



UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Option : Mathématiques Appliquées et Fondamentales

Spécialité : Mathématiques

Par

BENIA Sana

Sujet

PROPRIETES DES OPERATEURS COMPACTS SYMETRIQUES

Soutenu le : 18 / 06 / 2014

devant le jury compose de :

Président	A. GASMI	Pr.	Univ. M'sila
Rapporteur	M. NADIR	Pr.	Univ. M'sila
Examineur	B. GUEGUI	M. A.A	Univ. M'sila
Examineur	T. HERAIZ	M.A.B	Univ. M'sila

Promotion : 2013/2014

Table des matières

Introduction	1
1 Les opérateurs compacts	2
1.1 Définitions	2
1.2 Théorème (Arzela-Ascoli)	3
1.3 Théorie sur les opérateurs compacts	5
1.4 Opérateur adjoints	7
1.5 Théorie spectrale	12
1.5.1 Spectre des opérateurs bornés	12
1.5.2 Spectre des opérateurs compacts	14
2 Propriétés des opérateurs compacts symétriques	17
2.1 Opérateurs isométrique, normaux, unitaires, positifs	17
2.2 Opérateurs auto-adjoints (Hermitien)	17
2.3 Etude spectrale d'un opérateur compact auto-adjoint	19
2.4 Diagonalisation des opérateurs compacts auto-adjoints	23
Conclusion	26
Bibliographie	27

Introduction

Parmi les opérateurs continus dans un espace de Hilbert, on peut distinguer une classe importante d'opérateur, dont les propriétés sont les plus proches de celles des opérateurs linéaire dans un espace de dimension finie. C'est la classe des opérateurs compact, appelés encore opérateur complètement continus.

Le travail de ce mémoire est l'étude des propriétés et des notions fondamentales des opérateurs compact, auto- adjoints et chercher les propriétés des opérateurs compact auto-adjoint.

Notre mémoire est composé de deux chapitres qui sont les suivants :

Le premier chapitre concerne les opérateurs compacts et tout ce qui s'en suit, comme je l'ai mentionné le théorème d'Arzela Ascoli et l'étude spectrale des opérateurs compacts.

Nous étudierons dans le deuxième chapitre propriétés des opérateurs compacts symétriques et les notions des opérateurs isométriques, normaux, unitaire, positifs et le spectre d'un opérateur compact auto- adjoint, comme j'ai mentionné l'étude de la diagonalisation des opérateurs compacts auto- adjoint.

Conclusion

Les opérateurs compacts jouent un rôle très important pour adapter les théories de diagonalisation des matrices ou bien résolution des systèmes linéaires en dimension finie parce qu'ils sont assez proches par leurs propriétés de ceux de dimension finie d'après que l'opérateur compact est une limite d'une suite d'opérateurs des rangs finis, et avec la propriété de auto-adjoint on trouve beaucoup de résultats concernant au spectre d'un opérateur linéaire. Ce dernier est réel dans le cas d'un opérateur auto-adjoint.

© A. BOUCOUTALLA, maître de conférences en mathématiques, Université de M'pila, 2013
titre de magistère, Université de M'pila, 2013

Bibliographie

- [1] M. NADIR, cours d'analyse fonctionnelle, université de M'sila, 2014.
- [2] H. CHEBLI, analyse Hilbertienne, centre de publication universitaire tunis, 2001.
- [3] J.PIERRE, mathématiques Analyse L3, sous la direction de Marco, juin 2009.
- [4] J.CONWAY, théorie des opérateurs:M1 Mathématiques, université de la Réunion; Guillaume AUBRUN, juin 2012.
- [5] A. BOUGOUTATIA, relations entre opérateurs compacts et opérateurs normaux, mémoire de magistère, université de M'sila, 2013.