérieur (2008)
- [15] David j. Griffiths, introduction to Quantum mechanics, Pearson Education International, 1995
- [16] Thierry Masson Géométrie non commutative et applications à la théorie des champs Thèse de Doctorat Université Paris 11, (1996).
- [17] L. Mezincescu, Star operation in Quantum Mechanics, arXiv:hep-th/0007046 v2 21 Jul 2000

- [18] Matthieu Lefrançois Théorie des champs topologiques et mécanique quantique en espace non-commutatif Thèse de Doctorat Soutenue le 5 décembre 2005 à l'Université Claude Bernard Lyon-I
- [19] A. Micu and M. M. Sheikh-Jabbari, Non commutative Φ^4 Theory at Two Loops, JHEP 0101 (2001) 025, **hep-th/ 0008057**.
- [20] Bose, S. K., Exact solution of non-relativistic Schrödinger equation for certain central physical potentials, NuovoCimento B. 113 (1996) 299- 328
- [21] L. Buragohain and S. A. S .Ahmed, Exactly solvable quantum mechanical systems generated from the anharmonic potentials, Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 4, No. 1, 79-83 (2010).
- [22] A. Niknam, A. A. Rajab and M. Solaimani, Solutions of D-dimensional Schrödinger equation for Woods-Saxon potential with spin-orbit, coulomb and centrifugal terms through a new hybrid numerical fitting Nikiforov-Uvarov method, J Theor App Phys, (2015) DOI 10.1007/s40094-0150201-9.
- [23] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, Hydrogen Atom Spectrum and the Lamb Shift in Non-commutative QED, Phys. Rev. Lett. 86(2001) 2716, hep- .th/0010175
- [24] Cosmas K. Zachos, David B. Fairlie, Thomas L. Curtright, "Quantum Mechanics In Phase Space", World Scientific Series in 20th Century Physics, 34
- [25] J. L. Basidevant, Mécanique Quantique, ellipses, ISBN 2-7298-8614-1 (1986), Paris, France.
- [26] E. Elbaz, Quantum, The quantum theory of particles, Fields, and Cosmology, Springere, ISBN 3-540-62093-1 (1995), New York, USA.
- [27] François Gieres, Diverses Approches de la Mécanique Quantique sur Espace Non-Commutatif, Université Claude Bernard Lyon I . <http://www.ipnl.in2p3.fr/>
- [28] Begui Mohamede, calcul des éléments de matrice dipolaire dans une Géométrie Non Commutative, le diplôme de Magister de UNIVERSITE D'EL-OUDE, 2013
- [29] Nawel Rezaiki, L'Atome d'Hydrogène dans le Formalisme de la Géométrie Non Commutative, le diplôme de Magister de UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE,
- [30] Behrouz Mirza et al., Relativistic Oscillators in a Non-commutative space in a Magnetic field, Commun. Theor.Phys. 55 (2011) 405-409.

Références

- [31] DEFFAF ABLA, Solution de l'équation de Schrödinger dans l'espace non Commutative avec plusieurs types d'interactions, le diplôme de Master, Université Mohamed Boudiaf - M'sila, 2016
- [32] Sylvain Reynal, Le cours de physique de l'ENSEA-Physique quantique (semestre 2)-, 2012-2013, <http://www-reynal.ensea.fr/teaching/quantum/>
- [33] V. Galitski, B. Karnakov, problèmes de mécanique quantique, Mir Publishers, 1985
- [34] Richard W. Robinett, Quantum Mechanics, Classical Results, Modern Systems, and Visualized Examples, Second Edition, Oxford University Press, 2006
- [35] ZeppGérard, mécanique quantique, Vuibert, 1975

ملخص

تطرقنا في هذا العمل إلى دراسة حلول معادلة شرودينغر لذرات أشباه الهيدروجين في الفضاء غير تبديلي، وجدنا أن الحلول التقريبية لما r تؤول إلى مالا نهاية تكون مشابهة للحلول التقريبية للهاز توافق .

الكلمات المفتاحية: معادلة شرودينغر، ذرة الهيدروجين ، الفضاء غير تبديلي ، الكمون الكولومبي

Abstract

In this work, we have studied the solutions of the Schrödinger equation for hydrogen-type of atoms (the Hydrogéoïde atoms) in non-commutative space. We show that the asymptotic behavior of the Hydrogéoïde atoms is analogous to the asymptotic behavior of the harmonic oscillator for large distances.

Keywords: Schrödinger equation, Hydrogen atom, Hydrogenoïde atom, Colombian potential, non-commutative space.

Résumé

Dans notre travail, nous avons étudié les solutions de l'équation de Schrödinger pour les atomes de type hydrogène (l'atome Hydrogéoïde) dans l' espace non commutative, On montre que le comportement asymptotique de l'atome Hydrogéoïde est analogue du comportement asymptotique de l'oscillateur harmonique

Mots-clés: équation de Schrödinger, atome Hydrogène, atome Hydrogéoïde, potentiel colombien, espace non commutative.