

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

FACULTE : Technologie

DEPARTEMENT : GENIE CIVIL

N° :



DOMAINE : Science et Technologie

FILIERE : GENIE CIVIL

OPTION : STRUCTURE

Mémoire présenté pour l'obtention  
Du diplôme de Master Académique

Par: DOUFFI Youcef

Intitulé

**Influence du nombre de modes  
et du type de combinaison  
sur la réponse sismique**

Dirigé par :

Dr: BOULAOUAD Abderrachid

Dr : BERRA Ibrahim

Soutenu devant le jury composé de:

**MENASRIA**

Université M'Sila .

Président

**BOULAOUAD Abderrachid** Université M'Sila

Rapporteur

**BELOUAHRI Ibrahim**

Université M'Sila

Examineur

**Année universitaire : 2016 / 2017**

## **Remerciements**

En tout premier lieu, je remercie le bon dieu pour m'aider à aboutir ce travail , en suite je tiens à adresser mes sincères remerciements et mon grand respect à Mr. BELAOUAD Abderrachid & Mr.BERRA Ibrahim pour avoir accepté d'encadrer mon mémoire et qui a suivi de près mon travail.

Sans lui ce travail de thèse ne serait pas ce qu'il est.

Je remercie chaleureusement mes parents et ma famille, sans qui je ne serais pas ce que je suis.

J'adresse mes remerciements aux personnes qui m'ont aidé dans la réalisation de ce mémoire. Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et ami(e)s, qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire. Merci à tous et à toutes.

## *Dédicace*

*Je dédie ce travail à: La mémoire de :*

*Mon père, Ma mère, Mes frères et soeurs*

*à mes amis, mes proche et à toute personne ayant*

*collaboré à ce travail.*

### ملخص

تقترح القوانين الجزائرية المضادة للزلازل ثلاث طرق لحساب القوة الزلزالية: "الطريقة الإستاتيكية المكافئة" و"الطريقة النسقية الطيفية" و"الطريقة الزمنية". تعتبر "الطريقة النسقية الطيفية" أكثر استعمالا نظرا لبساطتها النسبية مع نتائج مقبولة. لكن هذه الطريقة تعتمد على عدد الأنساق المعتمدة وكذلك نوع التوافق بينها. تهتم هذه الدراسة ببيان أثر كل من عدد الأنساق ونوع التوافق على تجاوب الجملة.

### Résumé

Le code sismique Algérien (RPA) propose trois méthodes de calcul des forces sismiques : la méthode statique équivalente, la méthode modale spectrale et la méthode temporelle par accélérogrammes. Parmi ces trois méthodes, la méthode modale spectrale est largement utilisée pour le calcul à cause de sa simplicité et de ses résultats satisfaisants.

Cependant, la précision de cette méthode dépend beaucoup du nombre de modes considéré et du type de combinaison choisi pour ces modes (SA, SRSS ou CQC).

Ce travail porte sur l'étude de l'effet du nombre de modes sur la réponse de la structure et la comparaison entre les 3 types de combinaison.

### Abstract

For seismic evaluation, the Algerian seismic code proposes three methods: the "equivalent static method", the "spectral modal analysis method" and the "time history method". Among these methods, the "spectral modal analysis method" is largely used because it is relatively simple with accurate results. Nevertheless, this method is based on the number of considered modes and the type of combination of these modes.

In this work, we have studied the effect of the number of modes on the structure response and the comparison between the three types of combination.

# Table des matières

<a href="#">Introduction-Problématique</a> .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
<a href="#">Synthèse bibliographique</a> .....	<b>Erreur ! Signet non défini.</b>
<a href="#">Chapitre I : Méthodes de calculs</a> .....	18
<a href="#">La méthode statique équivalente peut être utilisée dans les conditions suivantes :</a> .....	18
<a href="#">La méthode d'analyse dynamique par accélérogrammes :</a> .....	18
<a href="#">La méthode d'analyse modale spectrale :</a> .....	18
<a href="#">Chapitre II : Modes de vibration et différentes combinaisons</a> .....	21
<a href="#">II-1 Modélisation :</a> .....	21
<a href="#">II-1-1 Présentation générale :</a> .....	22
<a href="#">II-1-2 Pulsations naturelles et modes propres :</a> .....	22
<a href="#">II-1-3 Analyse modale :</a> .....	23
<a href="#">II-2 Les Différentes Combinaisons :</a> .....	24
<a href="#">II-2-1 Méthode de la somme absolue (SA)</a> .....	24
<a href="#">II-2-2 Méthode de la moyenne quadratique(SRSS)</a> .....	24
<a href="#">II-2-3 Méthode de la combinaison quadratique complète (CQC):</a> .....	25
<a href="#">II-3 Nombre de modes à considérer :</a> .....	25
<a href="#">II-4 Combinaison des réponses modales :</a> .....	26
<a href="#">Chapitre III : Applications, Résultats et Commentaires</a> .....	28
<a href="#">III- 1) Application simple (calcul à la main) :</a> .....	28
<a href="#">III – 2) Applications avec SAP2000 :</a> .....	31
<a href="#">III -2 -1 ) Les données :</a> .....	31
<a href="#">III-2-2) Résultats :</a> .....	32
<a href="#">Conclusion et Perspectives</a> .....	36
<a href="#">Notations et Symboles</a> .....	37
<a href="#">Bibliographie</a> .....	38

## **Liste des tableaux et Liste des figures**

### **Chapitre II :**

Figure (v-1) : Structure à plusieurs degrés de liberté.

### **Chapitre III :**

Fig \_1 : bâtiment à trois étages

Tab 1 : Valeurs des déplacements pour les différentes combinaisons.

Fig2-a ) : Comparaison des trois combinaisons (Déplacements).

Tab 2 : Valeurs des efforts tranchants pour les trois combinaisons.

Fig 2-b ) : Effet du nombre considéré de modes sur l'effort tranchant à la base

## **Introduction-Problématique**

---

Le Nord de l'Algérie compte parmi les régions les plus touchées par les secousses sismiques à travers le monde. D'après les Règles Parasismiques Algériennes (RPA), le "Centre de Recherche Appliquée en Génie Parasismique" (C.R.A.A.G.) a recensé 85 séismes de plus ou moins grande intensité entre 1716 et 1989, c'est-à-dire environ un séisme tous les trois ans. Entre 1980 et 1989, 26 séismes se sont produits (environ un séisme tous les quatre mois). Le début de cette décade a été particulièrement marquant pour l'histoire de la sismicité en Algérie après le tragique séisme de Chlef survenu le 10/10/1980 (de magnitude 7,2 à l'échelle Richter qui en compte 9) causant un grand désastre tant humain que matériel (environ 3500 morts et d'énormes dégâts matériels). Cet événement fut la clé de voûte dans le développement d'une réglementation sismique Algérienne puisque, juste une année après, on assista à la naissance du premier code Algérien en matière de construction parasismique, officiellement approuvé en 1983, d'où le nom de "R.P.A. 81 version 83". Plus récemment encore, le séisme de Boumerdes (2003) fut tout aussi violent (de magnitude 6,8) provoquant la mort de plus de deux milles personnes et des pertes estimées à plus de deux milliards de dinars, poussant ainsi à des révisions sérieuses du code, après celles de 88 et 99 de type plutôt formel. Ce qui fait qu'à l'heure actuelle, on parle de "R.P.A.2003".

Ce règlement propose trois méthodes de calcul des forces sismiques: la méthode statique équivalente, la méthode modale spectrale et la méthode temporelle par accélérogrammes. Parmi ces trois méthodes, la méthode modale spectrale est largement utilisée pour le calcul à cause de sa simplicité et de ses résultats satisfaisants.

Cependant, la précision de cette méthode dépend beaucoup du nombre de modes considéré et du type de combinaison choisi pour ces modes (SA, SRSS ou CQC). Ce nombre est souvent limité à 3 et on a tendance à opter pour la combinaison quadratique (SRSS). Cette limite et ce choix ne sont certainement pas les mieux indiqués dans tous les cas.

Il s'agit d'éclaircir ce point par l'étude de l'effet du nombre de modes sur la réponse de la structure et la comparaison entre les 3 types de combinaison.

## Synthèse bibliographique

---

la réponse sismique des structures peuvent être définis. En fonction de la donnée disponible, les méthodes d'analyse sismique des structures peuvent être classées en trois grands groupes : (i) méthode d'analyse temporelles, (ii) méthode des spectres de réponse et (iii) méthode d'analyse spectrale dans le domaine fréquentiel. Alors que la méthode temporelle est applicable aussi bien pour les systèmes linéaires que pour les systèmes non linéaires, les deux autres sont essentiellement limitées aux systèmes élastiques, bien que dans certains cas elles peuvent être étendues au domaine non linéaire moyennant certaines techniques appropriées.

### **La méthode des spectres de réponse :**

Utilisent des spectres de réponse de séismes pour obtenir un ensemble de forces latérales statiques équivalentes à l'effet causé par un mouvement de sol sur la structure. Les forces internes dans la structure sont obtenues par analyse statique.

Les analyses modales spectrales sont des outils d'analyse des demandes induites dans les structures par un spectre de réponse d'un mouvement de sol donné pour déterminer les quantités maximales des réponses, Les modèles d'analyse utilisés pour l'analyse modale spectrale sont des modèles linéaires élastiques basés sur les propriétés effectives des rigidités et sur un coefficient d'amortissement visqueux. C'est la méthode préférée pour de nombreux ingénieurs structureaux pour de nombreuses raisons. Elle permet une meilleure compréhension de l'influence de chaque mode de vibration sur la réponse totale de la structure.

**Combinaisons modales :** Une fois la réponse maximale pour chaque mode de vibration obtenue, les réponses des différents modes doivent être combinées suivant des techniques qui seront exposées ci-après pour obtenir la réponse modale maximale.

Les réponses de tous les modes de vibration contribuant de manière significative à la réponse globale doivent être prises en compte. Dans l'Eurocode 8, on considère cette condition comme réalisée si la somme des masses modales effectives pour les modes considérés atteint au moins 90% de la masse totale de la structure et si tous les modes dont la masse modale effective est supérieure à 5% de la masse totale sont pris en compte.

Si ceci ne peut pas être vérifié (par exemple, dans le cas de bâtiments où la contribution du mode de torsion est significative), il convient de considérer, lors d'une analyse spatiale, un nombre minimal  $k$  de modes satisfaisant aux conditions :

$$k \geq 3 \cdot n \quad \text{et} \quad T_k \leq 0,20 \text{ s}$$

où  $k$  est le nombre de modes à considérer,  $n$  le nombre de niveaux au-dessus des fondations ou du sommet d'un soubassement rigide et  $T_k$  la période de vibration du mode  $k$ .

On souhaite pouvoir disposer de modèles simplifiés, aptes à quantifier correctement les caractéristiques principales de l'ouvrage sous sollicitation sismique. En dynamique des structures, la période propre d'une structure est un paramètre essentiel dans l'évaluation de son comportement, et donne a priori une bonne appréciation de ses performances dynamiques. La période fondamentale des bâtiments en béton armé est en général estimée par des formules empiriques et est fonction des dimensions du bâtiment et du mode de renforcement (portiques ou voiles) (Chopra, 2001, Bozorgina et al., 2004, Goel et al., 1997, AFPS, 1990, RPA, 2003). Nous proposons, dans une approche de type « plan d'expériences » (Box et al., 1978, Taguchi, 1987, Schimmerling, 1989, Soulier, 1994), de faire varier simultanément l'ensemble des paramètres qui peuvent influencer le comportement dynamique et de modéliser la surface des réponses ainsi générées. Chaque structure sera analysée finement, au moyen d'une simulation dynamique complète linéaire. Les réponses de la structure analysée (période fondamentale et efforts) pourront ainsi être estimées à partir du modèle fourni par la surface de réponse, induisant une réduction significative dans le temps de calcul. Cet outil de prédimensionnement ne dispensera bien entendu pas de vérifications plus sophistiquées quand la conception de l'ouvrage sera plus avancée.

On étudié l'Influence du nombre de modes et du type de combinaison sur la réponse sismique d'après les règles parasismiques algériennes 99 (RPA 99). Leur principale conclusion, est que dans la gamme des hautes fréquences la modification de l'action sismique n'est pas prise en compte par la forme des différents spectres de réponse ainsi proposés. En dernier lieu, ils ont discuté l'état actuel des spectres de réponse eu suggèrent des modifications.

On a présenté les principales méthodes de calcul sismique pouvant être utilisés par les ingénieurs de structures pour le calcul des structures en zones sismiques. En fonction de la complexité de la structure, de son importance et des moyens numériques disponibles, l'ingénieur connaissant les hypothèses ainsi que les limitations de chaque méthode peut en toute confiance recourir à la méthode qu'il juge adéquate à son cas particulier. Cette présentation relativement claire où le bagage mathématique requis est

accessible aux ingénieurs les aidera à mieux interpréter les résultats obtenus avec des logiciels professionnels tels que SAP2000, ABAQUS, etc....

### Réponse élastique des structures aux séismes.

La réponse d'une structure soumise aux mouvements du sol appliqués à sa base est un problème de dynamique. On en rappelle ci-après quelques éléments.

#### Spectre de réponse élastique en accélération. Principe d'établissement.

Dans une zone géographique donnée où un accélérogramme  $dg''(t)$  représentatif des mouvements sismiques en base de la fondation de la structure étudiée est connu, on peut penser à simplifier la vie des ingénieurs auteurs de projet (spécialisés à ce stade en oscillateurs simples amortis) en résolvant une fois pour toutes l'ensemble des cas des divers oscillateurs simples possibles. A cette fin, on effectue  $n$  fois l'opération suivante.

On considère un oscillateur composé d'une masse  $M$ , située à une hauteur  $H$  d'une poutre console d'inertie  $I$  et de module d'élasticité  $E$ .

La constante de rappel  $k$  de la console « ressort » est égale à :  $k = 3EI / H^3$

La période propre  $T_1$  de l'oscillateur ainsi constitué vaut:

$$T_1 = 2\pi / \omega = 2\pi (M/k)^{1/2} \Rightarrow T_1 = 2\pi \sqrt{MH/3EI}$$

En résolvant l'équation (2.2), on établit la valeur du déplacement relatif  $d = u(t)$  de la masse  $M$  par rapport à l'encastrement A de sa console support et de la pseudo accélération  $\beta(t) = \omega^2 u(t)$  à chaque instant. L'amplitude du déplacement  $d$  de la masse par rapport à la base est influencée par l'amortissement du système ; on attribue à ce dernier pour la plupart des applications une valeur standard égale à 5 % de l'amortissement critique.

On retient la valeur maximale de  $\beta(t)$  sur la durée du tremblement de terre, et on l'associe à la période  $T_1$ , soit  $\beta(T_1) = \max \beta(t)$ . On reporte  $\beta(T_1)$  dans un diagramme  $(\beta(T_1), T)$ . Figure 2.5. En faisant varier les paramètres qui définissent la console de référence (autres masses  $M$ , autres raideurs  $k$ , qui correspondent à d'autres périodes fondamentales  $T = T_1, T_2, \dots$ ), on établit un ensemble de paires de valeurs  $[T_i, \beta(T_i)]$ .

L'ensemble des points  $[T_i, \beta(T_i)]$  constitue ce qu'on appelle le **spectre de réponse élastique  $\beta(T)$  en accélération** (en fait en pseudo accélération) correspondant à un accélérogramme de la zone étudiée.

L'auteur de projet qui dispose de ce spectre peut obtenir directement, pour un oscillateur simple donné dont il évalue la période propre  $T$ , la force maximale  $F_{max}$  « équivalente » au tremblement de terre :  $F_{max} = M \beta(T_1)$

L'équivalence mentionnée correspond au fait que le déplacement calculé sous l'application de ce  $F$  est égal au déplacement relatif maximum  $d = u_{\max}$  entre la masse  $M$  et la base de la console.

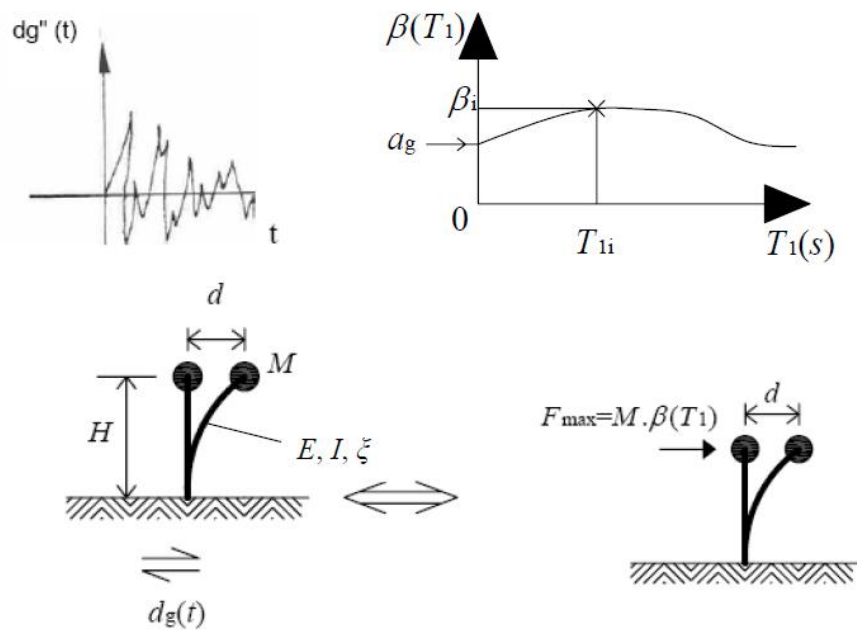


Figure 2.5. Construction d'un spectre de réponse élastique en accélération correspondant à un accélérogramme donné et définition d'une Force statique  $F_{\max}$  « équivalente » au séisme.

### **Spectre de réponse du code parasismique.**

Des incertitudes affectent la connaissance de l'accélérogramme qui sera mesuré à un endroit donné lors du prochain tremblement de terre . Le "spectre de réponse en accélération  $\beta$  " établi comme indiqué cidessus correspond à un seul accélérogramme et ne peut pas bien représenter la séismicité du site.

On rencontre les incertitudes quant aux prochains séismes en établissant plusieurs spectres de réponse  $\beta(T1)$  qui correspondent à plusieurs accélérogrammes et en retenant comme spectre pour le code parasismique une "moyenne" de tous ces spectres.

Le spectre "moyen" résulte d'une approche statistique, associée à un "jugement d'ingénieur" et au souci d'un confort d'utilisation du spectre normatif, de sorte que la forme du spectre de réponse de projet  $Se(T)$  est plus schématique que celle de chaque spectre de réponse  $\beta(T1)$ . On présente à la Figure 2.7 le spectre de réponse élastique  $Se(T)$  de l'Eurocode 8, où on distingue des périodes "de coin"  $TB$  ,  $TC$  et  $TD$ . Les codes parasismiques définissent généralement une seule schématisation de base pour le spectre de réponse élastique en accélération de référence.

L'évaluation de la déformée et des sollicitations d'une console de masse  $M$  et de raideur  $EI/H$  est effectuée comme expliqué précédemment et la force horizontale  $F$  maximale vaut:  $F_{max} = M Se(T)$  Ne pas oublier de considérer le spectre en unité d'accélération ( $m/s^2$ ) pour des calculs pratiques... Si on peut établir que l'amortissement est différent de la valeur standard de 5 %, le spectre de réponse élastique peut être corrigé par un coefficient  $\eta$ .

Le spectre est fonction du sol par le paramètre  $S$ , comme on l'on explique en 2.5. Le spectre des codes parasismiques est généralement établi pour une valeur standard d'amortissement égale à 5% de l'amortissement critique. Si on peut démontrer qu'une structure étudiée est caractérisée par une autre valeur d'amortissement, on modifie le spectre de base par un paramètre  $\eta$ .

L'examen d'un spectre de réponse élastique en accélération -Figure 2.7- met en évidence plusieurs faits :

- pour une structure très raide ( $T \approx 0$  s), la pseudo accélération  $Se(T)$  est égale à l'accélération maximale  $Sag = Sdg''(t)$  du sol (si on construit sur le bedrock,  $S=1$ ); c'est logique, car une

structure infiniment raide suit exactement les mouvements du sol, sans avoir de déformée propre

- la réponse dynamique des structures modérément flexibles ( $T$  compris entre  $T_B$  et  $T_C$ , ordre de grandeur 0,25s et 0,8s, voir Tableau 2.3) entraîne à une amplification des accélérations par rapport à l'accélération du sol; la pseudo accélération  $S_e(T)$  est de l'ordre de 2,5 fois l'accélération maximale  $S_{ag} = Sdg''(t)$  du sol; le contenu fréquentiel des accélérogrammes, qui est plus important dans cette gamme de périodes, favorise un aspect « résonance » dans la réponse de la structure.

- les structures très flexibles sont les moins sollicitées en terme de force, car elles fléchissent de telle sorte que  $u(t) \approx dg(t)$  et « ne voient pas passer » le séisme; cette grande flexibilité est toutefois synonyme d'un effet  $P-\Delta$  important.

On conclut que les effets d'un tremblement de terre sur une structure dépendent de sa rigidité: une structure plus rigide (période propre  $T$  faible) subit des forces plus élevées qu'une structure flexible.

### **Spectre de calcul pour l'analyse élastique.**

Du spectre de réponse élastique au spectre de calcul.

D'autres facteurs que ceux considérés dans l'établissement du spectre de réponse élastique  $S_e(T)$  interviennent dans la réponse des structures aux tremblements de terre.

Les spectres de calcul pour l'analyse élastique  $S_d(T)$  prennent en compte ces facteurs additionnels, qu'on définit aux paragraphes suivants.

### **Importance de la construction.**

La définition de l'accélération maximale "de calcul"  $ag$  résulte d'un processus statistique et correspond à l'acceptation d'un certain niveau de risque. Il en découle que l'accélération maximale de calcul  $ag$  devrait être plus grande pour les structures considérées comme plus précieuses ou plus importantes à divers points de vue. Dans l'Eurocode 8, on définit une accélération de référence  $ag_R$  correspondant à un niveau standard de risque accepté;  $ag_R$  est compris entre 0,05 g (0,5 m/s<sup>2</sup>) dans les zones très faiblement sismiques et 0,4 g (4 m/s<sup>2</sup>) dans les zones très sismiques. L'accélération maximale de calcul  $ag$  est trouvée en multipliant  $ag_R$  par  $\gamma_I$ , "coefficient d'importance" de la structure considérée:

$ag = \gamma_I ag_R$ .  $\gamma_I$  est égal à 1 pour les bâtiments courants et vaut jusqu'à 1,4 pour les structures dont l'intégrité est vitale en cas de séisme. On donne au Tableau 2.1 les valeurs de  $\gamma_I$  recommandées dans l'Eurocode 8 pour différentes catégories d'importance de bâtiments.

### **Utilisation des spectres de réponse pour les oscillateurs multiples :**

Si au lieu de l'accélérogramme  $dg''(t)$  mentionné en 2.7, on utilise un spectre de pseudo-accélération

$SDe(T)$ , le vecteur des pseudo accélérations à appliquer aux masses  $m_k$  est donné pour chaque mode  $j$  de période  $T_j$  par :  $F_j = SDe(T_j) a_j D_j$

On en déduit pour chaque masse  $m_k$  la force statique équivalente  $F_k$  correspondant au mode  $J$  :  $F_{kj} = m_k \gamma_{kj}$  où  $\gamma_{kj} = SDe(T_j) a_j d_{kj}$

On calcule alors la déformée de la structure correspondant à chaque mode et on en déduit les sollicitations ( $M, N, V, \dots$ ) correspondantes, puis on cumule les contributions des divers modes à ces sollicitations de la structure, suivant l'un des processus de cumulation définis en 2.10. La Figure 2.14 reprend la synthèse de l'approche effectuée lors de l'utilisation d'un spectre de réponse par le calcul d'un oscillateur multiple sous action sismique.

### **Cumulation des sollicitations des divers modes.**

#### **Le problème.**

Les valeurs des pseudo accélérations  $SDe(T_j)$  données par le spectre de réponse sont des maxima dans chaque mode et il est peu probable que ces maxima surviennent au même instant  $t$ . Une addition pure et simple des efforts internes correspondant aux valeurs maximales de déformation dans chaque mode est donc l'hypothèse la plus pessimiste et on n'y a recours que dans des cas particuliers. Différentes méthodes de cumulation sont utilisées, en regard des données particulières à chaque problème.

#### **Moyenne quadratique.**

La pratique de cumulation la plus courante consiste à effectuer une moyenne quadratique des effets des différents modes. La moyenne quadratique est la racine carrée de la somme des carrés des contributions de chaque mode (en anglais SRSS, Square Root of the Sum of the Squares).

La moyenne quadratique donne une valeur dont la probabilité d'être dépassée n'est pas différente de la probabilité que la valeur  $M_i$  dans un mode particulier soit dépassée si ce mode seul était activé. C'est donc une évaluation probabiliste du maximum.

Chaque fois que toutes les réponses modales prises en compte peuvent être considérées comme indépendantes les unes des autres, la valeur maximale  $EE$  de l'effet d'une action sismique peut être prise égale à :  $2EE = \sum EE_i$  où  $EE$  est l'effet de l'action sismique considéré (force, déplacement, etc.) ;  $EE_i$  est la valeur de cet effet de l'action sismique due au mode de

vibration  $i$ . Dans l'Eurocode 8, on considère que les réponses de deux modes de vibration  $i$  et  $j$  (y compris les modes de torsion et de translation) peuvent être prises comme indépendantes l'une de l'autre si leurs périodes  $T_i$  et  $T_j$  satisfont à la condition suivante (avec  $T_j \leq T_i$ ) :  $T_j \leq 0,9 \cdot T_i$

### **Cumulation CQC.**

La cumulation CQC est une évaluation à caractère général du maximum probable de la réponse, dont la moyenne quadratique n'est qu'un cas particulier.

Une addition pure et simple des efforts internes correspondant aux valeurs maximales de déformation dans chaque mode donne les sollicitations maximales possibles. Elle se justifie si on a des raisons de craindre la simultanéité des effets maximum dans chaque mode. C'est par exemple le cas si un mode de période très grande (quelques s) est cumulé à un mode de période très courte.

Les réponses de tous les modes de vibration contribuant de manière significative à la réponse globale doivent être prises en compte. Dans l'Eurocode 8, on considère cette condition comme réalisée si la somme des masses modales effectives pour les modes considérés atteint au moins 90% de la masse totale de la structure et si tous les modes dont la masse modale effective est supérieure à 5% de la masse totale sont pris en compte.

Si ceci ne peut pas être vérifié (par exemple, dans le cas de bâtiments où la contribution du mode de torsion est significative), il convient de considérer, lors d'une analyse spatiale, un nombre minimal  $k$  de modes satisfaisant aux conditions:

$k \geq 3 \cdot n$  et  $T_k \leq 0,20$  s où  $k$  est le nombre de modes à considérer,  $n$  le nombre de niveaux au-dessus des fondations ou du sommet d'un soubassement rigide et  $T_k$  la période de vibration du mode  $k$ .

### **Amortissement différencié suivant les modes de vibration.**

Le spectre de réponse, qui est établi pour un oscillateur simple, ne prend en considération qu'une seule valeur de l'amortissement, égale pour tous les modes de vibration. L'utilisation d'un spectre de réponse n'est donc strictement valable que si les coefficients d'amortissement affecté aux différentes masses sont tous égaux à cette seule valeur. Cette hypothèse n'est pas gênante dans les applications où les masses sont liées rigidement à la structure. Cette hypothèse est très gênante dans le cas contraire. C'est par exemple le cas dans un réservoir partiellement rempli ou pour des bâtiments où des structures lourdes sont suspendues par des bielles à l'ossature.

L'utilisation directe du spectre de réponse à taux d'amortissement unique conduirait alors à des évaluations très approximatives des forces réelles. On peut résoudre ce problème :

- en revenant à des intégrations pas à pas sur le temps, si on dispose d'accélérogrammes
- en utilisant l'artifice qui consiste à construire un spectre fait de morceaux de spectres dont chacun correspond à l'amortissement correct pour chaque mode (de période connue) considéré.

Spectre de réponse en accélération vertical de calcul . Le spectre de réponse vertical de calcul est donné par les expressions du spectre horizontal de calcul avec :

- l'accélération de calcul du sol dans la direction verticale  $avg$  à la place de  $ag$
- $S = 1,0$
- $q \leq 1,5$  pour tous les matériaux et tous les systèmes structuraux.

Les séismes sont parmi les catastrophes naturelles les plus dévastatrices, jusqu'à maintenant l'homme essaye de limiter ses effets ainsi éviter leur conséquence désastreuses, le séisme de Lisbonne en 1755 est l'origine d'une nouvelle spécialité : la sismologie ; est la science qui étudie ces phénomènes , Pour bien comprendre il faut savoir ce qui se passe lors d'un séisme. Les séismes sont des secousses ou des mouvements du sol due a une libération de l'énergie du fond de la terre cette libération se résulte par la rupture de la surface le long duquel deux blocs rocheux se déplacent l'un par rapport a l'autre c'est ce qu'on appelle une faille, le lieu de la rupture en profondeur est le foyer (hypocentre) sa projection a la surface est l'épicentre c'est le point où le séisme est le plus ressenti, le mouvement des roches a coté du foyer engendrent des vibrations qui se propagent en forme d'ondes sismiques autour ou a travers la terre , il produit aussi un dégagement de chaleur par frottement , la majorité des séismes passent inaperçus mais certains sont destructifs ont étudié et entrepris une paramétrique concernant l'influence de l'interaction sol-structure sur la fréquence fondamentale de structure sous chargement sismique.

L'analyse est faite en utilisant un modèle numérique par éléments finis. Le comportement de la structure et du sol est supposé élastique. L'analyse statistique des résultats obtenus pour un portique représentant un système à un seul degré de liberté a permis la détermination d'un paramètre adimensionnel, intitulé rigidité relative sol-structure  $K_{ss}$ . Un abaque a été construit en faisant varier les paramètres de base. Il donne en fonction de  $K_{ss}$  la fréquence de la structure prenant en compte l'ISS. L'étude a été ensuite généralisée pour les bâtiments à plusieurs étages en incluant les paramètres  $N_b$ ,  $N_o$ , et  $N_e$  (Nombre d'ouverture dans le sens horizontal et transversal et nombre d'étages respectivement).

ont étudié l'Influence de la catégorie de site sur le comportement sismique des structures rigides d'après les règles parasismiques algériennes 99 (RPA 99). Leur principale conclusion, est que dans la gamme des hautes fréquences la modification de l'action sismique n'est pas prise en compte par la forme des différents spectres de réponse ainsi proposés. En dernier lieu, ils ont discuté l'état actuel des spectres de réponse et suggèrent des modifications.

ont étudié la réponse sismique des fondations circulaires aux ondes P, Dans le cadre de la conception parasismique des systèmes, l'approche par sous-structure est adoptée dans ce travail. L'étude de l'interaction cinématique (i.e. la réponse dynamique de fondations non pesantes aux excitations sismiques) de fondations circulaires sous l'effet des ondes P est l'objet principal de cette étude. La méthode des éléments de frontière (BEM) dans sa formulation directe est l'outil de base pour la détermination de la réponse sismique. La

singularité de la solution fondamentale 3D pour un problème électrodynamique a été contournée par une intégration semi-analytique. La symétrie de révolution a été prise en compte pour découpler les mouvements de la fondation. La principale conclusion tirée de cette étude est que le mouvement sismique sous l'effet de l'interaction cinématique engendre des rotations de la fondation ainsi qu'une réduction des mouvements de translation horizontaux et verticaux. ont étudié le Modèle dynamique équivalent de matrices d'impédance de fondation. Ils ont indiqué qu'en génie parasismique, la matrice d'impédance de sol est une fonction complexe de la fréquence. Elle peut être calculée par des méthodes numériques classiques. Cependant, on préfère souvent utiliser des modèles simplifiés tels que ceux à masses concentrées, comme les les modèles à ressorts de Winkler ou ceux résultants des travaux de Wolf.. Ces modèles sont limités au cas des fondations rigides, et le couplage entre les différents degrés de liberté (DDLs) de la fondation, ainsi que les phénomènes de résonance interne du sol- comme dans le cas d'une couche sur demi-espace rigide - sont difficiles à mettre en oeuvre. Ils proposent ici un modèle à variables cachées, plus général, basé sur l'existence de DDLs internes, en plus des DDLs de frontière, et la construction de matrices sous-jacentes de masse, rigidité, et amortissement. La signature de ces matrices correspond directement aux propriétés de causalité et de stabilité de l'impédance. Ces modèles à variables cachées ne sont pas soumis aux restrictions des modèles à masses concentrées. En particulier, les couplages dans la matrice d'impédance  $y$  sont pris en compte de façon naturelle. Deux applications d'intérêt en génie sismique sont ensuite présentées. les déformations induites par un mouvement sismique d'amplitude significative peuvent faire des incursions dans le domaine anélastique pour le sol et influencer les interactions dynamiques entre le sol et une structure. Ces effets conduisent à une évolution de la raideur à la base de la structure d'une part et à de la dissipation énergétique dans le sol d'autre part. En conséquence, il est très important de développer des méthodes prenant en compte les non linéarités de comportement du sol dans l'interaction sol-structure. Ce travail consiste à modéliser numériquement l'interaction dynamique sol-structure (IDSS) en tenant compte des non linéarités de comportement du sol et en étudiant les phénomènes prépondérants pour la réponse de la structure : fréquence fondamentale, dés amplification, variabilité spatiale du mouvement. La comparaison des résultats obtenus dans le cas de comportements linéaire et non-linéaire du sol est également envisagée. Des comparaisons avec des résultats expérimentaux (essais en macrogravité) ont été faites afin de valider l'approche numérique

Différents types de données de mouvements de sol pour l'analyse de la réponse sismique des structures peuvent être définis. En fonction de la donnée disponible, les méthodes d'analyse sismique des structures peuvent être classées en trois grands groupes : (i) méthode d'analyse temporelles, (ii) méthode des spectres de réponse et (iii) méthode d'analyse spectrale dans le domaine fréquentiel. Alors que la méthode temporelle est applicable aussi bien pour les systèmes linéaires que pour les systèmes non linéaires, les deux autres sont essentiellement limitées aux systèmes élastiques, bien que dans certains cas elles peuvent être étendues au domaine non linéaire moyennant certaines techniques appropriées.

### **La méthode des spectres de réponse :**

Utilisent des spectres de réponse de séismes pour obtenir un ensemble de forces latérales statiques équivalentes à l'effet causé par un mouvement de sol sur la structure. Les forces internes dans la structure sont obtenues par analyse statique.

L'étude de la réponse d'une structure sous l'effet de mouvements imposés de type sismique, avec un mouvement imposé unique (mono-appui) ou multiple (multi-appui) est possible en analyse transitoire (time history). On se reportera à la note Pour des études de dimensionnement, on peut ne s'intéresser qu'à une estimation des efforts maximaux induits par les sollicitations, pour évaluer la marge de sécurité avec des règlements de construction, sans recourir à une analyse transitoire.

La méthode spectrale s'appuie sur la notion de spectre d'oscillateur d'un accélérogramme de séisme. On détaille la méthode d'élaboration de ce spectre de réponse disponible dans l'opérateur CALC\_FONCTION

On montre comment ce spectre d'oscillateur peut être utilisé pour évaluer un majorant de la réponse en déplacement relatif d'un oscillateur simple. Cette approche se justifie si on ne désire pas connaître l'histoire des déplacements et des efforts, en se limitant à l'analyse des effets inertiels.

La méthode spectrale utilise des notions générales de la méthode de recombinaison modale. On décrit les différentes règles de combinaison utilisables pour obtenir un majorant réaliste mais conservatif de la réponse maximale de la structure. Ces méthodes sont disponibles dans l'opérateur COMB\_SISM\_MODAL

### **Réponse sismique par recombinaison modale**

La méthode spectrale d'analyse sismique s'appuie sur la formulation de la réponse dynamique transitoire par recombinaison modale présentée dans les documents "Méthodes de RITZ en dynamique linéaire et non linéaire" "Analyse sismique par méthode directe ou recombinaison modale"

Résumons les principes de la démarche détaillée dans la note pour une structure représentée sous forme discrétisée par le système matriciel :

$$[M].\{\ddot{X}\} + [C].\{\dot{X}\} + [K].\{X\} = \{F(t)\}$$

### **Réponse sismique par méthode spectrale**

La méthode spectrale est une technique approchée d'évaluation du maximum de la réponse de la structure à partir des maximums de réponse de chaque oscillateur modal lus sur le spectre d'oscillateur de l'excitation.

### **Choix des modes propres à combiner**

Pour représenter correctement les modes de déformation susceptibles d'être excités par le mouvement imposé, il faudrait connaître tous les modes propres de fréquence inférieure à la fréquence de coupure du spectre, au delà de laquelle il n'y a pas d'amplification dynamique significative. Cette condition peut s'avérer difficile à remplir pour les structures complexes ayant un grand nombre de modes propres.

La taille de la base modale nécessaire doit donc être évaluée pour s'assurer qu'aucun mode ayant une contribution importante dans les efforts internes et les contraintes n'a été omis dans chaque direction étudiée.

### **Réponse combinée des oscillateurs modaux**

La réponse de la structure  $R_m$ , dans une direction de séisme, est obtenue par une des combinaisons possibles des contributions de chacun des modes propres pris en considération pour cette direction. Le nombre de méthodes possibles prouve simplement la difficulté de dégager une justification suffisante pour garantir une estimation conservative et réaliste. Si la combinaison quadratique simple (SRSS ou CQS) est évoquée par tous, on retiendra de [bib1] qu'elle est souvent mise en défaut et on lui préférera la combinaison quadratique complète (CQC). Les autres méthodes sont disponibles pour des comparaisons éventuelles

Elle constitue une bonne approximation de la réalité quand le spectre d'oscillateur définissant le séisme est à large bande de fréquences, et quand les modes propres de la structure sont bien séparés les uns des autres et se situent à l'intérieur ou au voisinage de cette bande. Elle est notamment mise en défaut dans le cas où des modes propres sont à des fréquences voisines ou pour des modes éloignés du pic d'excitation [bib2]. Les autres méthodes de combinaison des réponses modales tentent de corriger ce point.

### **Concept des forces statique et la méthode d'analyse par spectre de réponse :**

La force latérale équivalente pour un séisme est un concept unique en génie sismique. Ce concept est attrayant dans la mesure où il permet de transformer un problème purement dynamique en un problème partiellement dynamique et partiellement statique pour déterminer les déplacements maximaux (ou contraintes maximales) induits dans la structure par une excitation sismique. Pour la conception sismique, seules les contraintes maximales sont intéressantes et non pas leur réponse temporelle. La force latérale équivalente pour un séisme représente un ensemble de forces latérales qui provoquera la même réponse maximale dans la structure que celle obtenue par une analyse dynamique de la structure sous l'action d'un même séisme. Cette équivalence concerne uniquement un seul mode de vibration donné, généralement le premier mode, donc un ensemble de forces latérales équivalentes existe pour chaque mode de vibration.

La méthode d'analyse par spectres de réponse comprend les phases suivantes :

1. Une analyse modale de la structure est entreprise pour déterminer les valeurs et formes propres et les coefficients de participation modale de la structure.
2. Un chargement statique équivalent est dérivé pour obtenir la même réponse maximale obtenue pour chaque mode de vibration en utilisant le spectre de réponse en accélération du séisme.
3. Les réponses modales maximales obtenues sont combinées pour trouver la réponse totale maximale de la structure.

Il n'y a aucune approximation dans les deux premières étapes de calcul. Cependant, dans la troisième, des approximations sont à faire et c'en fonction de la méthode de combinaison modale choisie, par conséquent, la méthode modale spectrale peut être considéré comme une méthode approchée.

## Propriétés des spectres de réponse

1. Les valeurs relatives du déplacement, de la vitesse et de l'accélération du système à un seul degré de liberté par rapport au sol sont nulles pour les systèmes absolument rigides et l'accélération absolue du système est égale à celle du sol.
2. Les valeurs relatives du déplacement, de la vitesse et de l'accélération du système à un seul degré de liberté pour les systèmes totalement flexibles sont égales à celles correspondantes au sol et l'accélération absolue du système est égale à zéro.
3. L'accélération pic du mouvement sol est contrôlée par les composantes en hautes fréquences, la vitesse pic par les composantes à fréquence modérée et le déplacement pic par les composantes à faible fréquence.
4. Tous les trois spectres de réponse peuvent être tracés en un seul graphe à échelle logarithmique à cause des relations approchées existantes entre eux.

Une fois la réponse maximale pour chaque mode de vibration obtenue, les réponses des différents modes doivent être combinées suivant des techniques qui seront exposées ci-après pour obtenir la réponse modale maximale. Pour une direction d'accélération donnée, les déplacements, forces et contraintes maximaux sont calculés pour toute la structure pour chacun des modes de vibration. Ces valeurs modales pour une quantité de réponse donnée sont combinées pour donner une valeur unique et positive pour une direction d'accélération donnée.

La technique relativement nouvelle de combinaison modale CQC (combinaison quadratique complète) qui a été publiée pour la première fois en 1981. Elle est basée sur les théories des vibrations aléatoires et a été largement acceptée par de nombreux ingénieurs et a été adoptée dans la majorité des codes de calcul sismique.

La valeur pic d'une force type peut être estimée à partir des valeurs modales maximales en utilisant la CQC.

### **Combinaisons directionnelles**

Pour chaque quantité de déplacement, de force ou de contrainte dans la structure, la combinaison modale produit une valeur unique positive pour chaque direction d'accélération. Ces valeurs directionnelles pour une quantité de réponse donnée sont combinées pour donner une valeur positive unique. Il existe deux méthodes pour combiner les réponses directionnelles, la SRSS (racine carré de la somme des carrés des réponses) et la somme absolue. L'avantage d'utiliser un mode adimensionnel est d'avoir des coefficients de participation modale positifs et décroissants.

Conclusions : dans ce chapitre on a présenté les principales méthodes de calcul sismique pouvant être utilisés par les ingénieurs de structures pour le calcul des structures en zones sismiques. En fonction de la complexité de la structure, de son importance et des moyens numériques disponibles, l'ingénieur connaissant les hypothèses ainsi que les limitations de chaque méthode peut en toute confiance recourir à la méthode qu'il juge adéquate à son cas particulier. Cette présentation relativement claire où le bagage mathématique requis est accessible aux ingénieurs les aidera à mieux interpréter les résultats obtenus avec des logiciels professionnels tels que SAP2000, ABAQUS, etc....

Pour l'analyse sismique de la terre et des structures souterraines, la considération de l'interaction sol-structure devient extrêmement importante lorsque le sol ou le milieu de la fondation n'est pas très ferme. Durant l'excitation sismique, la structure inter agit avec le sol environnant imposant des déformations de sol. Ces déformations à leur tour font que le mouvement des supports, de la région d'interface du sol et de la structure soit différent de celui à champ libre. Ces interactions changent substantiellement la réponse de la structure. Pour un sol très rigide, ce changement est extrêmement petit et peut être négligé.

D'après les codes sismiques (RPA-99,V2003):

Le calcul des forces sismiques peut être mené suivant trois méthodes :

- par la méthode statique équivalente
- par la méthode d'analyse modale spectrale
- par la méthode d'analyse dynamique par accélérogrammes

**Conditions d'application de 3 méthodes et leurs définitions :**

**1. La méthode statique équivalente peut être utilisée dans les conditions suivantes :**

- a) Le bâtiment ou bloc étudié, satisfaisait aux conditions de régularité en plan et en élévation prescrites au chapitre III, paragraphe 3.5 du RPA avec une hauteur au plus égale à 65m en zones I et II et à 30m en zones III
- b) Le bâtiment ou bloc étudié présente une configuration irrégulière tout en respectant, outres les conditions de hauteur énoncées en a), les conditions complémentaires suivantes

**Définition de la Méthode statique équivalente :**

Analyse statique d'une structure sous l'effet d'un système de forces statiques équivalentes à celui de l'action sismique. (Cette Méthode est peu précise et applicable seulement dans des cas peu précis)

**2. La méthode d'analyse dynamique par accélérogrammes :**

Peut être utilisée au cas par cas par un personnel qualifié, ayant justifié auparavant les choix des séismes de calcul et des lois de comportement utilisées ainsi que la méthode d'interprétation des résultats et les critères de sécurité à satisfaire.

(Cette Méthode plus précise mais complexe, Réservée à des cas particuliers)

**3. La méthode d'analyse modale spectrale :**

Peut être utilisée dans tous les cas, et en particulier, dans le cas où la méthode statique équivalente n'est pas permise.

**Définition de la Méthode modale spectrale :**

Analyse dynamique d'une structure sous l'effet d'un séisme représenté par un spectre de réponse. (La méthode plus utilisée)

**Principe :** Par cette méthode, il est recherché pour chaque mode de vibration, le maximum des effets engendrés dans la structure par les forces sismiques représentées par un spectre de réponse de calcul. Ces effets sont par la suite combinés pour obtenir la réponse de la structure

### **Méthode des spectres de réponse pour l'analyse des structures :**

Les analyses modales spectrales sont des outils d'analyse des demandes induites dans les structures par un spectre de réponse d'un mouvement de sol donné pour déterminer les quantités maximales des réponses, figure 2-1, Les modèles d'analyse utilisés pour l'analyse modale spectrale sont des modèles linéaires élastiques basés sur les propriétés effectives des rigidités et sur un coefficient d'amortissement visqueux. C'est la méthode préférée pour de nombreux ingénieurs structuraux pour de nombreuses raisons.

La première réside dans le fait que la méthode permet d'entreprendre une analyse statique latérale équivalente sous charges sismiques.

En second lieu, elle permet une meilleure compréhension de l'influence de chaque mode de vibration sur la réponse totale de la structure.

Troisièmement, elle permet de déterminer de manière relativement aisée les forces de calcul dans chaque élément de la structure

Finalement, elle peut être utile pour l'évaluation appropriée de la fiabilité et de la sécurité des structures sous charges sismiques. La méthode des spectres de réponse n'est pas aussi exacte que la méthode d'analyse temporelle qui fait appel à un accélérogramme. Cependant, pour la plupart des structures les résultats obtenus en pratique sont généralement satisfaisants. L'autre limitation de la méthode réside dans le fait que les réponses maximales obtenues ne se produisent pas aux mêmes temps que ceux d'une analyse sismique temporelle.

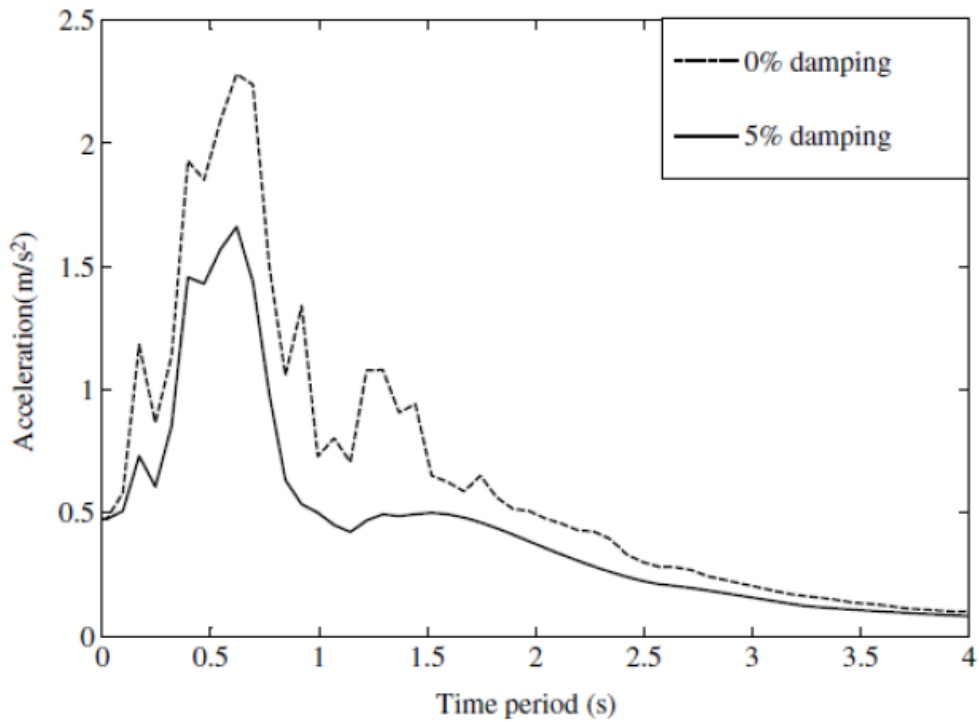


Figure 2- Exemple de spectre de réponse en accélérations

Finalemnt, elle peut être utile pour l'évaluation appropriée de la fiabilité et de la sécurité des structures sous charges sismiques. La méthode des spectres de réponse n'est pas aussi exacte que la méthode d'analyse temporelle qui fait appel à un accélérogramme. Cependant, pour la plupart des structures les résultats obtenus en pratique sont généralement satisfaisants. L'autre limitation de la méthode réside dans le fait que les réponses maximales obtenues ne se produisent pas aux mêmes temps que ceux d'une analyse sismique temporelle.

## Chapitre II : Modes de vibration et différentes combinaisons

---

### **II-1 Modélisation :**

Considérons la structure suivante représentant un bâtiment à  $n$  étages, avec les hypothèses simplificatrices suivantes :

1. Les hauteurs des étages sont prises égales :  $H_1 = H_2 = \dots = H_n = H$
2. La masse totale de la structure est supposée concentrée au niveau des étages, les masses des poteaux étant reportées à ces niveaux
3. Les masses  $m_i$  des étages sont prises égales :  $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$
4. Les étages sont infiniment rigides en rotation, si bien qu'ils ne peuvent se déplacer que dans le sens horizontal. Par conséquent, chaque étage présente un seul degré de liberté en déplacement et la structure ainsi modélisée possède au total  $n$  degrés de liberté.
5. L'ensemble des poteaux de chaque étage  $i$  présente une rigidité  $k_i$  à l'effort tranchant.
6. Le mode propre fondamental de vibration de la structure, en élasticité, est considéré linéaire.

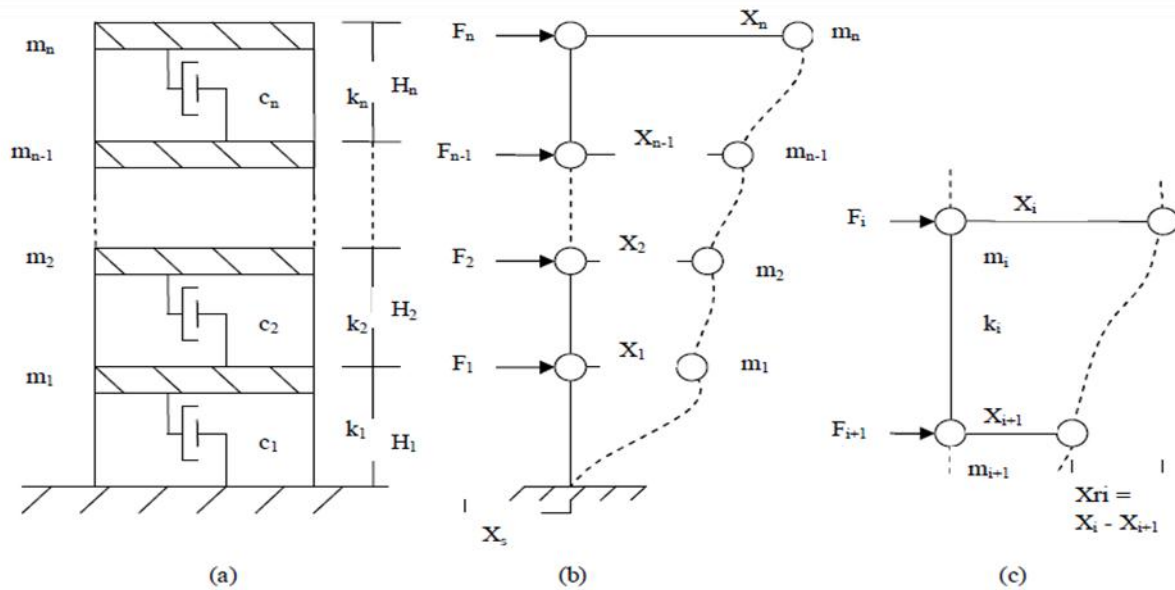


Fig. (V-1) Structure à plusieurs degrés de liberté:

(a): Modélisation, (b): Déplacements des étages par rapport au sol, (c): Déplacement relatif de l'étage i

7. L'amortissement de la structure est du type visqueux

### II-1-1 Présentation générale :

Pour le modèle à n degrés de liberté de la fig. (V-1a), l'équation d'équilibre peut s'écrire sous forme matricielle comme suite :

$$[M].\{\ddot{X}\} + [C].\{\dot{X}\} + [K].\{X\} = \{F(t)\} \quad (V-1)$$

où:  $[M]$ ,  $[K]$  et  $[C]$  sont les matrices de masse, de rigidité et d'amortissement de la structure.  $\{F(t)\}$  est le vecteur force extérieure et  $\{X\}$ ,  $\{\dot{X}\}$  et  $\{\ddot{X}\}$  sont les vecteurs déplacement, vitesse et accélération du système.

Dans le cas où la structure est soumise à une excitation d'appui (séisme par ex), le chargement extérieur est donné sous forme d'accélération du sol  $\ddot{X}_s(t)$  et l'équation (V-1) devient :

$$[M].\{\ddot{X}\} + [C].\{\dot{X}\} + [K].\{X\} = -[M].\{1\}.\ddot{X}_s(t) \quad (V-2)$$

Où :  $\{1\}$  est le vecteur colonne des unités correspondant au nombre de degrés de liberté.

### II-1-2 Pulsations naturelles et modes propres :

Comme pour les systèmes à un degré de liberté, la première étape dans l'analyse des systèmes à plusieurs degrés de liberté consiste à étudier les systèmes libres non amortis. Ce genre de système sans amortissement ni de charge extérieure, qui est pratiquement inexistant, est utilisé pour la détermination des pulsations naturelles et modes propres de la structure.

Dans ce cas, l'équation (V-1) devient :

$$[M].\{\ddot{X}\} + [K].\{X\} = 0 \quad (V-3)$$

Le processus de résolution conduit à un système homogène d'équations algébriques linéaires de la forme :

$$[[K] - w_i^2 . [M]].\{\ddot{X}\} = \{0\} \quad (V-4)$$

qui est mathématiquement connue sous le nom de "problème propre".

Pour une solution non triviale de ce problème, le déterminant des coefficients multiplicatifs des inconnues  $\{a_i\}$  doit être nul, c'est-à-dire :

$$|[K] - w_i^2 . [M]| = 0 \quad (V-5)$$

Les racines  $w_i^2$  de cette "équation caractéristique" fournissent les n pulsations naturelles  $w_i$  du système.

A chaque pulsation naturelle  $w_i$  est associé un mode propre de vibration  $\{a_i\}$  qui peut être déterminé, en termes de valeurs relatives, à l'aide de l'équation (V-4). Les vecteurs  $\{a_i\}$  correspondant aux racines  $w_i^2$  représentent les "formes modales" (vecteurs propres) du système dynamique.

Ces modes propres ont une importante propriété dite "orthogonalité des modes" qui est à la base de l'une des méthodes les plus attractives dans la résolution des systèmes à plusieurs degrés de liberté.

Pour un système à n degrés de liberté, dans lequel la matrice de masses est diagonale, la propriété (ou condition) d'orthogonalité entre deux modes i et j peut être exprimée comme suit :

$$\sum_{k=1}^n m_k . a_{ki} . a_{kj} = 0 \quad \text{pour } i \neq j \quad (V-6)$$

ou en général pour système à n degrés de liberté :

$$\{a_i\}^T . [M] . \{a_j\} = 0 \quad \text{pour } i \neq j \quad (V-7)$$

$\{a_i\}$  et  $\{a_j\}$  étant deux vecteurs modaux quelconques et  $[M]$  la matrice des masses du système.

### II-1-3 Analyse modale :

N'étant que des valeurs relatives, les amplitudes de vibration dans un mode normal peuvent être "normalisées". Dans une certaine mesure, cette normalisation est une question de choix et la formule suivante est particulièrement adaptée dans le cas général :

$$\phi_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\{a_j\}^T . [M] . \{a_j\}}} \quad (V-8)$$

Formule qui, dans le cas d'un système à matrice de masses diagonale, peut être écrite :

$$\phi_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n m_k a_{kj}^2}}$$

(V-9)

où:  $\phi_{ij}$  est la composante normalisée i du vecteur modal j

Pour une question de commodité, les différents modes normaux peuvent être arrangés sous forme de matrice connue sous le nom de "matrice modale" :

$$[\phi] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix}$$

## II-2 Les Différentes Combinaisons :

Les n équations obtenues pour les n modes de vibration, permettent de calculer la réponse de la structure à chaque instant t, par le cumul des réponses de n oscillateurs simples. Ce cumul n'est que l'application du principe de superposition modale introduit au début de cette Modélisation. On a vu le besoin, en génie civil, de connaître la réponse de la structure en termes de valeurs maximales (spectrales). On est tenté d'appliquer le principe de superposition sus-cité à ces valeurs. Cependant, une difficulté fondamentale se présente dans cette démarche ; le fait est que ces valeurs maximales ne se produisent pas simultanément, en général.

En passant par l'intermédiaire des spectres de réponse, on ne dispose que de la valeur maximale absolue de chaque mode ( $S_{d1}, \dots, S_{dn}$ ), les temps auxquels ces maxima apparaissent n'étant pas fournis par ces spectres. Pour contourner cette difficulté, il est nécessaire d'utiliser une méthode approchée. Trois méthodes, que nous décrivons ci-après, sont plus ou moins utilisées de nos jours :

### II-2-1 Méthode de la somme absolue (SA): $\{|X_{\max x}|\} = \sum_{i=1}^n \{|X_{i \max}|\}$ :

Cette combinaison, qui suppose que toutes les réponses maximales (pics) se produisent au même moment et avec le même signe, conduit toujours à une surestimation de la réponse maximale réelle de la structure, c'est pourquoi, elle est la moins utilisée bien qu'elle place en sécurité.

**II-2-2 Méthode de la moyenne quadratique (SRSS) :**  $|X_{\max x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \{X_{i \max}^2\}}$

Une Combinaison très souvent employée et celle de la racine carrée de la somme des carrées (*Square Root of Sum of Squares ou SRSS en Anglais*).

Cette méthode de combinaison, que l'on appelle aussi réponse probable, donne généralement de bons résultats pour des systèmes ayant des fréquences naturelles bien séparées. Elle a été à l'origine proposée dans des analyses de bâtiment en deux dimensions ; ainsi, les fréquences naturelles latérales ne sont pas rapprochées. Dans une analyse en trois dimensions toutefois, des modes dans des directions différentes peuvent posséder des fréquences naturelles très semblables. En conséquence, la combinaison du SRSS peut donner des résultats non sécuritaires.

Basée sur un concept probabilistique, cette méthode est plus proche de la réalité physique et donne d'excellents résultats dans le cas où les modes sont indépendants (différents de moins de 10%).

Cette méthode a l'avantage de prendre en compte une corrélation entre les mouvements des supports.

**II-2-3 Méthode de la combinaison quadratique complète (CQC):**

$$|X_{\max x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^N \rho_{in} \cdot x_i x_n}$$

dans le cas où un système possède des fréquences très rapprochées, la combinaison quadratique complète (*en anglais, Complete Quadratic Combination Ou CQC*), proposée par *E.L. Wilson, A. Derkiureghain et E.P. Bayo (1981)*.

Donne une meilleure estimation. Cette méthode se case sur la théorie des vibrations aléatoires et donne un résultat exact si l'accélérogramme est représenté par un bruit blanc. Elle converge vers la combinaison SRSS si les fréquences sont bien séparées.

Cette méthode CQC rentre dans la famille des méthodes de la double somme (DSC, ou Double Sum Combination), qui fait intervenir un coefficient de corrélation entre modes, soit défini comme ci-dessus (méthode CQC), soit défini par d'autres propositions.

avec :  $\rho_{in} = \frac{8 \cdot \zeta^2 \cdot (1+r) \cdot r^{\frac{3}{2}}}{(1-r^2)^2 + 4\zeta^2 \cdot r \cdot (1+r)^2}$  (cas d'amortissement constant:  $\zeta_i = \zeta_n = \zeta$ ) et

$$r = \frac{w_i}{w_n} \leq 1$$

**La méthode CQC**, ou de combinaison quadratique complète. Elle fait intervenir un coefficient qui traduit une corrélation, plus précise

que celle de la méthode précédente (SA,SRSS), entre modes de pulsations voisines. Cette méthode, qui surmonte les limites de la précédente, est d'application plus étendue (Chopra, 2001).

### **II-3 Nombre de modes à considérer :**

Il faut bien comprendre qu'il n'est pas nécessaire de considérer l'effet de tous les modes de vibration pour obtenir une précision acceptable dans les structures de génie civil. Pour modéliser un bâtiment en trois dimensions, le nombre de modes requis dans une analyse dynamique modale ou spectrale dépend de la direction de l'excitation à la base et du degré de couplage entre les modes de translation et les modes de torsion. L'édition de 1995 du Code national du bâtiment du Canada exige, dans l'analyse spectrale, de considérer au moins un nombre de modes égal au nombre d'étage du bâtiment sans dépasser cinq. On peut utiliser la masse modale  $V=M*S$  comme un indicateur du nombre de modes à considérer dans l'analyse. Le nombre de modes à employer doit être suffisant pour représenter au moins 90% de la masse totale de la structure (Carr, 1994)

**a)** Pour les structures représentées par des modèles plans dans deux directions orthogonales, le nombre de modes de vibration à retenir dans chacune des deux directions d'excitation doit être tel que :

- la somme des masses modales effectives pour les modes retenus soit égale à 90 % au moins de la masse totale de la structure.

- ou que tous les modes ayant une masse modale effective supérieure à 5% de la masse totale de la structure soient retenus pour la détermination de la réponse totale de la structure.

Le minimum de modes à retenir est de trois (03) dans chaque direction considérée.

**b)** Dans le cas où les conditions décrites ci-dessus ne peuvent pas être satisfaites à cause de l'influence importante des modes de torsion, le nombre minimal de modes (K) à retenir doit être tel que :

$$K \geq 3 \sqrt{N} \quad \text{et} \quad T_K \leq 0.2 \text{ sec}$$

Où : N est le nombre de niveaux au-dessus du sol et  $T_K$  la période du mode K.

### **II-4 Combinaison des réponses modales :**

Pour déterminer la réponse maximale du DDLD, on ne peut pas additionner directement les réponses modales maximales. Ces valeurs maximales ne se produisent pas au même temps et leur addition donne des résultats très sécuritaires. En pratique, on doit recourir à une combinaison statique des réponses modales maximales pour estimer la réponse maximale de chaque DDLD.

- a) Les réponses de deux modes de vibration  $i$  et  $j$  de périodes  $T_i, T_j$  et d'amortissement  $\xi_i, \xi_j$  sont considérées comme indépendantes si le rapport  $r = T_i/T_j$  ( $T_i \leq T_j$ ) vérifie :

$$r \leq 10 / (10 + \sqrt{\xi_i \xi_j})$$

- b) Dans le cas où toutes les réponses modales retenues sont indépendantes les unes des autres, la réponse totale est donnée par

$$E = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^k E_i^2}$$

$E$  : effet de l'action sismique considéré

$E_i$  : Valeur modale de  $E$  selon le mode «  $i$  »

$K$  : nombre de modes retenus

- c) Dans le cas où deux réponses modales ne sont pas indépendantes ;  $E_1$  et  $E_2$  par exemple, la réponse totale est donnée par :

$$\sqrt{(|E_1| + |E_2|)^2 + \sum_{i=3}^k E_i^2}$$

#### III- 1) Application simple (calcul à la main) :

Considérons le bâtiment à trois étages de la Fig \_1 .La masse de la structure est supposée concentrée aux étages. Les colonnes sont sans masse. Les planchers sont infiniment rigides : les colonnes agissent à chaque étage comme des ressorts latéraux dont les coefficients de rigidité sont connus.

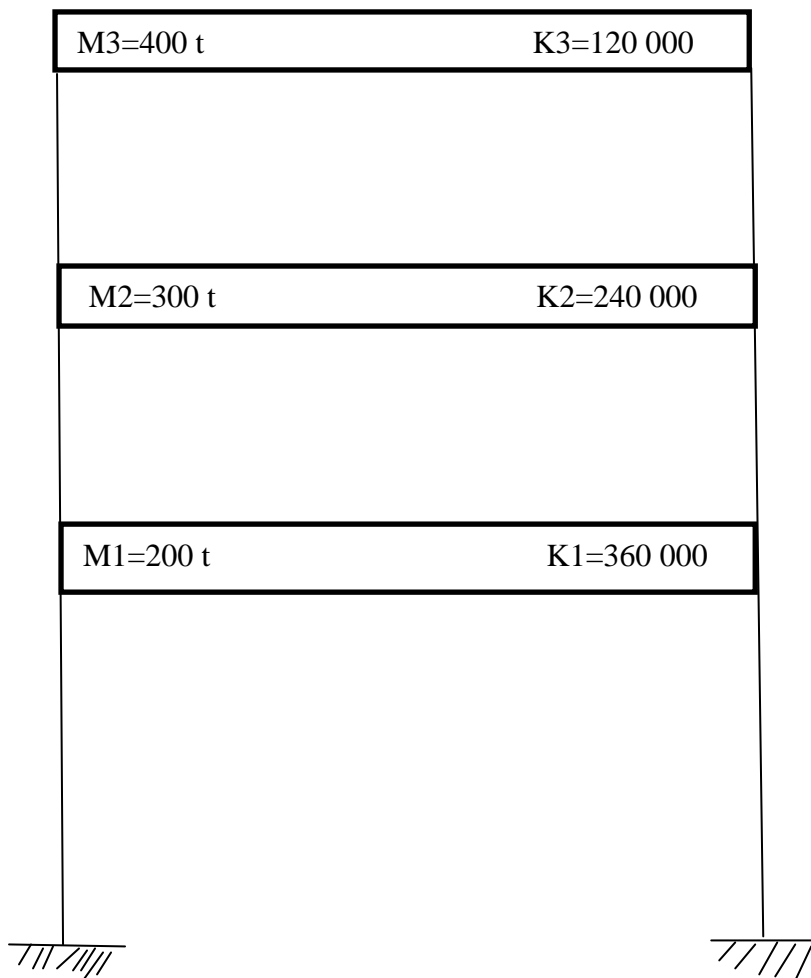


Fig \_1

$$w_1 = 14.5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$w_2 = 31.1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$w_3 = 46.1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

A propos des R.P.A. (2003) :

$$\varepsilon = 5\%$$

$$A = 0.3$$

$$R = 3.5 \text{ (cat A 1b)}$$

$$Q = 1.1$$

$$w = 900 \text{ t} * g = 9 * 10^6 \text{ N}$$

$$[ T_1 = 0.15 \text{ s} , T_2 = 0.4 \text{ s} \text{ (Sol S2)} ]$$

En calcule les 3 périodes  $T_1$   $T_2$   $T_3$  :

$$T_1 = \frac{2\pi}{w_1} = \frac{2\pi}{14.5} = 0.43 \text{ s} \quad T_2 \leq T \leq 3.0 \text{ s} \quad \frac{S_{a1}}{g} = 2.5n(1.25A) \left(\frac{Q}{R}\right) \cdot \left(\frac{T_2}{T}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{w_2} = \frac{2\pi}{31.1} = 0.2 \text{ s} \quad T_1 \leq T \leq T_2 \quad \frac{S_{a2}}{g} = 2.5n(1.25A) \left(\frac{Q}{R}\right)$$

$$T_3 = \frac{2\pi}{w_3} = \frac{2\pi}{w_3} = 0.14 \text{ s} \quad 0 \leq T \leq T_1 \quad \frac{S_{a3}}{g} = 1.25A[1 + T/T_1(2.5n)] \left(\frac{Q}{R}\right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = 0.43 \text{ s} \quad \frac{S_{a1}}{g} = 2.5 * 0.375 * 3.18(0.93)^{2/3} \\ T_2 = 0.2 \text{ s} \quad \frac{S_{a2}}{g} = 2.5 * 0.375 * 3.18 = 2.98 \\ T_3 = 0.14 \text{ s} \quad \frac{S_{a3}}{g} = 0.37[1 + 0.93(2.5 * 3.18 - 1)] = 2.8 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} T_1 = 0.43 \text{ s} & V_1 = 9 \cdot 10^9 \cdot 2.83 = 25,47 \cdot 10^9 \text{ N} & V_1^2 = 648,72 \cdot 10^8 \text{ N}^2 \\ T_2 = 0.2 \text{ s} & V_2 = 9 \cdot 10^9 \cdot 2,98 = 26,82 \cdot 10^9 \text{ N} & V_2^2 = 719,31 \cdot 10^8 \text{ N}^2 \\ T_3 = 0.14 \text{ s} & V_3 = 9 \cdot 10^9 \cdot 2,80 = 25,2 \cdot 10^9 \text{ N} & V_3^2 = 635,04 \cdot 10^8 \text{ N}^2 \end{array} \right.$$

$$V = \begin{cases} |V_1| + |V_2| + |V_3| = 77,19 \cdot 10^9 \text{ N} \\ \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2} = 448 \cdot 10^8 \text{ N} \\ \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^N \rho_{in} \cdot V_i \cdot V_n} \approx 448 \cdot 10^8 \text{ N} \end{cases}$$

Donc :  $V_{SRSS} \approx V_{CQC}$

On voit que les deux méthodes donnent à peu près le même résultat.

### III – 2) Applications avec SAP2000 :

#### III -2 -1 ) Les données :

##### LES POTEAUX

N°étage	Section	ferraillages
10	X4040	8HA16
9	X4040	8HA16
8	X4545	10HA16
7	X4545	10HA16
6	X5050	12HA16
5	X5050	12HA16
4	X5555	12HA16
3	X5555	12HA16
2	X6060	12HA20
1	X6060	12HA20
RDC	X6060	12HA20

spectre A=0,25

Q=1

R=4

$\xi=10$

T=0,5

##### LES POUTRE

Section	NIVEAU	ferraillages	
		NAP SUP	NAP INF
PP 30X45	RDC ,1,2	3T14+5T16CHA=14.67CM2	5T16= 10.05CM2
	3eme ET 4eme	3T14+3T16CHA=10.65CM2	4T16= 8.04CM2
	5eme ET 6eme	3T14+3T14CHA=9.24CM2	3T16= 6.03CM2
	7eme ET 8eme	3T14+3T12CHA=8.01CM2	3T14= 4.62CM2
	9eme ET 10eme	3T12+3T12CHA=6.79CM2	3T14= 4.62CM2
PS 30X40	RDC ,1,2	3T12+5T14CHA=11.09CM2	5T14= 7.70CM2
	3eme ET 4eme	3T12+4T14CHA=9.55CM2	4T14= 6.16CM2
	5eme ET 6eme	3T12+3T14CHA=8.01CM2	3T14= 4.62CM2
	7eme ET 8eme	3T12+3T12CHA=6.79CM2	3T14= 4.62CM2
	9eme ET 10eme	3T12+3T12CHA=6.79CM2	3T12= 3.39CM2

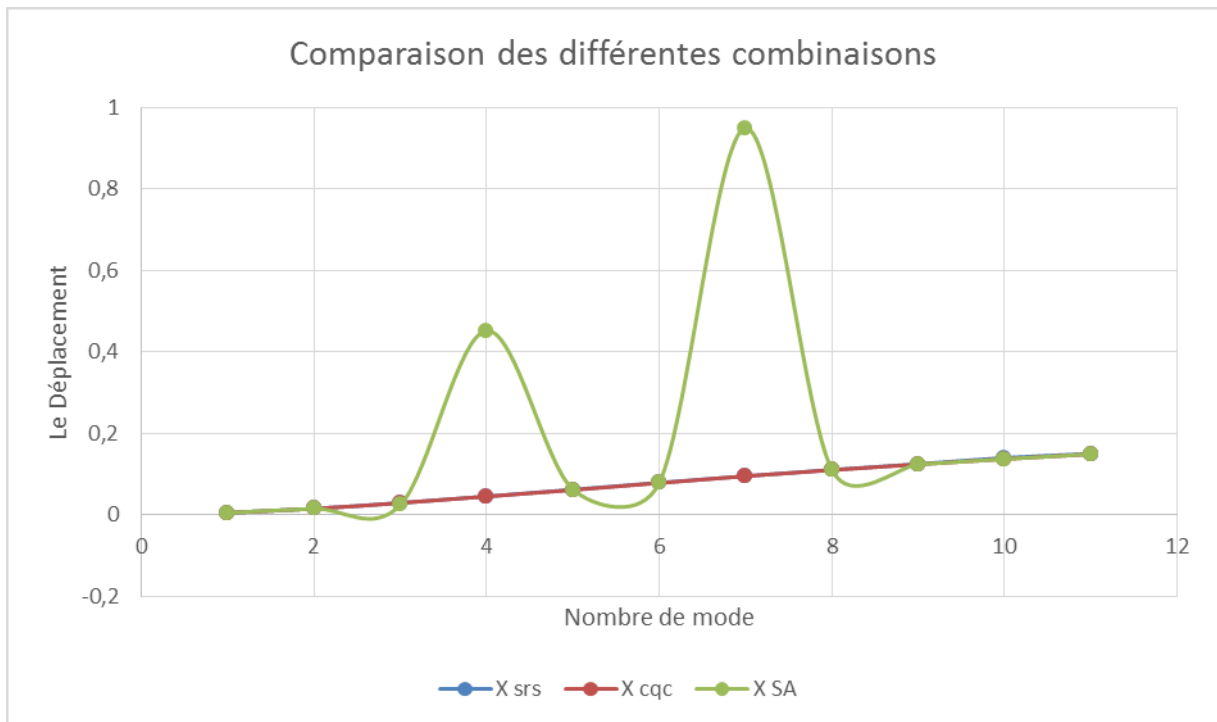
Voile de 20 cm  
 Charge et surcharge  
 Plancher terrasse non accessible :  
 $G = 0.62T/m^2$  ,  $Q = 0.10T/m^2$   
 Plancher étage courant  
 $G = 0.45T/m^2$  ,  $Q = 0.15T/m^2$

### III-2-2) Résultats :

#### III-2-2-a) pour déplacements :

Nbr de mode	X srs	Xcqc	X SA
1	0,005	0,005	0,005
2	0,015	0,015	0,015
3	0,0294	0,029	0,0243
4	0,0452	0,045	0,452
5	0,0619	0,061	0,0619
6	0,0788	0,078	0,0787
7	0,095	0,095	0,95
8	0,1105	0,11	0,11
9	0,1247	0,124	0,124
10	0,14	0,137	0,137
11	0,15	0,149	0,1492

**Tab 1 : Valeurs des déplacements pour les différentes combinaisons.**

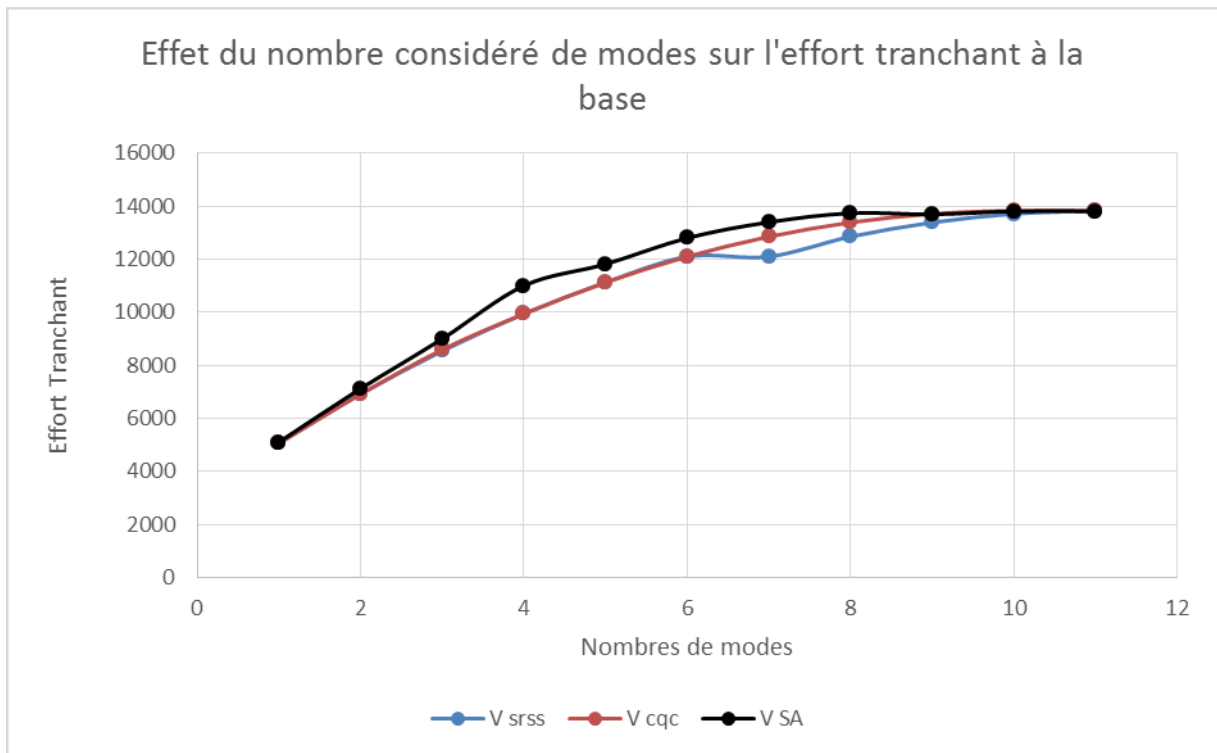


**Fig2-a : Comparaison des trois combinaisons (Déplacements)**

**III-2-2-b ) Pour l'effort tranchant :**

Nbr de mode	V srss	V cqc	V SA
1	5056,64	5056,58	5100,38
2	6914,67	6914,58	7120
3	8542,48	8592,37	9000
4	9943,12	9943,01	11002
5	11128,008	11128,87	11820
6	12101,008	12101,38	12802
7	12101,53	12855,01	13400
8	12854,32	13389,74	13740
9	13389,9	13714,56	13696,98
10	13714,73	13834,01	13812,5
11	13834,17	13834,01	13812,5

**Tab 2 : Valeurs des efforts tranchants pour les trois combinaisons.**



**Fig 2-b ) : Effet du nombre considéré de modes sur l'effort tanchant à la base**

## Conclusion et Perspectives

---

### Conclusion

L'étude de l'effet du nombre de modes sur la réponse de la structure et la comparaison entre les 3 types de combinaison, nous ont permis de tirer les conclusions suivantes:

- Les Règles Parasismiques Algériennes (RPA 2003) ne citent pas la méthode CQC comme type de combinaison modale possible.
- La considération des 3 premiers modes seulement est largement suffisante pour représenter l'effet sismique, la participation des modes supérieurs étant négligeable.
- Parmi les trois méthodes étudiées, la méthode de la somme absolue (SA) est la plus simple et la méthode CQC la plus compliquée.
- La méthode SA donne souvent des résultats exagérés.
- Les 2 méthodes CQC et SRSS donnent pratiquement les mêmes résultats.
- Donc, les Règles Parasismiques Algériennes ont bien raison de recommander l'utilisation de la méthode SRSS dans le cas général (réponses modales indépendantes).

### Perspectives

Les applications numériques ont été faites dans le cas général où la méthode SRSS est applicable, il serait souhaitable d'élargir l'étude aux cas où les réponses ne sont pas indépendantes les unes des autres, pour voir l'importance de la méthode CQC.

## Notations et Symboles

C.Q.C : combinaison quadratique complète

c: amortissement

g: accélération de la pesanteur

H: hauteur d'étage

K: rigidité

M: Masse

R.P.A.: Règles Parasismiques Algériennes

SA: somme absolue

SRSS (Square Root of the Sum of the Squares): moyenne quadratique

T: période

T1 et T2: périodes caractéristiques

t: temps

W: poids total de la structure

$X, \dot{X}, \ddot{X}$ : déplacement, vitesse et accélération par rapport au sol (relatifs)

$X_s, \dot{X}_s, \ddot{X}_s$ : déplacement, vitesse et accélération du sol

$\zeta$ : coefficient d'amortissement

$\varphi$  = courbure de la section

$\Phi_{ij}$  : composante normalisée i du vecteur modal j

$\omega_i$ : vitesse angulaire (pulsation propre) du système non amorti.

## Bibliographie :

---

- [1] Ministère de l'Habitat Algérien (2003). Règles Parasismiques Algériennes, Algérie.RPA, V2003
- [2] Cours 1<sup>er</sup> Année Dynamique des structures, Master Génie Civil, Université De M'sila, 2014
- [3] Dynamics of Structures, Theory and Applications to Earthquake Engineering,Prentice-Hall, New Jersey, U.S.A. Chopra, A. K. (2001).
- [4] calculs des ouvrages en béton armé, règles CBA93 et RPA2003 O.P.U. Cherait Y. 2006
- [5] Thème de doctorat présenté par BOULAOUAD ABDERRACHID « université Hadj Lakhdar de Batna avril 2012
- [6] « Reponse Spectrum Method in Seismic Analysis of Structural Systems and Component » Gupta A. K. (2010).
- [7] « Overview of Elastic and Inelastic Reponse Spectra ».Final Report, Mid-America Earthquake Center CBE Institute Texas A&M University College Station,U.S.A, Haikal G. (2003).
- [8] « Use of ARMA Models dans le calcul des Structures », Génie Parasismique Paris. Brahimi M 1989.
- [9] Calcul Dynamique des Structures « CLOUGH et PENZIEN.1985. »
- [10] Eléments De Génie Parasismique et de calcule dynamique des structures, ANDRE FILIATRAULT ,1996