جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

RÉPUBLIQUE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE D'ALGERIE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté de mathématiques et d'informatique

Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Théme

La théorie spectrale des opérateurs

---

l'étudiante: **Dahmani Fatima Ez zahraa**

Membres dejury :

Abdelhamid TALLEB	MCA,	Université de M'sila	**Président**.
Ahmed MAZOUZ	MCA,	Université of M'sila	**Encadreur.**
Khaled HAMIDI	MCA,	Université of M'sila	**Examinateur.**
abdelaziz HALLEL	MCA,	Université of M'sila	**Examinateur.**

Année universitaire 2024/2025

Remerciement

Au seuil de ce travail, fruit de longs mois d'efforts et de persévérance, nos pensées et notre gratitude se tournent humblement vers Dieu le Tout-Puissant, qui nous a accordé la santé, la force et la volonté nécessaires pour mener cette aventure intellectuelle à son termes. Nous exprimons notre profonde gratitude à notre directeur de mémoire, Dr. Ahmed MAZOUZ, dont la direction éclairée, la rigueur scientifique et la disponibilité constante ont constitué une boussole essentielle face aux complexités de cette recherche. Nos remerciements chaleureux s'adressent également aux membres du jury. Nous sommes particulièrement reconnaissantes envers le président, Dr. abdelhamid TELLEB, pour l'honneur de sa présidence et pour les échanges enrichissants qui ont souligné la dimension humaine de la science. Nous remercions également l'examinateur, Dr. Khaled HAMIDI,et Dr.abdelaziz HELLAL, dont l'évaluation attentive et les critiques constructives ont significativement contribué à parfaire ce travail. ,Enfin nous remercions l'ensemble du personnel administratif et enseignant du département pour leur contribution, directe ou indirecte, à la réussite de notre parcours universitaire.

Dedication

À mes parents, dont le soutien et l'encouragement constants ont été la lumière qui a guidé mon chemin tout au long de ce voyage. Vos sacrifices et votre amour ont rendu cet accomplissement possible. À mon cher partenaire, pour sa patience, sa compréhension et son soutien indéfectible durant les hauts et les bas de cette aventure académique. Ta présence a été une source de force pour moi, et je suis reconnaissant du soutien constant que tu as apporté. Je dédie ce souvenir à ma famille, dont la foi en mes capacités a été une force motrice. Votre amour et votre encouragement ont été les fondements sur lesquels j'ai bâti mon succès académique. Cet accomplissement est un témoignage du soutien et de l'amour collectifs de mes proches, et j'exprime ma profonde gratitude à chacun d'entre vous.

[Dahmani Fatima]

Contents

Notation

$\mathcal{L}(E;F)$: L'ensemble des applications linéaires de E dans F.

$\mathcal{C}([a;b])$: L'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[a;b]$.

$\ker(A)$: Le noyau de l'opérateur A.

$\mathrm{Im}(A)$: L'image de l'opérateur A.

A^{-1} : L'inverse de l'opérateur A.

$\overline{A}$: La fermeture de l'opérateur A.

I : L'opérateur identité.

A^* : L'adjoint de l'opérateur A.

$D(A)$: Le domaine de l'opérateur non borné A.

$\mathrm{Gr}(A)$ ou $\Gamma(A)$: Le graphe de A.

$\rho(A)$: L'ensemble résolvant de A.

$R(\lambda, A)$: Le résolvant de A.

$\sigma(A)$: Le spectre de A.

$\sigma_p(A)$: Le spectre ponctuel de A.

$\sigma_c(A)$: Le spectre continu de A.

$\sigma_r(A)$: Le spectre résiduel de A.

$\langle h, i \rangle$: Le produit scalaire.

$\|k\|$: La norme.

$\mathcal{K}(E)$ ou $\mathcal{K}(E;F)$: L'espace des opérateurs compacts de E,

ou de E dans F.

H^2 : L'espace de Sobolev.

Δ, ∇^2 : Le Laplacien.

$\mathcal{C}^1$) sur $[a;b]$.

Introduction

Ce Travail est essentiellement centré sur le théme de la théorie spectrale des opérateurs.
On donne d'abord, un bref apercu sur cette théorie. La théorie spectrale est une théorie qui étend à des opérateurs définis sur des espaces fonctionnels généraux la théorie élémentaire des valeurs propres et des vecteurs propres de matrices. Ces idées venaient au départ du développement de l'algébre linéaire,mais elles sont aussi liées à l'étude des fonctions analytiques, car les propriétés spectrales d'un opérateur sont liées à celles de fonctions analytiques sur les valeurs de son spectre.

La théorie spectrale a été formulée de trois maniéres différentes.Les développements ultérieurs de la théorie des espaces de Hilbert et de la théorie spectral d'unique endomorphisme normal accompagnérent le développement de la physique quantique, enparticulier dans les travaux de von Neumann. Cette théorie se développa pour inclure celle des algébres de Banach, et des constructions plus abstraites. La différence entre ces approches peut mieux se voir dans le cas de l'analyse de Fourier. On peut aussi étudier
les propriétés spectrales d'opérateurs sur des espaces de Banach.En particulier, les opérateurs compacts sur ces espaces ont des propriétés spectrales analogues à celles des matrices.
particulier à en déterminer des propriétés spectrales spécifiques. Il se décline en trois chapitres.

Le premier chapitre porte sur les opérateurs linéaires. On y étudie les opérateurs linéaires bornés. Ce chapitre rassemble des concepts sur le spectre,les valeurs et vecteurs propres qui interviennent aux chapitres suivants.Il permet aussi d'aborder d'importantes notions pour la suite telles que l'inverse,l'adjoint d'un opérateur, et l'opérateur auto-adjoint, suivis de quelques exemples.à cela, s'ajoute l'étude des propriétés spectrale de chacun de ce opérateurs. Cette derniére consiste à mettre en relation les propriétés spectrales de ces opérateurs avec l'étude des propriétés des espaces orthogonaux.

le deuxième chapitre Théorie spectrale des opérateurs Ce chapitre est consacré à l'étude de la théorie spectrale des opérateurs linéaires dans le cadre des espaces de Banach.
Il s'agit d'une généralisation du concept classique de valeurs propres et de vecteurs propres des

matrices aux opérateurs définis sur des espaces fonctionnels de dimension infinie.Le spectre d'un opérateur linéaire borné $T \in \mathcal{L}(E)$, noté $\sigma(T)$, est défini comme l'ensemble
des scalaires $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que l'opérateur $T - \lambda I$ n'est pas inversible.
Le chapitre examine ensuite le cas particulier des opérateurs compacts, qui possèdent un spectre discrètement structuré, avec zéro comme seul point d'accumulation possible. On y traite notamment : du théorème de Riesz-Schauder, décrivant la structure du spectre des opérateurs compacts, de l'opérateur intégral de Volterra comme exemple classique,de la représentation spectrale, permettant de relier un opérateur à ses propriétés spectrales via ses fonctions propres. Ce chapitre fournit ainsi les outils nécessaires à l'analyse des opérateurs dans des contextes fonctionnels, essentiels en analyse fonctionnelle et en physique mathématique.

Le troisiéme chapitre a pour objectif de généraliser les résultats de décomposition
spectrale en dimension infinie. Dans le cas hilbertien,le résultat est connu en dimension finie, on en explore d'autres aspects en dimension infinie.Une partie est consacrée l'étude des séries de Fourier. Les questions qui se posent alors sont : Sous quelles conditions générales ce formalisme s'applique-t-il,et quels sont les opérateurs qui peuvent ainsi etre développés en série?Toute fonction peut-elle ˆetre exprimée en termes de fonctions propres (autrement dit, les fonctions propres forment-elles une base)? Pour répondre à ces questions, on a considéré deux exemples. Il s'agit en particulier de parler dans l'un des deux de la fameuse équation de la chaleur sur un domaine borné.

Chapter 1

Operateurs lineaires

Au sein de ce premier chapitre, on propose des notions générales sur les opérateurs.
Une grande partie de ce chapitre est inspiree de [12]

1.1 Définitions et exemples

Définition .1 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$*
On dit que l'application ou l'opérateur $A : E \to F$ est linéaire si :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \begin{cases} A(x+y) = Ax + Ay \\ A(\lambda x) = \lambda A x \end{cases}$$

c'est un homomorphisme d'espaces vectoriels, et l'on a $A(0) = 0$

Cas .1 *(Cas particuliers)*

1. *Si A est bijectif, alors A est un isomorphisme.*
2. *Si $E = F$ alors A est un endomorphisme de E.*
3. *Si A est un isomorphisme de E dans E, alors A est un automorphisme.*
4. *Si $F = \mathbb{K}$, alors A est une forme linéaire sur E.*
   Quand E est un ensemble de fonctions, A est souvent appelé une fonctionnelle linéaire

Example .1 *Dans l'espace usuel, les rotations, les homothéties, les similitudes et les projections sont des applications linéaires Dans l'espace usuel, les rotations, les homothéties, les similitudes et les projections sont des applications linéaires.*

Définition .2 *Soit $A : E \to F$ un opérateur linéaire. On définit :*

- *image de l'opérateur A par :*
$$\mathrm{Im}(A) = \{Ax, x \in E\}$$
- *le noyau de l'opérateur A par :*
$$\mathrm{Ker}(A) = \{x \in E : Ax = 0\}$$

1.2 Operateur lineaire borne

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, $A : E \to F$ un opérateur linéaire.Le théorème suivant caractérise la continuité d'un opérateur linéaire.

Théorème .1 *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1. *(1) A est continu,*
2. *(2) A est continu en 0,*
3. *(3) Il existe une constante c telle que : $\|Ax\| \leq c\|x\| \quad$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration .1 *L'implication $(1) \Rightarrow (2)$ est évidente.*

On va montrer montrer l'implication $(2) \Rightarrow (3)$. On suppose que A est continue en 0, alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E : (\|x\| < \delta) \Rightarrow (\|Ax\| < \varepsilon).$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in E$, $x \neq 0$. On pose : $x' = \frac{\delta}{2\|x\|}x$, alors $\|x'\| = \frac{\delta}{2}$.
D'où $\|x'\| < \delta$, et par conséquent $\|Ax'\| < \varepsilon$ (par hypothèse de continuité).
Or :

$$\begin{aligned} \|Ax'\| &= \left\| A\left(\tfrac{\delta}{2\|x\|}x\right)\right\| \\ &= \tfrac{\delta}{2\|x\|}\|Ax\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Il résulte que :

$$\|Ax\| < \frac{2\varepsilon}{\delta}\|x\|.$$

Il existe alors une constante c satisfaisant la condition (3).

Cette inégalité est vraie pour $x = 0$, donc (3) est vérifiée avec $c = \dfrac{2\varepsilon}{\delta}$.

Montrons maintenant l'implication $(3) \Rightarrow (1)$.
On suppose que (3) est vérifiée, c'est-à-dire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\|Ax\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in E.$$

Alors, pour tous $x, y \in E$, on a :

$$\|A(x-y)\| \leq c\|x-y\| \quad \text{c'est-à-dire} \quad \|Ax - Ay\| \leq c\|x-y\|.$$

Donc, l'application A est Lipschitzienne, et par conséquent, elle est continue sur E.

Ainsi, les trois propriétés sont équivalentes.

Définition .3 *Une application linéaire $A : E \to F$ entre espaces vectoriels normés qui est continue est souvent dite bornée.*

Notation .1 *On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues entre E et F. Quand $E = F$, $\mathcal{L}(E,F)$ est noté $\mathcal{L}(E)$. Quand $F = \mathbb{K}$, on note E' l'espace dual (topologique) de E, qui est l'espace vectoriel des formes linéaires continues de E dans $\mathbb{K}$. Par E'', on désigne le bidual de E.*

On définit maintenant la norme d'un opérateur linéaire continu.

Remarque .1 *Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire de E dans F est continue.*

On définit maintenant la norme d'un opérateur linéaire continu.

Définition .4 *(Norme d'un opérateur linéaire continu) Soit $A : E \to F$ un opérateur linéaire continu entre deux espaces vectoriels normés. est appelé la norme de l'opérateur A, et il est noté $\|A\|$.*

Remarque .2

1. *Si, pour une constante c, on a :*

$$\|Ax\| \leq c\|x\| \quad \text{pour tout } x \in E,$$

alors A est borné et :

$$\|A\| \leq c.$$

De plus, on a l'inégalité fondamentale :

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \text{pour tout } x \in E.$$

2. *On vérifie facilement que :*

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \quad \text{ainsi que} \quad \|A\| = \inf \{c \,:\, \|Ax\| \leq c\|x\| \text{ pour tout } x \in E\}.$$

Proposition .1 *(Propriétés de la norme d'opérateur)*
Soient E, F, G des espaces vectoriels normés.

1. *Si $A \in \mathcal{L}(E,F)$, alors :*

$$\|A\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = 0.$$

2. *Si $A, B \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $A + B \in \mathcal{L}(E,F)$ et :*

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

3. *Si $\alpha \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $\alpha A \in \mathcal{L}(E,F)$ et :*

$$\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|.$$

4. *Si $A \in \mathcal{L}(E,F)$ et $B \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $B \circ A \in \mathcal{L}(E,G)$ et :*

$$\|B \circ A\| \leq \|B\| \cdot \|A\|.$$

Notation .2 *La composée $A \circ B$ de deux opérateurs A et B sera souvent notée simplement AB.*

Example .2 (Projection orthogonale sur un sous-espace fermé) *Soit F un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H. L'opérateur projection P_F est continu de norme 1, car :*

$$P_F(x) = x \quad \textit{pour tout } x \in F,$$

et :

$$\|P_F(x)\| \leq \|x\| \quad \textit{pour tout } x \in H,$$

avec égalité si $x \in F$.

Example .3 *(Opérateur de Volterra)*
Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$. On définit l'opérateur linéaire de Volterra A sur E (primitive s'annulant en 0) par :

$$\forall f \in E, \quad Af(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \quad \forall x \in [0,1].$$

Pour tout $f \in E$, on a :

$$\|Af\|_\infty \leq \|f\|_\infty,$$

donc $A \in \mathcal{L}(E)$ et $\|A\| \leq 1$.
De plus, $\|A\| = 1$, car si $f \equiv 1$, on obtient :

$$\|f\|_\infty = 1 \quad \textit{et} \quad Af(x) = \int_0^x 1\,dt = x,$$

donc :

$$\|Af\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |x| = 1.$$

À ces deux exemples, s'ajoutent d'autres comme suit :

Example .4 1. *(Opérateur de décalage) L'opérateur shift en anglais, ou opérateur de décalage en français, S, est défini sur $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ par :*

$$S(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (0, x_0, x_1, x_2, \ldots).$$

Cet opérateur est borné et on a :

$$\|S\| = 1.$$

2. *[Opérateur de multiplication]*

Soient (X, Ω, μ) un espace mesuré σ-fini, et $H = L^2(X, \Omega, \mu)$.

Si $\varphi \in L^\infty(X, \Omega, \mu)$, *on peut définir un opérateur $M_\varphi \in \mathcal{L}(H)$ en posant :*

$$M_\varphi f = \varphi f.$$

Alors, on a :

$$\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_{L^\infty}.$$

On rappelle que la norme $\|\varphi\|_{L^\infty}$ est définie comme le supremum essentiel de φ :

$$\|\varphi\|_{L^\infty} = \inf\{c > 0 : \mu(\{x \in X : |\varphi(x)| > c\}) = 0\}.$$

L'opérateur M_φ ainsi défini s'appelle opérateur de multiplication et la fonction φ est appelée le symbole de M_φ.

3. *Soit H un espace de Hilbert séparable admettant une base orthonormée $(h_n)_n$.*
   Soit $\alpha = (\alpha_n)_n$ une suite bornée de nombres complexes.
   On définit l'opérateur Δ_α sur H par :

$$\forall c = (c_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}), \quad \Delta_\alpha \left(\sum_{n\geq 0} c_n h_n \right) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n c_n h_n.$$

L'opérateur linéaire Δ_α est dit diagonal car il admet
une représentation matricielle diagonale relativement à la base $(h_n)_n$,
avec $(\alpha_n)_n$ sur sa diagonale. Cet opérateur est continu et l'on a :

$$\|\Delta_\alpha\| = \|\alpha\|_\infty.$$

Théorème .2 *Soient E un espace vectoriel normé et F un espace de Banach. Alors, l'espace vectoriel normé $L(E,F)$ est un espace de Banach.*

Démonstration .2 *Soit $(A_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E,F)$, c'est-à-dire :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n, m \in \mathbb{N} : (n \geq N, m \geq N) \Rightarrow (\|A_n - A_m\| < \varepsilon).$$

Soit $x \in E$. Comme

$$\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\| \cdot \|x\|,$$

on a donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall x \in E, \forall n, m \in \mathbb{N} : (n \geq N, m \geq N) \Rightarrow (\|A_n x - A_m x\| < \varepsilon \|x\|).$$

Cela signifie que la suite $(A_n x)_n$ est une suite de Cauchy dans F.
Or, comme l'espace F est complet, cette suite converge et la limite

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$$

existe dans F. On définit ainsi une application

$$A : E \to F, \quad x \mapsto Ax.$$

Cet opérateur est linéaire. En effet, pour tous $n \in \mathbb{N}$, $x, y \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, *on a :*

$$A_n(\alpha x + \beta y) = \alpha A_n x + \beta A_n y.$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$A(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} A_n(\alpha x + \beta y) = \alpha \lim_{n\to\infty} A_n x + \beta \lim_{n\to\infty} A_n y = \alpha Ax + \beta Ay.$$

Cet opérateur est continu. En effet, la suite $(A_n)_n$ *étant de Cauchy,*
elle est bornée en norme, c'est-à-dire :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \|A_n x\| \le M\|x\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par passage à la limite, on a :

$$\|Ax\| = \left\| \lim_{n\to\infty} A_n x \right\| \le M\|x\|, \quad \forall x \in E.$$

Reste à montrer que la suite $(A_n)_n$ *converge en norme vers* A *dans* $\mathcal{L}(E, F)$. *On a :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall x \in E, \forall n, m \in \mathbb{N}, \ (n, m > N) \Rightarrow \|A_n x - A_m x\| < \varepsilon\|x\|.$$

En faisant tendre $m \to +\infty$, *il résulte :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall x \in E, \forall n > N, \ \|A_n x - Ax\| < \varepsilon\|x\|.$$

Ce qui montre que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, \ \|A_n - A\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|A_n x - Ax\| < \varepsilon.$$

La démonstration du théorème est alors terminée.

Corollaire .1 *Soit E un espace vectoriel normé. Le dual* E' *d'un espace vectoriel normé E est un espace de Banach.*

1.3 Opérateurs non bornés

Définition .5 ***(Opérateur non borné)***
Soient E et F deux espaces vectoriels normés.
On dit qu'un opérateur linéaire A défini sur $D(A) \subset E$ à valeurs dans F est un opérateur non borné si :
$D(A) = E$.

Remarque .3 *Dans la pratique, pour montrer qu'un opérateur A est non borné, il suffit de trouver une suite $(\varphi_n) \subset D(A)$ telle que $\|\varphi_n\| \leq M$ (pour une constante M et tout $n \in \mathbb{N}$) et $\|A\varphi_n\| \to +\infty$.*
Par conséquent, on peut montrer qu'un opérateur A est non borné en trouvant une suite $(\varphi_n) \subset D(A)$
convergente vers 0 telle que la suite $(A\varphi_n)$ ne converge pas vers 0.

Example .5 *Soit $D(D_1)$ un sous-espace vectoriel de $C[0,1]$ composé de toutes les fonctions polynomiales. L'opérateur différentiel D_1 défini de $D(D_1)$ dans $C[0,1]$ par :*

$$D_1\varphi(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \varphi'(x)$$

est un opérateur non borné. En effet, on considère par exemple la suite des fonctions $\varphi_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\varphi_n \in D(D_1)$.
En outre, on a :

$$\|\varphi_n\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |\varphi_n(x)| = \max_{x \in [0,1]} |x^n| = 1.$$

Pour tout $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$\|D_1' x_n\|_\infty = \|x_n'\|_\infty = \|(x_n)'\|_\infty = \int_0^1 |n x_n^{n-1}| \, dx = \max_{x \in [0,1]} n x^{n-1}$$

Or, on a :

$$\lim_{n \to \infty} \max_{x \in [0,1]} n x^{n-1} = \infty$$

D'où, l'opérateur D_1 est un opérateur non borné dans $C[0,1]$.

Example .6 *Soit $D(D_2)$ un sous-espace vectoriel de $L^2[0,1]$ composé de toutes*
les fonctions continûment dérivables sur $[0,1] \subset \mathbb{R}$ (i.e. $D(D_2) = C^1[0,1]$).
L'opérateur différentiel D_2 est défini de $D(D_2)$ dans $L^2[0,1]$ par :

$$D_2\varphi(x) = \frac{d}{dx}\varphi(x) = \varphi'(x)$$

Cet opérateur est non borné.

En effet, considérons par exemple la suite de fonctions $\varphi_n(x) = x^n$*, pour* $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Il est clair que pour tout n*,* $\varphi_n \in D(D_2)$*. De plus, on a :*

$$\|\varphi_n\|_2^2 = \int_0^1 |\varphi_n(x)|^2 \, dx = \int_0^1 x^{2n} \, dx = \frac{1}{2n+1}$$

et

$$\|D_2\varphi_n\|_2^2 = \int_0^1 |D_2\varphi_n(x)|^2 \, dx = \int_0^1 |nx^{n-1}|^2 \, dx = \int_0^1 n^2 x^{2n-2} \, dx = n^2 \cdot \frac{1}{2n-1}$$

Ainsi,

$$\frac{\|D_2\varphi_n\|_2}{\|\varphi_n\|_2} = \frac{n}{\sqrt{\frac{1}{2n+1}}} \cdot \sqrt{2n-1} = n \cdot \sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}} \longrightarrow \infty \quad \textit{quand} \quad n \to \infty$$

D'où l'opérateur D_2 *est non borné dans* $L^2[0, 1]$*.*

Example .7 *Soit* $D(D_3)$ *un sous-espace vectoriel de* $L^2(\mathbb{R})$ *composé de toutes les fonctions de carré intégrable sur* $\mathbb{R}$ *dont les dérivées premières et secondes sont aussi de carré intégrable sur* $\mathbb{R}$*, i.e.,* $D(D_3) = H^2(\mathbb{R})$*.*
L'opérateur laplacien en dimension 1, D_3*, est défini de* $D(D_3)$ *dans* $L^2([0, 1])$ *par :*

$$D_3\varphi(x) = \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = \varphi''(x),$$

et c'est un opérateur non borné.
En effet, considérons la suite des fonctions $\varphi_n(x) = e^{n|x|}$*, pour* $n = 1, 2, 3, \ldots$. *Il est clair que pour tout* n*, on a* $\varphi_n \in D(D_3)$*. De plus, on peut vérifier que :*

$$\|\varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0 \quad \textit{(ou bornée)},$$

mais

$$\|D_3\varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\varphi_n''\|_{L^2(\mathbb{R})} \to +\infty \quad \textit{quand } n \to +\infty.$$

Par conséquent, l'opérateur D_3 *n'est pas borné. Soit* $\varphi_n(x) = e^{n|x|}$ *pour* $n = 1, 2, 3, \ldots$*, on a :*

$$\|\varphi_n\|_2^2 = \int_{-1}^1 |\varphi_n(x)|^2 \, dx = \int_{-1}^1 e^{2n|x|} \, dx = 1.$$

De plus, on calcule la norme de $D_3\varphi_n$ *dans* $L^2([0, 1])$ *:*

$$\|D_3\varphi_n\|_2^2 = \int_{-1}^1 |D_3\varphi_n(x)|^2 \, dx = \int_{-1}^1 |n^2 e^{n|x|}|^2 \, dx = n^4 \int_{-1}^1 e^{2n|x|} \, dx.$$

Cela donne :

$$\|D_3\varphi_n\|_2^2 = n^4 \int_{-1}^1 e^{2n|x|} \, dx = n^4 \cdot \frac{2}{2n} = n^3.$$

Ainsi, on a :

$$\|D_3\varphi_n\|_2^2 \to \infty \quad \textit{lorsque } n \to \infty.$$

Cela montre que l'opérateur D_3 est non borné dans $L^2([0,1])$.

1.4 Operateur inverse

Définition .6 *Soient $A \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont deux espaces vectoriels normés. On dit que A est inversible s'il existe $B \in \mathcal{L}(F,E)$ tel que :*

$$AB = Id_F \quad \textit{(inversible à droite)} \quad \textit{et} \quad BA = Id_E \quad \textit{(inversible à gauche)}.$$

Un tel opérateur (lorsqu'il existe) est unique. On l'appelle opérateur inverse de A et on le note $B = A^{-1}$.

Remarque .4 *Si un opérateur est inversible à droite et injectif (resp. inversible gauche et surjectif) alors il est inversible et tout inverse à droite (ou à gauche) est égal à l'inverse*

Example .8 *(Opérateur inversible à gauche mais non-inversible à droite)*

Soit $E = \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ l'espace des suites réelles $x = (x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots)$ telles que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 < +\infty$. Soit

$$S : E \to E$$

l'opérateur shift (voir Exemple 1.2.3) défini par :

$$Sx = (0, x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, \cdots).$$

L'opérateur $S \in \mathcal{L}(E)$ est injectif (c'est une isométrie car $\|Sx\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$). Cet opérateur admet un inverse à gauche T, où

$$T : E \to E, \quad Tx = (x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}, \cdots)$$

car $TS = Id_E$, mais l'opérateur T n'est pas son inverse à droite (car S n'est pas surjectif).
On rappelle que E est un espace de Banach. Pour des raisons de simplicité, on adopte une seule notation de la norme $\|\cdot\|$, et c'est au lecteur de faire attention pour deviner de quelle norme il s'agit lorsqu'on travaille avec plusieurs espaces vectoriels normés.

Théorème .3 *(Théorème de l'inverse de Banach) Soit $A \in \mathcal{L}(E,F)$, où F est un espace de Banach. Si A est bijectif,*

alors son inverse A^{-1} existe et est continu.
Autrement dit, $A^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.

Notation .3 *On note $\mathcal{IL}(E)$ l'ensemble des opérateurs $A \in \mathcal{L}(E)$ inversibles.*

Proposition .2 *Soit F un espace vectoriel normé et $A \in \mathcal{L}(E,F)$ bijectif. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.
2. *Il existe* $c > 0$ *tel que pour tout* $x \in E$, *on ait* $\|Ax\| \geq c\|x\|$.
3. F *est un espace de Banach.*

Démonstration .3 *(1)* $\Rightarrow$ *(2) Comme* A^{-1} *est continu, alors on a*

$$\forall x \in E : \|A^{-1}Ax\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|Ax\|.$$

Il s'ensuit, pour tout $x \in E$ *:*

$$\|Ax\| \geq \|A^{-1}\|^{-1} \cdot \|x\|.$$

(2) $\Rightarrow$ *(3) Soit* $(y_n)_n$ *une suite de Cauchy dans* F. *L'opérateur* A *est bijectif, alors il existe une suite* $(x_n)_n$ *dans* E *telle que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $Ax_n = y_n$.

Or, d'après (2), pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, *on a :*

$$\|x_n - x_m\| \leq c^{-1} \cdot \|A(x_n - x_m)\| = c^{-1} \cdot \|y_n - y_m\|.$$

Alors, $(x_n)_n$ *est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach* E.

Donc, elle converge vers un élément $x \in E$. *L'opérateur* A *étant continu, la suite* $(y_n = Ax_n)_n$ *converge alors vers* $Ax \in F$. *Il s'ensuit que* F *est un espace de Banach.*

(3) $\Rightarrow$ *(1) Elle découle du théorème de Banach.*

Corollaire .2 *Soient* F *un espace de Banach et* $A \in \mathcal{L}(E, F)$. *Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe* $c > 0$ *telle que pour tout* $x \in E$ *:* $\|Ax\| \geq c\|x\|$.
2. A *est injectif et* $\mathrm{Im}(A)$ *est fermé dans* F.

Démonstration .4

(1) $\Rightarrow$ *(2) On suppose qu'il existe* $c > 0$ *telle que pour tout* $x \in E$,
on ait $\|Ax\| \geq c\|x\|$.*Alors,* A *est injectif, donc est une bijection*
de E *sur* $G = \mathrm{Im}(A)$.
D'après la Proposition 1.3.2, on conclut que $G = \mathrm{Im}(A)$ *est un espace de Banach,*
et donc G *est fermé dans* F.

(2) $\Rightarrow$ *(1) On suppose que* A *est injectif et* G *est fermé dans* F.
Alors, A *est une bijection de* E *sur* G, *et comme* G *est fermé dans* F,
il existe un constant $c > 0$ *tel que pour tout* $x \in E$, *on ait* $\|Ax\| \geq c\|x\|$.

Corollaire .3 *Soient* F *un espace de Banach et* $A \in \mathcal{L}(E, F)$.
Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\mathrm{Im}(A) = F$ *et il existe* $c > 0$ *tel que pour tout* $x \in E$,
   on ait $\|Ax\| \geq c\|x\|$.
2. A *est inversible.*

Démonstration.

- (1) $\Rightarrow$ (2) : Si (1) a lieu, d'après le Corollaire 1.3.3, A est injectif et $\mathrm{Im}(A)$ est fermé dans F. Alors, $\overline{\mathrm{Im}(A)} = \mathrm{Im}(A) = F$, donc A est surjectif et donc inversible.

- (2) $\Rightarrow$ (1) : Si (2) a lieu, on a $F = \mathrm{Im}(A) \subset \overline{\mathrm{Im}(A)} \subset F$. Donc, $\mathrm{Im}(A) = \overline{\mathrm{Im}(A)} = F$, ce qui donne le résultat d'après le Corollaire 1.3.3.

Lemme .1 *Soient E, F et G des espaces de Banach. Si $A \in \mathcal{L}(E,F)$ et $B \in \mathcal{L}(F,G)$ sont deux opérateurs inversibles, alors $BA \in \mathcal{L}(E,G)$ est inversible et l'on a :*

$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}.$$

Théorème .4 *(i) Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|A\| < 1$, alors $\mathrm{Id}_E - A$ est inversible et*

$$(\mathrm{Id}_E - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n.$$

(ii) Si A est inversible, alors $A+B$ est inversible pour tout $B \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$, et on a :

$$(A+B)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (A^{-1}B)^n A^{-1}.$$

Si A et B commutent, alors :

$$(A+B)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^{-1-n}B^n.$$

(iii) L'ensemble $\mathcal{IL}(E)$ des opérateurs inversibles est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$, et l'application

$$A \longmapsto A^{-1}$$

est continue, et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{IL}(E)$ dans $\mathcal{IL}(E)$.

Remarque .5 *Le résultat du point (i) du théorème précédent peut être utile dans la situation suivante. La question qui se pose est : résoudre l'équation intégrale, avec $A \in \mathcal{L}(E)$, $g \in E$ donnés et $f \in E$ l'inconnue :*

$$f(x) = g(x) + Af(x).$$

Il convient aussi de savoir utiliser le résultat du point (i) sous la forme suivante : si $A \in \mathcal{L}(E)$ est tel que

$$\|\mathrm{Id}_E - A\| < 1,$$

alors A est inversible et l'on a :

$$A^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{Id}_E - A)^n.$$

1.5 Spectre d'un opérateur

Cette section est consacrée aux rudiments de la théeorie spectrale ensemble résolvant,spectre et valeurs propres.

Définition .7 *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *On appelle spectre de A, l'ensemble*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid (\lambda \operatorname{Id}_E - A) \text{ n'est pas inversible}\} \quad \text{(i.e., non bijectif).}$$

   Tout scalaire $\lambda \in \sigma(A)$ est appelé valeur spectrale.

   Le rayon spectral de A, noté $r(A)$, est défini par :

$$r(A) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\},$$

   et l'on a toujours $r(A) \leq \|A\|$. Si $\sigma(A) = \emptyset$, alors, par convention, on pose $r(A) = 0$.

2. *On appelle valeur propre de A tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \operatorname{Id}_E - A$ n'est pas injectif. On appelle spectre ponctuel de A, l'ensemble :*

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \text{ est une valeur propre de } A\}.$$

   Une valeur propre de A est une valeur spectrale, et on a toujours :

$$\sigma_p(A) \subset \sigma(A).$$

   On appelle espace propre associé à la valeur propre $\lambda \in \sigma_p(A)$, le sous-espace vectoriel :

$$\ker(\lambda \operatorname{Id}_E - A).$$

   La multiplicité géométrique d'une valeur propre $\lambda \in \sigma_p(A)$ est la dimension de $\ker(\lambda \operatorname{Id}_E - A)$, et la multiplicité algébrique est la limite : $\lim_{k \to +\infty} \dim \ker((\lambda \operatorname{Id}_E - A)^k)$.

3. *On appelle spectre continu de (A), l'ensemble : $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid (\lambda \operatorname{Id}_E - A)$ est injectif, $\operatorname{Im}(\lambda \operatorname{Id}_E - A$*

4. *On appelle spectre résiduel de A, l'ensemble :*

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid (\lambda \operatorname{Id}_E - A) \text{ est injectif, } \operatorname{Im}(\lambda \operatorname{Id}_E - A) \text{ n'est pas dense dans } E\}.$$

5. *On appelle ensemble résolvant de A, l'ensemble :*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid (\lambda \operatorname{Id}_E - A) \text{ est inversible}\}.$$

Tout scalaire $\lambda \in \rho(A)$ est appelé valeur résolvante. On a :

$$\sigma(A) = \mathbb{K} \setminus \rho(A).$$

Si $\lambda \in \rho(A)$, alors on note :

$$R_\lambda(A) = (\lambda \operatorname{Id}_E - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$$

la résolvante de A.

Example .9 *Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$. Si on considère l'opérateur de Volterra (voir Exemple 1.2.2), alors on a :*

$$\ker(A) = \{0\} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(A) = \{g \in E \mid g(0) = 0\}.$$

En particulier, A est injectif, donc $0 \notin \sigma_p(A)$, mais A n'est pas surjectif, donc $0 \in \sigma(A)$.

Théorème .5 *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *Si $|\lambda| > \|A\|$, alors $\lambda \in \rho(A)$, et donc :*

$$\sigma(A) \subset B(0, \|A\|).$$

2. *$\rho(A)$ est un ouvert non vide de $\mathbb{K}$.*
3. *$\sigma(A)$ est un compact non vide de $\mathbb{K}$.*
4. *Si A est inversible, alors :*

$$\sigma(A^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(A) \right\}.$$

5. *On a :*

$$\sigma(A) \subset B(0, r(A)).$$

De plus, on a :

$$r(A) = \lim_{n \to +\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Démonstration .5 1. *Si $|\lambda| > \|A\|$, alors $\left\|\lambda^{-1} A\right\| < 1$. On en déduit, d'après le Théorème 1.4.6, que $\operatorname{Id}_E - \lambda^{-1} A$ est inversible, c'est-à-dire :*

$$\lambda \in \rho(A).$$

2. *On a montré que $\rho(A)$ est non vide (d'après le point 1).*

Considérons l'application $f : \mathbb{K} \to \mathcal{L}(E)$ définie par :

$$f(\lambda) = \lambda \operatorname{Id}_E - A.$$

Alors :

$$\rho(A) = f^{-1}(\mathcal{I}\mathcal{L}(E)).$$

Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :

$$\|f(\lambda) - f(\mu)\| = \|(\lambda - \mu) \operatorname{Id}_E\| \leq |\lambda - \mu|.$$

Il en résulte que f est continue.

Or, $\mathcal{IL}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$ (voir Théorème 1.4.6), donc :

$$\rho(A) = f^{-1}(\mathcal{IL}(E))$$

est un ouvert de $\mathbb{K}$.

3. *On a :*

$$\sigma(A) = \mathbb{K} \setminus \rho(A),$$

donc $\sigma(A)$ est fermé (d'après le point 2), et borné (d'après le point 1). Par conséquent, $\sigma(A)$ est un compact de $\mathbb{K}$.

Remarque .6 *Si E est de dimension finie, alors $(\lambda \operatorname{Id}_E - A)$ est inversible si et seulement si :*

$$\ker(\lambda \operatorname{Id}_E - A) = \{0\}.$$

En particulier, on en déduit que :

$$\sigma_p(A) = \sigma(A).$$

En effet, si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, tout opérateur linéaire A sur E peut être représenté par une matrice carrée A, et l'opérateur $(\lambda \operatorname{Id}_E - A)$ est inversible si la matrice associée est inversible. Il est clair que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, l'un des deux cas suivants se produit :

(i) *λ est une valeur propre de A,*

(ii) *la matrice $(\lambda \operatorname{Id}_E - A)$ est inversible, c'est-à-dire que la matrice $(\lambda \operatorname{Id}_E - A)^{-1}$ existe.*

Il en résulte que le spectre $\sigma(A) = \sigma_p(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de la matrice A, et la dimension de l'espace propre associé à toute valeur propre est finie. Le spectre d'un opérateur linéaire dans un espace de dimension finie a donc une structure simple. En revanche, pour un opérateur général dans un espace de dimension infinie, le spectre peut être différent et plus complexe.

Example .10 *Soit Id_H l'opérateur identité de l'espace de Hilbert H. Il est clair que :*

$$\sigma(\operatorname{Id}_H) = \{1\},$$

car :

$$\lambda \operatorname{Id}_H - \operatorname{Id}_H = (\lambda - 1) \operatorname{Id}_H$$

est inversible si et seulement si $\lambda - 1 \neq 0$, c'est-à-dire $\lambda \neq 1$.
De même, si $\mu \in \mathbb{K}$, alors :

$$\sigma(\mu \operatorname{Id}_H) = \{\mu\}.$$

Example .11 *Soit $H = L^2([0,1], \mathbb{R})$. On considère l'opérateur de multiplication*

$$A : H \to H \quad \text{défini par} \quad Af(t) = tf(t), \quad t \in [0,1].$$

Alors, on a :

$$\sigma(A) = [0,1].$$

De plus, l'opérateur A n'a pas de valeurs propres.
En effet, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in H$, $t \in [0,1]$, on a :

$$(\lambda \operatorname{Id}_H - A)f(t) = (\lambda - t)f(t).$$

On distingue deux cas :
Si $\lambda \notin [0,1]$, alors la fonction $t \mapsto \frac{1}{\lambda - t}$ est bornée sur $[0,1]$, et l'opérateur $(\lambda \operatorname{Id}_H - A)^{-1}$ est défini par :

$$\left[(\lambda \operatorname{Id}_H - A)^{-1} g\right](t) = \frac{1}{\lambda - t} g(t), \quad g \in H.$$

On vérifie que A est un opérateur borné.
Si $\lambda \in [0,1]$, alors la fonction $t \mapsto \frac{1}{\lambda - t}$ n'est pas dans H, car elle présente une singularité non intégrable en $t = \lambda$. Il en résulte que l'opérateur $\lambda \operatorname{Id}_H - A$ n'est pas inversible. Ainsi, tous les $\lambda \in [0,1]$ sont des points singuliers.
On en déduit donc que :

$$\sigma(A) = [0,1].$$

Supposons maintenant que λ soit une valeur propre de A, et $f \in H$ un vecteur propre associé. Alors, pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$(\lambda - t)f(t) = 0.$$

Il s'ensuit que $f(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$, donc $f \equiv 0$ dans H, ce qui contredit le fait que f soit un vecteur propre non nul.
Par conséquent, A n'a pas de valeurs propres, et :

$$\sigma_p(A) = \emptyset.$$

1.6 Opérateur adjoint

1.6.1 Définitions et exemples

On commence par rappeler le théorème de représentation de Riesz.

Théorème .6 *(a) Soit H un espace préhilbertien. Pour tout $y \in H$, l'application*

$$x \in H \mapsto \langle x, y \rangle$$

est une forme linéaire continue de norme $\|y\|$.

(b) *Soit f une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert H, alors il existe un élément unique $y \in H$ tel que :*

$$f(x) = \langle x, y \rangle, \quad \forall x \in H.$$

Soient $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ et $(H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ des espaces de Hilbert.

Proposition .3 *Soit $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors, pour tout $y \in H_2$, il existe un unique $z \in H_1$ tel que :*

$$\forall x \in H_1 : \langle Ax, y \rangle_2 = \langle x, z \rangle_1.$$

On note alors $z = A^*y$, où A^* est l'opérateur adjoint de A.

Démonstration .6 *Soit $y \in H_2$. L'application $\varphi_y : x \mapsto \langle Ax, y \rangle_2$ est linéaire.*
Pour tout $x \in H_1$, on a :

$$|\varphi_y(x)| = |\langle Ax, y \rangle_2| \leq \|Ax\|_2 \|y\|_2 \leq \|A\| \|x\|_1 \|y\|_2.$$

Donc, φ_y est une forme linéaire continue sur H_1.
On en déduit, d'après le théorème de représentation de Riesz, qu'il existe un unique $z \in H_1$ tel que :

$$\varphi_y(x) = \langle x, z \rangle_1, \quad \forall x \in H_1.$$

Ceci donne bien la relation :

$$\langle Ax, y \rangle_2 = \langle x, z \rangle_1, \quad \forall x \in H_1.$$

Autrement dit, $z = A^*y$, ce qui correspond à l'équation (1.2).

Définition .8 *L'application A^* définie de H_2 dans H_1 par :*

$$\forall x \in H_1, \ \forall y \in H_2 : \langle Ax, y \rangle_2 = \langle x, A^*y \rangle_1$$

est appelée l'adjoint de A.

Proposition .4 *Soit $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors, $A^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ et :*

$$\|A^*\| = \|A\|.$$

Démonstration .7 *Soient $y_1, y_2 \in H_2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors, pour tout $x \in H_1$, on a :*

$$\begin{aligned} \langle x, A^*(y_1 + \alpha y_2) \rangle_1 &= \langle Ax, y_1 + \alpha y_2 \rangle_2 \\ &= \langle Ax, y_1 \rangle_2 + \alpha \langle Ax, y_2 \rangle_2 \\ &= \langle x, A^*y_1 \rangle_1 + \alpha \langle x, A^*y_2 \rangle_1 \\ &= \langle x, A^*y_1 + \alpha A^*y_2 \rangle_1. \end{aligned} \tag{1.1}$$

D'où $A^*(y_1 + \alpha y_2) = A^*y_1 + \alpha A^*y_2$, c'est-à-dire A^* est linéaire.

De plus, pour tout $y \in H_2$, on a :

$$
\begin{aligned}
\|A^*y\|_1^2 &= \langle A^*y, A^*y\rangle_1 \\
&= \langle y, AA^*y\rangle_2 \\
&\leq \|y\|_2\|A\|\|A^*y\|_1.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

D'où $\|A^*y\|_1 \leq \|A\|\|y\|_2$. Cela dit que $A^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ et $\|A^*\| \leq \|A\|$. Enfin, pour $x \in H_1$, on a :

$$
\begin{aligned}
\|A^*y\|_1^2 &= \langle A^*y, A^*y\rangle_1 \\
&= \langle y, AA^*y\rangle_2 \\
&\leq \|AA^*y\|_2\|y\|_2 \\
&\leq \|AA^*\|\|y\|_2^2 \\
&\leq \|A\|^2\|y\|_2^2,
\end{aligned}
$$

Alors, on obtient $\|Ax\|_2 \leq \|A^*\|\|x\|_1$. On en déduit que $\|A\| \leq \|A^*\|$.
D'où résulte l'égalité des normes. Ceci achève la démonstration de la proposition. La proposition suivante rassemble des résultats relatifs à l'adjoint d'un opérateur.

Proposition .5 *Soient $A, B \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, $C \in \mathcal{L}(H_2, H)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. On a :*

1. $(\mathrm{Id}_H)^* = \mathrm{Id}_H$.
2. $A^{**} = A$.
3. $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha}A^* + \overline{\beta}B^*$.
4. $CA \in \mathcal{L}(H_1, H)$ *et* $(CA)^* = A^*C^*$.
5. $\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2$.

Démonstration .8 *Si $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est inversible, alors, d'après la Proposition 1.6.4, on a :*

$$(A^{-1})^*A^* = (AA^{-1})^* = (\mathrm{Id}_{H_2})^* = \mathrm{Id}_{H_2}$$

et

$$A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = (\mathrm{Id}_{H_1})^* = \mathrm{Id}_{H_1}.$$

Donc, $A^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ est inversible et $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.
Maintenant, si $A^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ est inversible, alors l'étape précédente montre que $(A^*)^* \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est inversible. Or, d'après la Proposition 1.5.4, on a $(A^*)^* = A$. Il s'ensuit que A est inversible. La démonstration est alors terminée.

Example .12 *(Opérateur intégral à noyau) Soit* $k : [c,d] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ *avec* $c < d$, $a < b$, *une fonction continue de deux variables réelles. On considère l'opérateur intégral*

$$A : L^2([a,b],\mathbb{C}) \to L^2([c,d],\mathbb{C})$$

tel que, pour tout $f \in L^2([a,b],\mathbb{C})$, Af *est la fonction définie par :*

$$\forall x \in [c,d], \quad Af(x) = \int_a^b k(x,t)f(t)\,dt.$$

où la fonction $k(\cdot,\cdot)$ *s'appelle le noyau de l'opérateur intégral* A. *Par la définition du produit scalaire dans* $L^2([c,d],\mathbb{C})$,
pour tout $f \in L^2([a,b],\mathbb{C})$, *pour tout* $g \in L^2([c,d],\mathbb{C})$, *on a :*

$$\langle Af, g\rangle = \int_c^d (Af)(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_c^d \left[\int_a^b k(x,y)f(y)\,dy\right]\overline{g(x)}\,dx.$$

En utilisant le théorème de Fubini (justifié par l'intégrabilité sur $[c,d] \times [a,b]$ *de la fonction* $F(x,y) = k(x,y)f(y)\overline{g(x)}$*), on peut intervertir les intégrales :*

$$= \int_a^b f(y)\left[\int_c^d k(x,y)\overline{g(x)}\,dx\right]dy = \langle f, A^*g\rangle.$$

D'où, l'opérateur adjoint A^* *de* A *est défini pour tout* $g \in L^2([c,d],\mathbb{C})$ *par :*

$$\forall s \in [a,b], \quad (A^*g)(s) = \int_c^d \overline{k(x,s)}g(x)\,dx.$$

Définition .9 *Un opérateur* $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ *est dit unitaire si :*

$$AA^* = \mathrm{Id}_{H_2} \quad et \quad A^*A = \mathrm{Id}_{H_1}.$$

1.6.2 Proprietes spectrales de l'opérateur adjoint

Proposition .6 *Soit* $A \in \mathcal{L}(H)$. *Alors, on a :*

1. $\mathrm{Ker}(A) = [\mathrm{Im}(A^*)]^\perp$,
2. $\mathrm{Im}(A) = [\mathrm{Ker}(A^*)]^\perp$.

Démonstration .9 *1. On a :*

$$\begin{aligned}\text{Ker}(A) &= \{x \in H : Ax = 0\}\\ &= \{x \in H : \forall y \in H,\ \langle Ax, y\rangle = 0\}\\ &= \{x \in H : \forall y \in H,\ \langle x, A^*y\rangle = 0\}\\ &= [\text{Im}(A^*)]^{\perp}.\end{aligned}$$

2. D'après le point 1 et en tenant compte , on obtient :

$$[\text{Ker}(A^*)]^{\perp} = [\text{Im}(A)^{\perp}]^{\perp} = \text{Im}(A),$$

d'où résulte l'égalité cherchée.

Proposition .7 *1.* $\rho(A^*) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \overline{\lambda} \in \rho(A)\}, \quad \sigma(A^*) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \overline{\lambda} \in \sigma(A)\}.$

2. Pour tout $\lambda \in \rho(A^*)$*, on a :*

$$R_\lambda(A^*) = \left(R_{\overline{\lambda}}(A)\right)^*.$$

Démonstration .10 *1. On a l'équivalence suivante :* $\lambda \text{Id}_H - A^*$ *est inversible si et seulement si* $(\lambda\text{Id}_H - A^*)^*$ *est inversible (d'après le Théorème 1.6.5).*

Or,

$$(\lambda\text{Id}_H - A^*)^* = \overline{\lambda}\text{Id}_H - A,$$

donc :

$$\begin{aligned}\rho(A^*) &= \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda\text{Id}_H - A^* \textit{ est inversible}\}\\ &= \{\lambda \in \mathbb{K} : \overline{\lambda}\text{Id}_H - A \textit{ est inversible}\}\\ &= \{\lambda \in \mathbb{K} : \overline{\lambda} \in \rho(A)\}.\end{aligned}$$

De plus, comme $\sigma(A^*) = \mathbb{K} \setminus \rho(A^*)$*, on en déduit :*

$$\sigma(A^*) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \overline{\lambda} \in \sigma(A)\}.$$

2. Si $\lambda \in \rho(A^*)$*, alors on a :*

$$\begin{aligned}R_\lambda(A^*) &= (\lambda\text{Id}_H - A^*)^{-1}\\ &= \left((\overline{\lambda}\text{Id}_H - A)^*\right)^{-1}\\ &= \left((\overline{\lambda}\text{Id}_H - A)^{-1}\right)^*\\ &= \left(R_{\overline{\lambda}}(A)\right)^*,\end{aligned}$$

ce qui découle également du Théorème (1.6.5). D'où résulte l'égalité attendue.

Remarque .7 *On peut généraliser la notion d'opérateur adjoint au cas d'espaces de Banach* E*. Pour* $f \in E'$ *et* $x \in E$*, on note* $\langle f, x\rangle_{E',E}$ *au lieu de* $f(x)$ *et on appelle* $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E',E}$ *le crochet de dualité de* E' *et* E*. Alors, le crochet* $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E',E}$
est similaire au produit scalaire d'espace de Hilbert.
En particulier, si $A \in \mathcal{L}(E, F)$*, alors, il existe* $A^* \in \mathcal{L}(F', E')$
tel que, pour tout $x \in E$ *et* $f \in F'$*, on ait :*

$$\langle A^* f, x\rangle_{E',E} = \langle f, Ax\rangle_{F',F}.$$

Il s'agit d'une généralisation car, si E *est un espace de Hilbert,*
alors E' *peut être identifié avec* E *d'après le théorème de représentation de Riesz.*
Dans ce cas, le crochet de dualité $\langle\cdot,\cdot\rangle_{E',E}$ *devient le produit scalaire de* E*.*

Définition .10 *Un opérateur* $A \in \mathcal{L}(E)$ *est dit normal s'il commute avec son adjoint, c'est-à-dire si :*

$$AA^* = A^*A.$$

Example .13 *Les opérateurs* M_φ *et* Δ_α *définis dans l'Exemple 1.2.3 sont normaux.*

1.6.3 Opérateur adjoint dans un espace euclidien.

Définition .11 *On appelle espace vectoriel euclidien tout espace préhilbertien* $(F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *réel de dimension finie. Dans cette partie, on considère un espace vectoriel euclidien* $(F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *de dimension* n*. On rappelle la notion d'opérateur adjoint dans un espace euclidien, qui est un cas particulier du cas général sous forme de définition.*

Définition .12 *Pour tout* $U \in \mathcal{L}(F)$*, il existe un unique* $U^* \in \mathcal{L}(F)$*, appelé adjoint de* U*, défini par :*

$$\forall x, y \in F, \quad \langle x, U(y)\rangle = \langle U^*(x), y\rangle.$$

Notation *Si* $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ *est une base orthonormée de* F *et si* $A = Mat_B(U)$ *(la matrice de l'application* U *dans la base* B*), alors, on a :*

$$Mat_B(U^*) = A^*, \quad \text{où} \quad A^* = A^T \text{ est la matrice transposée de } A.$$

Proposition .8 *Des propriétés suivantes sur les matrices, on en déduit les propriétés similaires sur les adjoints des endomorphismes d'un espace euclidien, ce qui permet de retrouver facilement les résultats de la Proposition 1.6.4 et du Théorème 1.6.5.*

1. $(AB)^T = B^T A^T$,
2. $(A^T)^T = A$,
3. $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$,
4. $\det(A) = \det(A^T)$,
5. *Si* $\det(A) = 0$*, alors* $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Définition .13 *Si un endomorphisme U vérifie $U^* = U$, on dit que U est auto-adjoint.*

Théorème .7 *Soit A une matrice réelle $n \times n$ (considérée comme un endomorphisme sur $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique). Alors, on a :*

$$Im(A) = \left[Ker(A^T)\right]^{\perp} \quad et \quad Ker(A) = \left[Im(A^T)\right]^{\perp}.$$

Chapter 2

Théorie spectrale des opérateurs

2.1 Le spectre dans un espace de Banach

Définition .14 *Soit E un espace de Banach sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, et $T : E \to E$ un opérateur linéaire borné, c'est-à-dire $T \in \mathcal{L}(E)$, l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur E. Le spectre de T, noté $\sigma(T)$, est défini comme l'ensemble des scalaires $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquels l'opérateur $T - \lambda I$, où I est l'opérateur identité, n'est pas inversible dans $\mathcal{L}(E)$. Formellement,*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I \text{ n'est pas bijectif ou son inverse n'est pas borné}\}.$$

Le spectre peut être décomposé en trois sous-ensembles disjoints:

- *Le spectre ponctuel : $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I \text{ n'est pas injectif}\}$, correspondant aux valeurs propres de T.*
- *Le spectre continu : $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I \text{ est injectif, surjectif, son inverse non borné}\}$.*
- *Le spectre résiduel : $\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I \text{ est injectif mais non surjectif}\}$.*

Le complémentaire de $\sigma(T)$ dans $\mathbb{C}$, appelé résolvante de T,
est l'ensemble $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$, où $T - \lambda I$ est inversible avec n inverse borné.

Example .14 *Considérons l'espace de Banach ℓ^2, l'espace des suites complexes de carré sommable, et l'opérateur de décalage à droite $S : \ell^2 \to \ell^2$ défini par*

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Cet opérateur est linéaire et borné, avec $\|S\| = 1$. Pour déterminer le spectre de S, analysons l'inversibilité de $S - \lambda I$.

1. *Spectre ponctuel : Supposons que $(S - \lambda I)x = 0$. Alors, $Sx = \lambda x$, soit $(0, x_1, x_2, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots)$. Cela implique $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, etc., donc $x = 0$.*
   Ainsi, $S - \lambda I$ est injectif pour tout λ, et $\sigma_p(S) = \emptyset$.

2. *Spectre résiduel et continu : Pour $|\lambda| < 1$, $S - \lambda I$ n'est pas surjectif, car l'équation $(S - \lambda I)x = y$ impose des contraintes qui ne permettent pas de résoudre pour tout $y \in \ell^2$.*
   Pour $|\lambda| = 1$, $S - \lambda I$ peut être surjectif mais son inverse n'est pas borné.
   Une analyse détaillée montre que $\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}$, avec $\sigma_r(S) = \{\lambda \mid |\lambda| < 1\}$ et $\sigma_c(S) = \{\lambda \mid |\lambda| = 1\}$.

Ainsi, le spectre de S est le disque unité fermé dans $\mathbb{C}$.

Proposition .9 *Le spectre d'un opérateur borné dans un espace de Banach possède plusieurs propriétés fondamentales:*

1. *Non-vacuité : Pour tout $T \in \mathcal{L}(E)$, $\sigma(T) \neq \emptyset$. Cela découle du fait que la résolvante $\rho(T)$ est un ouvert et que $\mathbb{C}$ ne peut être entièrement couvert par $\rho(T)$.*

2. *Compacité : $\sigma(T)$ est un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}$.*

   En effet, $\rho(T)$ est ouvert, donc $\sigma(T)$ est fermé, et $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|T\|\}$, ce qui assure sa borne.

3. *Rayon spectral : Le rayon spectral de T, défini par $r(T) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\}$, vérifie $r(T) \leq \|T\|$. De plus, $r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$.*

4. *Invariance par similitude : Si S est un opérateur inversible, alors $\sigma(S^{-1}TS) = \sigma(T)$.*

5. *Stabilité sous perturbations compactes : Si K est un opérateur compact, alors $\sigma(T+K) \setminus \{0\} \subset \sigma(T) \setminus \{0\}$, à l'exception possible de valeurs propres.*

Remarque .8

- *Le spectre ponctuel peut être vide, comme dans l'exemple de l'opérateur de décalage.*

  Cela contraste avec les matrices dans $\mathbb{C}^n$, où le spectre est toujours constitué de valeurs propres.

- *Dans les espaces de Hilbert, le spectre résiduel peut être vide pour certains opérateurs auto-adjoints, simplifiant l'analyse spectrale.*

- *L'étude du spectre est cruciale en mécanique quantique, où les opérateurs (comme l'hamiltonien) ont des spectres décrivant les énergies possibles d'un système.*

- *Le théorème spectral, applicable dans certains cas, permet de représenter un opérateur via une intégrale sur son spectre, facilitant l'étude de ses propriétés.*

2.2 Spectre des opérateurs compacts

Définition .15 *Soit E un espace de Banach sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, et $T : E \to E$ un opérateur linéaire borné, c'est-à-dire $T \in \mathcal{L}(E)$. On dit que T est un opérateur compact si, pour tout ensemble borné $B \subset E$, l'image $T(B)$ est relativement compacte, c'est-à-dire que sa fermeture est compacte dans E. Le spectre de T, noté $\sigma(T)$, est l'ensemble des scalaires $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquels l'opérateur $T - \lambda I$, où I est l'opérateur identité, n'est pas inversible dans $\mathcal{L}(E)$. Formellement,*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I \text{ n'est pas bijectif ou son inverse n'est pas borné}\}.$$

Le spectre se décompose en trois sous-ensembles disjoints :

- *Le spectre ponctuel : $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I \text{ n'est pas injectif}\}$, correspondant aux valeurs propres de T.*

- *Le spectre continu : $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I \text{ est injectif, surjectif, inverse non borné}\}$.*

- *Le spectre résiduel : $\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I \text{ est injectif mais non surjectif}\}$.*

Pour un opérateur compact, le spectre présente des propriétés spécifiques, notamment une structure discrète pour les valeurs non nulles, comme détaillé ci-dessous.

Example .15 *Considérons l'espace de Banach ℓ^2, l'espace des suites complexes de carré sommable, et un opérateur compact $T : \ell^2 \to \ell^2$ défini par*

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{4}, \frac{x_3}{8}, \dots, \frac{x_n}{2^n}, \dots \right).$$

Cet opérateur est compact, car il est la limite uniforme d'opérateurs de rang fini (en tronquant les suites). Analysons son spectre :

- *Spectre ponctuel : Pour $Tx = \lambda x$, on a $\frac{x_n}{2^n} = \lambda x_n$, soit $x_n \left(\frac{1}{2^n} - \lambda \right) = 0$. Ainsi, $\lambda = \frac{1}{2^n}$ pour un certain n, et le vecteur propre correspondant est e_n, la base canonique. Donc, $\sigma_p(T) = \left\{ \frac{1}{2^n} \mid n = 1, 2, \dots \right\} \cup \{0\}$, car 0 est une valeur propre si $\dim \ker T \geq 1$ ou par accumulation.*
- *Spectre continu et résiduel : Pour $\lambda \neq \frac{1}{2^n}$ et $\lambda \neq 0$, $T - \lambda I$ est inversible, car $\frac{1}{2^n} - \lambda \neq 0$. De plus, pour un opérateur compact dans un espace de Banach de dimension infinie, $\lambda = 0$ appartient au spectre, et le spectre continu est vide ($\sigma_c(T) = \emptyset$). Le spectre résiduel est également vide, car pour $\lambda \neq 0$, $T - \lambda I$ est surjectif (par le théorème de Fredholm).*

Ainsi, $\sigma(T) = \left\{ \frac{1}{2^n} \mid n = 1, 2, \dots \right\} \cup \{0\}$, avec 0 comme point d'accumulation.

Proposition .10 *Le spectre d'un opérateur compact dans un espace de Banach de dimension infinie possède des propriétés remarquables :*

1. *Structure discrète : Le spectre $\sigma(T)$ est au plus dénombrable, et tout $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ est une valeur propre, c'est-à-dire $\lambda \in \sigma_p(T)$. Les valeurs propres non nulles forment une suite finie ou infinie qui converge vers 0.*
2. *Présence de zéro : Si E est de dimension infinie, alors $0 \in \sigma(T)$, soit comme valeur propre, soit comme point d'accumulation des valeurs propres.*
3. *Vide du spectre continu : Pour un opérateur compact, $\sigma_c(T) = \emptyset$.*

   Cela découle du théorème de Fredholm, qui garantit que $T - \lambda I$ est un opérateur de Fredholm pour $\lambda \neq 0$.
4. *Spectre résiduel : Le spectre résiduel $\sigma_r(T)$ est vide ou réduit à $\{0\}$ dans certains cas, car $T - \lambda I$ est surjectif pour $\lambda \neq 0$.*
5. *Dimension finie des espaces propres : Pour toute valeur propre $\lambda \neq 0$, l'espace propre $\ker(T - \lambda I)$ est de dimension finie.*
6. *Compacité : Comme pour tout opérateur borné, $\sigma(T)$ est compact et contenu dans la boule $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|T\|\}$.*

Remarque .9

- *Contrairement aux opérateurs bornés généraux, le spectre des opérateurs compacts est dominé par les valeurs propres, ce qui simplifie leur analyse spectrale.*

- *Dans un espace de Hilbert, les opérateurs compacts auto-adjoints ont un spectre réel, et leurs valeurs propres peuvent être organisées en une suite décroissante convergeant vers* 0.

- *Les opérateurs compacts jouent un rôle central en analyse fonctionnelle, notamment dans la théorie des équations intégrales (opérateurs de Hilbert-Schmidt) et des équations différentielles.*

- *Le théorème de Riesz-Schauder garantit que le spectre non nul d'un opérateur compact est constitué de valeurs propres de multiplicité finie, ce qui est essentiel pour les applications en physique mathématique.*

- *Dans un espace de Banach de dimension finie, tout opérateur est compact, et le spectre est uniquement constitué de valeurs propres, sans point d'accumulation.*

2.2.1 Théorème de Riesz-Schauder

Définition .16 *Soit E un espace de Banach sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, et $T : E \to E$ un opérateur linéaire compact, c'est-à-dire que pour tout ensemble borné $B \subset E$,*
l'image $T(B)$ a une fermeture compacte dans E. Le théorème de Riesz-Schauder caractérise le spectre de T, noté $\sigma(T)$, comme suit:

1. *Le spectre $\sigma(T)$ est au plus dénombrable, et tout $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ est une valeur propre de T, c'est-à-dire $\lambda \in \sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker(T - \lambda I) \neq \{0\}\}$.*

2. *Si $\sigma(T) \setminus \{0\}$ est infini, alors il s'agit d'une suite de valeurs propres $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ telle que $|\lambda_n| \to 0$ lorsque $n \to \infty$.*

3. *Pour toute valeur propre $\lambda \neq 0$, l'espace propre $\ker(T - \lambda I)$ est de dimension finie.*

4. *Si E est de dimension infinie, alors $0 \in \sigma(T)$, soit comme valeur propre, soit comme point d'accumulation des valeurs propres.*

Démonstration .11 *La démonstration repose sur la théorie des opérateurs de Fredholm et les propriétés des opérateurs compacts. Voici une esquisse:*

- *Compactité et spectre : Soit $\lambda \neq 0$. L'opérateur $T - \lambda I$ est un opérateur de Fredholm, car T est compact. Cela implique que $\ker(T - \lambda I)$ est de dimension finie et que l'image Im$(T - \lambda I)$ est fermée.*

- *Valeurs propres : Si $\lambda \neq 0$ appartient à $\sigma(T)$, alors $T - \lambda I$ n'est pas inversible. Par le théorème de Fredholm, soit $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$ (donc $\lambda \in \sigma_p(T)$), soit Im$(T - \lambda I) \neq E$. Dans un espace de Banach, la compacité de T implique que pour $\lambda \neq 0$, $T - \lambda I$ est surjectif si et seulement si il est injectif. Ainsi, $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ entraîne $\lambda \in \sigma_p(T)$.*

- *Convergence vers 0 : Supposons que $\sigma_p(T) \setminus \{0\}$ contienne une infinité de valeurs propres (λ_n) avec $|\lambda_n| \geq \epsilon > 0$. Les vecteurs propres associés forment un ensemble borné, mais la compacité de T implique que T ne peut pas transformer une infinité de vecteurs propres indépendants en un ensemble relativement compact, ce qui conduit à une contradiction. Ainsi, $|\lambda_n| \to 0$.*

- *Cas de 0 : En dimension infinie, si $0 \notin \sigma(T)$, alors T est inversible, mais l'inverse d'un opérateur compact ne peut être borné (car l'image de la boule unité par T^{-1} serait compacte, or E est de dimension infinie). Ainsi, $0 \in \sigma(T)$.*

La démonstration complète repose sur des résultats d'analyse fonctionnelle, notamment le théorème de l'image fermée et la théorie des opérateurs compacts.

Example .16 *Considérons l'espace de Banach ℓ^2, l'espace des suites complexes de carré sommable, et l'opérateur $T : \ell^2 \to \ell^2$ défini par*

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{4}, \frac{x_3}{8}, \dots, \frac{x_n}{2^n}, \dots \right).$$

Cet opérateur est compact, car il est la limite uniforme d'opérateurs de rang fini. Calculons son spectre :

- *Pour $Tx = \lambda x$, on a $\frac{x_n}{2^n} = \lambda x_n$, soit $\lambda = \frac{1}{2^n}$. Les vecteurs propres sont les e_n, donc $\sigma_p(T) = \left\{ \frac{1}{2^n} \mid n \geq 1 \right\} \cup \{0\}$.*
- *Le théorème de Riesz-Schauder garantit que $\sigma(T) \setminus \{0\} = \left\{ \frac{1}{2^n} \mid n \geq 1 \right\}$, et les valeurs propres $\lambda_n = \frac{1}{2^n}$ convergent vers 0.*
- *Chaque espace propre pour $\lambda_n = \frac{1}{2^n}$ est de dimension 1, engendré par e_n.*
- *Puisque ℓ^2 est de dimension infinie, $0 \in \sigma(T)$, ici comme point d'accumulation.*

Ainsi, $\sigma(T) = \left\{ \frac{1}{2^n} \mid n \geq 1 \right\} \cup \{0\}$, conforme au théorème.

Conséquences

- Spectre continu et résiduel : Pour un opérateur compact, le spectre continu $\sigma_c(T) = \emptyset$, et le spectre résiduel $\sigma_r(T)$ est vide ou réduit à $\{0\}$, car $T - \lambda I$ est surjectif pour $\lambda \neq 0$.
- Applications : Le théorème est fondamental pour l'étude des équations intégrales (opérateurs de Hilbert-Schmidt) et des opérateurs différentiels avec conditions aux limites, où les valeurs propres décrivent les modes propres du système.
- Espaces de Hilbert : Dans un espace de Hilbert, pour un opérateur compact auto-adjoint, le théorème implique que (T) peut etre diagonalisé via une base orthonormale de vecteurs propres, avec des valeurs propres réelles convergeant vers (0).

Remarque .10

- *Le théorème de Riesz-Schauder distingue les opérateurs compacts des opérateurs bornés généraux, dont le spectre peut inclure un spectre continu ou résiduel non trivial.*
- *En dimension finie, tout opérateur est compact, et le spectre est fini, constitué uniquement de valeurs propres, sans point d'accumulation.*
- *Le théorème est un outil clé en physique mathématique, notamment pour analyser les opérateurs hamiltoniens en mécanique quantique, où les valeurs propres correspondent aux niveaux d'énergie.*
- *Une extension du theoretical concerne les opérateurs de Fredholm, où des résultats similaires s'appliquent à des perturbations d'opérateurs compacts.*

2.3 L'opérateur intégral de Volterra et le théorème de Riesz-Schauder

Définition .17
Soit $E = L^2([0,1],\mathbb{C})$*, l'espace de Banach des fonctions complexes à carré intégrable sur* $[0,1]$ *muni de la norme* $\|f\| = \left(\int_0^1 |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$*. L'opérateur intégral de Volterra* $V : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ *est défini par*

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \quad \forall x \in [0,1], \quad \forall f \in L^2([0,1]).$$

Cet opérateur est linéaire et borné. De plus, il est compact, car il peut être approximé uniformément par des opérateurs de rang fini (par exemple, en discrétisant l'intégrale). Nous allons analyser son spectre $\sigma(V)$ *en utilisant le théorème de Riesz-Schauder, qui stipule que pour un opérateur compact dans un espace de Banach de dimension infinie, le spectre est au plus dénombrable, constitué de valeurs propres de dimension finie (sauf peut-être* 0*), et les valeurs propres non nulles convergent vers* 0*.*

Analyse du spectre
Examinons le spectre de V en déterminant les valeurs $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquelles $V - \lambda I$ n'est pas inversible.

- Spectre ponctuel : Soit $\lambda \in \sigma_p(V)$, c'est-à-dire $Vf = \lambda f$ pour une fonction $f \in L^2([0,1])$, $f \neq 0$. Cela équivaut à

$$\int_0^x f(t)\,dt = \lambda f(x), \quad \forall x \in [0,1].$$

En dérivant cette équation (au sens des distributions), on obtient

$$f(x) = \lambda f'(x).$$

Si $\lambda = 0$, alors $\int_0^x f(t)\,dt = 0$, ce qui implique $f(x) = 0$ presque partout, donc $f = 0$, contradiction. Ainsi, $\lambda = 0 \notin \sigma_p(V)$. Supposons $\lambda \neq 0$. L'équation $f = \lambda f'$ a pour solution générale $f(x) = ce^{x/\lambda}$, où $c \in \mathbb{C}$.
Pour que $f \in L^2([0,1])$, il faut que $\int_0^1 |ce^{x/\lambda}|^2\,dx < \infty$. Cependant, comme $\mathrm{Re}(1/\lambda)$ peut être positif, négatif ou nul, $e^{x/\lambda}$ peut croître exponentiellement, et f n'est pas nécessairement dans $L^2([0,1])$. De plus, vérifions la condition initiale : $\int_0^x ce^{t/\lambda}\,dt = \lambda ce^{x/\lambda}$. Cela donne

$$\lambda c\left(e^{x/\lambda} - 1\right) = \lambda ce^{x/\lambda},$$

ce qui est impossible sauf si $c = 0$, donc $f = 0$. Par conséquent, il n'existe pas de valeur propre, et $\sigma_p(V) = \emptyset$.

- Inversibilité : Considérons $V - \lambda I$ pour $\lambda \neq 0$. L'équation $(V - \lambda I)f = g$ donne

$$\int_0^x f(t)\,dt - \lambda f(x) = g(x).$$

En dérivant, on obtient l'équation différentielle

$$f(x) - \lambda f'(x) = g'(x).$$

La solution est de la forme

$$f(x) = ce^{x/\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^x e^{(x-t)/\lambda} g'(t)\,dt.$$

Par intégration par parties, cela peut être réécrit pour montrer que $V - \lambda I$ est inversible pour $\lambda \neq 0$, avec un inverse borné. Ainsi, $\lambda \neq 0 \notin \sigma(V)$.

- Cas $\lambda = 0$: Si $\lambda = 0$, alors V n'est pas inversible, car $Vf = 0$ implique $\int_0^x f(t)\,dt = 0$, donc $f = 0$, mais V n'est pas surjectif: l'image de V est contenue dans l'espace des fonctions continues nulles en 0, qui n'est pas tout $L^2([0,1])$. Ainsi, $0 \in \sigma(V)$, et plus précisément $0 \in \sigma_r(V)$, le spectre résiduel.

Par le théorème de Riesz-Schauder, $\sigma(V) \setminus \{0\}$ est constitué de valeurs propres, or $\sigma_p(V) = \emptyset$. Donc, $\sigma(V) = \{0\}$. De plus, le spectre continu $\sigma_c(V) = \emptyset$, car $V - \lambda I$ est inversible pour $\lambda \neq 0$.

Proposition .11

1. *Compacité : L'opérateur V est compact, car son noyau $K(x,t) = \chi_{\{t \leq x\}}$ est dans $L^2([0,1] \times [0,1])$, ce qui en fait un opérateur de Hilbert-Schmidt, donc compact.*

2. *Spectre trivial : Contrairement à d'autres opérateurs compacts (comme dans l'exemple précédent avec des valeurs propres $\frac{1}{2^n}$), le spectre de V est réduit à $\{0\}$, ce qui est exceptionnel mais conforme au théorème de Riesz-Schauder, car l'ensemble vide de valeurs propres est dénombrable et satisfait la condition de convergence vers 0.*

3. *Non-valeur propre : L'absence de valeurs propres pour V est due à la nature intégrale de l'opérateur, qui lisse les fonctions et empêche des solutions propres non triviales dans $L^2([0,1])$.*

Remarque .11

- *L'opérateur de Volterra est un exemple classique d'opérateur compact dont le spectre est minimal ($\sigma(V) = \{0\}$), illustrant que le spectre ponctuel peut être vide, même pour un opérateur compact en dimension infinie.*

- *Dans d'autres espaces, comme $C([0,1])$, l'analyse du spectre de V donne des résultats similaires, avec 0 dans le spectre résiduel, mais la démonstration est adaptée à la topologie de la norme uniforme.*

- *Cet opérateur apparaît dans les équations intégrales de type Volterra, utilisées en physique (par exemple, en dynamique des fluides) et en théorie du contrôle.*
- *Le théorème de Riesz-Schauder garantit que le spectre non nul, s'il existe, est discret et converge vers* 0. *Ici, l'absence de valeurs propres non nulles est cohérente avec cette propriété.*
- *Une extension possible est l'étude de perturbations de* V*, où des valeurs propres peuvent apparaître, modifiant la structure du spectre.*

2.4 Représentation spectrale

2.4.1 Préliminaires sur la représentation spectrale

Définition .18
Soit E *un espace de Banach sur* $\mathbb{C}$*, et* $T : E \to E$ *un opérateur linéaire borné.*
La représentation spectrale d'un opérateur fait référence à une décomposition ou une expression de T__
en termes de son spectre $\sigma(T)$*, souvent via une intégrale spectrale ou une somme de projecteurs associés aux valeurs propres. Pour un opérateur compact* T*, le théorème de Riesz-Schauder implique que* $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *est constitué de valeurs propres de multiplicité finie, et si* $\sigma(T)$ *est infini, ces valeurs propres convergent vers* 0*. Dans un espace de Hilbert, pour un opérateur compact auto-adjoint ou normal, la représentation spectrale est particulièrement explicite :* T *peut être exprimé comme*

$$T = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \lambda P_\lambda,$$

où P_λ *est le projecteur orthogonal sur l'espace propre associé à la valeur propre* λ*.*

Cependant, pour des opérateurs non normaux, comme l'opérateur intégral de Volterra, la représentation spectrale est moins directe, car le spectre peut être réduit à $\{0\}$ *ou ne pas contenir de valeurs propres.*

2.4.2 Analyse spectrale de l'opérateur de Volterra

Définition .19
Considérons $E = L^2([0,1], \mathbb{C})$*, l'espace de Hilbert des fonctions à carré intégrable, et l'opérateur intégral de Volterra* $V : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ *défini par*

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \quad \forall x \in [0,1].$$

Cet opérateur est compact (car son noyau est de Hilbert-Schmidt) mais non auto-adjoint. Comme montré précédemment, son spectre est $\sigma(V) = \{0\}$*, avec un spectre ponctuel vide (*$\sigma_p(V) = \emptyset$*) et* $0 \in \sigma_r(V)$ *(spectre résiduel). Puisque* $\sigma_p(V) = \emptyset$*, il n'existe pas de valeurs*
propres permettant une décomposition spectrale classique sous forme de sommede projecteurs. La représentation spectrale de V *doit donc être envisagée différemment, par exemple via la résolvante*

ou une analyse fonctionnelle.

La résolvante de V, définie pour $\lambda \in \rho(V) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, est donnée par $R(\lambda, V) = (V - \lambda I)^{-1}$. Pour $\lambda \neq 0$, l'équation $(V - \lambda I)f = g$ conduit à une équation intégrale résoluble, et $R(\lambda, V)$ est un opérateur borné. Une représentation spectrale au sens large peut être obtenue en étudiant le comportement de V via son calcul fonctionnel, où une fonction holomorphe h appliquée à V est définie par

$$h(V) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma h(\lambda) R(\lambda, V)\, d\lambda,$$

où Γ est une courbe fermée entourant $\sigma(V) = \{0\}$. Cependant, comme $\sigma(V) = \{0\}$ et $\sigma_p(V) = \emptyset$, cette intégrale ne produit pas une décomposition en termes de valeurs propres, mais reflète la structure nilpotente ou quasi-nilpotente de V.

Example .17 *Puisque V n'a pas de valeurs propres, considérons un opérateur compact avec des valeurs propres pour illustrer une représentation spectrale classique. Soit $T : \ell^2 \to \ell^2$ défini par*

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{4}, \frac{x_3}{8}, \dots, \frac{x_n}{2^n}, \dots \right).$$

Cet opérateur est compact, et d'après le théorème de Riesz-Schauder, $\sigma(T) = \left\{ \frac{1}{2^n} \mid n \geq 1 \right\} \cup \{0\}$, avec $\sigma_p(T) = \left\{ \frac{1}{2^n} \mid n \geq 1 \right\}$ et 0 comme point d'accumulation. Chaque valeur propre $\lambda_n = \frac{1}{2^n}$ a un espace propre de dimension 1, engendré par le vecteur de base e_n. La représentation spectrale dans ℓ^2 (espace de Hilbert) est

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} P_n,$$

où P_n est le projecteur orthogonal sur span$\{e_n\}$, défini par $P_n(x) = \langle x, e_n \rangle e_n$. Cette somme converge dans la topologie forte, et T est entièrement décrit par ses valeurs propres et projecteurs. En revanche, pour l'opérateur de Volterra, l'absence de valeurs propres empêche une telle décomposition.

2.4.3 Propriétés

Proposition .12

1. *Compacité et spectre : Le théorème de Riesz-Schauder garantit que pour un opérateur compact comme V, $\sigma(V) \setminus \{0\}$ est constitué de valeurs propres de multiplicité finie convergeant vers 0. Pour V, cet ensemble est vide, donc la représentation spectrale ne repose pas sur des projecteurs.*

2. *Résolvante : La résolvante $R(\lambda, V)$ est définie pour tout $\lambda \neq 0$, et son comportement près de $\lambda = 0$ reflète la nature résiduelle de 0 dans $\sigma(V)$.*

3. *Nilpotence relative : Bien que V ne soit pas nilpotent, son spectre réduit à $\{0\}$ suggère une structure quasi-nilpotente, où les puissances itérées de V tendent à lisser davantage les fonctions.*

4. *Espace de Hilbert : Dans $L^2([0,1])$, l'absence de valeurs propres pour V contraste avec les opérateurs auto-adjoints compacts, qui admettent une base orthonormée de vecteurs propres.*

Remarque .12

- *L'opérateur de Volterra illustre un cas extrême où la représentation spectrale classique (via des valeurs propres) n'est pas applicable, mais une analyse via la résolvante ou le calcul fonctionnel reste possible.*
- *Dans un espace de Hilbert, la représentation spectrale est particulièrement puissante pour les opérateurs normaux, mais pour des opérateurs non normaux comme V, des outils comme la décomposition de Jordan ou des intégrales spectrales généralisées peuvent être nécessaires.*
- *L'étude de V est cruciale dans les équations différentielles et intégrales, où il modélise des processus avec mémoire (intégration sur le passé).*
- *Une extension consiste à étudier des perturbations de V, où des valeurs propres peuvent apparaître, permettant une représentation spectrale plus riche.*
- *Le théorème de Riesz-Schauder reste central, car il limite le spectre non nul aux valeurs propres, même si, dans le cas de V, ce spectre est vide.*

Chapter 3

Operateurs compacts auto-adjoints

Un résultat d'algèbre linéaire dit que pour une matrice A symétrique, i.e., $A^* = A$, il existe une base orthonormée dans laquelle elle est diagonale réelle. On va montrer un résultat analogue pour les opérateurs compacts auto-adjoints dans un espace de Hilbert. Pour cela, on considère un espace de Hilbert non réduit à $\{0\}$.

3.1 Décomposition spectrale des opérateurs compacts auto-adjoints

On commence par rappeler le théoréme spectral pour les opérateurs auto-adjoints en dimension finie.

Théorème .8
Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Si H est de dimension finie n, alors :

1. *Les sous-espaces propres $\ker(\lambda \operatorname{Id}_H - A)$, où $\lambda \in \sigma_p(A)$, sont deux à deux orthogonaux ,*
2. *A est diagonalisable dans une base orthonormée et*

$$H = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(A)} \ker(\lambda \operatorname{Id}_H - A).$$

3. *A admet la décomposition spectrale suivante :*

$$A = \sum_{\lambda \in \sigma_p(A)} \lambda P_\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma_p(A) \setminus \{0\}} \lambda P_\lambda,$$

où P_λ est la projection orthogonale de H sur $\ker(\lambda \operatorname{Id}_H - A)$. On caractérise, dans ce lemme, la norme d'un opérateur auto-adjoint compact.

Lemme .2 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors, $\|A\| = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma_p(A)\}$.*

Démonstration .12 *La condition $H \neq \{0\}$ est nécessaire pour assurer l'existence d'une valeur propre.*
Soit $\lambda \in \sigma_p(A)$, alors, il existe $y \in H$ tel que $\|y\| = 1$ et $Ay = \lambda y$. D'où,

$$|\lambda| = |\langle \lambda y, y\rangle| = |\langle Ay, y\rangle| \leq \|Ay\| \, \|y\| \leq \|A\| \, \|y\|^2 = \|A\|.$$

De plus, comme l'opérateur A est auto-adjoint, d'après le Théorème 1.6.2, il existe $\lambda_0 \in \sigma(A)$ telle que $|\lambda_0| = \|A\|$. Si $\lambda_0 = 0$, alors $A = 0$, d'où $\lambda_0 \in \sigma_p(A)$ (car H est non réduit à $\{0\}$). Si $\lambda_0 \neq 0$, comme A est compact, on a :

$$\lambda_0 \in \sigma(A) \setminus \{0\} = \sigma_p(A) \setminus \{0\}.$$

D'où, $\lambda_0 \in \sigma_p(A)$. On en déduit :

$$\|A\| = |\lambda_0| \leq \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma_p(A)\} \leq \|A\|.$$

Ce qui achève la démonstration du lemme. Le théoréme suivant est connu sous le nom du théoréme de Hilbert-Schmidt.

Théorème .9 ***(Décomposition spectrale)*** *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Si H est séparable, alors il admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de A. Autrement dit, A est diagonalisable dans une base hilbertienne.*

Démonstration .13 *Comme A est compact, alors son spectre est constitué de 0 et d'une suite finie ou infinie de valeurs propres non nulles. Comme A est auto-adjoint, ses valeurs propres sont réelles. Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ la suite des valeurs propres distinctes de A (avec $\lambda_0 = 0$). On pose $F_n = \ker(\lambda_n \operatorname{Id}_H - A)$ et $F_0 = \ker(A)$. D'après le théorème de Fredholm (Théorème 2.6.1), F_n est de dimension finie pour tout $n \geq 1$. De plus, les sous-espaces F_n sont deux à deux orthogonaux (voir Proposition 1.6.1). Soit F l'espace vectoriel engendré par les $(F_n)_{n\geq 0}$. On va montrer que F est dense dans H. On remarque d'abord que $A(F) \subset F$, de sorte que $A(F^\perp) \subset F^\perp$. En effet, pour tout $x \in F^\perp$, et pour tout $y \in F$, on a : $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle = 0$. Soit B la restriction de A à $F^\perp$. D'après ce qui précède, B est un opérateur de $F^\perp$ dans $F^\perp$. L'opérateur $B = A|_{F^\perp}$ est auto-adjoint compact, et $\sigma(B) = \{0\}$. En effet, d'après le Théorème 2.4.8, $\sigma(B) \setminus \{0\}$ est constitué des valeurs propres de B, qui seraient alors aussides valeurs propres de A. Les vecteurs propres associées appartiendront donc à F et à $F^\perp$, ce qui est absurde. D'après le Corollaire 1.6.4, $B = 0$ et on a :*

$$F^\perp \subset \ker(A) \subset F,$$

ce qui entraîne que $F^\perp = \{0\}$. Autrement dit, F est dense dans H. Reste à la fin de choisir dans chaque F_n une base hilbertienne.
La réunion de ces bases est une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de A. Ainsi, le résultat obtenu en dimension finie (Théorème 3.1.1) se généralise en dimension infinie comme suit

Théorème .10 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors, on a*

$$A = \sum_{\lambda \in \sigma_p(A)} \lambda P_\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma_p(A)\setminus\{0\}} \lambda P_\lambda,$$

où P_λ est la projection orthogonale de H sur $\ker(\lambda \operatorname{Id}_H - A)$.

3.2 Développement en serie de Fourier

On a vu dans la section précédente comment construire une base hilbertienne formée de vecteurs propres d'opérateurs auto-adjoints compacts. Dans l'espace L^2, on utilise très souvent des bases spéciales formées de fonctions propres d'un opérateur différentiel, ce qui est par exemple le point de départ de l'analyse harmonique. On commence cette section par donner la définition suivante.

Définition .20 *Un polynôme trigonométrique est une somme finie du type :* $P(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{2i\pi kt}$ *où* $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ *et* $c_k \in \mathbb{C}$. *Le degré du polynôme* P *est le plus petit* n *possible dans cette représentation.*

Notation .4 *Tout au long de cette section, on note par* H *l'espace de Hilbert* $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ *des classes de fonctions de carré intégrable sur* $[0, 2\pi]$. *On rappelle le produit scalaire et la norme sur* H, *pour tous* $f, g \in H$ *:*

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)}\, dx, \qquad \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx.$$

Remarque .13 *Toute classe de fonctions appartenant à* H *est représentée par une fonction* $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ *mesurable et de carré intégrable sur* $[0, 2\pi]$. *Il est pratique de prolonger* f *en une fonction* $\tilde{f}$, 2π*-périodique et mesurable. Il suffit pour cela de modifier* f *en un... Il suffit pour cela de modifier* f *en un point afin que* $f(0) = f(2\pi)$, *et de poser* $\tilde{f}(x + 2k\pi) = f(x)$ *pour* $x \in [0, 2\pi]$ *et* $k \in \mathbb{Z}$. *L'inverse est possible : une fonction* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π*-périodique, mesurable et de carré intégrable sur* $[0, 2\pi]$, *définit, par restriction, un élément de* H.

Proposition .13
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, *on définit la fonction* e_n *sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs complexes par :*

$$e_n(x) = e^{inx}.$$

La famille $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ *est une base hilbertienne de* H.

Démonstration. Les fonctions 2π-périodiques et continues sur $[0, 2\pi]$ constituent un sous-espace vectoriel dense dans $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$, c'est-à-dire que pour tout élément f de $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction g, 2π-périodique et continue sur $[0, 2\pi]$, telle que :

$$\|f - g\|_2 \leq \varepsilon.$$

Il existe aussi un polynôme trigonométrique P tel que :

$$\|g - P\|_\infty \leq \varepsilon.$$

À fortiori, on a :

$$\|g - P\|_2 \leq \varepsilon$$

(c'est ce qu'on exprime en disant que la convergence uniforme implique la convergence en moyenne quadratique). De l'inégalité triangulaire, il résulte :

$$\|f - P\|_2 \leq 2\varepsilon.$$

Les polynômes trigonométriques sont donc denses dans l'espace $L^2([0,2\pi],\mathbb{C})$, ce qui justifie le fait que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est totale dans $L^2([0,2\pi],\mathbb{C})$ et en est donc une base hilbertienne.

Définition .21 *Si $f \in H$, on appelle n-ième coefficient de Fourier de f le nombre complexe :*

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx.$$

La série formelle

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$$

*est appelée **série de Fourier** de f.*

Example .18 *Soit la fonction 2π-périodique définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & sur\ [0,\pi[\\ -1 & sur\ [\pi,2\pi[. \end{cases}$$

Le n-ième coefficient de Fourier de f est :

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{in} - \frac{(-1)^n}{in}\right).$$

Alors :

$$c_n(f) = \begin{cases} 0 & si\ n\ est\ pair \\ \frac{2}{in\pi} & si\ n\ est\ impair. \end{cases}$$

Le développement en série de Fourier de f est :

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}.$$

Maintenant, on peut énoncer le théorème suivant.

Théorème .11 *La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ étant une base hilbertienne de l'espace H, on a alors le développement :*

$$\forall f \in H, \quad f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n.$$

La série de Fourier d'une fonction $f \in H$ converge pour la topologie de H et sa somme est égale à f, c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to\infty}\left\| f - \sum_{|i|\le n} c_i(f)e_i \right\| = 0 \quad avec\ c_i(f) = \langle f, e_i\rangle.$$

De plus, pour deux fonctions f et g dans H, on a les formules suivantes :

(i) ***Inégalité de Bessel*** *: pour tout $J \subset \mathbb{Z}$,*

$$\sum_{n \in J} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

(ii) ***Identité de Plancherel*** *:*

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

(iii) ***Identité de Parseval*** *:*

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \overline{c_n(g)}.$$

Dans le cas des fonctions réelles, on note les coefficients de Fourier par $a_n(f)$ et $b_n(f)$, où :

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx,$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$
$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Les identités précédentes deviennent alors :

$$\|f\|_2^2 = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \right),$$

$$\langle f, g \rangle = a_0(f) a_0(g) + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \left(a_n(f) a_n(g) + b_n(f) b_n(g) \right).$$

Le corollaire suivant est une conséquence du théorème précédent.

Corollaire .4 *Soit f un élément de H. Dans l'ensemble des polynômes trigonométriques P de degré inférieur ou égal à n, le polynôme de Fourier*

$$S_n f = \sum_{|i| \leq n} c_i(f) e_i$$

réalise le minimum de $\|f - P\|_2$, et il est l'unique à avoir cette propriété.

Remarque .14 *On peut généraliser le résultat suivant pour $f \in L^p([0, 2\pi], \mathbb{C})$, avec $1 < p < +\infty$: la série de Fourier d'une fonction $f \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ converge et a pour somme $f(x)$ pour presque tout $x \in [0, 2\pi]$. On note qu'il existe des fonctions f intégrables sur $[0, 2\pi]$ dont la série de Fourier diverge en tout point.*

3.3 Fonctions propres et decomposition spectrale

L'analyse de Fourier a pour but de résoudre le probléme de la décomposition d'une onde périodique suivant ses différentes harmoniques. Fourier s'est particuliérement intéressé à la propagation de la chaleur, et c'est à cette occasion qu'il a eu l'idée de décomposer toute fonction périodique en une somme infinie de sinus et cosinus (série de Fourier). Lorsque la fonction à analyser n'est pas périodique, on remplace la décomposition en série par une décomposition continue sous forme d'intégrale.

3.3.1 Exemple de l'equation de la chaleur

Avant de passer à l'exemple, on introduit d'abord le théorème suivant.

Théorème .12 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$. Il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 1}$ de $L^2(\Omega)$ et une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ de réels strictement positifs avec $\lambda_n \to \infty$ telle que :*

$$\begin{cases} e_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega), \\ -\Delta e_n = \lambda_n e_n \quad \textit{sur } \Omega. \end{cases}$$

Les (λ_n) sont les valeurs propres de $-\Delta$ avec condition de Dirichlet (la condition aux limites $u = 0$ sur $\partial\Omega$ est dite condition de Dirichlet), et les (e_n) sont les fonctions propres associées.

Démonstration .14 *Étant donné $f \in L^2(\Omega)$, on note $u = Af$ l'unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ du problème :*

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega) : \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega f \varphi.$$

On considère alors A comme un opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.
Comme l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, A est un opérateur compact.
Il est aussi auto-adjoint :

$$\int_\Omega (Af)g = \int_\Omega (Ag)f.$$

De plus, $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ *et pour tout $f \in L^2(\Omega)$, on a :*

$$\int_\Omega (Af)f = \int_\Omega |\nabla(Af)|^2 \geq 0.$$

En vertu du Théorème 3.1.3, on en déduit que $L^2(\Omega)$ admet une base hilbertienne $(e_n)_n$ constituée de vecteurs propres de A associés à des valeurs propres μ_n avec $\mu_n > 0$ et $\mu_n \to 0$. Alors, on a $e_n \in H_0^1(\Omega)$ et

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega) : \quad \int_\Omega \nabla e_n \cdot \nabla \varphi = \frac{1}{\mu_n} \int_\Omega e_n \varphi.$$

D'où e_n est une solution faible de (3.1) avec $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n}$.

Example .19 *(Équation de la chaleur sur un domaine borné) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$. On note par t la variable du temps.*

Étant donnée une fonction u_0 définie sur Ω, on considère l'équation de la chaleur suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & sur\ \Omega\times]0,+\infty[\\ u = 0 & sur\ \partial\Omega\times]0,+\infty[\\ u(x,0) = u_0(x) & sur\ \Omega. \end{cases}$$

Modélisant la distribution de la température u dans le domaine Ω à l'instant t, si l'on maintient le bord à une température nulle. C'est l'exemple le plus simple d'équation aux dérivées partielles parabolique. L'équation de la chaleur apparaît dans de nombreux phénomènes de diffusion. Pour résoudre ce problème, on considère $u(x,t)$ comme une fonction définie sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans un espace H, où H est un espace de fonctions dépendant uniquement de x, par exemple $H = L^2(\Omega)$ ou $H = H_0^1(\Omega)$. On note alors $u(t)$ un élément de H, c'est-à-dire la fonction $x \mapsto u(x,t)$ pour un t fixé.
Ce point de vue permet d'obtenir facilement une solution du problème (3.2).
Lorsque le domaine Ω est borné, le problème (3.2) peut être résolu par décomposition sur une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ constituée de fonctions propres de l'opérateur $-\Delta$ avec condition de Dirichlet (Théorème 3.3.1) :

$$\begin{cases} -\Delta e_n = \lambda_n e_n & sur\ \Omega \\ e_n = 0 & sur\ \partial\Omega. \end{cases}$$

On cherche une solution de (3.2) sous la forme :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t) e_n(x),$$

par la méthode de Fourier. On remarque que l'on a On a $a_n'(t) + \lambda_n a_n(t) = 0$, alors $a_n(t) = a_n(0)e^{-\lambda_n t}$.
On détermine les constantes $a_n(0)$ à partir de la relation :

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(0) e_n(x),$$

les constantes $a_n(0)$ sont les composantes de $u_0(x)$ dans la base (e_n).
Enfin, la solution de (3.2) s'écrit sous la forme :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(0) e^{-\lambda_n t} e_n(x).$$

3.3.2 Exemple d'un operateur differentiel

Théorème .13 *Soient $I =]0,1[$, $p \in \mathcal{C}^1(I)$ avec $p(x) \geq \alpha > 0$ sur I et $q \in \mathcal{C}(I)$. Il existe alors une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ de réels et une base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 1}$ de $L^2(I)$ telles que... $e_n \in \mathcal{C}^2(I)$ et*

$$-(pe_n')' + qe_n = \lambda_n e_n \quad \text{sur } I,$$

avec les conditions aux limites :

$$e_n(0) = e_n(1) = 0,$$

et $\lambda_n \to +\infty$ lorsque $n \to \infty$.
Les (λ_n) sont les valeurs propres de l'opérateur différentiel

$$Au = -(pu')' + qu$$

avec condition de Dirichlet, et les (e_n) sont les fonctions propres associées.

Démonstration .15 *On procède comme dans la démonstration du Théorème 3.3.1.*
Pour tout $f \in L^2(I)$, il existe alors une unique fonction u vérifiant

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f \quad \text{sur } I, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

On note par A l'opérateur $f \mapsto u$ considéré comme un opérateur de $L^2(I)$ dans $L^2(I)$. Il suffit de vérifier que A est auto-adjoint compact pour déduire du Théorème 3.1.3 le résultat attendu.

Example .20 *Dans le cas où $p \equiv 1$ et $q \equiv 0$, on trouve pour tout $n \geq 1$:*

$$e_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x) \quad \text{et} \quad \lambda_n = n^2\pi^2.$$

Ainsi, on aboutit à un développement en série de Fourier de la solution.

Remarque .15 *L'opérateur de Sturm-Liouville $Au = -(pu')' + qu$ avec condition de Dirichlet sur I a de nombreuses propriétés spectrales : toute valeur propre est de multiplicité 1. Si l'on range les valeurs propres (λ_n) dans un ordre croissant, alors la fonction propre en associée à λ_n possède $(n-1)$ zéros sur I et la première fonction propre e_1 est de signe constant sur I. On propose en dernier ces problèmes à résoudre sous forme d'exercices.*

Conclusion .1 *Au terme de ce travail, il ressort que la théorie spectrale constitue l'un des piliers fondamentaux de l'analyse fonctionnelle. Elle représente une généralisation naturelle des notions de valeurs propres et de vecteurs propres des matrices aux opérateurs définis sur des espaces fonctionnels de dimension infinie, en particulier les espaces de Banach et de Hilbert. Cette généralisation a permis de fournir des outils puissants pour l'analyse des opérateurs linéaires, notamment ceux intervenant dans les équations différentielles et intégrales.*

Dans cette étude, nous avons tout d'abord présenté les bases théoriques relatives aux opérateurs linéaires, qu'ils soient bornés ou non, ainsi que la notion d'inversibilité. Nous avons ensuite introduit la définition précise du spectre et de ses différentes composantes : le spectre ponctuel, le spectre continu et le spectre résiduel. Une attention particulière a été portée aux opérateurs compacts

et à leurs propriétés spectrales spécifiques, avant de terminer par l'étude de la décomposition spectrale des opérateurs compacts auto-adjoints, illustrée à travers des exemples concrets tels que l'opérateur de Volterra ou l'équation de la chaleur.

Ce travail met en évidence non seulement la richesse théorique de la théorie spectrale, mais aussi son importance dans les applications, notamment en mécanique quantique et dans l'analyse spectrale des équations aux dérivées partielles. Nous espérons que ce mémoire contribuera à approfondir la compréhension du lecteur et servira de base à des recherches ultérieures dans ce domaine aussi vaste que passionnant.

Bibliography

[1] J.P. Aubin, Analyse fonctionnelle appliquée, Tome 2, Presses Universitaires de France, 1987.

[2] G. Aubrun, Théorie des opérateurs, M1 Mathématiques, Université de la Réunion. Polycopié disponible à l'adresse http ://math.univ-lyon1.fr/aubrun/enseignement/operateurs/cours.pdf.

[3] H. Brézis, Analyse fonctionnelle Théorie et applications, Collection Mathématiques appliquées pour la maˆ ıtrise, Masson, Paris, 1983.

[4] B. Buffoni; F.Genoud, Théoriespectrale et Évolution en mécanique quantique,2008.

[5] R.G.Cooke,Linear operators Spectral theory and some other application,london,1953

[6] Conway, J. B. A Course in Functional Analysis. Springer-Verlag.New York.1990.

[7] F. Bayen, C. Margaria, Espaces de Hilbert et opérateurs Problémes de mathématiques appliquées, Tome 2, Ellipses, 1986

[8] I. Chalendar, E. Fricain, Compléments en analyse : cours et exercices (Master en Mathématiques pures), 2010-2011. Polycopié disponible à l'adresse http ://math.univ-lille1.fr/fricain/cours-M2-2010-2011.pdf

[9] Dunford, N., & Schwartz, J. T.Linear Operators, Part I: General Theory. Interscience Publishers, New York.1958.

[10] R. Danchin, P. Rapha¨el, Solitons, Dispersion et explosion Une introduction à l'étude des ondes non linéaires, 2015. Polycopié disponible à l'adresse http ://perso-math.univ-mlv.fr/users/danchin.raphael/cours/ananonlinX14.pdf

[11] E. Fricain, Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs : cours et exercices (Master en Mathématiques pures), 2009-2010. Polycopié disponible à l'adresse http ://math.univ-lille1.fr/fricain/cours-M2-2009-2010.pdf

[12] S. Maingot, D. Manceau, Théorie spectrale. Polycopié disponible à l'adresse http ://d.p.manceau.free.fr/ThSpect/ThSpect.pdf

[13] Reed, M., & Simon, B. (1978). Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. IV: Analysis of Operators. Academic Press, New York.1978.

Chapter 4

Résumé

ملخص

تعالج هذه المذكرة موضوع نظرية الطيف للمؤثرات، أحد المواضيع الجوهرية في التحليل الدالي. تهدف إلى تعميم مفاهيم القيم الذاتية والمتجهات الذاتية إلى المؤثرات المعرفة على فضاءات دالية لا نهائية البعد، مع التركيز على فضاءات باناش وهيلبرت. تتضمن الدراسة ثلاث محاور رئيسية: المفاهيم الأساسية للمؤثرات الخطية (المحدودة وغير المحدودة)، النظرية الطيفية في فضاء باناش، ثم التمثيل الطيفي للمؤثرات المدمجة الذاتية المرافقة، مدعّمة بأمثلة تطبيقية مثل مؤثر فولتيرا ومعادلة الحرارة. تسعى هذه المذكرة إلى إبراز أهمية هذه النظرية في التحليل الوظيفي وفي التطبيقات الفيزيائية والرياضية.

Abstract

This thesis addresses the topic of the spectral theory of operators, a fundamental subject in functional analysis. It aims to extend the classical concepts of eigenvalues and eigenvectors to operators defined on infinite-dimensional functional spaces, especially Banach and Hilbert spaces. The study is divided into three main parts: the fundamentals of linear operators (bounded and unbounded), spectral theory in Banach spaces, and the spectral representation of compact self-adjoint operators, with applications such as the Volterra operator and the heat equation. This work highlights the theoretical and practical significance of spectral theory in mathematics and physics.

Résumé

Ce mémoire traite de la théorie spectrale des opérateurs, un thème central de l'analyse fonctionnelle. Il vise à généraliser les notions de valeurs propres et de vecteurs propres aux opérateurs définis sur des espaces fonctionnels de dimension infinie, en particulier les espaces de Banach et de Hilbert. L'étude est structurée en trois volets : les notions de base sur les opérateurs linéaires (bornés et non bornés), la théorie spectrale dans les espaces de Banach, et enfin la représentation spectrale des opérateurs compacts auto-adjoints, illustrée par des exemples comme l'opérateur de Volterra et l'équation de la chaleur. Ce travail met en évidence l'importance théorique et appliquée de cette théorie.