



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département de Mathématiques

## Mémoire de Master

**Domaine :** Mathématiques et Informatique  
**Filière :** Mathématiques  
**Option :** EDP et applications

### Thème

*Problème aux limites hyperbolique semi-linéaire pour les équations fortement elliptiques à coefficients variables avec terme source et terme d'amortissement*

**Présenté par :**  
CHOUCHA Mariem

Devant le jury composé de :

SENGOUGA Abdelmouhcene	M.C.A ,	Université de M'sila	<b>Président.</b>
BENABDERRAHMANE Benyettou	prof ,	Université de M'sila	<b>Encadreur.</b>
SAADI Abderachid	M.C.A	Université de M'sila	<b>Examineur.</b>

Année universitaire 2020/2021

# Remerciements

*Je voudrais d'abord remercier Allah qui m'a donné la volonté et le courage de réaliser le présent travail.*

*Je tiens à remercier Monsieur Benabderrahmane Benyattou, Professeur de Mathématiques à l'université de M'Sila, d'avoir accepté d'encadrer ce mémoire avec beaucoup de patience, sérieux et compétence. Il a su motiver chaque étape de mon travail par des remarques pertinentes. Je le remercie vivement pour ses conseils, ses corrections et ses orientations.*

*Je voudrais également exprimer mes sincères remerciements aux honorables messieurs les membres du jury.*

*Enfin, mes sincères remerciements à tous les professeurs de mathématiques de la faculté des Mathématiques et de l'Informatique à l'université de M'sila..*

*Merci à tous ceux qui ont contribué, avant ou jusqu'à maintenant, à l'aboutissement de ce travail.*

# Dédicaces

*Je dédie ce modeste travail accompagné avec amour et respect à :*

- *Celle qui m'a arrosé de tendresse et d'espoir, à la source d'amour inaccessible à la mère des sentiments fragiles qui m'a béni par ses prières (ma mère).*
- *Mon support dans ma vie, qui m'a appris et m'a dirigé vers la gloire (mon père).*
- *À toutes mes sœurs qui ont le mérite d'avoir éliminé de nombreux obstacles et difficultés de mon chemin.*
- *Voici mes chers amis, à vous tous qui m'avez aidé et qui avez toujours été à mes côtés pour m'aider tout leur temps.*

## ملخص

في هذه المذكرة، نعتبر مسألة حدية زائدية شبه خطية بوجود حد مصدر واخر للتخميد. باعتبار بعض الفرضيات حول المعطيات وبالاعتماد على طريقة التراص مقرونة بتقريبات فاودقلاركين نبرهن وجود ووحداية الحل للمسألة المعتبرة بدون حد مصدر. بعد ذلك وباعتبار نفس الفرضيات وباستعمال طريقة النقطة الثابتة نبرهن أن المسألة بوجود حد مصدر تقبل حلا وحيدا. نختم بتحليل مسألة الاستقرار والسلوك المقارب للحل المتحصل عليه.

**الكلمات المفتاح :** الوجود الإجمالي، الوجود المحلي، السلوك المقارب، مسألة زائدية، تقريبات فاودقلاركين، طريقة التراص، طريقة النقطة الثابتة.

## Résumé

Dans ce mémoire, on considère un problème aux limites hyperbolique semi-linéaire avec terme source et terme d'amortissement. Sous certaines hypothèses sur les données en se basant sur la méthode de compacité avec les approximations de Faedo-Galerkin on démontre l'existence et l'unicité d'une solution du problème considéré, sans terme source. En suite, sous les mêmes hypothèses en utilisant la méthode du point fixe on prouve que notre problème avec terme source possède une solution unique. On termine par analyser la stabilité et le comportement asymptotique de la solution obtenue.

**Mots clés :** Existence globale; Existence locale; Comportement asymptotique; Problème hyperbolique; Faedo-Galerkin; Méthode de compacité, Théorème du point fixe.

## Abstract

In this work, we consider a semi-linear hyperbolic boundary problem with source term and damping term. Under certain assumptions on the data, by using the Faedo-Galerkin approximations and the compactness method we show the existence and the uniqueness of a solution of the considered problem, without source term. Next, under the same hypotheses using the fixed point method we prove that our problem with source term has a unique solution. We finish by analyzing the stability and the asymptotic behavior of the obtained solution.

**Keywords:** Global existence; Local existence; Asymptotic behavior; Hyperbolic problem; Faedo-Galerkin; Compactness method, Fixed point theorem.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>v</b>
<b>1 Méthode de compacité pour un problème hyperbolique semi-linéaires sans terme source pour les équations elliptiques à coefficients variables.</b>	<b>2</b>
1.1 Position de problème . . . . .	3
1.2 Résultats préliminaires et notations . . . . .	4
1.2.1 Lemme de Gronwall . . . . .	6
1.3 Formulation variationnelle . . . . .	7
1.4 Existence et Unicité . . . . .	10
1.4.1 Existence de la solution . . . . .	10
1.4.2 Unicité de la solution . . . . .	22
<b>2 Méthode du point fixe pour un problème hyperbolique semi-linéaire à coefficients variables avec terme source</b>	<b>23</b>
2.1 Position de problème . . . . .	24
2.2 Existence et Unicité . . . . .	24
2.2.1 Preuve du Lemme 2.1 . . . . .	26
2.2.2 Preuve du Théorème 2.1 . . . . .	33
<b>3 Existence globale et stabilité exponentielle des solutions pour un problème hyperbolique semi-linéaire à coefficients variables avec terme source.</b>	<b>38</b>
3.1 Existence globale . . . . .	39
3.2 Décroissance exponentielle . . . . .	42
<b>Conclusion</b>	<b>48</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>48</b>

# Introduction

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basée sur les équations aux dérivées partielles (E.D.P). C'est en effet grâce à la modélisation de ces phénomènes à travers des équations aux dérivées partielles, qui nous permettent de comprendre le rôle de tel ou tel paramètre, et surtout obtenir des prévisions parfois extrêmement précises. En particulier les équations d'ondes modélisent plusieurs phénomènes naturels en : Physique, Chimie, Biologie.

Notre objectif dans ce mémoire est d'étudier l'existence locale, l'existence globale et le comportement asymptotique des solutions pour un problème aux limites hyperbolique semi-linéaire pour les équations fortement elliptiques à coefficients variables avec terme source et terme d'amortissement. Les techniques utilisées sont celles de la méthode de compacité, méthode du point fixe, méthode énergétique et les approximations de Faedo-Galerkin, voir [10], [2], [3], [5].

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Dans le premier, on considère un problème aux limites hyperbolique semi-linéaire pour des équations fortement elliptiques à coefficients variables sans terme source. En en se basant sur les approximations de Faedo-Galerkin combinées avec la méthode de compacité, nous allons prouver l'existence locale et l'unicité d'une solution sous certaines conditions sur les données.

Dans le second chapitre, on considère le même problème du premier chapitre avec terme source. Sous certaines hypothèses sur les données la méthode du point fixe combinée avec les résultats obtenus dans le chapitre précédent nous permettent l'obtention de l'existence et l'unicité d'une solution.

Dans le dernier chapitre, on s'intéresse à l'étude du même problème considéré dans

le chapitre précédent. En effet, en se basant sur les mêmes techniques utilisées dans les chapitres précédents nous allons démontrer que la solution existe globalement en temps. Ensuite, nous allons prouver que la solution est exponentiellement décroissante en se basant sur la construction d'une fonction de Lyapunov  $L$ , qui est équivalente à la fonctionnelle d'énergie du problème considéré.

Ce mémoire se termine par une conclusion et perspectives.

# Notations

$\Omega$ :	Un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ .
$\bar{\Omega}$ :	Adhérence de $\Omega$ .
$C^1(\bar{\Omega})$ :	L'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\bar{\Omega}$ .
$D(\Omega)$ ou $C_0^\infty(\Omega)$ :	L'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiable et à support compact contenu dans $\Omega$ .
$H^1(\Omega)$ :	L'espace de Sobolev d'ordre 1.
$H_0^1(\Omega)$ :	Adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ .
$H^{-1}(\Omega)$ :	Dual topologique de $H_0^1(\Omega)$ .
$L^r(\Omega)$ :	L'espace de Lebesgue d'ordre $1 \leq r \leq \infty$ .
$u'$ ou $u_t$ :	La dérivée première de $u$ par rapport aux temps $\frac{\partial u}{\partial t}$ .
$u''$ ou $u_{tt}$ :	La dérivée seconde de $u$ par rapport aux temps $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ .
$\gamma_i, i = 1, 2$ :	désigne les applications de trace.
$\ \cdot\ _{L^p(0,T;X)}$ :	La norme de l'espace de Lebesgue $L^p(0, T; X)$ .
$C^1(0, T; X)$ :	L'espace des fonctions continûment différentiables de $[0, T] \rightarrow X$ .
$\mathcal{L}(X, Y)$ :	L'espace des applications linéaires continues de $X$ dans $Y$ , où $X$ et $Y$ sont des espaces vectoriels topologiques.
$p.p$ :	presque partout.
$C_*$ :	La constante de Poincaré.

# Chapitre 1

## Méthode de compacité pour un problème hyperbolique semi-linéaires sans terme source pour les équations elliptiques à coefficients variables.

**Résumé.** *Dans ce chapitre, nous allons étudier l'existence locale et l'unicité d'une solution d'un problème hyperbolique semi-linéaire elliptique pour des équations elliptiques à coefficients variables et sans terme source en se basant sur les techniques de Faedo-Galerkin et la méthode de compacité.*

### **Contenu :**

1. Position de problème ;
2. Résultats préliminaires et notations ;
3. Formulation variationnelle ;
4. Existence et Unicité ;
  - (a) Existence d'une solution ;
  - (b) Unicité de la solution ;

## 1.1 Position de problème

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , à frontière  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  assez régulière, où  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ ,  $\mu(\Gamma_1) > 0$ .

L'objet de ce chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité d'une solution  $u : Q = \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie le problème suivant :

$$(P) : \begin{cases} u'' - \nabla \cdot (A \nabla u) + g(u_t) = f(x, t) & \text{dans } Q = \Omega \times (0, T) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \\ \frac{\partial u}{\partial \eta_A} = A \nabla u \cdot \eta = h & \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $\eta_A$  est la normale unitaire sortante à  $\Gamma$  et  $h, u_0$  et  $u_1$  sont des fonctions données.

A fin d'étudier le problème (1.1) et de formuler le théorème d'existence et d'unicité on aura besoin des hypothèses suivantes :

- **Hypothèses**

( $H_1$ ) L'opérateur fortement elliptique  $B$  est défini comme suit

$$B\varphi = \nabla \cdot (A \nabla \varphi),$$

où la matrice  $A = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n}$  vérifie

$$\begin{cases} a) a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\bar{\Omega}), \forall 1 \leq i, j \leq n; \\ b) \exists a_0 > 0 : (Au, u) \geq a_0 |u|^2, \forall u \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

pour tout  $x \in \bar{\Omega}$ .

( $H_2$ ) On suppose que la fonction  $g \in C^0(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}^*)$  est croissante. En outre, on suppose qu'il existe une constante positive  $k_0$  telle que

$$g(v)v \geq k_0 |v|^m \text{ pour tout } v \in \mathbb{R}, 2 \leq m < \infty. \quad (1.2)$$

( $H_3$ )

$$u_0 \in V \cap H^2(\Omega).$$

(H<sub>4</sub>)

$$u_1 \in V.$$

(H<sub>5</sub>)

$$f \in H^1((0, T); L^2(\Omega)).$$

(H<sub>6</sub>)

$$h \in H^1((0, T); L^2(\Gamma_2)).$$

De plus, on aura besoin d'introduire quelques résultats préliminaires et notations que nous utiliserons ultérieurement.

## 1.2 Résultats préliminaires et notations

Pour simplifier l'écriture, on posera

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} = \|u\|_r; 1 \leq r \leq \infty,$$

où  $L^r(\Omega)$  est un espace de Lebesgue.

On désigne par  $(u, v)$  le produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$ , i.e.

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx.$$

On note par  $V$  le sous-espace fermé de  $H^1(\Omega)$  défini par :

$$V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\},$$

où  $H^1(\Omega)$  est l'espace de Sobolev d'ordre 1 muni de la norme :

$$\left( \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

D'après le théorème de prolongement de Sobolev, on a

$$\begin{cases} V \subset L^q(\Omega); \\ \frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \text{ si } n \geq 3. \end{cases} \quad (1.3)$$

Rappelons que l'inégalité de Poincaré est valable dans  $V$  :

$$\exists C_* > 0; \forall u \in V, \|u(t)\|_p \leq C_* \|u(t)\|_V, \text{ où } \begin{cases} 2 \leq p \leq \frac{2n-2}{n-2} & \text{si } n \geq 3 \\ 2 \leq p \leq +\infty & \text{si } n = 1, 2 \end{cases} \quad (1.4)$$

**Lemme 1.1** (Voir Lions [10], page 6) *L'espace  $V$  est séparable, c'est à dire :  $V$  admet un sous ensemble dénombrable dense.*

**Définition 1.1** Soit  $1 \leq p \leq +\infty$ . L'espace de Lebesgue  $L^p(0, T; X)$  est l'ensemble des classes de fonctions  $f : (0, T) \rightarrow X$  mesurable, telles que l'application  $t \mapsto \|f(t)\|_X$  appartient à  $L^p(X)$ .

**Proposition 1.1**  $L^p(0, T; X)$  est un espace vectoriel, normé avec la norme

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(0, T; X)} &= \left( \int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \text{ si } 1 \leq p < +\infty, \\ \|f\|_{L^p(0, T; X)} &= \inf \{ C > 0 / \|f(t)\|_X \leq C; p.p t \in (0, T) \} \text{ si } p = \infty. \end{aligned}$$

Naturellement, on a

$$L^p(0, T; L^p(\Omega)) = L^p(Q) \text{ où } Q = \Omega \times (0, T).$$

Par ailleurs, nous avons les résultats suivants :

**Proposition 1.2** 1.  $L^p(0, T; X), (1 \leq p \leq +\infty)$  est un espace de Banach.

2. Si  $X$  est un espace de Hilbert avec le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_X$ , alors  $L^2(0, T; X)$  est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(0, T; X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt.$$

3.  $L^r(0, T; X) \hookrightarrow L^q(0, T; X)$  avec injection continue,  $1 \leq q \leq r \leq +\infty$ .

4. Si  $X$  est un espace de Hilbert, alors

$$\begin{aligned} L^p(0, T; X)' &= L^q(0, T; X) \text{ si } 1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \\ L^1(0, T; X)' &\subset L^\infty(0, T; X), \end{aligned}$$

où  $L^p(0, T; X)'$  représente le dual topologique de l'espace  $L^q(0, T; X)$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ .

5. D'après ([2]), l'espace

$$L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)) \quad (\text{resp de } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)))$$

est le dual de

$$L^1(0, T; H^{-1}(\Omega) + L^q(\Omega)) \quad (\text{resp de } L^1(0, T; L^2(\Omega))).$$

Et  $H^{-1}(\Omega) + L^q(\Omega)$  muni de la structure de dual fort de  $H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ , où  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

### 1.2.1 Lemme de Gronwall

Dans ce paragraphe, on donne formes du lemme de Gronwall qui nous aident à démontrer l'existence et l'unicité de la solution.

**Lemme 1.2** Soient  $f, g \in C(0, T; \mathbb{R})$  deux fonctions positives pour tout  $t \in [0, T]$  et soit  $a \geq 0$ . Si  $\Psi \in C(0, T; \mathbb{R})$  est une fonction telle que :

$$\Psi(t) \leq a + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t g(s)\Psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$\Psi(t) \leq \left( a + \int_0^t f(s)ds \right) \exp \left( \int_0^t g(s)ds \right), \forall t \in [0, T].$$

Pour le cas particulier  $f = 0$ , ce Lemme devient

**Corollaire 1.1** Soit  $g \in C(0, T; \mathbb{R})$  telle que  $g(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, T]$  et soit  $a \geq 0$ .  $\Psi \in C(0, T; \mathbb{R})$  est une fonction telle que :

$$\Psi(t) \leq a + \int_0^t g(s)\Psi(s)ds, \forall t \in [0, T].$$

Alors

$$\Psi(t) \leq a \exp \left( \int_0^t g(s)ds \right), \forall t \in [0, T].$$

### 1.3 Formulation variationnelle

Pour étudier l'existence locale, nous procédons à obtenir une formulation variationnelle du problème (1.1).

**Lemme 1.3** *Sous les hypothèses  $(H_1) - (H_6)$  le problème (1.1) est formellement équivalent au problème variationnel suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouve } u \in V \text{ tel que :} \\ (u_{tt}, v) + a(u, v) + (g(u_t), v) = (f, v) + \int_{\Gamma_2} hvd\Gamma, \forall v \in V \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), x \in \Omega; \end{array} \right.$$

où

$$a(u, v) = \int_{\Omega} A\nabla u \nabla v dx \quad (1.5)$$

$$V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$$

**Preuve.** En multipliant la première équation de (1.1) par un élément  $v \in H^1(\Omega)$ , et en intégrant sur  $\Omega$ , on obtient

$$(u_{tt}, v) - (\nabla \cdot (A\nabla u), v) + (g(u_t), v) = (f, v)$$

En utilisant la formule de Green, on obtient

$$(\nabla \cdot (A\nabla u), v) = \int_{\Omega} \nabla \cdot (A\nabla u) v dx = \int_{\Gamma} (A\nabla u \cdot \eta) v d\Gamma - \int_{\Omega} A\nabla u \nabla v dx$$

Comme  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  est une partition de  $\Gamma$ , alors

$$(\nabla \cdot (A\nabla u), v) = \int_{\Gamma_1} (A\nabla u \cdot \eta) v d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (A\nabla u \cdot \eta) v d\Gamma - \int_{\Omega} A\nabla u \nabla v dx$$

En posant  $v = 0$  sur  $\Gamma_1$  et en utilisant le fait que et  $\frac{\partial u}{\partial \eta_A} = A\nabla u \cdot \eta = h$  sur  $\Gamma_2$ , on obtient le problème variationnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_{tt}, v) + a(u, v) + (g(u_t), v) = (f, v) + \int_{\Gamma_2} hvd\Gamma, \forall v \in V \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), x \in \Omega; \end{array} \right. \quad (\text{PV})$$

où

$$a(u, v) = \int_{\Omega} A \nabla u \nabla v dx.$$

$$V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}.$$

Inversement, si  $u \in V$  est une solution du problème  $(PV)$ , alors

$$(u_{tt}, v) + a(u, v) + (g(u_t), v) = (f, v) + \int_{\Gamma_2} h v d\Gamma, \forall v \in V,$$

ou encore sous la forme

$$(u_{tt}, v) + \int_{\Omega} A \nabla u \nabla v dx + (g(u_t), v) = (f, v) + \int_{\Gamma_2} h v d\Gamma, \forall v \in V.$$

En utilisant la formule de Green, on obtient :

$$(u_{tt}, v) - \int_{\Omega} \nabla \cdot (A \nabla u) v dx + \int_{\Gamma_1} (A \nabla u \cdot \eta) v d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (A \nabla u \cdot \eta) v d\Gamma + (g(u_t), v) = (f, v) + \int_{\Gamma_2} h v d\Gamma, \forall v \in V. \quad (1.6)$$

Comme  $v \in V$ , donc  $v = 0$  sur  $\Gamma_1$ , alors

$$(u_{tt}, v) - \int_{\Omega} \nabla \cdot (A \nabla u) v dx + \int_{\Gamma_2} (A \nabla u \cdot \eta) v d\Gamma + (g(u_t), v) = (f, v) + \int_{\Gamma_2} h v d\Gamma, \forall v \in V.$$

En utilisant le fait que  $D(\Omega)$  est dense dans  $V$ , alors de (1.6) il en découle

$$(u_{tt}, \varphi) - \int_{\Omega} \nabla \cdot (A \nabla u) \varphi dx + (g(u_t), \varphi) = (f, \varphi), \forall \varphi \in D(\Omega).$$

ou sous forme équivalente

$$\int_{\Omega} (u_{tt} - \nabla \cdot (A \nabla u) + g(u_t)) \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx, \forall \varphi \in D(\Omega). \quad (1.7)$$

D'où il en résulte

$$u_{tt} - \nabla \cdot (A \nabla u) + g(u_t) = f \text{ p.p. dans } \Omega.$$

D'autre part en remplaçant (1.7) dans (1.6), on obtient :

$$\int_{\Gamma_2} (A\nabla u \cdot \eta) v d\Gamma = \int_{\Gamma_2} h v d\Gamma, \forall v \in V.$$

Donc :

$$A\nabla u \cdot \eta = h \text{ dans } \Gamma_2.$$

D'où la démonstration du Lemme 1.3. ■

**Lemme 1.4** *Sous les hypothèses  $(H_1)$ - $(H_6)$ , l'application  $a(.,.) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme bilinéaire, continue et coercive sur  $V \times V$ , et par conséquent  $a(u, u)^{\frac{1}{2}}$  une semi norme équivalente à la norme de  $V$ .*

$$a(u, u) \approx \|u\|_V^2.$$

**Preuve.** 1. Bilinéarité : Elle est évidente.

2. La continuité : Pour tout  $u, v \in V$  on a

$$|a(u, v)| = \left| \int_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla v dx \right|.$$

Comme  $a_{i,j} = a_{j,i} \in C^1(\overline{\Omega})$  en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \max_{x \in \overline{\Omega}} |a_{i,j}(x)| \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \text{ par définition on obtient} \\ &\leq C \|u\|_V \|v\|_V. \end{aligned} \tag{1.8}$$

D'où la continuité.

3. Coercivité : Pour tout  $u \in V$  on a

$$a(u, u) = \int_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla u dx = (A\nabla u, \nabla u).$$

En utilisant l'hypothèse  $(H_1 : b)$ , on obtient

$$(A\nabla u, \nabla u) \geq a_0 |\nabla u|^2. \tag{1.9}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, qui est vérifiée dans  $V$ , il en découle

$$a(u, u) \geq C' \|u\|_V^2. \quad (1.10)$$

D'où la coercivité.

Dans l'équation (1.8), on pose  $v = u$ , on obtient :

$$|a(u, u)| \leq C \|u\|_V \|u\|_V = C \|u\|_V^2.$$

En utilisant la continuité (l'équation (1.8)) et la coercivité (l'équation (1.10)) de  $a(\cdot, \cdot)$ , on trouve :

$$C' \|u\|_V^2 \leq a(u, u) \leq C \|u\|_V^2.$$

D'où, on déduit que  $a(u, u)$  est une semi norme équivalente à la norme  $\|u\|$  de  $V$  ( $\|u\|_V$ )

$$a(u, u) \approx \|u\|_V^2.$$

■

## 1.4 Existence et Unicité

Dans ce paragraphe et sous les hypothèses que nous avons citées précédemment, l'existence locale et l'unicité d'une solution faible seront obtenus en se basant sur les approximations de Faedo-Galarkin combinées avec la méthode de compacité.

### 1.4.1 Existence de la solution

**Théorème 1.1** *Supposons que les hypothèses  $(H_1) - (H_6)$  sont vérifiées, soit  $p \geq 2$  et  $m \geq 2$ . Alors il existe  $T > 0$  et une solution unique  $u$  du problème (1.1) sur  $[0, T]$  telle que :*

$$u \in L^\infty([0, T]; V),$$

$$u_t \in L^\infty([0, T]; V) \cap L^m(\Omega \times [0, T]),$$

$$u_{tt} \in L^\infty([0, T]; L^2(\Omega)).$$

**Lemme 1.5** *Sous les hypothèses du théorème 1.1, les conditions initiales  $u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x)$  ont un sens.*

Pour démontrer ce Lemme on aura besoin des lemmes suivants :

**Lemme 1.6** *(voir Lions [10], page 7) Soit  $X$  un espace de Banach, si  $f \in L^p(0, T; X)$  et  $\frac{\partial f}{\partial t} \in L^p(0, T; X)$ , ( $1 \leq p \leq \infty$ ), alors  $f$  est, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de  $(0, T)$ , continue de  $[0, T] \rightarrow X$ .*

**Lemme 1.7** *([13]) L'inclusion de  $(V, \|\cdot\|_V)$  dans  $(L^2(\Omega), |\cdot|_{L^2(\Omega)})$  est continue et  $V$  est dense dans  $L^2(\Omega)$ . Nous notons par  $V'$  l'espace dual de  $V$ ,  $V$  est identifié avec  $L^2(\Omega)$  et avec son propre dual, nous pouvons écrire le triple de Gelfand.*

$$V \hookrightarrow_{\text{continue}} L^2(\Omega) \hookrightarrow_{\text{continue}} V',$$

où

$$\|v\|_{V'} \leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_V, \forall v \in V.$$

**Lemme 1.8** *(voir Lions [10], page 12) Soit  $\theta$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$ ,  $g_\mu$  et  $g$  des fonctions de  $L^q(\theta)$ ,  $1 < q < \infty$ , telles que*

$$\|g_\mu\|_{L^q(\theta)} \leq C, \quad g_\mu \rightarrow g \text{ p.p dans } \theta.$$

Alors

$$g_\mu \rightarrow g \text{ dans } L^q \text{ faible.}$$

**Preuve.** (du Lemme 1.5)

On suppose que les hypothèses du théorème 1.1 sont vérifiées, on a

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty([0, T]; V), \\ u_t &\in L^\infty(0, T; V) \cap L^m(\Omega \times (0, T)). \end{aligned}$$

En particulier

$$u \text{ et } u_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Grâce au lemme 1.6 on conclut que  $u : [0, T] \rightarrow L^2(\Omega)$  est continue, et par conséquent la condition initiale  $u(x, 0) = u_0(x)$  a un sens.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} u_t &\in L^\infty([0, T]; V) \cap L^m(\Omega \times [0, T]), \\ u_{tt} &\in L^\infty([0, T]; L^2(\Omega)), \end{aligned}$$

en particulier

$$\begin{aligned} u_t &\in L^\infty([0, T]; V), \\ u_{tt} &\in L^\infty([0, T]; L^2(\Omega)), \end{aligned}$$

donc

$$u_t \text{ et } u_{tt} \in L^\infty([0, T]; L^2(\Omega)).$$

Grâce au lemme 1.6, on déduit que  $u' : [0, T] \rightarrow L^2(\Omega)$  est continue, et par conséquent  $u'(x, 0) = u_1(x)$  a un sens. ■

**Preuve.** (du Théorème 1.1)

Le plan de la démonstration est le suivant :

- ▶ On cherche des solutions approchées ;
- ▶ On établit, sur ces solutions, des estimations a priori ;
- ▶ On passe à la limite, grâce à des propriétés de compacité.

**Etape 1 :** *Solutions approchées*

L'espace  $V$  est séparable et d'après le lemme 1.1, il existe une suite  $w_1, w_2, \dots, w_k, \dots$  des fonctions ayant les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_j \in V, \forall j; j = 1, 2, \dots, k, \\ \forall k, \{w_1, w_2, \dots, w_k\} \text{ est libre,} \\ V_k = \langle \{w_1, w_2, \dots, w_k\} \rangle \text{ l'espace engendré par } \{w_j\}_{j=1}^k \text{ est dense dans } V. \end{array} \right.$$

On cherche alors  $u_k = u_k(t)$  sous la forme

$$u_k(x, t) = \sum_{j=1}^k h_{jk}(t) w_j(x), x \in \Omega, t \in [0, T_k]$$

solution du problème variationnel approché, associé au problème (1.1) suivant :

$$(P_k) : \begin{cases} (u_k''(t), w_j) + a(u_k(t), w_j) + (g(u_k''(t)), w_j) = (f(t), w_j) + \int_{\Gamma_2} h(t) w_j d\Gamma, \forall j = 1, \dots, k; \\ u_k(x, 0) = u_{0k}; u_k'(x, 0) = u_{1k}; \end{cases} \quad (1.11)$$

et telle que :

$$u_k(x, 0) = u_{0k} = \sum_{j=1}^k \alpha_{jk} w_j \rightarrow u_0 \text{ dans } V. \quad (1.12)$$

$$u_k'(x, 0) = u_{1k} = \sum_{j=1}^k \beta_{jk} w_j \rightarrow u_1 \text{ dans } L^2(\Omega). \quad (1.13)$$

On obtient un système d'équations différentielles non linéaires du second ordre. Comme la famille  $\{w_j\}_{j=1}^k$  est linéairement indépendante, alors le système admet au moins une solution  $u_k$  dans  $[0, T_k]$ ,  $T_k$  dépend de  $k$ .

L'étape qui suit montre que  $T_k = T$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .

**Etape 2 :** Les estimations à priori

*Estimation 01 :* En multipliant la première équation de (1.11) par  $h'_{jk}$ , on obtient

$$(u_k''(t), u_k'(t)) + a(u_k(t), u_k'(t)) + (g(u_k''(t)), u_k'(t)) = (f(t), u_k'(t)) + \int_{\Gamma_2} h u_k' d\Gamma.$$

Nous avons

$$\frac{d}{dt} \|u_k'(t)\|_2^2 = \frac{d}{dt} (u_k'(t), u_k(t)) = (u_k''(t), u_k'(t)) + (u_k'(t), u_k''(t)) = 2(u_k''(t), u_k'(t)),$$

d'où

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_k'(t)\|_2^2 = (u_k''(t), u_k'(t)).$$

En utilisant la bilinéarité de  $a(.,.)$  on a

$$\frac{d}{dt}a(u_k(t), u_k(t)) = a(u_k(t), u'_k(t)) + a(u'_k(t), u_k(t)) = 2a(u_k(t), u'_k(t)).$$

Donc, on peut écrire :

$$a(u_k(t), u'_k(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(u_k(t), u_k(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_k(t)\|^2.$$

On a :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u'_k(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(u_k(t), u_k(t)) + (g(u'_k(t)), u'_k(t)) = (f(t), u'_k(t)) + \int_{\Gamma_2} h(s) u'_k(s) d\Gamma. \quad (1.14)$$

Ce qui donne, en valeur absolue :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \|u'_k(t)\|_2^2 + \|u_k(t)\|^2 \right) + \|u'_k(t)\|_2^2 + (g(u'_k(t)), u'_k(t)) \leq \\ & \leq |(f(t), u'_k(t))| + \int_{\Gamma_2} |h(s) u'_k(s)| d\Gamma. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \|u'_k(t)\|_2^2 + \|u_k(t)\|^2 \right) + \|u'_k(t)\|_2^2 + (g(u'_k(t)), u'_k(t)) \\ & \leq \|f(t)\|_{L^2(\Omega)} \|u'_k(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|h(s)\|_{L^2(\Gamma_2)} \|u'_k(t)\|_{L^2(\Gamma_2)}. \end{aligned}$$

D'après les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$  et par l'intégration sur  $(0, t)$ , il résulte :

$$\begin{aligned} \|u'_k(t)\|_2^2 + \|u_k(t)\|^2 + 2k_0 \int_0^t \|u'_k(s)\|_m^m ds & \leq 2 \int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\Omega)} \|u'_k(s)\|_{L^2(\Omega)} ds + \|u'_k(0)\|_2^2 \\ & + 2 \int_0^t \|h(s)\|_{L^2(\Gamma_2)} \|u'_k(s)\|_{L^2(\Gamma_2)} ds, \quad (1.16) \end{aligned}$$

En tenant en compte de la continuité de la fonction trace

$$\gamma_1 : V \rightarrow L^2(\Gamma_2) : \gamma_1(u) = u'/\Gamma_2,$$

On a

$$|\gamma_1(u)|_{L^2(\Gamma_2)} \leq C_2 \|u(s)\|_V.$$

Donc

$$\begin{aligned} \|u'_k(t)\|_2^2 + \|u'_k(t)\|^2 + 2k_0 \int_0^t \|u'_k(s)\|_m^m ds &\leq 2 \int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\Omega)} \|u'_k(s)\|_{L^2(\Omega)} ds + \|u'_k(0)\|_2^2 \\ &\quad + \|u_k(0)\|^2 + 2C_2 \int_0^t \|h(s)\|_{L^2(\Gamma_2)} \|u(s)\|_V ds, \end{aligned}$$

En utilisant l'inegalité de Young pour  $p = q = 2$ , il vient

$$\begin{aligned} \|u'_k(t)\|_2^2 + \|u'_k(t)\|^2 + 2k_0 \int_0^t \|u'_k(s)\|_m^m ds &\leq \|u'_k(0)\|_2^2 + \|u_k(0)\|^2 + \int_0^t \|f(s)\|_2^2 ds \\ &\quad + C_2 \int_0^t \|h(s)\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 ds + \int_0^t \|u'_k(s)\|_2^2 ds + \int_0^t \|u_k(s)\|_V^2 ds \end{aligned}$$

D'après les hypothèses  $(H_1) - (H_6)$ , nous avons :

$$\|u'_k(t)\|_2^2 + \|u_k(t)\|_V^2 + 2k_0 \int_0^t \|u'_k(s)\|_m^m ds \leq C'_2 \left( 1 + \int_0^t \left( \|u'_k(s)\|_2^2 + \|u_k(s)\|_V^2 \right) ds \right), \quad (1.19)$$

où

$$\begin{aligned} C'_2 &= \|u'_k(0)\|_2^2 + \|u_k(0)\|^2 + \int_0^t \|f(s)\|_2^2 ds + C_2 \int_0^t \|h(s)\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 ds. \\ &= \|u_{1k}\|_2^2 + \|u_{0k}\|^2 + \int_0^t \|f(s)\|_2^2 ds + C_2 \int_0^t \|h(s)\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 ds. \end{aligned}$$

On déduit donc, en particulier de (1.19) que

$$\left\| u'_k(t) \right\|_2^2 + \|u_k(t)\|_V^2 \leq C'_2 \left( 1 + \int_0^t \left( \left\| u'_k(s) \right\|_2^2 + \|u_k(s)\|_V^2 \right) ds \right). \quad (1.20)$$

On déduit donc

$$\|u'_k(t)\|_2^2 + \|u_k(t)\|_V^2 \leq C'_2 + C'_2 \int_0^t \left( \|u'_k(s)\|_2^2 + \|u_k(s)\|_V^2 \right) ds. \quad (1.21)$$

En appliquant le Lemme de Gronwall pour

$$\Psi = \|u'_k(s)\|_2^2 + \|u_k(s)\|_V^2, g = C'_2, a = C'_2,$$

on obtient :

$$\|u'_k(t)\|_2^2 + \|u_k(t)\|_V^2 \leq C'_2 \exp\left(\int_0^t C'_2 ds\right) = C_3 \text{ indépendante de } k.$$

Alors

$$\|u'_k(t)\|_2^2 + \|u_k(t)\|_V^2 + 2k_0 \int_0^t \|u'_k(s)\|_m^m ds \leq C_T \text{ indépendante de } k. \quad (1.22)$$

D'où, on en déduit que  $T_k = T$ .

*Estimate 02* : On doit vérifier que

$$\|u''_k(0)\|_2 \leq C_t.$$

En posant  $t = 0$  et  $w_j = v''_k(0)$  on obtient

$$(u''_k(0), u''_k(0)) - (\nabla \cdot (A \nabla u_k(0)), u''_k(0)) + (g(u'_k(0)), u''_k(0)) = (f(0), u''_k(0)). \quad (1.23)$$

Donc

$$\begin{aligned} \|u''_k(0)\|_2^2 &= (f(0) + \nabla \cdot (A \nabla u_k(0)) - g(u'_k(0)), u''_k(0)) \\ &= (f(0) + \nabla \cdot (A \nabla u_{0k}) - g(u_{1k}), u''_k(0)). \end{aligned}$$

En valeur absolue, on obtient

$$\|u''_k(0)\|_2^2 \leq |(f(0) + \nabla \cdot (A \nabla u_{0k}) - g(u_{1k}), u''_k(0))|.$$

En applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve :

$$\|u''_k(0)\|_2 \leq \|f(0) + \nabla \cdot (A \nabla u_{0k}) - g(u_{1k})\|_2.$$

En utilisant le fait que  $f(0) \in L^2(\Omega)$ ,  $u_0 \in V \cap H^2(\Omega)$ ,  $g(u'_k(0)) \in C^0(\mathbb{R})$  alors

$$\|u''_k(0)\|_2 \leq C_t \text{ indépendante de } k.$$

On dérive l'équation (1.11) par rapport  $t$ , pour  $j = 1, \dots, m$  on obtient

$$(u_k'''(t), w_j) + a(u_k'(t), w_j) + (g'(u_k'(t))u_k''(t), w_j) = (f'(t), w_j) + \int_{\Gamma_2} h'(t)w_j d\Gamma.$$

On multiplie cette équation par  $2h_{jk}''$ , on obtient :

$$(u_k'''(t), u_k''(t)) + a(u_k'(t), u_k''(t)) + (g'(u_k'(t))u_k''(t), u_k''(t)) = (f'(t), u_k''(t)) + \int_{\Gamma_2} h'(s)u_k''(s) d\Gamma.$$

Aussi, on a

$$\frac{d}{dt} \|u_k''(t)\|_2^2 = \frac{d}{dt} (u_k''(t), u_k''(t)) = (u_k'''(t), u_k''(t)) + (u_k''(t), u_k'''(t)) = 2(u_k'''(t), u_k''(t)),$$

ou encore

$$(u_k'''(t), u_k''(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_k''(t)\|_2^2.$$

En utilisant la bilinéarité de  $a(\cdot, \cdot)$ , on déduit

$$\frac{d}{dt} a(u_k', u_k') = a(u_k''(t), u_k') + a(u_k', u_k''(t)) = 2a(u_k', u_k''(t)).$$

Donc, on peut écrire :

$$a(u_k', u_k'') = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(u_k', u_k') = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_k'(t)\|^2.$$

On a :

$$\frac{d}{dt} \|u_k''(t)\|_2^2 + \frac{d}{dt} \|u_k'(t)\|^2 + 2 \int_{\Omega} g'(u_k'(t)) (u_k''(t))^2 dx = 2(f'(t), u_k''(t)) + 2 \int_{\Gamma_2} h'(s)u_k''(s) d\Gamma$$

Comme  $g$  est croissante alors  $g'(u_k'(t)) \geq 0$  et d'après l'hypothèse  $(H_1 : b)$  on trouve

$$\frac{d}{dt} \left( \|u_k''(t)\|_2^2 + \|u_k'(t)\|^2 \right) \leq 2|(f'(t), u_k''(t))| + 2 \int_{\Gamma_2} |h'(s)u_k''(s)| d\Gamma.$$

Par intégration sur  $(0, t)$  il vient

$$\begin{aligned} \|u_k''(t)\|_2^2 + \|u_k'(t)\|_V^2 &\leq 2 \int_0^t (f'(s), u_k''(s)) ds + \|u_k''(0)\|_2^2 + \\ &+ \|u_k'(0)\|_V^2 + 2 \int_0^t \int_{\Gamma_2} h'(s) u_k''(s) d\Gamma ds. \end{aligned} \quad (1.24)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\begin{aligned} \|u_k''(t)\|_2^2 + \|u_k'(t)\|_V^2 &\leq 2 \int_0^t \|f'(s)\|_2 \|u_k''(s)\|_2 ds + \|u_k''(0)\|_2^2 + \\ &+ \|u_k'(0)\|_V^2 + 2 \int_0^t \|h'(s)\|_{L^2(\Gamma_2)} \|u_k''(s)\|_{L^2(\Gamma_2)} ds. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que la fonction trace suivante

$$\gamma_2 : V \rightarrow L^2(\Gamma_2), \gamma_2(u) = u''/\Gamma_2$$

est continue, il vient

$$|\gamma_2(u)|_{L^2(\Gamma_2)} \leq C_1 \|u'(s)\|_V.$$

Donc

$$\begin{aligned} \|u_k''(t)\|_2^2 + \|u_k'(t)\|_V^2 &\leq 2 \int_0^t \|f'(s)\|_2 \|u_k''(s)\|_2 ds + \|u_k''(0)\|_2^2 + \|u_k'(0)\|_V^2 + \\ &+ 2C_1 \int_0^t \|h'(s)\|_{L^2(\Gamma_2)} \|u_k'(s)\|_V ds. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité Young, on obtient

$$\begin{aligned} \|u_k''(t)\|_2^2 + \|u_k'(t)\|_V^2 &\leq (\|u_k''(0)\|_2^2 + \|u_k'(0)\|_V^2 + \int_0^t \|f'(s)\|_2^2 ds + \\ &+ C_1 \int_0^t \|h'(s)\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 ds) + \int_0^t \|u_k''(s)\|_2^2 ds + \int_0^t \|u_k'(s)\|_V^2 ds. \end{aligned}$$

d'où  $\|u_k''(0)\|_2 \leq C_t$ , et d'après les hypothèses  $(H_1) - (H_6)$  on obtient

$$\|u_k''(t)\|_2^2 + \|u_k'(t)\|_V^2 \leq C_1' \left( 1 + \int_0^t (\|u_k''(s)\|_2^2 + \|u_k'(s)\|_V^2) ds \right),$$

où

$$C'_1 = \text{Max} \left( \|u''_k(0)\|_2^2 + \|u'_k(0)\|_V^2 + \int_0^t \|f'(s)\|_2^2 ds + C_1 \int_0^t \|h'(s)\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 ds \right).$$

Par conséquent

$$\|u''_k(t)\|_2^2 + \|u'_k(t)\|_V^2 \leq C'_1 + C'_1 \int_0^t \left( \|u''_k(s)\|_2^2 + \|u'_k(s)\|_V^2 \right) ds. \quad (1.25)$$

En utilisant le Lemme de Granwall, pour

$$\Psi = \|u''_k(s)\|_2^2 + \|u'_k(s)\|_V^2, g = C'_1, a = C'_1,$$

il découle

$$\|u''_k(t)\|_2^2 + \|u'_k(t)\|_V^2 \leq C'_1 \exp \int_0^t C'_1 ds = C_2.$$

D'où

$$\|u''_k(t)\|_2^2 + \|u'_k(t)\|_V^2 \leq C_2 \text{ (indépendante de } k \text{)}. \quad (1.26)$$

Donc  $\forall k \in \mathbb{N}, T = T_k$ .

De (1.26) et (1.22), on en déduit

$$\begin{cases} (u_k)_{k \in \mathbb{N}} & \text{est bornée dans} & L^\infty(0, T; V). \\ (u'_k)_{k \in \mathbb{N}} & \text{est bornée dans} & L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V) \cap L^m(Q). \\ (u''_k)_{k \in \mathbb{N}} & \text{est bornée dans} & L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \end{cases} \quad (1.27)$$

**Etape 3 : Passage à la limite**

De (1.27), on peut extraire des sous-suites,  $(u_k)$ ,  $(u'_k)$  et  $(u''_k)$  de  $(u_k)$ ,  $(u'_k)$  et  $(u''_k)$ , respectivement telles que

$$\begin{cases} u_k \rightharpoonup u & \text{faible * dans} & L^\infty(0, T; V). \\ u'_k \rightharpoonup u' & \text{faible * dans} & L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V) \cap L^m(Q). \\ u''_k \rightharpoonup u'' & \text{faible * dans} & L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \end{cases} \quad (1.28)$$

En particulier, on a :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ est bornée dans} & L^2(0, T; V). \\ (u'_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ est bornée dans} & L^2(Q) \cap L^m(Q). \\ (u''_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ est bornée dans} & L^2(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(Q). \end{array} \right. \quad (1.29)$$

On sait, (cf. Lions-Magenés ([10]), que l'injection

$$H^1(Q) \hookrightarrow_{\text{compact}} L^2(Q). \quad (1.30)$$

Donc

$$u_k \rightarrow u \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort et p.p dans } Q.$$

De (1.29) et (1.30), on trouve

$$u'_k \rightarrow u' \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort et p.p dans } Q. \quad (1.31)$$

- Etudions la convergence de  $g(u'_k)$  :

Soit

$$u'_k \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V) \cap L^m(Q).$$

En particulier, on a  $u'_k \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  et par conséquent alors

$$u'_k \in L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

D'où, il vient :

$$g(u'_k) \in L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Ce qui implique que :

$$g(u'_k) \text{ est bornée dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Et par conséquent on peut extraire sous-suite  $g(u'_k)$  de  $g(u'_k)$  telle que

$$g(u'_k) \rightarrow W \text{ faiblement dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(Q). \quad (1.32)$$

On doit montrer que:

$$W = g(u')$$

D'après (1.31) on trouve

$$g(u'_k) \rightarrow g(u') \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort et p.p dans } Q. \quad (1.33)$$

D'après le lemme 1.8, en posant  $\theta = Q$ ,  $q = p = 2$ , d'après (1.33), il résulte

$$\|g_k\|_{L^2(\theta)} \leq C \text{ et } g(u'_k) \rightarrow g(u') \text{ p.p dans } L^2(Q).$$

Alors

$$g(u'_k) \rightarrow g(u') \text{ faiblement dans } L^2(Q).$$

De (1.32) on tire que

$$W = g(u')$$

Pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$  fixé quelconque et  $\forall k > j$ ; on a

$$(u''_k, w_j) + a(u_k, w_j) + (g(u'_k), w_j) = (f(t), w_j) + \int_{\Gamma_2} h w_j d\Gamma. \quad (1.34)$$

De la convergence faible (1.28), on déduit que

$$\begin{aligned} a(u_k, w_j) &\rightarrow a(u, w_j) && \text{faiblement dans } L^\infty(0, T). \\ (u'_k, w_j) &\rightarrow (u', w_j) && \text{faiblement dans } L^\infty(0, T). \\ (g(u'_k), w_j) &\rightarrow (g(u), w_j) && \text{faiblement dans } L^\infty(0, T). \end{aligned}$$

Et par conséquent par passage à la limite de (1.34), lorsque  $k \rightarrow +\infty$ , il devient

$$(u'', w_j) + a(u, w_j) + (g(u'), w_j) = (f(t), w_j) + \int_{\Gamma_2} h w_j d\Gamma.$$

Comme  $V_k$  est dense dans  $V$ , on obtient pour tout  $w \in V$  :

$$(u'', w) + a(u, w) + (g(u'), w) = (f(t), w) + \int_{\Gamma_2} h w d\Gamma.$$

D'où  $u$  est une solution de (1.1). ■

### 1.4.2 Unicité de la solution

Soient  $v$  et  $w$  deux solutions du problème (1.1). On pose  $z = v - w$ , alors  $z$  vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{ll} z_{tt} - \nabla \cdot (A \nabla z) + g(v') - g(w') = 0, & \text{dans } Q = \Omega \times (0, T); \\ z(x, t) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T); \\ \frac{\partial z}{\partial \eta_A} = A \nabla z \cdot \eta = 0, & \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T); \\ z(x, 0) = z_t(x, 0) = 0, & \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

On a

$$(z'', z) + a(z', z) + 2(g(v') - g(w'), v' - w') = 0.$$

ou sous forme équivalente

$$\frac{d}{dt} \|z'\|_2^2 + \frac{d}{dt} \|z\|_V^2 + 2(g(v') - g(w'), v' - w') = 0.$$

En utilisant l'hypothèse  $(H_1)$  et par intégration sur  $(0, t)$ , il vient

$$\|z'(t)\|_2^2 + \|z(t)\|_V^2 + 2 \int_0^t \int_{\Omega} (g(v') - g(w')) (v' - w') \, dx ds \leq \|z'(0)\|_2^2 + \|z(0)\|_V^2.$$

Comme  $g$  est une fonction croissante, alors

$$0 \leq \|z'(t)\|_2^2 + \|z(t)\|_V^2 = -2 \int_0^t \int_{\Omega} (g(v') - g(w')) (v' - w') \, dx ds \leq 0;$$

et par conséquent

$$\|z'(t)\|_2^2 = \|z(t)\|_V^2 = 0.$$

D'où l'unicité de la solution.

# Chapitre 2

## Méthode du point fixe pour un problème hyperbolique semi-linéaire à coefficients variables avec terme source

**Résumé.** *Dans ce chapitre, nous allons étudier l'existence locale et l'unicité d'une solution d'un problème hyperbolique semi-linéaire pour les équations elliptiques à coefficients variables avec terme source en se basant sur les résultats obtenus dans le chapitre précédent combinés avec le théorème du point fixe.*

### Contenu :

1. Position de problème;
2. Existence et Unicité;
  - (a) Preuve du Lemme 2.1;
  - (b) Preuve du Théorème 2.1;

## 2.1 Position de problème

L'objet de ce chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité d'une solution  $u : Q = \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - \nabla \cdot (A \nabla u) + g(u_t) = |u|^{p-2} u, & \text{dans } Q = \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial \eta_A} = A \nabla u \cdot \eta = h, & \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où  $h$ ,  $u_0$  et  $u_1$  sont des fonctions données.

Comme dans le chapitre précédent, on montre que sous les hypothèses  $(H_1) - (H_6)$  ce problème est formellement équivalent au problème variationnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_{tt}, v) + a(u, v) + (g(u_t), v) = (|u|^{p-2} u, v) + \int_{\Gamma_2} h v d\Gamma, \forall v \in V, \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), x \in \Omega. \end{array} \right. \quad ((PV)_1)$$

## 2.2 Existence et Unicité

Dans cette section et sous les hypothèses que nous avons citées, on démontre l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème (2.1) en utilisant le théorème du point fixe.

**Théorème 2.1** *Supposons que les hypothèses  $(H_1) - (H_6)$  sont vérifiées. Supposons que  $m \geq 2$  et*

$$2 \leq p \leq 2 \frac{n-1}{n-2}, \forall n \geq 3. \quad (2.2)$$

*Alors il existe  $T > 0$  tel que le problème (2.1) a une unique solution locale  $u$  ayant les régularités suivantes :*

$$u \in C(0, T; V) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$u_t \in L^2(0, T; V) \cap L^m(\Omega \times (0, T)).$$

*Pour pouvoir appliquer le théorème du point fixe sur une fonction convenablement*

choisie, nous allons considérer le problème relatif suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} v_{tt} - \nabla \cdot (A \nabla v) + g(v_t) = |u|^{p-2} u, & \text{dans } Q = \Omega \times (0, T), \\ v(x, t) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\ \frac{\partial v}{\partial \eta_A} = A \nabla v \cdot \eta = h, & \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \\ v(x, 0) = u_0(x), v_t(x, 0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Relativement à ce problème, nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant :

**Lemme 2.1** *Sous les hypothèses  $(H_1) - (H_6)$ , soit  $m \geq 2$ , alors il existe un  $T > 0$  et une unique solution  $v$  du problème (2.3) dans  $[0, T]$  tels que*

$$v \in C(0, T; V) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega))$$

$$v_t \in L^\infty(0, T; V) \cap L^m(\Omega \times (0, T))$$

**Théorème 2.2** (*Théorème du point fixe*) *Soit  $X$  un espace de Banach et soit  $F : X \rightarrow X$  une application contractante :*

$$\exists L, 0 < L \leq 1; \forall u \in X : \|F(u)\|_X \leq L \|u\|_X.$$

*Alors il existe un point fixe unique  $u$  dans  $X$ , c'est à dire  $F(u) = u$ .*

**Lemme 2.2** *Sous les hypothèses du théorème 2.1 et du lemme 1.6, les condition initiales  $u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x)$  ont un sens.*

**Preuve.** On suppose que les hypothèses du théorème 2.1 sont satisfaites, on a alors

$$\begin{aligned} u &\in C(0, T; V) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega)), \\ u_t &\in L^2(0, T; V) \cap L^m(\Omega \times (0, T)). \end{aligned}$$

En particulier

$$u \text{ et } u_t \in L^2(0, T; V)$$

Grâce au lemme 1.6 on conclut que  $u : [0, T] \rightarrow V$  est continue, donc la condition initiale  $u(x, 0) = u_0(x)$  a un sens.

D'autre part, de la première équation du problème (2.1) on a

$$u_{tt} = |u|^{p-2} u + \nabla \cdot (A \nabla u) - g(u_t) \quad (2.4)$$

Comme

$$\nabla \cdot (A \nabla u) \in \mathcal{L}(V, H^{-1}(\Omega)),$$

alors

$$\nabla \cdot (A \nabla u) \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

En utilisant l'implication suivante

$$u \in L^p(\Omega) \Rightarrow |u|^{p-2} u \in L^{p'}(\Omega), \text{ où } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

pour déduire

$$\begin{aligned} |u|^{p-2} u &\in L^2(0, T; L^{p'}(\Omega)), \\ \nabla \cdot (A \nabla u) &\in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)); \end{aligned}$$

De (2.4) il en découle

$$u_{tt} \in L^2(0, T; L^{p'}(\Omega) + H^{-1}(\Omega)).$$

Comme  $u_t \in L^2(0, T; V)$  alors en particulier, on a

$$u_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

D'où, il résulte

$$u_t, u_{tt} \in L^2(0, T; L^{p'}(\Omega) + H^{-1}(\Omega)).$$

En utilisant le lemme 1.6, on conclut que  $u' : [0, T] \rightarrow H^{-1}(\Omega) + L^{p'}(\Omega)$  est continue, d'où  $u'(x, 0) = u_1(x)$  a un sens. ■

### 2.2.1 Preuve du Lemme 2.1

Par les mêmes procédés employés dans ([2]), nous approximons

$$u \in C(0, T; V) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega)),$$

muni de la norme

$$\|u\| = \max_{0 \leq t \leq T} [\|u'\|_2^2 + a_0 \|\nabla u\|_2^2],$$

par une suite  $(u_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$  dans  $C(0, T; C_0^\infty(\Omega))$ . De plus, nous approximons les conditions initiales  $u_0 \in V, u_1 \in L^2(\Omega)$  par des suites  $(u_\mu^0)_{\mu \in \mathbb{N}}, (u_\mu^1)_{\mu \in \mathbb{N}}$  dans  $C_0^\infty(\Omega)$ , respectivement.

Nous considérons alors le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} v_\mu'' - \nabla \cdot (A \nabla v_\mu) + g(v_\mu') = |u_\mu|^{p-2} u_\mu, & \text{dans } Q = \Omega \times (0, T), \\ v_\mu(x, t) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\ \frac{\partial v_\mu}{\partial \eta_A} = A \nabla v_\mu \cdot \eta = h, & \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \\ v_\mu(x, 0) = u_\mu^0, v_\mu'(x, 0) = u_\mu^1, & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Il est clair que  $f(u_\mu) = |u_\mu|^{p-2} u_\mu \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$ . Par conséquent grâce au chapitre précédent, nous avons l'existence et l'unicité d'une suite de solutions  $(v_\mu)$  vérifiant (2.5).

Maintenant, nous montrons que  $(v_\mu)$  est une suite de Cauchy dans l'espace

$$Y_t = \left\{ (v, v') \left/ \begin{array}{l} v \in C(0, T; V) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega)) \\ v' \in L^\infty(0, T; V) \cap L^m(\Omega \times (0, T)) \end{array} \right. \right\},$$

muni de la norme

$$\|(v, v')\|_{Y_t}^2 = \max [\|v'\|_2^2 + a_0 \|\nabla v\|_2^2] + \int_0^t \|v(s)\|_m^m ds.$$

Pour cela, on pose  $U = u_\mu - u_\tau, V = v_\mu - v_\tau$ . Alors  $V$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{ll} V'' - \nabla \cdot (A \nabla V) + g(V') = |u_\mu|^{p-2} u_\mu - |u_\tau|^{p-2} u_\tau, & \text{dans } Q = \Omega \times (0, T), \\ V(x, t) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\ \frac{\partial V}{\partial \eta_A} = A \nabla V \cdot \eta = h, & \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \\ V(x, 0) = V_0(x) = u_\mu^0 - u_\tau^0, V'(x, 0) = V_1(x) = u_\mu^1 - u_\tau^1, & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Multiplions la première équation du (2.6) par  $V'$  et intégrons sur  $\Omega$  et utilisons la formule de Green, on obtient

$$(V'', V') + a(V, V') + (g(V'), V') = (|u_\mu|^{p-2} u_\mu - |u_\tau|^{p-2} u_\tau, V') + \int_{\Gamma_2} h(s) V' d\Gamma$$

ou encore, sous forme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|V'(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|V(t)\|_V^2 + \int_{\Omega} g(V') V' dx \\ &= \int_{\Omega} (|u_\mu|^{p-2} u_\mu - |u_\tau|^{p-2} u_\tau) V' dx + \int_{\Gamma_2} h(s) V' d\Gamma. \end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses  $(H_1) - (H_2)$ , par intégration sur  $(0, t)$  on obtient

$$\begin{aligned} & \|V'(t)\|_2^2 + \|V(t)\|_V^2 + 2k_0 \int_0^t \int_{\Omega} \|V(s)\|_m^m dx ds \leq \|V'(0)\|_2^2 + \|V(0)\|_V^2 + (2.7) \\ & + 2 \int_0^t \int_{\Omega} (|u_\mu|^{p-2} u_\mu - |u_\tau|^{p-2} u_\tau) V' dx ds + 2 \int_0^t \int_{\Gamma_2} h(s) V' d\Gamma ds. \quad (2.8) \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \| |a|^m a - |b|^m b \| &= \| |a|^m a + (|a|^m b - |a|^m b) - |b|^m b \| \\ &= \| |a|^m (a - b) + b(|a|^m - |b|^m) \| \\ &= \| |a|^m (a - b) + b(|a| - |b|) (|a|^{m-1} + \dots + |b|^{m-1}) \| \\ &\leq |a|^m |a - b| + |b| \| |a| - |b| \| (|a|^{m-1} + \dots + |b|^{m-1}). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité  $\| |a| - |b| \| \leq |a - b|$ , il résulte

$$\begin{aligned} \| |a|^m a - |b|^m b \| &\leq |a|^m |a - b| + |a - b| (|b| |a|^{m-1} + \dots + |b|^m) \\ &\leq |a - b| (|a|^m + |b| |a|^{m-1} + \dots + |b|^m). \end{aligned}$$

D'où

$$\| |a|^m a - |b|^m b \| \leq \begin{cases} (m+1) |a - b| |a| & \text{si } |b| \leq |a| \\ (m+1) |a - b| |b| & \text{si } |a| \leq |b| \end{cases}$$

Ce qui montre que

$$\left| |a|^m a - |b|^m b \right| \leq (m+1) |a-b| \sup(|a|^m, |b|^m).$$

On prend  $a = u_\mu, b = u_\tau, m = p-2$ , on obtient

$$\left| |u_\mu|^{p-2} u_\mu - |u_\tau|^{p-2} u_\tau \right| \leq (p-1) |U| \sup(|u_\mu|^{p-2}, |u_\tau|^{p-2}).$$

Par conséquent, il en résulte

$$\left| \int_{\Omega} (|u_\mu|^{p-2} u_\mu - |u_\tau|^{p-2} u_\tau) V' dx \right| \leq (p-1) \int_{\Omega} \sup(|u_\mu|^{p-2}, |u_\tau|^{p-2}) |U| |V'| dx.$$

Utilisons l'inégalité de Hölder, avec  $\frac{1}{n} + \frac{n-2}{2n} + \frac{1}{2} = 1$ , pour déduire

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (|u_\mu|^{p-2} u_\mu - |u_\tau|^{p-2} u_\tau) V' dx \right| &\leq (p-1) \left\| |u_\mu|^{p-2} + |u_\tau|^{p-2} \right\|_n \|U\|_{\frac{2n}{n-2}} \|V'\|_2 \\ &\leq (p-1) \left[ \|u_\mu\|_{(p-2)n}^{p-2} + \|u_\tau\|_{(p-2)n}^{p-2} \right] \|U\|_{\frac{2n}{n-2}} \|V'\|_2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Mais d'après (2.2) on a  $(p-2)n \leq \frac{2n}{n-2}$ , alors

$$\|u_\mu\|_{(p-2)n}^{p-2} + \|u_\tau\|_{(p-2)n}^{p-2} \leq \|u_\mu\|_{\frac{2n}{n-2}}^{p-2} + \|u_\tau\|_{\frac{2n}{n-2}}^{p-2}.$$

D'après (1.3), on trouve  $V \hookrightarrow_{\text{continue}} L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$  donne

$$\|U\|_{\frac{2n}{n-2}} \leq C \|U\|_V. \quad (2.10)$$

$$\|u_\mu\|_{\frac{2n}{n-2}}^{p-2} + \|u_\tau\|_{\frac{2n}{n-2}}^{p-2} \leq C (\|u_\mu\|_V^{p-2} + \|u_\tau\|_V^{p-2}), \quad (2.11)$$

où  $C$  est une constante positive dépend seulement de  $\Omega$  et  $p$ .

En suite l'estimation (2.9) prend la forme

$$\left| \int_{\Omega} (|u_\mu|^{p-2} u_\mu - |u_\tau|^{p-2} u_\tau) V' dx \right| \leq C \|V'\|_2 \|U\|_V (\|u_\mu\|_V^{p-2} + \|u_\tau\|_V^{p-2}). \quad (2.12)$$

Moyennement à (2.12), l'estimation(2.7) devient

$$\begin{aligned} & \|V'(t)\|_2^2 + \|V(t)\|_V^2 + 2k_0 \int_0^t \int_{\Omega} \|V(s)\|_m^m dx ds \leq \\ & \leq \|V'(0)\|_2^2 + \|V(0)\|_V^2 + 2C \int_0^t \|V'\|_2 \|U\|_V (\|u_{\mu}\|_V^{p-2} + \|u_{\tau}\|_V^{p-2}) ds + 2 \int_0^t \int_{\Gamma_2} h(s)V'(s)d\Gamma ds. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $u_{\mu}, u_{\tau} \in V$ , il vient

$$C (\|u_{\mu}\|_V^{p-2} + \|u_{\tau}\|_V^{p-2}) \leq k.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} & \|V'(t)\|_2^2 + \|V(t)\|_V^2 + 2k_0 \int_0^t \int_{\Omega} \|V(s)\|_m^m dx ds \leq \\ & \leq \|V'(0)\|_2^2 + \|V(0)\|_V^2 + 2k \int_0^t \|V'\|_2 \|U\|_V ds + 2 \int_0^t \int_{\Gamma_2} h(s)V'(s)d\Gamma ds, \end{aligned}$$

où  $k$  est une constante positive dépend seulement de  $\Omega$ ,  $p$  et du diamètre de la boule  $B_R(0) \subset C([0, T]; V)$  centrée à l'origine et contient les suites  $(u_{\mu})$  et  $(u_{\tau})$ .

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve :

$$\begin{aligned} & \|V'(t)\|_2^2 + \|V(t)\|_V^2 + 2k_0 \int_0^t \int_{\Omega} \|V(s)\|_m^m dx ds \leq \\ & \leq \|V'(0)\|_2^2 + \|V(0)\|_V^2 + 2k \int_0^t \|V'\|_2 \|U\|_V ds + 2 \int_0^t \|h(s)\|_{L^2(\Gamma_2)} \|V'\|_{L^2(\Gamma_2)} ds \end{aligned}$$

En tenant en compte de la continuité de la fonction trace

$$\gamma_1 : V \rightarrow L^2(\Gamma_2), \gamma_1(V) = V'/\Gamma_2,$$

on a

$$|\gamma_1(V)|_{L^2(\Gamma_2)} \leq c \|V(s)\|_V.$$

Donc

$$\begin{aligned} & \|V'(t)\|_2^2 + \|V(t)\|_V^2 + 2k_0 \int_0^t \int_\Omega \|V(s)\|_m^m dx ds \\ \leq & \|V'(0)\|_2^2 + \|V(0)\|_V^2 + 2k \int_0^t \|V'\|_2 \|U\|_2 ds + 2c \int_0^t \|h(s)\|_{L^2(\Gamma_2)} \|V(s)\|_V ds. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité Young, on obtient

$$\begin{aligned} & \|V'(t)\|_2^2 + \|V(t)\|_V^2 + 2k_0 \int_0^t \int_\Omega \|V(s)\|_m^m dx ds \leq \\ \leq & \|V'(0)\|_2^2 + \|V(0)\|_V^2 + \int_0^t \|V'\|_2^2 ds + k \int_0^t \|U\|_2^2 ds \\ & + c_1 \int_0^t \|h(s)\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 ds + \int_0^t \|V(s)\|_V^2 ds. \end{aligned}$$

Comme  $h \in L^2(\Gamma_2 \times (0, T))$  alors  $\int_0^t \|h(s)\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 ds \leq \text{constante}$ , on obtient alors

$$\begin{aligned} & \|V'(t)\|_2^2 + \|V(t)\|_V^2 + 2k_0 \int_0^t \int_\Omega \|V(s)\|_m^m dx ds \\ \leq & C + \|V'(0)\|_2^2 + \|V(0)\|_V^2 + k \int_0^t \|U\|_V^2 ds + \int_0^t \left( \|V'(s)\|_2^2 + \|V(s)\|_V^2 \right) ds. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|V'(t)\|_2^2 + \|V(t)\|_V^2 & \leq C + \|V'(0)\|_2^2 + \|V(0)\|_V^2 + \int_0^t \|U\|_V^2 ds + \\ & + \int_0^t \left( \|V'(s)\|_2^2 + \|V(s)\|_V^2 \right) ds. \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme de Granwall pour

$$\Psi = \|V'(t)\|_2^2 + \|V(t)\|_V^2, f = \|U\|_V^2, a = C + \|V'(0)\|_2^2 + \|V(0)\|_V^2, g = 1,$$

il en découle

$$\|V'(t)\|_2^2 + \|V(t)\|_V^2 \leq \left( a + \int_0^t \|U\|_V^2 ds \right) \exp \int_0^t 1 ds = k_1 \left( a + \int_0^t \|U\|_V^2 ds \right).$$

Donc

$$\begin{aligned} & \|V'(t)\|_2^2 + \|V(t)\|_V^2 + 2k_0 \int_0^t \int_\Omega \|V(s)\|_m^m dx ds \leq \\ & \leq k_1 \left( C + \|V'(0)\|_2^2 + \|V(0)\|_V^2 \right) + k_1 \int_0^t \|U\|_V^2 ds. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|V\|_{Y_T} \leq k_1 \left( C + \|V'(0)\|_2^2 + \|V(0)\|_V^2 \right) + k_1 T \|U\|_{Y_T}. \quad (2.13)$$

Puisque la suite  $(u_\mu^0)$  converge dans  $V$ ,  $(u_\mu^1)$  converge dans  $L^2(\Omega)$  et  $(u_\mu)$  converge dans  $C(0, T; V) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega))$ , donc aussi dans  $Y_T$ , on conclut que  $(v_\mu, v'_\mu)$  est une suite de Cauchy dans  $Y_T$ . Ainsi  $(v_\mu, v'_\mu)$  converge vers une limite  $(v, v')$  dans  $Y_T$ .

- Montrons maintenant que cette limite est une solution du problème (2.3), par la même technique utilisée par Georgiev et Todorova dans ([14]). Pour cela, il suffit de montrer que pour tout  $\varphi \in V$  l'équation

$$\int_\Omega v_{tt}(t)\varphi dx + a(v(t), \varphi) + \int_\Omega g(v_t(t))\varphi dx = \int_\Omega |u(t)|^{p-2} u(t)\varphi dx + \int_{\Gamma_2} h(s)\varphi d\Gamma. \quad (2.14)$$

est staisfaite pour tout  $t \in [0, T]$ .

En effet, multiplions la première équation du problème (2.5) par  $\varphi$ , intégrons sur  $\Omega$  et utilisons la formule de Green, on obtient

$$\int_\Omega v_\mu''(t)\varphi dx + a(v_\mu(t), \varphi) + \int_\Omega g(v_\mu'(t))\varphi dx = \int_\Omega |u_\mu(t)|^{p-2} u_\mu(t)\varphi dx + \int_{\Gamma_2} h\varphi d\Gamma.$$

Lorsque  $\mu \rightarrow +\infty$ ; on déduit que

$$\begin{aligned} a(v_\mu(t), \varphi) & \rightarrow a(v(t), \varphi) \\ \int_\Omega g(v_\mu'(t))\varphi dx & \rightarrow \int_\Omega g(v'(t))\varphi dx \\ \int_\Omega |u_\mu(t)|^{p-2} u_\mu(t)\varphi dx & \rightarrow \int_\Omega |u(t)|^{p-2} u(t)\varphi dx \end{aligned}$$

dans  $C(0, T)$ . Donc l'équation (2.14) est vérifiée pour tout  $t \in [0, T]$ ;

- On montre l'unicité de la solution du problème (2.3), nous prenons  $u_1, u_2$  dans  $C(0, T; V)$  et soit  $v_1$  et  $v_2$  les solutions (2.3), Notons  $W = v_1 - v_2$ .

Alors  $W$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{ll} W'' - \nabla \cdot (A \nabla W) + g(v'_1) - g(v'_2) = |u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2, & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ W(x, t) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\ \frac{\partial W}{\partial \eta_A} = A \nabla W \cdot \eta = 0, & \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \\ W(x, 0) = W_0(x) = 0, W'(x, 0) = W_1(x) = 0, & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \|W'(t)\|_2^2 + \|W(t)\|_V^2 &= 2 \int_0^t \int_{\Omega} (|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2) W' dx ds. \\ &\quad - 2 \int_0^t \int_{\Omega} (g(V'_1(s)) - g(V'_2(s))) (V'_1(s) - V'_2(s)) dx ds \end{aligned} \quad (2.16)$$

Comme  $g$  est une fonction croissante alors

$$2 \int_0^t \int_{\Omega} (g(V'_1(s)) - g(V'_2(s))) (V'_1(s) - V'_2(s)) dx ds \geq 0. \quad (2.17)$$

En utilisant l'hypthèse  $(H_1)$ , l'estimation (2.16) donne

$$\|W'(t)\|_2^2 + \|W(t)\|_V^2 \leq 2 \int_0^t \int_{\Omega} (|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2) W' dx ds.$$

Si  $u_1 = u_2$ , on trouve

$$0 \leq \|W'(t)\|_2^2 + \|W(t)\|_V^2 \leq 0,$$

nous obtenons  $W = 0$ . Cela complète la preuve du lemme 2.1.

## 2.2.2 Preuve du Théorème 2.1

Pour  $T \geq 0$ , nous définissons le sous-ensemble convexe fermé de  $Y_T$  par

$$X_T = \{(v, v_t) \in Y_T \text{ tels que } v(0) = u_0, v_t(0) = u_1\}.$$

Notons

$$B_R(X_T) = \{v \in X_T; \|v\|_{Y_T} \leq R\}.$$

Alors, le lemme 2.1 implique que pour tout  $u \in X_T$ , on peut définir  $v = \Phi(u)$  comme solution unique du problème (2.3) correspondante à  $u$ .

–  $\Phi$  est une application telle que  $\Phi(B_R(X_T)) \subset B_R(X_T)$ .

Soit  $u \in B_R(X_T)$  et  $v = \Phi(u)$ .

Multiplions la première équation du (2.3) par  $v'$ , intégrons sur  $(0, T) \times \Omega$  et utilisons la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} \|v'(t)\|_2^2 + \|v(t)\|_V^2 + 2k_0 \int_0^t \|v'(s)\|_m^m ds &\leq 2 \int_0^t \int_\Omega |u(s)|^{p-2} u(s)v'(s) dx ds + \quad (2.18) \\ + \|u_1\|_2^2 + \|u_0\|_V^2 + 2 \int_0^t \int_{\Gamma_2} hv' d\Gamma ds. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur (2.18), on obtient

$$\begin{aligned} \|v'(t)\|_2^2 + \|v(t)\|_V^2 + 2k_0 \int_0^t \|v'(s)\|_m^m ds &\leq \|u_1\|_2^2 + \|u_0\|_V^2 + \quad (2.19) \\ + 2 \int_0^t \|v'(s)\|_2 \|u(s)\|_2^{p-1} ds + 2 \int_0^t \|h(s)\|_{L^2(\Gamma_2)} \|v'(s)\|_{L^2(\Gamma_2)} ds. \end{aligned}$$

En tenant en compte la continuité de la fonction trace :

$$\begin{aligned} \gamma_2 &: V \rightarrow L^2(\Gamma_2), \gamma_1(v) = v'/\Gamma_2, \\ \|v'(s)\|_{L^2(\Gamma_2)} &\leq C' \|v(s)\|_V^2, \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned} \|v'(t)\|_2^2 + \|v(t)\|_V^2 + 2k_0 \int_0^t \|v'(s)\|_m^m ds &\leq \|u_1\|_2^2 + \|u_0\|_V^2 + 2 \int_0^t \|v'(s)\|_2 \|u(s)\|_2^{p-1} ds + \\ &+ 2C' \int_0^t \|h(s)\|_{L^2(\Gamma_2)} \|v(s)\|_V ds. \end{aligned}$$

En utilisant l'inegalité Young, on obtient

$$\|v(t)\|_V^2 \leq \|u_1\|_2^2 + \|u_0\|_V^2 + 2 \int_0^t \|v'(s)\|_2 \|u(s)\|_2^{p-1} ds + \int_0^t \|v(s)\|_V^2 ds + C'' \int_0^t \|h(s)\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 ds.$$

Comme  $h \in L^2(\Gamma_2 \times (0, T))$  alors  $\int_0^t \|h(s)\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 ds \leq C_2$ , on obtient alors

$$\|v(t)\|_V^2 \leq \|u_1\|_2^2 + \|u_0\|_V^2 + 2 \int_0^t \|v'(s)\|_2 \|u(s)\|_2^{p-1} ds + \int_0^t \|v(s)\|_V^2 ds + C_2.$$

En appliquant le Lemme de Granwall pour

$$\Psi = \|v(t)\|_V^2, f = 2 \|v'(s)\|_2 \|u(s)\|_2^{p-1}, a = \|u_1\|_2^2 + \|u_0\|_V^2 + C_2, g = 1,$$

on obtient :

$$\|v(t)\|_V^2 \leq \left( \|u_1\|_2^2 + \|u_0\|_V^2 + 2 \int_0^t \|v'(s)\|_2 \|u(s)\|_2^{p-1} ds + C_2 \right) \exp\left(\int_0^t ds\right).$$

Comme  $u \in B_R(X_T)$ , alors

$$\|v\|_{Y_T}^2 \leq k_2 (\|u_1\|_2^2 + \|u_0\|_V^2 + C_2) + 2k_2 R^{p-1} T \|v\|_{Y_T}^2, \text{ où } k_2 = \exp\left(\int_0^t ds\right).$$

Où  $k_2$  est une constante indépendante de  $R$ .

En utilisant l'inégalité de Hölder, on arrive à

$$\|v\|_{Y_T}^2 \leq k_2 (\|u_1\|_2^2 + \|u_0\|_V^2 + C_2) + 2R^{p-1} T \left( \frac{R^{p-1} T}{2} k_2^2 + \frac{1}{2R^{p-1} T} \|v\|_{Y_T}^2 \right).$$

Ainsi, nous obtenons

$$\|v\|_{Y_T}^2 \leq k_2 (\|u_1\|_2^2 + \|u_0\|_V^2 + C_2) + R^{2(p-1)} T^2 k_2^2. \quad (2.20)$$

Choisissons  $R$  suffisamment grand et  $T$  suffisamment petit de sorte que

$$k_2 (\|u_1\|_2^2 + \|u_0\|_V^2 + C_2) \leq \frac{1}{2} R^2,$$

$$R^{2(p-1)} T^2 k_2^2 \leq \frac{1}{2} R^2.$$

Donc

$$\|v\|_{Y_T}^2 \leq \frac{1}{2} R^2 + \frac{1}{2} R^2 = R^2,$$

d'où  $v \in B_R(X_T)$ .

– Montrons que  $\Phi$  est contractante.

On pose  $U = u - \tilde{u}$  et  $V = v - \tilde{v}$ , où  $v = \Phi(u)$  et  $\tilde{v} = \Phi(\tilde{u})$  sont des solutions du problème (2.3). Il est facile de vérifier que  $V$  satisfait

$$\left\{ \begin{array}{ll} V_{tt} - \nabla \cdot (A \nabla V) + g(V_t) = |u|^{p-2} u - |\tilde{u}|^{p-2} \tilde{u}, & \text{dans } Q = \Omega \times (0, T), \\ V(x, t) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\ \frac{\partial V}{\partial \eta_A} = A \nabla V \cdot \eta = h, & \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \\ V(x, 0) = V_t(x, 0) = 0, & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.21)$$

Multiplions la première équation du (2.21) par  $V'$ , intégrons sur  $(0, T) \times \Omega$  et utilisons la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} & \|V'(t)\|_2^2 + \|V(t)\|_V^2 + 2k_0 \int_0^t \|V'(s)\|_m^m ds \\ & \leq \|V'(0)\|_2^2 + \|V(0)\|_V^2 + 2 \int_0^t \int_\Omega (|u|^{p-2} u - |\tilde{u}|^{p-2} \tilde{u}) V_t dx ds + 2 \int_0^t \int_{\Gamma_2} h(s) V'(s) d\Gamma ds, \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'estimation (2.12), on trouve

$$\begin{aligned} & \|V'(t)\|_2^2 + \|V(t)\|_V^2 + 2k_0 \int_0^t \|V'(s)\|_m^m ds \leq 2C \int_0^t \|V_t\|_2 \|U\|_V (\|u\|_V^{p-2} + \|\tilde{u}\|_V^{p-2}) ds + \\ & + 2 \int_0^t \|h(s)\|_{L^2(\Gamma_2)} \|V'(s)\|_{L^2(\Gamma_2)} ds. \end{aligned}$$

En tenant en compte la continuité de la fonction trace :

$$\begin{aligned} \gamma_2 & : V \rightarrow L^2(\Gamma_2), \gamma_1(V) = V'/\Gamma_2, \\ \left\| V'(s) \right\|_{L^2(\Gamma_2)} & \leq C' \|V(s)\|_V^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|V'(t)\|_2^2 + \|V(t)\|_V^2 + 2k_0 \int_0^t \|V'(s)\|_m^m ds & \leq 2C \int_0^t \|V_t\|_2 \|U\|_V (\|u\|_V^{p-2} + \|\tilde{u}\|_V^{p-2}) ds + \\ + 2C' \int_0^t \|h(s)\|_{L^2(\Gamma_2)} \|V(s)\|_V ds & \leq 2R^{p-2} C \int_0^t \|V_t\|_2 \|U\|_V ds + \\ + 2C' \int_0^t \|h(s)\|_{L^2(\Gamma_2)} \|V(s)\|_V ds. & \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité Young, on obtient

$$\begin{aligned} \|V'(t)\|_2^2 + \|V(t)\|_V^2 + 2k_0 \int_0^t \|V'(s)\|_m^m ds &\leq \int_0^t \|V'(s)\|_2^2 ds + R^{p-2}C' \int_0^t \|U\|_2^2 ds + \\ &+ \int_0^t \|V(s)\|_V^2 ds + C'' \int_0^t \|h(s)\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 ds. \end{aligned}$$

Comme  $h \in L^2(\Gamma_2 \times (0, T))$  alors  $\int_0^t \|h(s)\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 ds \leq C_2$ , on obtient alors

$$\begin{aligned} &\|V'(t)\|_2^2 + \|V(t)\|_V^2 + 2k_0 \int_0^t \|V'(s)\|_m^m ds \leq \\ &\leq C + R^{p-2}C' \int_0^t \|U\|_2^2 ds + \int_0^t \left( \|V'(s)\|_2^2 + \|V(s)\|_V^2 \right) ds. \end{aligned}$$

Alors

$$\|V'(t)\|_2^2 + \|V(t)\|_V^2 \leq C + R^{p-2}C' \int_0^t \|U\|_2^2 ds + \int_0^t \left( \|V'(s)\|_2^2 + \|V(s)\|_V^2 \right) ds,$$

En appliquant le Lemme de Granwall, pour

$$\Psi = \|V'(t)\|_2^2 + \|V(t)\|_V^2, f = R^{p-2}C' \|U\|_2^2, a = C, g = 1,$$

Il résulte

$$\|V'(t)\|_2^2 + \|V(t)\|_V^2 \leq \left( C + R^{p-2}C' \int_0^t \|U\|_2^2 ds \right) \exp\left( \int_0^t 1 ds \right).$$

D'où

$$\|V\|_{Y_T} \leq k_3 T R^{p-2} \|U\|_{Y_T}. \quad (2.22)$$

En choisissant  $T$  suffisamment petit pour avoir  $k_3 T R^{p-2} \leq 1$ , l'estimation (2.22) montre que  $\Phi$  est une contraction. Par conséquent, le théorème du point fixe garantit l'existence d'un unique élément  $v$  satisfaisant  $v = \Phi(v)$ , ce qui termine la preuve du théorème est achevée.

# Chapitre 3

## Existence globale et stabilité exponentielle des solutions pour un problème hyperbolique semi-linéaire à coefficients variables avec terme source.

**Résumé.** *Dans ce chapitre, on va étudier l'existence globale et le comportement asymptotique de la solution locale trouvée dans le chapitre précédent. Nous montrons que la solution existe globalement en temps dans un ensemble stable et qu'elle est uniformément bornée. En suite, nous prouvons dans la deuxième section la décroissance exponentielle de cette solution en se basant sur la construction d'une fonction de Lyapunov  $L$ , qui est équivalente à la fonctionnelle d'énergie du problème (2.1).*

### Contenu :

1. Existence globale ;
2. Décroissance exponentielle ;

### 3.1 Existence globale

Pour étudier l'existence globale et le comportement asymptotique de la solution locale du problème (2.1) donnée par le théorème, on définit les fonctions suivantes :

$$I(u(t)) = I(t) = a(u(t), u(t)) - \|u(t)\|_p^p.$$

$$J(u(t)) = J(t) = \frac{1}{2}a(u(t), u(t)) - \frac{1}{p} \|u(t)\|_p^p,$$

pour  $u \in V$ , nous définissons le puits du potentiel  $\mathbf{H}$  par

$$\mathbf{H} = \{u \in V, I(t) > 0\} \cup \{0\}.$$

Pour  $u \in V$ , on introduit la fonctionnelle d'énergie totale associée au problème (2.1) par

$$E(u(t), u_t(t)) = E(t) = \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} a(u(t), u(t)) - \frac{1}{p} \|u(t)\|_p^p - \int_0^t \int_{\Gamma_2} h(s) u_t(s) d\Gamma ds, \forall t \geq 0, \quad (3.1)$$

avec  $h(0) = 0$ , où  $E(0) = \frac{1}{2} \|u_1\|_2^2 + J(u_0)$  désigne l'énergie initiale.

**Lemme 3.1** *Soit  $u(x, t)$  solution du problème (2.1). Alors, la fonctionnelle d'énergie définie par (3.1) est strictement décroissante sur  $[0, \infty)$ . De plus*

$$E'(t) = - \int_{\Omega} g(u_t(t)) u_t(t) dx, \forall t \geq 0. \quad (3.2)$$

**Preuve.** Multiplions la première équation du (2.1) par  $u_t$ , intégrons le résultat obtenu sur  $\Omega$  et utilisons la formule de Green, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(u(t), u(t)) + \int_{\Omega} g(u_t(t)) u_t(t) dx &= \int_{\Omega} |u|^{p-2} u u_t dx + \int_{\Gamma_2} h u_t d\Gamma \\ &= \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_p^p + \int_{\Gamma_2} h u_t d\Gamma. \end{aligned}$$

On a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(u(t), u(t)) - \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_p^p = - \int_{\Omega} g(u_t(t)) u_t(t) dx + \int_{\Gamma_2} h u_t d\Gamma,$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2} a(u(t), u(t)) - \frac{1}{p} \|u(t)\|_p^p - \int_0^t \int_{\Gamma_2} h u_t d\Gamma \right) &= - \int_{\Omega} g(u_t(t)) u_t(t) dx \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

On trouve l'équation (3.2). (1.2) on déduit que la fonctionnelle d'énergie est strictement décroissante. ■

**Lemme 3.2** *Supposons que*

$$2 < p \leq 2 \frac{n-1}{n-2}, n \geq 3 \quad (3.3)$$

Si  $u_0 \in \mathbf{H}$ ,  $u_1 \in L^2(\Omega)$  tels que

$$\theta = C_*^p a_0^{-\frac{p}{2}} \left( \frac{2p}{P-2} E(0) \right)^{\frac{P-2}{2}} < 1, \quad (3.4)$$

alors  $u(t) \in \mathbf{H}$ , pour tout  $t \in [0, T)$ , où  $C_*$  est la constante de Poincaré.

**Preuve.** Puisque  $u_0 \in \mathbf{H}$ , alors  $I(u_0) > 0$ . Donc par continuité, il existe  $T_j < T$  tel que  $I(u(t)) \geq 0$ , pour tout  $t \in [0, T_j)$ . Par la définition de  $I$  et  $J$ , on a la relation suivante :

$$J(t) = \frac{P-2}{2p} a(u(t), u(t)) + \frac{1}{p} I(t).$$

Par conséquent, on obtient

$$J(t) \geq \frac{P-2}{2p} a(u(t), u(t)), \forall t \in [0, T_j).$$

Ou encore

$$a(u(t), u(t)) \leq \frac{2p}{P-2} J(t) \leq \frac{2p}{P-2} E(t), \forall t \in [0, T_j). \quad (3.5)$$

Utilisons (3.5), le résultat du lemme et l'hypothèse ( $H_1 : b$ ), on obtient :

$$\|\nabla u(t)\|_2^2 \leq \|u(t)\|_V^2 \leq \frac{2p}{P-2} \frac{1}{a_0} E(0), \forall t \in [0, T_j]. \quad (3.6)$$

Exploitions (1.4), (3.4) et (3.6), il résulte que

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_p^p &\leq C_*^p \|u(t)\|_V^p \leq C_*^p \|u(t)\|_V^{p-2} \|u(t)\|_V^2 \\ &\leq C_*^p a_0^{-\frac{p}{2}} \underbrace{\left( \frac{2p}{P-2} E(0) \right)^{\frac{p-2}{2}}}_{a(u(t), u(t))} a(u(t), u(t)) < \\ &< a(u(t), u(t)), \forall t \in [0, T_j]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

D'où  $\|u(t)\|_p^p < a(u(t), u(t)), \forall t \in [0, T_j]$ , ce qui implique que  $u(t) \in \mathbf{H}$ , pour tout  $\forall t \in [0, T_j], \forall j$ .

Puisque l'énergie  $E$  est strictement décroissante, on a les inégalités suivantes :

$$\lim_{t \rightarrow T_j} C_*^p a_0^{-\frac{p}{2}} \left( \frac{2p}{P-2} E(t) \right)^{\frac{p-2}{2}} < C_*^p a_0^{-\frac{p}{2}} \left( \frac{2p}{P-2} E(0) \right)^{\frac{p-2}{2}} < 1.$$

Ainsi, en répétant cette procédure,  $T_j$  est étendue à  $T$ . ■

**Théorème 3.1** *Supposons que (3.3) est vérifiée. Si  $u_0 \in \mathbf{H}$  et  $u_1 \in L^2(\Omega)$  satisfaisant (3.4), alors la solution  $u(x, t)$  du problème (2.1) est globale en temps.*

**Preuve.** Il suffit de montrer que  $\|u_t(t)\|_2^2 + a(u(t), u(t))$  est majorée par une constante indépendante de  $t$ .

Sous les hypothèses du Théorème 3.1, le lemme 3.2 assure que  $u(t) \in \mathbf{H}$  sur  $[0, T]$ .

Par conséquent, en utilisant le Lemme 3.1, de (3.5), il vient

$$\frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{P-2}{2p} a(u(t), u(t)) \leq E(t) = \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + J(t) - \int_0^t \int_{\Gamma_2} h(s) u_t(s) d\Gamma ds \leq E(0).$$

Ainsi, pour  $t \in [0, T]$ , la norme  $\|u_t(t)\|_2^2 + a(u(t), u(t))$  est uniformément majorée par une constante ne dépendant que de  $t$  et  $p$ . ■

## 3.2 Décroissance exponentielle

Dans ce paragraphe, nous supposons, en plus de  $(H_2)$  que

$$|g(v)| \leq k_1 |v| (1 + |v|^{m-2}), \quad \text{pour tout } v \in \mathbb{R} \text{ et } 2 \leq m < +\infty \quad (3.8)$$

où  $k_1$  est une constante positive.

Nous allons commencer par démontrer les lemmes techniques suivants :

**Lemme 3.3** *Supposons que*

$$2 \leq m \leq \frac{2n}{n-2}, n \geq 3, \quad (3.9)$$

alors la solution  $u(x, t)$  du problème (2.1) satisfait

$$\|u(t)\|_m^m \leq CE(t), \quad (3.10)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $t$ .

**Preuve.** En utilisant (1.4), (3.5) et (3.6) pour tout  $t \in [0, T)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_m^m &\leq C_*^m \|u(t)\|_V^m = C_*^m \|u(t)\|_V^{m-2} \|u(t)\|_V^2 \leq C_*^m \left( \frac{2p}{P-2} \frac{1}{a_0} E(0) \right)^{\frac{m-2}{2}} \|u(t)\|_V^2 \\ &\leq C_*^m a_0^{-\frac{m}{2}} \left( \frac{2p}{P-2} E(0) \right)^{\frac{m-2}{2}} \frac{2p}{P-2} E(t) = CE(t). \end{aligned}$$

Pour  $\varepsilon > 0$ , à le choisir ultérieurement et  $u(t) \in \mathbf{H}$ , on définit la fonction de Lyapunov  $L$  comme suit

$$L(t) = E(t) + \varepsilon \int_{\Omega} u_t(t)u(t)dx, \forall t \geq 0. \quad (3.12)$$

■

**Lemme 3.4** *Les fonctionnelles  $L$  et  $E$  sont équivalentes.*

**Preuve.** De (3.12), on obtient

$$L(t) - E(t) = \varepsilon \int_{\Omega} u_t(t)u(t)dx, \forall t \geq 0.$$

Ce qui donne, en valeur absolue :

$$|L(t) - E(t)| \leq \varepsilon \left| \int_{\Omega} u_t(t)u(t)dx \right| + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u(t)\|_2^2.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité  $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ , on obtient

$$|L(t) - E(t)| \leq \varepsilon \left( \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u(t)\|_2^2 \right).$$

En utilisant (1.4) et (1.9), on obtient

$$|L(t) - E(t)| \leq \varepsilon E(t) + \frac{\varepsilon}{2a_0} C_*^2 a(u(t), u(t)).$$

De (3.5), la dernière inégalité devient :

$$|L(t) - E(t)| \leq \varepsilon \left( 1 + \frac{1}{2a_0} C_*^2 \frac{2p}{P-2} \right) E(t). \quad (3.13)$$

Par conséquent, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, il existe deux constantes positives  $\beta_1$  et  $\beta_2$  telles que

$$\beta_1 E(t) \leq L(t) \leq \beta_2 E(t), \forall t \geq 0, \quad (3.14)$$

où

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 1 + \varepsilon \left( \frac{1}{2a_0} C_*^2 \frac{2p}{P-2} \right). \\ \beta_2 &= 1 - \varepsilon \left( \frac{1}{2a_0} C_*^2 \frac{2p}{P-2} \right). \end{aligned}$$

■

**Théorème 3.2** *Si les hypothèses du Théorème 2.1 sont valides, et (3.9), (3.8) ont lieu. Alors, il existe deux constantes positives  $K$  et  $k$  telles que l'énergie associée au problème (2.1) satisfait*

$$E(t) \leq K \exp(-kt), \forall t \geq 0. \quad (3.15)$$

**Preuve.** Dérivons par rapport à  $t$  la fonction  $L$  définie dans l'équation (3.12), on obtient

$$L'(t) = E'(t) + \varepsilon \int_{\Omega} u_{tt}(t)u(t)dx + \varepsilon \int_{\Omega} u_t(t)u_t(t)dx.$$

D'après (3.2), on trouve

$$L'(t) = - \int_{\Omega} g(u_t(t))u_t(t)dx + \varepsilon \int_{\Omega} u_{tt}(t)u(t)dx + \varepsilon \int_{\Omega} u_t^2(t)dx.$$

Utilisons la première équation du problème (2.1), par intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} L'(t) &= - \int_{\Omega} g(u_t(t))u_t(t)dx - \varepsilon a(u(t), u(t)) + \varepsilon \int_{\Omega} u_t^2(t)dx \\ &\quad - \varepsilon \int_{\Omega} g(u_t(t))u(t)dx + \varepsilon \int_{\Omega} |u(t)|^p dx + \varepsilon \int_{\Gamma_2} hud\Gamma. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Les hypothèses (1.2) et (3.8), nous permettent d'estimer le premier et le cinquième termes du deuxième membre de l'égalité précédente comme suit

$$- \int_{\Omega} g(u_t(t))u_t(t)dx \leq -k_0 \|u_t(t)\|_m^m \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} g(u_t(t))u(t)dx &\leq \left| \int_{\Omega} g(u_t(t))u(t)dx \right| \\ &\leq k_1 \int_{\Omega} |u(t)| |u_t(t)| dx + k_1 \int_{\Omega} |u(t)| |u_t(t)|^{m-1} dx. \end{aligned}$$

Exploitions l'inégalité de Young suivante

$$XY \leq \frac{\delta^r}{r} X^r + \frac{\delta^{-s}}{s} Y^s, X, Y \geq 0, \delta > 0, \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1,$$

avec  $r = m$  et  $s = m/m - 1$ , on obtient

$$k_1 \int_{\Omega} |u_t(t)|^{m-1} |u(t)| dx \leq k_1 \mu \|u(t)\|_m^m + k_1 c(\mu) \|u_t(t)\|_m^m, \forall \mu > 0. \quad (3.18)$$

Moyennement à l'inégalité de Hölder, (1.2) et (1.9), on trouve

$$k_1 \int_{\Omega} |u(t)| |u_t(t)| dx \leq k_1 \frac{C_*^2}{2a_0} a(u(t), u(t)) + \frac{k_1}{2} \|u_t\|_2^2. \quad (3.19)$$

Ce qui joint à(1.11) et (3.18), de (3.16), il résulte

$$\begin{aligned} L'(t) \leq & -k_0 \|u_t(t)\|_m^m + \varepsilon k_1 (\mu \|u(t)\|_m^m + c(\mu) \|u_t(t)\|_m^m) - \varepsilon a(u(t), u(t)) + \varepsilon \|u(t)\|_p^p \\ & + \varepsilon k_1 \left( \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{C_*^2}{2a_0} a(u(t), u(t)) \right) + \varepsilon \int_{\Gamma_2} h u d\Gamma. \end{aligned}$$

Ou encore, et en utilisant l'inégalité de Schwarz,

$$\begin{aligned} L'(t) \leq & -(k_0 - k_1 \varepsilon c(\mu)) \|u_t(t)\|_m^m - \varepsilon E(t) + \varepsilon k_1 \mu \|u_t(t)\|_m^m + \frac{\varepsilon}{2} (3 + k_1 \|u_t(t)\|_2^2) \\ & + \varepsilon \left( 1 - \frac{1}{P} \right) \|u(t)\|_p^p - \varepsilon \left( \frac{1}{2} - k_1 \frac{C_*^2}{2a_0} a(u(t), u(t)) \right) + \varepsilon \|h\|_{L^2(\Gamma_2)} \|u\|_{L^2(\Gamma_2)}. \end{aligned}$$

En tenant en compte de la continuité de la fonction trace

$$\gamma_1 : V \rightarrow L^2(\Gamma_2), \gamma_1(u) = u'/\Gamma_2,$$

on a

$$|\gamma_1(u)|_{L^2(\Gamma_2)} \leq c \|u(s)\|_V.$$

Donc

$$\begin{aligned} L'(t) \leq & -(k_0 - k_1 \varepsilon c(\mu)) \|u_t(t)\|_m^m - \varepsilon E(t) + \varepsilon k_1 \mu \|u_t(t)\|_m^m + \frac{\varepsilon}{2} (3 + k_1 \|u_t(t)\|_2^2) \\ & + \varepsilon \left( 1 - \frac{1}{P} \right) \|u(t)\|_p^p - \varepsilon \left( \frac{1}{2} - k_1 \frac{C_*^2}{2a_0} a(u(t), u(t)) \right) + \varepsilon c \|h\|_{L^2(\Gamma_2)} \|u\|_V. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité  $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ , on obtient

$$\begin{aligned} L'(t) \leq & -(k_0 - k_1 \varepsilon c(\mu)) \|u_t(t)\|_m^m - \varepsilon E(t) + \\ & + \varepsilon k_1 \mu \|u_t(t)\|_m^m + \frac{\varepsilon}{2} (3 + k_1 \|u_t(t)\|_2^2) + \varepsilon \left( 1 - \frac{1}{P} \right) \|u(t)\|_p^p - \\ & - \varepsilon \left( \frac{1}{2} - k_1 \frac{C_*^2}{2a_0} a(u(t), u(t)) \right) + \frac{\varepsilon}{2} (c' \|h\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 + \|u\|_V^2). \end{aligned}$$

Comme  $h \in L^2(\Gamma_2 \times (0, T))$  alors  $\int_0^t \|h(s)\|_{L^2(\Gamma_2)}^2 ds \leq C_2$ , on obtient alors

$$\begin{aligned} L'(t) \leq & -(k_0 - k_1 \varepsilon c(\mu)) \|u_t(t)\|_m^m - \varepsilon E(t) + \\ & + \varepsilon k_1 \mu \|u_t(t)\|_m^m + \frac{\varepsilon}{2} (3 + k_1 \|u_t(t)\|_2^2) + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{P}\right) \|u(t)\|_p^p - \\ & - \varepsilon \left(\frac{1}{2} - k_1 \frac{C_*^2}{2a_0} a(u(t), u(t))\right) + \frac{\varepsilon}{2} (k' + \|u\|_V^2), \text{ où } k' = c' C_2 \end{aligned}$$

En utilisant le résultat du lemme 3.3, (3.7) et l'inégalité de Poincaré suivante

$$\|u_t(t)\|_2^2 \leq C_*^2 \|u_t(t)\|_V^2,$$

on trouve

$$\begin{aligned} L'(t) \leq & -(k_0 - k_1 \varepsilon c(\mu)) \|u_t(t)\|_m^m - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} C_*^2 (3 + k_1)\right) \|u_t(t)\|_V^2 - \quad (3.20) \\ & - \varepsilon \left[ -\theta \left(1 - \frac{1}{p}\right) - k_1 \frac{C_*^2}{2a_0} \right] a(u(t), u(t)) - \varepsilon (1 - k' - k_1 \mu C) E(t). \end{aligned}$$

Notons qu'à partir de (3.4), le coefficient de  $a(u(t), u(t))$  dans (3.20) est négatif

$$B_1 = -\theta \left(1 - \frac{1}{p}\right) - k_1 \frac{C_*^2}{2a_0} < 0$$

Par conséquent, en utilisant (3.5), l'inégalité (3.20) donne

$$\begin{aligned} L'(t) \leq & -(k_0 - k_1 \varepsilon c(\mu)) \|u_t(t)\|_m^m - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} C_*^2 (3 + k_1)\right) \|u_t(t)\|_V^2 - \quad (3.21) \\ & - \varepsilon \left(B_1 \frac{2p}{P-2} + 1 - k' - k_1 \mu C\right) E(t). \end{aligned}$$

A ce point, on choisit  $\mu$  de sorte que

$$B_2 = B_1 \frac{2p}{P-2} + 1 - \frac{k'}{2} - k_1 \mu C > 0.$$

Lorsque  $\mu$  est fixé, on choisit

$$\varepsilon = \min\left(\frac{k_0}{k_1 c(\mu)}, \frac{2}{C_*^2 (3 + k_1)}\right)$$

et que (3.14) reste valide, alors de (3.21), il résulte

$$L'(t) \leq -\varepsilon \left[ B_1 \frac{2p}{P-2} + 1 - k' - k_1 \mu C \right] E(t) \leq -\frac{\varepsilon}{\beta_2} \left[ B_1 \frac{2p}{P-2} + 1 - k' - k_1 \mu C \right] L(t),$$

en vertu de (3.14).

Intégrons l'inégalité différentielle précédente entre 0 et  $t$ , on trouve l'estimation suivante

$$L(t) \leq L(0)e^{-kt}, \forall t \geq 0,$$

où

$$k = \frac{\varepsilon}{\beta_2} \left( B_1 \frac{2p}{P-2} + 1 - k' - k_1 \mu C \right).$$

En utilisant (3.14), on obtient

$$E(t) \leq \frac{L(0)}{\beta_1} e^{-kt} = K e^{-kt}, \forall t \geq 0.$$

Ainsi, (3.15) est établie. ■

# Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème aux limites hyperbolique semi-linéaire avec ou sans terme source et terme d'amortissement, à savoir :

\* Problème aux limites hyperbolique semi-linéaire sans terme source pour les équations fortement elliptiques à coefficients variables ;

\* Problème aux limites hyperbolique semi-linéaire avec terme source pour les équations fortement elliptiques à coefficients variables ;

Pour les deux problèmes, nous avons analysé la question d'existence et d'unicité d'une solution locale en se basant sur la méthode de compacité et les techniques de Faedo-Galerkin pour le premier problème et avec de plus la méthode du point fixe pour le second problème. Ensuite, nous avons étudié l'existence globale et le comportement asymptotique de la solution locale obtenue dans le second chapitre. Plus précisément, Nous avons montré que la solution existe globalement en temps dans un ensemble stable et qu'elle est uniformément bornée. Puis, nous avons prouvé la décroissance exponentielle de la solution en se basant sur la construction d'une fonction de Lyapunov  $L$ , qui est équivalente à la fonctionnelle d'énergie du problème considéré.

# Bibliographie

- [1] R. A. Adams, Sobolev spaces, Academic Press, New York, 1975.
- [2] Y. Boukhatem, B.Benabderrahmanne, Etude de quelques problèmes aux limites hyperboliques semi linéaires. Editions universitaires europeennes, ESNB-13 978-620-3-41671-8, 2021.
- [3] Y. Boukhatem, B.Benabderrahmanne, Méthode de Faedo-Galerkin pour un problème aux limites non linéaires, Anal. Univ. Oradea, fasc. Matematic Tom XVI (2009) 167–181.
- [4] Y. Boukhatem, B.Benabderrahmanne, Blow up of solutions for a semilinear hyperbolic equation, Electron. J. Qual. Theory Differ. Eqns (40) (2012) 1–12.
- [5] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications. Masson, Paris, 1983.
- [6] I. Hlavacek and J. Necas. Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies : An introduction. Elsevier, Amsterdam, (1981).
- [7] J.L. Lions. Problème aux limites non homogène et applications, vol.1. Dunod Paris, 1968.
- [8] J.L. Lions. Problème aux limites non homogène et applications, vol.2. Dunod Paris, 1968.
- [9] J. L. Lions and E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1, 2, Dunod Paris (1968).
- [10] J.L. Lions. Quelques méthodes de résolution des problème aux limites non linéaires. Dunod Paris, 1969.
- [11] Marie-Thérèse. Distributions Espaces de Sobolev Applications. Lacroix-sonrier. ellipses édition marketin S.A, Paris, 1998.

- [12] S. Tarrafi. Techniques de Faedo-Galerkin pour un problème hyperbolique semi linéaire associé à un opérateur fortement elliptique à coefficients variables. Mémoire de Master en Mathématiques, Université de M'sila, Algérie, 2014.
- [13] H.S. Chicouche. problème hyperbolique semi linéaire pour les équations de Lamé, Mémoire de Master en Mathématiques, Université de M'sila, Algérie, 2020.
- [14] V. Georgiev and G. Todorov, Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source term, J. Differential Equations 109 (1994), 295–308.