



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques

## Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique  
Filière : Mathématiques  
Option : Analyse Mathématiques et numérique

### Thème

## Contribution à l'étude d'un écoulement à surface libre

Présentée par :  
**Ouanoughi Aida**

Soutenu publiquement le : 05/06/2024

Devant le jury composé de :

Bounab Nora	M.C.B	Université de M'sila	Président
Delloum Wahiba	M.A.A	Université de M'sila	Encadreur
Serguine Houria	M.C.B	Université de M'sila	Examinateur

Année universitaire 2023/2024

# Table des matières

<b>1</b>	<b><i>Définition et préliminaire</i></b>	<b>9</b>
1.1	Les fluides . . . . .	10
1.1.1	définition d'un fluide . . . . .	10
1.1.2	Viscosité $\mu$ . . . . .	10
1.1.3	Les fluides parfaits et les fluides réels . . . . .	11
1.1.4	Débit . . . . .	12
1.2	Les écoulements des fluides . . . . .	13
1.2.1	Écoulement permanent . . . . .	13
1.2.2	Écoulement uniforme . . . . .	13
1.2.3	Écoulement incompressible . . . . .	13
1.2.4	Écoulement potentiel . . . . .	13
1.2.5	Écoulement irrotationnel . . . . .	13
1.3	Description d'un fluide en mouvement . . . . .	14
1.3.1	Description de Lagrange . . . . .	14
1.3.2	Description d'Euler . . . . .	15
1.4	Utilisation de la théorie de la variable complexe . . . . .	16
1.5	Quelques équations de la mécanique des fluides . . . . .	17
1.5.1	Equation de continuité . . . . .	17
1.5.2	Théorème de Bernoulli . . . . .	19
1.5.3	Ligne de courant et fonction de courant . . . . .	19
1.5.4	Équations différentielles des fonctions $\psi$ et $\phi$ . . . . .	20
<b>2</b>	<b><i>Réprésentations et transformations conformes</i></b>	<b>22</b>
2.1	Généralités sur les transformations conformes . . . . .	23

2.1.1	Définition . . . . .	23
2.1.2	Théorème . . . . .	23
2.1.3	Définition . . . . .	23
2.2	Propriétés des transformations conformes . . . . .	24
2.3	Un type des transformations conformes . . . . .	25
2.4	Transformation de Schwarz-Christoffel . . . . .	25
2.5	Méthode des lignes de courant libre . . . . .	26
<b>3</b>	<b><i>Résolution analytique d'un problème de type jet devant un obstacle de forme triangulaire</i></b> . . . . .	<b>28</b>
3.1	Position du problème . . . . .	29
3.2	La solution exacte . . . . .	30

## DÉDICACES

Je tiens à dédier cet effort scientifique à :

Mon mari mon père et ma mère et toute ma famille

## REMERCIEMENT

Tout d'abord, je tiens la grande remerciement au Dieu.

Je souhaite remercier les membres du jury, garants de la  
qualité de mon travail, et

j'exprime toute ma reconnaissance à Ms.delloum wahiba  
d'avoir proposer et encadrer

ce travail et sa confiance et ses conseils et ses  
encouragements.

Je tiens aussi à remercier toute ma famille et mes amis et  
toute qu' encourage et aide

moi au prés ou au loin à la réalisation de ce travail.

## Notations

$\Rightarrow P$  : est la pression en un point .

$\Rightarrow \rho$  : est la masse volumique en un point

$\Rightarrow m$  : La masse

$\Rightarrow S$  : la surface

$\Rightarrow (x,y)$  : le plan

$\Rightarrow (u,v)$  : Composantes du vecteu vitesse

$\Rightarrow \text{div}$  : Opérateur divergence  $V = (V_1, \dots, V_n)$  une fonction de  $R^m$  dans  $R^n$

$\Rightarrow \nabla V = \text{grad}(V)$  le gradient d'un vecteur  $V$

# Table des figures

1.1	les trois états de la matiere . . . . .	10
1.2	Les fluide parfaits et les fluides réels . . . . .	11
1.3	description lagrangienne et eulerienne . . . . .	14
1.4	Déplacement d'une particule fluide entre sa position initiale $a$ et sa position $x$ à l'instant $t$ . . . . .	15
1.5	Trajectoire de la particule $P$ . . . . .	16
1.6	lignes de courant . . . . .	20
3.1	Le plan $Z$ . . . . .	29
3.2	Le plan $\Omega$ . . . . .	32
3.3	la forme de surface libre pour $\beta = \frac{\pi}{3}$ . . . . .	40

# Introduction

De nombreux phénomènes physiques intéressant le domaine de l'environnement sont concernés par les écoulements de fluides surface libre, qui désigne un écoulement avec une interface libre entre l'air et l'eau, comme dans une rivière, par opposition à un écoulement en charge, où cette interface est absente dans une conduite sous pression par exemple.

Dans ce travail, on se propose d'étudier un problème d'écoulement à surface libre au dessus d'un obstacle. L'écoulement est supposé potentiel, bidimensionnel et irrotationnel sans effets de la gravité et de la tension de surface, le plan des variables  $(x,y)$  de l'écoulement est identifié au plan de la variable complexe  $z = x + iy$ .

La résolution du problème est effectuée à l'aide des transformations conformes, en particulier la transformation de Schwarz-Christoffel et d'hodographe, qui possèdent de simplifier le problème dans un plan plus pratique.

Ce mémoire comporte trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on donne des notions sur les deux modes de description :

la description lagrangienne et la description eulérienne et quelques définitions préliminaires sur la théorie des écoulements potentiels et les équations générales du mouvement des fluides.

Dans le deuxième chapitre, on présente les transformations conformes en générale, en citant quelques cas particuliers, tels que la transformation de Schwarz-Christoffel.

Dans le troisième chapitre on traite le problème d'un écoulement à surface libre bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux dans le cas où la tension de surface et la gravité sont nulles. Dans ce cas, la solution exacte peut être calculée explicitement en utilisant la transformation de Schwarz-Christoffel et la méthode d'Irchoff.

# Chapitre 1

## *Définition et préliminaire*

Dans ce chapitre on présente quelques définitions et concepts de base de la mécanique des fluides.

### **contenu**

- 1-1 Les fluide.
- 1-2 les écoulement des fluide.
- 1-3 Description d'un fluide en mouvement.
- 1-4 Utilisation de la théorie de la variable complexe.
- 1-5 quelques équations de la mécanique des fluides.
- 1-6 nombre de webe et nombre de froude.

## 1.1 Les fluides

### 1.1.1 définition d'un fluide

Un fluide est un milieu matériel parfaitement déformable. On regroupe sous cette appellation les gaz qui sont l'exemple des fluides compressibles, et les liquides, qui sont des fluides peu compressibles.

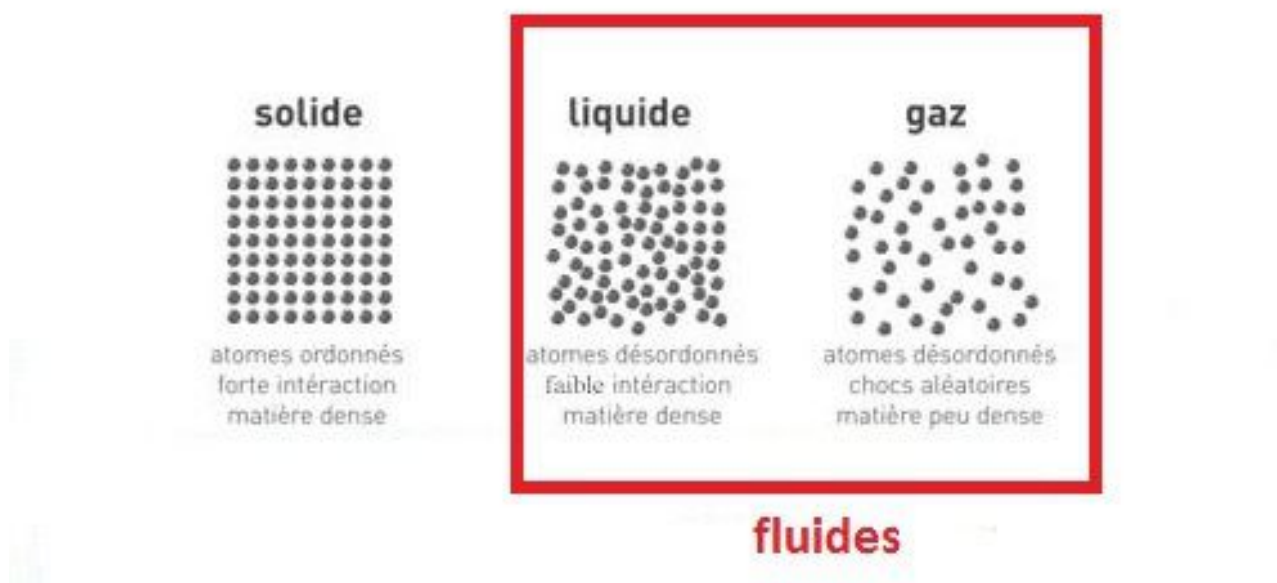


FIGURE 1.1 – les trois états de la matière

### 1.1.2 Viscosité $\mu$

La viscosité caractérise la friction à l'intérieur d'un fluide, due à l'attraction moléculaire, ce qui fait que le fluide résiste à son propre écoulement.

### 1.1.3 Les fluides parfaits et les fluides réels

Dans un fluide il y a deux types de forces : Forces de volume et forces de surface.

**Les forces de volume** sont celles engendrées par un champ, par exemple les champs de gravité, électrique, magnétique, ...

**Les Forces de surface** se divisent en forces de frottement et de pression.

*Les forces de frottement* sont causées par la viscosité, elles sont tangentielles à la surface.

*Les forces produites par la pression* sont normales à la surface.

⇒ **Un fluide parfait** est un fluide où il n'y a pas de frottement, c'est-à-dire que la viscosité est nulle ou négligeable. Si en plus on néglige les forces de volume, cela implique que les forces internes à n'importe quelle section du fluide sont normales à cette section, même pendant le mouvement. Alors les forces sont engendrées par la pression, un tel fluide n'existe pas en réalité.

⇒ **Un fluide réel** est un fluide dans lequel les forces tangentielles ou de cisaillement sont présentes lors de son mouvement (écoulement), cela augmente le frottement du fluide, car ces forces s'opposent au mouvement des particules les unes par rapport aux autres. Ces forces de frottement sont dues à la viscosité du fluide.

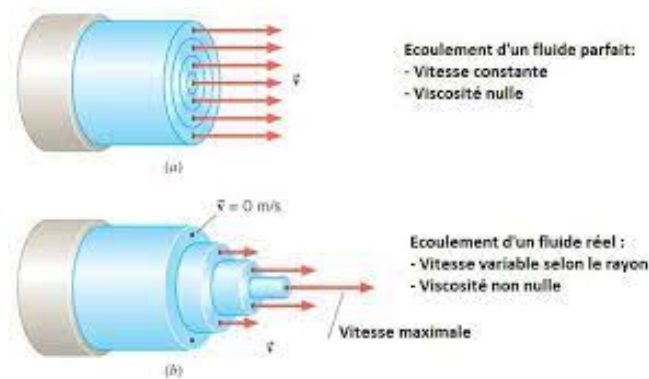


FIGURE 1.2 – Les fluides parfaits et les fluides réels

### 1.1.4 Débit

La débit est la quantité de fluide écoulée pendant le temps.

La quantité peut être définie par un volume ou une masse par conséquent on définit alors :

⇒ **Débit massique :**

C'est la masse de fluide qui traverse une section S donnée par unité de temps donnée par :

$$Q_m = \int \int_s \rho \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds$$

⇒ **Débit volumique :**

C'est la quantité de volume d'un fluide quelconque qui traverse une section S donnée par unité de temps donnée par :

$$Q_v = \int \int_s \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds$$

## 1.2 Les écoulements des fluides

### 1.2.1 Écoulement permanent

les paramètres caractérisant l'écoulement ne changent pas au cours du temps ou sont constants pendant l'intervalle de temps considéré.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

écoulement instationnaire (ou non permanent) La profondeur de l'écoulement varie avec le temps.

### 1.2.2 Écoulement uniforme

un écoulement est dit uniforme si les vitesses de toutes les particules sont les mêmes en tout point du fluide.

### 1.2.3 Écoulement incompressible

fluide dont la masse volumique est considérée comme constante au cours du processus, soit une dérivée particulaire du champ scalaire de masse volumique négligeable.

$$\rho = cte$$

### 1.2.4 Écoulement potentiel

un écoulement est potentiel lorsque son champ des vitesses est le gradient d'une fonction scalaire, appelée potentiel des vitesses (généralement noté  $\phi$ ) :

$$\vec{u} = \nabla \phi$$

### 1.2.5 Écoulement irrotationnel

On appelle écoulement irrotationnel un écoulement pour lequel on a :

$$rot \vec{u} = 0$$

## 1.3 Description d'un fluide en mouvement

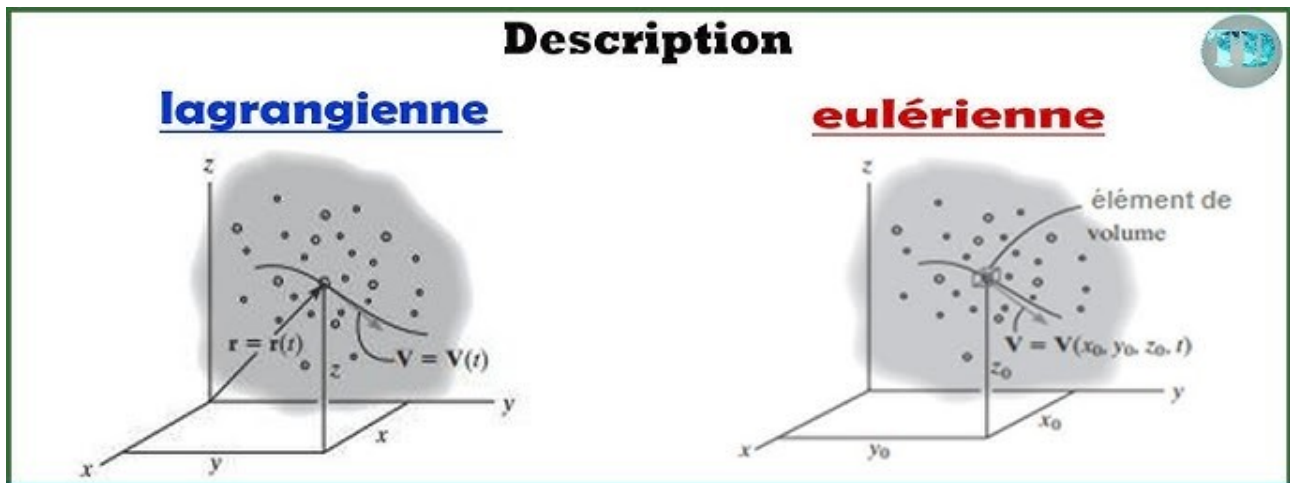


FIGURE 1.3 – description lagrangienne et eulerienne

### 1.3.1 Description de lagrange

Dans le cadre de la description lagrangienne, on suit donc une particule fluide dans son mouvement et on regarde sa position à un instant  $t$ . La particule est identifiée par sa position initiale située au point  $M_0$  à l'instant  $t=0$ .  $\vec{r} = 0$  est le vecteur position initiale, il ne dépend pas du temps :

$$\vec{r} = \vec{r}(M_0, t)$$

ou

$$\vec{r} = \vec{r}(x_0, y_0, z_0, t)$$

C'est à dire :

$$x_i = x_i(x_0, y_0, z_0, t)$$

Et

$$\vec{u} = \vec{u}(M_0, t) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}(M_0, t)$$

$$\vec{a} = \vec{a}(M_0, t) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$

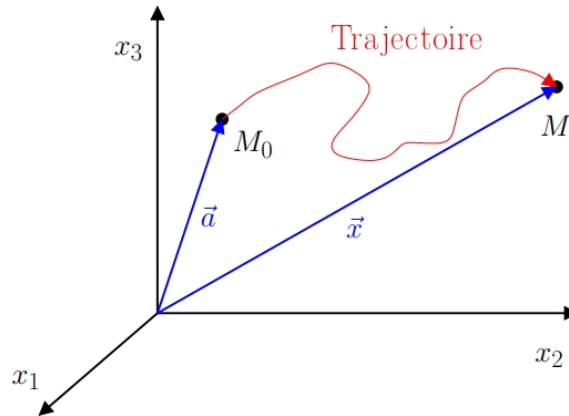


FIGURE 1.4 – Déplacement d'une particule fluide entre sa position initiale  $a$  et sa position  $x$  à l'instant  $t$

### 1.3.2 Description d'Euler

La méthode d'Euler consiste à décrire l'écoulement en donnant les composants de la vecteur vitesse et autres quantités physique en chaque point de l'espace c'est -à-dire ,on fixe un point dans l'espace et on remarque les variations des quantités liées aux particules du fluide passant par ce poin.

A l'instant  $t_1$  , on détermine en M une particule  $P_1$  de vitesse  $\vec{u}$  et d'autres caractéristiques physique K.

Et à l'instant  $t_2 = t_1 + \partial t$  , on trouve au même point M de l'espace , une autre particule  $P_2$  de vitesse et des caractéristiques physiques différentes.

Donc, on a en M et à l'instant  $t_1$

$$\vec{u} = \vec{u} (P_1, t_1) = \vec{u} (x, y, z, t_1)$$

Et à l'instant  $t_2$ , on a au même point M

$$\vec{u} = \vec{u} (P_2, t_2) = \vec{u} (x, y, z, t_2)$$

**Trajectoire :** On définit la trajectoire comme le chemin suivi par un particule de fluide sur mouvement.

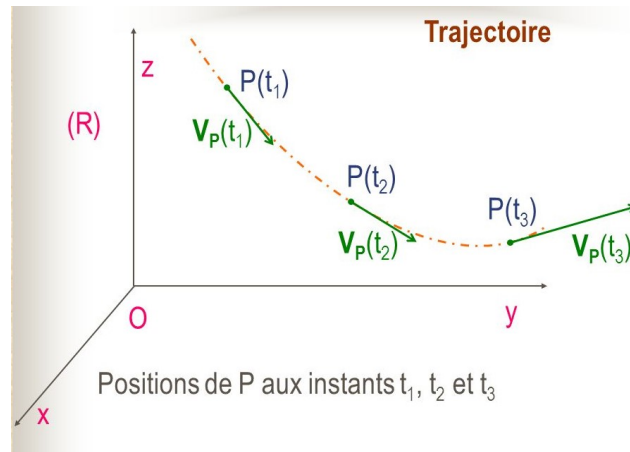


FIGURE 1.5 – Trajectoire de la particule P

### 1.4 Utilisation de la théorie de la variable complexe

soient  $\phi$  et  $\psi$  la fonction de potentiel et la fonction de courant du flux de potentiel bidimensionnel. On relie le plan d'écoulement au plan complexe en écrivant  $z = x + iy$ , alors nous définissons la fonction complexe  $f(z)$  comme :

$$f(z) = \phi + i\psi$$

$f(z)$  est appelé le potentiel d'écoulement complexe. Puisque les parties réelles et imaginaires de  $f(z)$  satisfont l'équation de Laplace, cela vaut aussi :

$$\begin{cases} u = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \end{cases}$$

Puis les relations de Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{cases}$$

La théorie des variables complexes offre une méthode, très puissante pour obtenir des solutions de quelques écoulement. Si le plan  $(x, y)$  est considéré comme plan de  $z = x + iy$  la fonction  $f(z)$  sera analytique dans le domaine de l'écoulement. De plus la vitesse complexe est définie par :

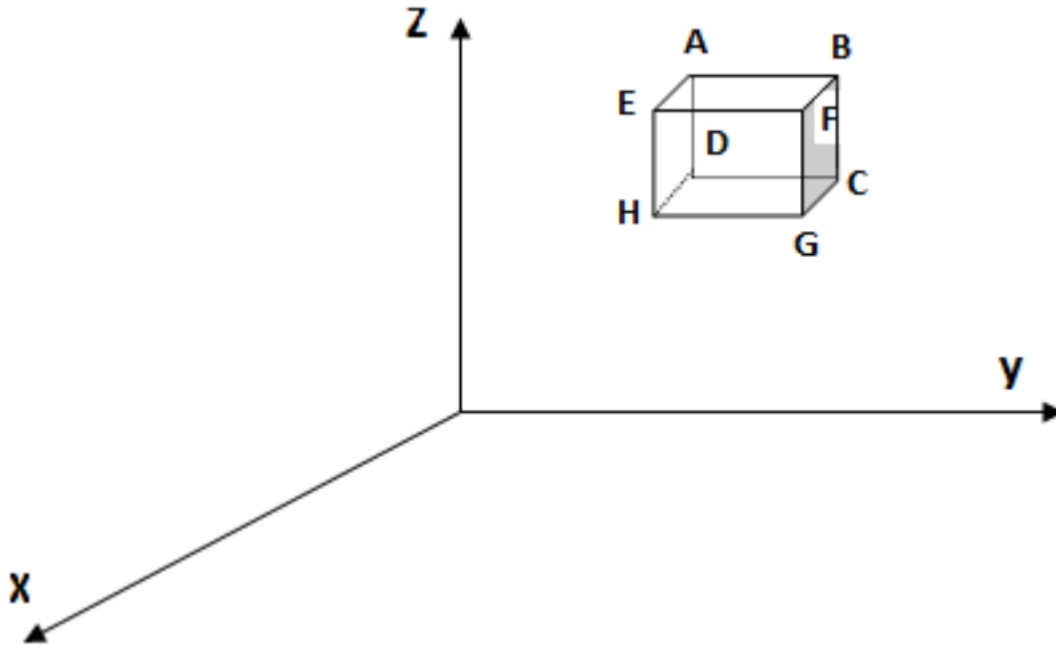
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = u - iv$$

Sera aussi analytique le plan de l'écoulement. Cette très importante propriété va nous paramétrer d'utiliser, par suite, la théorie des fonctions analytiques complexe pour résoudre notre problème considéré.

## 1.5 Quelques équations de la mécanique des fluides

### 1.5.1 Equation de continuité

C'est l'expression que l'écoulement est conservatif.



Considérons un parallélépipède élémentaire de fluide, ayant un volume  $dx.dy.dz$ . Au cours le temps  $dt$ , par la face ABCD, une masse fluide entre qui est égale à :

$$dydz\rho dt = \rho u dydzdt \quad (1.1)$$

Pendant ce même temps, par EFGH sort :

$$\left( \rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} \right) dydzdt \quad (1.2)$$

La différence entre ces deux expressions représente l'accroissement de masse correspondant à la composante du mouvement suivant la direction Ox. De même, en considérant les composantes suivant les deux autres directions, on établit que l'accroissement total de masse est :

$$- \left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) dx dy dz dt \quad (1.3)$$

Entre  $t$  et  $t+dt$ , masse du petit élément pris en considération passe de  $\rho dx dy dz$  à  $(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt) dx dy dz$  donc s'accroît de :  $\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$  par variation de sa masse spécifique en fonction du temps.

On exprime la conservation de la masse en écrivant que l'accroissement de la masse correspond à celle qui rentre dans l'élément :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = - \left( \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) dx dy dz dt \quad (1.4)$$

soit

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.5)$$

ou

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \text{ equation de continuité} \quad (1.6)$$

**Remarque :**

Quand le fluide est incompressible et homogène, cette équation se réduit à :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0} \quad (1.7)$$

soit

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{V} = 0} \quad (1.8)$$

### 1.5.2 Théorème de bernoulli

#### *Premier théorème de Bernoulli*

Dans un écoulement stationnaire :

$$z + \frac{P}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = cte \quad (1.9)$$

#### *deuxième théorème de Bernoulli*

Dans un écoulement potentiel l'équation d'Euler s'écrit :

$$\rho \left[ \nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \nabla \frac{u^2}{2} \right] = -\nabla \hat{p} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + gH \quad (1.10)$$

ou

$$\hat{p} = P + \rho g z \quad (1.11)$$

### 1.5.3 Ligne de courant et fonction de courant

Les ligne de courant et les trajectoire sont deux types de courbe qui ont été définie pour decrire l'écoulement d'un fluide la trajectoire représente le chemin d'un seule particule de fluide, la ligne de courant est une courbe tangente en chacun de ces points au vecteur vitesse en ce point. La définition d'une ligne de courant est donné par les équations :

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w} \quad (1.12)$$

$dx$  ,  $dy$  et  $dz$  sont les éléments d'un segment de la ligne de courant dans un système de coordonnées cartésiennes dans le cas d'un écoulement permanent les lignes de courant sont des courbes fixes confodues les trajectoires dans le cas d'un écoulement plan, l'équation (1 :1) se reduite a :

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} \quad (1.13)$$

On notera que les surfaces des frontieres solides fixes sont toujours des lignes de courant puisque l'écoulement ne pas traverser des surfaces solides.

Les lignes de courant sont les trajectoires suivies par les molécules d'un fluide en mouvement (*voir figure*).

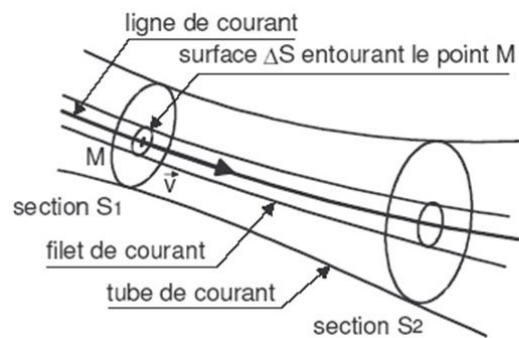


FIGURE 1.6 – lignes de courant

#### 1.5.4 Équations différentielles des fonctions $\psi$ et $\phi$

Soit un écoulement bidimensionnel, irrotationnel et stationnaire d'un fluide incompressible non-visqueux. Puisque :

$$\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}}\phi$$

ET

$$\text{div} \vec{u} = 0$$

Il vient que :

$$\text{div} \left( \overrightarrow{\text{grad}} \phi \right) = 0$$

D'où

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

C'est -à-dire :

$$\Delta \phi = 0$$

De même, d'après :

$$\vec{u} = (u, v) = \left( -\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \right)$$

Et

$$\text{rot } \vec{u} = 0$$

On trouve :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

D'où

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$$

C'est-à-dire

$$\Delta \psi = 0$$

D'où, la fonction potentielle  $\phi$  et la fonction ligne de courant  $\psi$  et vérifient l'équation de Laplace.

Un écoulement bidimensionnel, irrotationnel et stationnaire d'un fluide incompressible, non visqueux est écoulement potentiel.

## Chapitre 2

# *Réprésentations et transformations conformes*

Dans ce chapitre, on va présenter des concepts généraux concernant les transformations conformes, en particulier la transformation de Schwarz-Christoffel et leur utilisation, ainsi que des exemples.

## 2.1 Généralités sur les transformations conformes

### 2.1.1 Définition

Une transformation d'un domaine  $D$  qui conserve toutes les angles en grandeur et en sens est dite transformation conforme de  $D$ .

### 2.1.2 Théorème

Soit  $w = f(z)$  une fonction analytique dans un domaine  $D$  telle que  $f'(z) \neq 0$  en tout point de  $D$ . Alors la transformation réalisée par cette fonction est une transformation conforme de  $D$ .

### 2.1.3 Définition

Considérons deux plans  $(x, y)$  et  $(X, Y)$  et une transformation ponctuelle bijective :

$$X = X(x, y)$$

$$Y = Y(x, y)$$

qui a tout point  $m(x, y)$  lui associe le point  $M(x, y)$  et inversement. Lorsque, dans le plan  $(x, y)$ , le point  $m$  décrit une courbe  $(c)$ , le point  $M$  dans le plan  $(X, Y)$  décrit une courbe  $(C)$  qui est l'image de  $(c)$  dans la transformation.

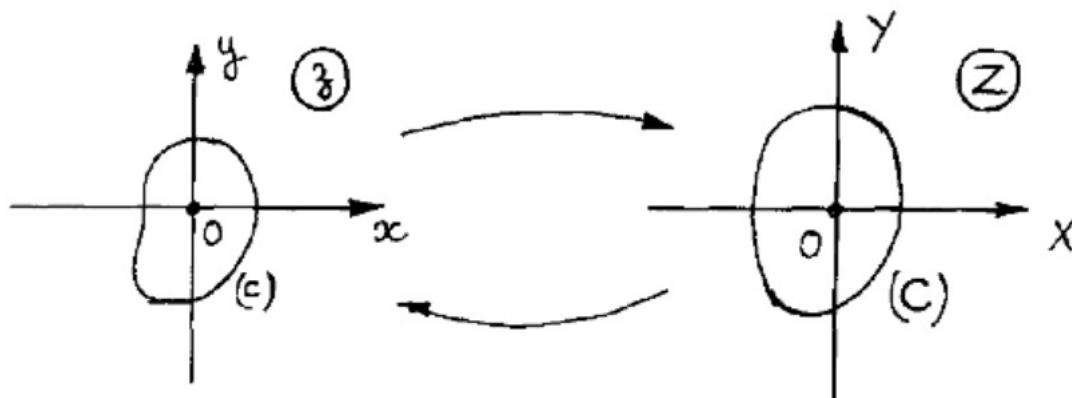


FIG. 2.1 – Transformation de plan  $[z]$  vers le plan  $[Z]$  et l'inverse

Parmi toutes ces transformations ponctuelles bijectives certaines vérifent, au moins dans certains domaines  $D$  du plan complexe, les relations de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

La transformation est alors dite "transformation conforme" dans  $D$ , ce qui conduit au résultat suivant :

Les transformations conformes peuvent toutes s'écrire sous la forme :

$$Z = g(z) \quad , \quad z = G(Z)$$

où :  $Z = X + iY$  ,  $z = x + iy$

## 2.2 Propriétés des transformations conformes

### Holomorphie

Il résulte de la définition même que  $g(z)$  doit être dérivable dans  $D$  et uniforme : elle est donc holomorphe dans  $D$ , mais si on prolonge la définition de  $g(z)$  à tout le plan complexe, cette fonction doit nécessairement présenter des singularités en dehors de  $D$  ou sur les frontières de  $D$  (sinon tout comme  $f(z)$ , ce serait une constante d'après le théorème de Liouville).

### Conservation des angles et points singuliers

La fonction  $g(z)$  étant holomorphe dans  $D$ , la transformation conforme conserve les angles. plus précisément, si deux courbes  $\gamma$  et  $\gamma'$  passent par un point  $z_0$  et se coupent sous l'angle  $\alpha$ , leurs transformées  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  passent par le point transformé  $Z_0$  et se coupent en général dans le plan  $[Z]$  sous le même angle  $\alpha$

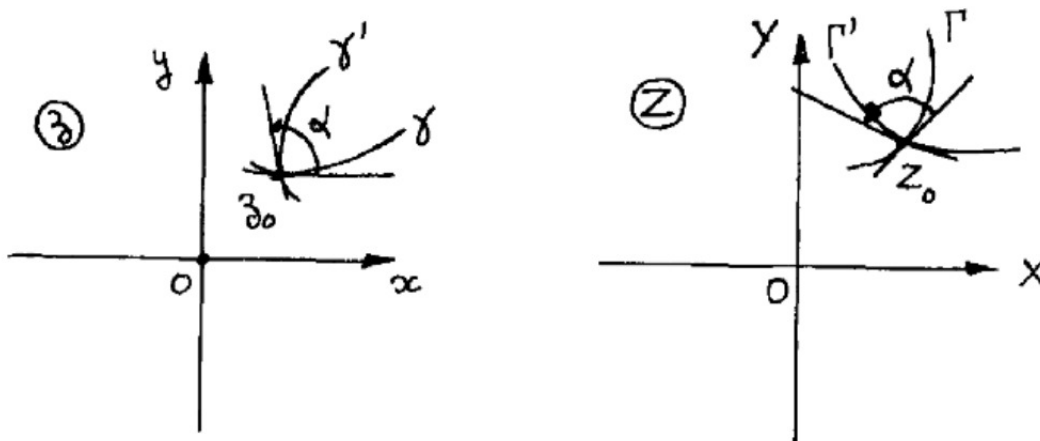


FIG. 2.2 – Conservation d'angle  $\alpha$  de plan  $[z]$  vers le plan  $[Z]$

En effet, un développement au voisinage de  $z_0$  s'écrit, sous réserve que  $g(z)$  soit holomorphe en  $z_0$  et que  $g'(z_0)$  soit non nul :

$$dZ = g'(z_0)dz$$

ce qui montre que l'on passe du voisinage de  $z_0$  au voisinage de  $z_0$  par une similitude définie par le nombre complexe  $g'(z_0) \neq 0$ .

En étendant le domaine de définition de  $g(z)$  à tout le plan complexe, on obtient donc le résultat suivant :

Une transformation  $g(z)$  conserve les angles en tout point du plan complexe où  $g'(z)$  n'est ni nul ni infini.

Les points où  $g'(z)$  est nul ou non défini sont dits **points singuliers** de la transformation conforme.

## 2.3 Un type des transformations conformes

Une transformation conforme est une application du plan  $z$  au plan  $\zeta$  de la forme  $z = f(\zeta)$ , où  $f$  est une fonction analytique de  $\zeta$ . Les transformations conformes préservent les angles entre les petits arcs sauf aux points où  $df/d\zeta = 0$ . De tels points sont appelés points critiques de la transformation, et des courbes lisses passant par de tels points dans le plan  $z$  peuvent donner des valeurs angulaires dans le plan  $z$ .

## 2.4 Transformation de Schwarz-Christoffel

La transformation de Schwarz-Christoffel est l'une des formes de cartographie les plus courantes et les plus utiles. Elle cartographie l'intérieur d'un polygone fermé dans le plan  $z$  sur la moitié supérieure du plan  $\lambda$ , tandis que la limite du polygone correspond à l'axe réel du plan  $\lambda$ .

$$\frac{dz}{d\lambda} = K(\lambda - a)^{\frac{\alpha}{\pi}-1}(\lambda - b)^{\frac{\beta}{\pi}-1}(\lambda - \lambda_c)^{\frac{\gamma}{\pi}-1} \dots \quad (2.1)$$

- Ici, les sommets A, B, C, etc, dans le plan  $z$ , sous-tendent les angles intérieurs  $\alpha, \beta, \gamma$ , etc. (Voir la figure 2.3)
- $a, b, c$  etc., sont les points sur l'axe réel du plan  $\lambda$  correspondant aux sommets A, B, C, etc. Le polygone dans le plan  $z$  est fermé, les angles  $\alpha, \beta, \gamma$ , etc, doit satisfaire la relation suivante :

$$\alpha + \beta + \gamma \dots = (n - 2)\pi$$

où  $n$  est le nombre de sommets dans le polygone.

La constante  $K$  détermine l'échelle du polygone et son orientation, tandis que la constante d'intégration détermine l'emplacement de l'origine dans le plan  $z$ . Des constantes  $a$ ,  $b$  et  $c$ , peuvent être choisis arbitrairement et les autres seront déterminés par la forme du polygone.

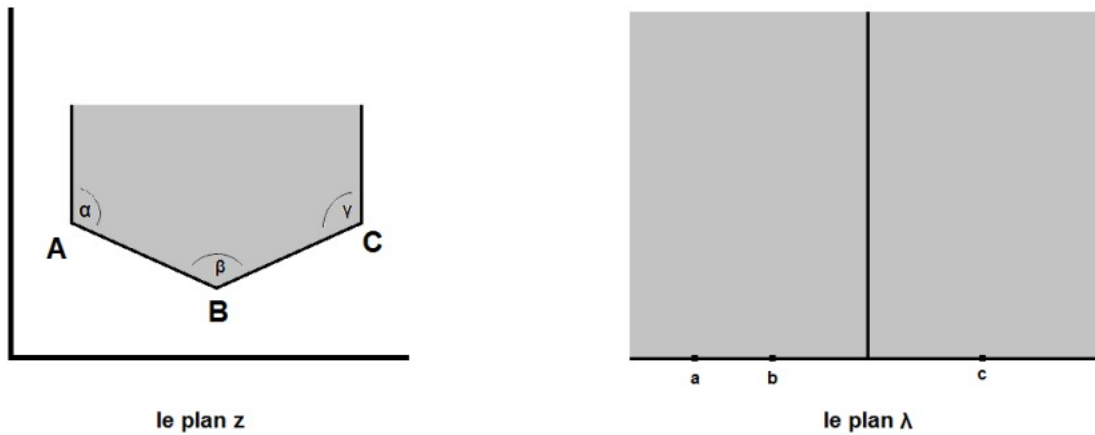


FIGURE 2.3 – Régions correspondantes dans le plan d'origine (le plan  $z$ ) et le plan cartographique (le plan  $\lambda$ ) pour la transformation de Schwarz-Christoffel.

## 2.5 Méthode des lignes de courant libre

Cette théorie consiste à étudier les problèmes d'écoulements potentiels et bidimensionnels, partiellement bornés par les parois rigides et rectilignes et d'autres parties par lignes de courant libres, sur lesquelles la pression est supposée constante.

**Principe :** On présente les deux cas suivantes :

- Le premier cas où si aucune surface libre n'est pas présente et l'effet de la gravité n'est pas considérée l'écoulement dans le plan physique est un polygone.

Le deuxième cas où les lignes de courant libres sont présentes et l'effet de la gravité et la tension de surface sont négligeables, le domaine de l'écoulement dans le plan transformé par une transformation conforme appropriée est aussi un polygone.

Dans les deux cas on peut trouver la solution exacte du problème. L'idée de base est l'introduction de la variable complexe définie par :

$$\Omega = \log\left(\frac{U}{df/dz}\right) = \log\left(\frac{U}{u - iv}\right) = \log\left(\frac{U}{q}\right) + i\theta$$

ou  $f(z) = \phi + i\psi \frac{df}{dz} = u - iv$  et  $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ ,  $(u, v)$  sont les composantes du vecteur vitesse suivant les directions de l'axe des  $x$  et l'axe des  $y$ , respectivement,  $\theta$  est l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'horizontale et  $U$  est la vitesse de référence qui peut être considérée comme unité de vitesse. On note que la fonction  $\Omega$  possède les propriétés suivantes :

- La partie réelle de  $\Omega$  est constante sur chaque ligne de courant libre, i.e.,  $\log\left(\frac{u}{q}\right) = \text{const}$  .
- La partie imaginaire de  $\Omega$  est constante sur chaque paroi rigide rectiligne, i.e.,  $\theta = \text{const}$ .

Par conséquent, dans le plan  $\Omega$ , le domaine d'écoulement est présenté par une figure plane de côtés rectilignes (polygone). C'est aussi le cas de la transformation  $f$ , qui transforme le plan physique  $z$  en polygone. Il vient que, si nous pouvons transformer le plan  $\Omega$  vers la moitié supérieure ( reps. inférieure ) d'une certaine variable complexe  $\lambda$ , alors la relation entre  $z$  et  $f$  ou entre  $df/dz$  et  $f$  est paramétriquement déterminées.

## Chapitre 3

### *Résolution analytique d'un problème de type jet devant un obstacle de forme triangulaire*

Dans ce chapitre, nous considérons un problème d'écoulement d'un jet devant un obstacle de forme triangulaire. Le fluide est considéré comme incompressible et non visqueux. Dans le cas où en négligeant les effets de la gravité et de la tension de surface, la solution exacte peut être calculer en utilisant la théorie des ligne de courant libre introduite par Kirchhoff.

### 3.1 Position du problème

Considérons un écoulement potentiel et bidimensionnel d'amplitude fini  $H$  d'un fluide incompressible et non visqueux et irrotationnel devant un obstacle de forme deux plaques et semi infini. L'écoulement est limité par les parois du canal  $AO$  et  $OB$  et la surface libre  $A'B'$ . le point  $O$  est l'origine du plan  $(x,y)$ . Nous supposons que l'écoulement est uniforme lorsque  $x$  tend vers moins l'infini et lorsque  $y$  tend vers l'infini, aux points  $O$  et  $M$  la vitesse est nulle.

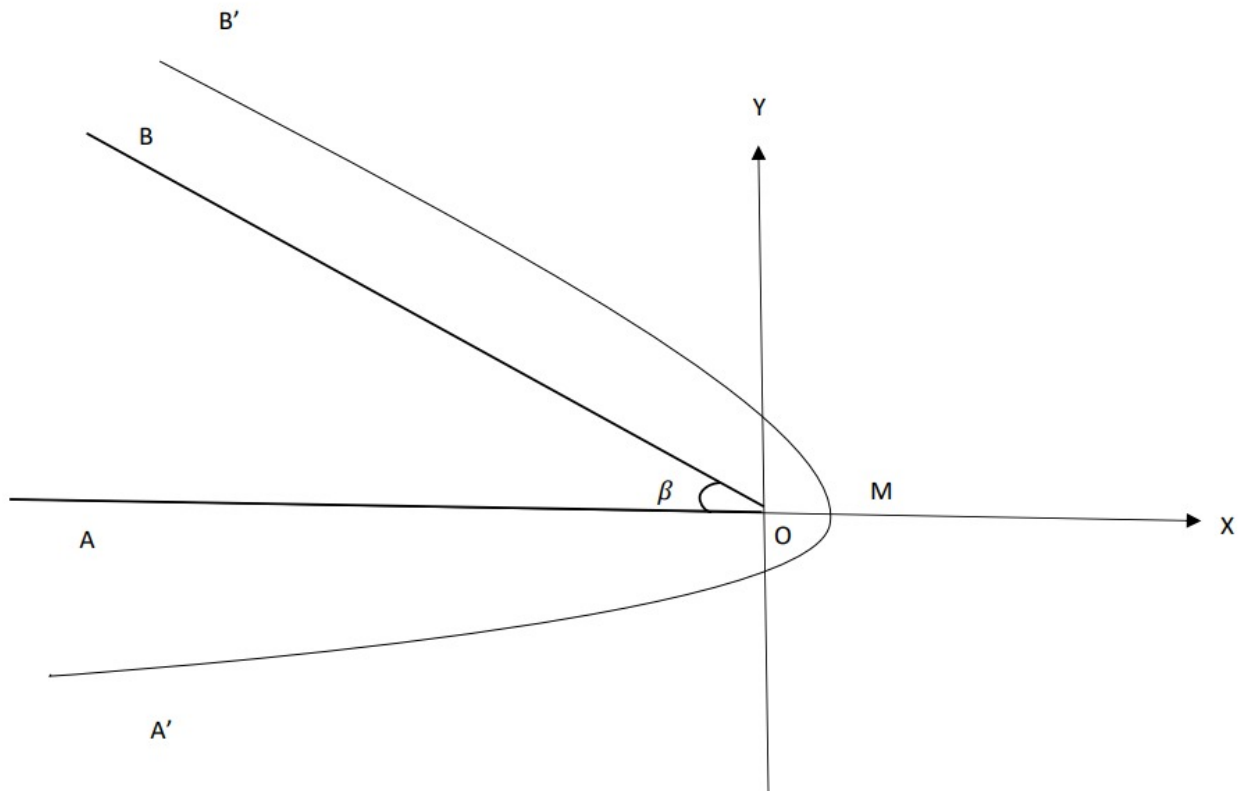


FIGURE 3.1 – Le plan  $Z$

Nous nous intéressons à des écoulements potentiels, irrotationnels et bidimensionnels, nous pouvons définir un potentiel complexe :

$$f(z) = \phi + i\psi$$

où  $\phi$  et  $\psi$  représentent la fonction potentiel et la fonction de courant respectivement, la dérivée de ce potentiel par rapport à  $z = x + iy$  fournit la vitesse complexe

$$\frac{\partial f}{\partial z} = u - iv$$

Puisque l'effet de la tension de surface et l'effet de gravité sont négligés, l'équation de Bernoulli sur la surface libre s'écrit comme suite

$$\frac{1}{2}q^2 + \frac{P}{\rho} = cte \quad (3.1)$$

où  $q$  est le module de vecteur vitesse,  $P$  est la pression et  $\rho$  la densité du fluide. On a la densité et la pression sont des constantes sur la surface libre de l'écoulement, donc la forme de l'équation de Bernoulli devient

$$q = cte \text{ sur } ABC \quad (3.2)$$

## 3.2 La solution exacte

Dans cette section nous allons utiliser la transformation de Schwarz-Christoffel et la méthode des lignes de courant libres pour trouver la solution exacte de notre problème, en utilisant la technique utilisée par Kirchhoff (1869).

### 1<sup>er</sup> étape

On transforme le domaine d'écoulement réel  $(x, y)$  en un domaine d'écoulement de frontière polygonale du plan  $(\log(u/q), \theta)$  par la transformation de hodographe  $\Omega$ .

$planz$	$plan\Omega$
$A = (-\infty, 0)$	$A = (0, 0)$
$B = (-\infty, +\infty)$	$B = (0, \pi - \beta)$
$O = (0, 0)$	$O = (0, +\infty)$
$M = (L, 0)$	$M = (0, \beta)$

### 2<sup>eme</sup> étape

Le domaine d'écoulement réel, dans le plan  $z$  est transformé à une bande de largeur  $HU$  dans le plan de la variable  $f(z) = \phi + i\psi$  puis que  $\psi$  est constante pour chaque ligne de courant, la transformation est donnée par le tableau suivant :

plan $z$	plan $f$
$A = (-\infty, 0)$	$A = (-\infty, 0)$
$B = (-\infty, +\infty)$	$B = (+\infty, 0)$
$O = (0, 0)$	$O = (0, 0)$
$M = (L, 0)$	$M = (0, UHL)$

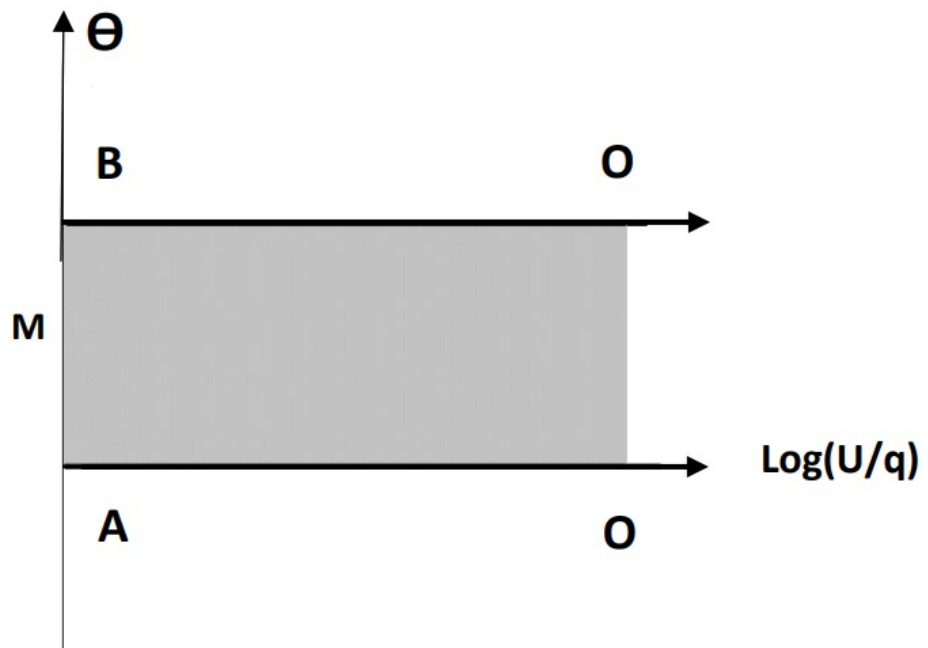


FIGURE 3.2 – Le plan  $\Omega$

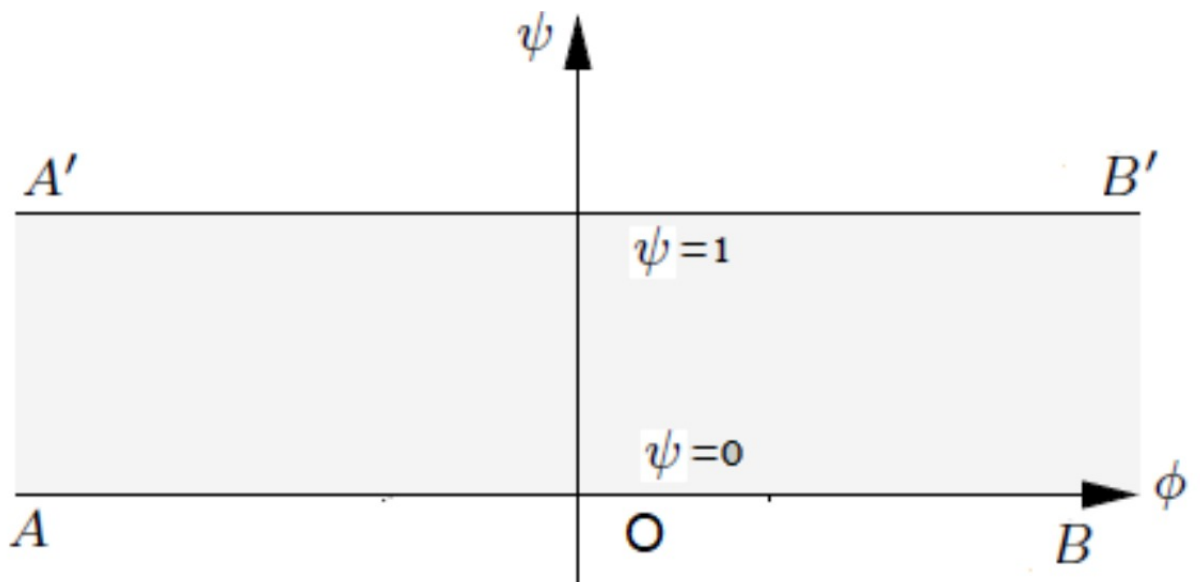


FIGURE 3.3 – Le plan  $f = \phi + i\psi$ .

**3<sup>eme</sup> étape**

Nous utilisons la transformation de Schwarz-Christoffel pour transformer le domaine d'écoulement  $\Omega$  en un demi-plan supérieur de variable  $\lambda$  :

<i>plan</i> $\Omega$	<i>plan</i> $\lambda$
$A = (0, 0)$	$A = (1, 0)$
$B = (0, \pi + \beta)$	$B = (-1, 0)$
$O = (0, +\infty)$	$O = (+\infty, 0)$
$M = (0, \beta)$	$M = (0, 0)$

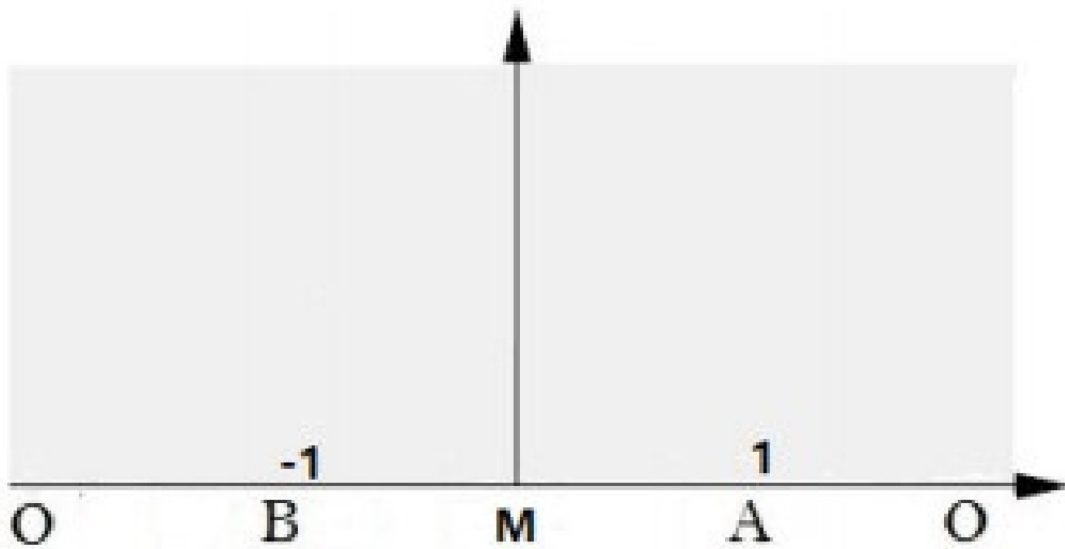


FIGURE 3.4 – Le plan  $\lambda$

**4<sup>eme</sup> étape**

On utilise la transformation de Schwarz-Christoffel pour transformer le domaine d'écoulement  $f$  en un demi-plan supérieur de variable  $\lambda$  :

$plan f$	$plan \lambda$
A	$A = (1, 0)$
B	$B = (-1, 0)$
O	$O = (-\infty, 0)$
M	$M = (0, 0)$

**5<sup>eme</sup> étape**

Dans cette étape on recherche une transformation qui transforme le domaine d'écoulement  $z$  à le domaine d'écoulement  $f$

. Nous utilisons la fonction de Kirchhoff :

$$\Omega = \log\left(\frac{U}{df/dz}\right) = \log\left(\frac{U}{q}\right) + i\theta \quad (3.3)$$

Alors :

$$\Omega = \log\left(U \cdot \frac{dz}{df}\right) \quad (3.4)$$

$$e^{\Omega} = U \cdot \frac{dz}{df} \quad (3.5)$$

D'autre part, on a :

$$\frac{dZ}{d\lambda} = \frac{dZ}{df} \cdot \frac{df}{d\lambda} \quad (3.6)$$

alors :

$$\frac{dz}{df} = \frac{1}{U} \cdot e^{\Omega} \quad (3.7)$$

$$\frac{dZ}{df} = \frac{1}{U} \cdot e^{\Omega} \quad (3.8)$$

on utilise la relation suivante :

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = K(\lambda - \lambda_A)^{\frac{\beta_A}{\pi}-1}(\lambda - \lambda_B)^{\frac{\beta_B}{\pi}-1}(\lambda - \lambda_C)^{\frac{\beta_C}{\pi}-1} \quad (3.9)$$

tel que :

$$\beta_A = \frac{\pi}{2}, \beta_B = \pi, \beta_C = \frac{\pi}{2}$$

Cela implique :

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = K(\lambda - 1)^{-\frac{1}{2}}(\lambda + 1)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.10)$$

$$\Omega = K \int \frac{1}{\sqrt{(\lambda + 1)(\lambda - 1)}} d\lambda + P \quad (3.11)$$

$$\Omega = k \log(\sqrt{\lambda^2 - 1} + \lambda) + P \quad (3.12)$$

ici,  $P$  et  $K$  deux constantes. Pour déterminer les valeurs des constantes, on choisit le point  $A(\lambda = 1; \Omega = 0)$ , on trouve :

$$0 = K \log(1) + P \Rightarrow P = 0 \quad (3.13)$$

et, on choisit encore le point  $C(\lambda = -1; \Omega = i(-\beta + \pi))$ , cela implique

$$i(-\beta + \pi) = K \log(-1) = K \log(i^2) \quad (3.14)$$

ou bien :

$$k = 1 - \frac{\alpha}{\pi} \quad (3.15)$$

$$\Omega = \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) \log(\sqrt{\lambda^2 - 1} + \lambda) \quad (3.16)$$

c'est la relation entre les deux transformations  $\Omega$  et  $\lambda$ . Et alors :

$$\frac{dZ}{df} = \frac{1}{U} e^{((1-\frac{\alpha}{\pi})\log(\sqrt{\lambda^2-1}+\lambda))} \quad (3.17)$$

D'autre part, on cherche une autre relation entre les transformations  $f$  et  $\lambda$ . On utilise la même relation

$$\frac{df}{d\lambda} = M(\lambda - \lambda_A)^{\frac{\beta_A}{\pi}-1}(\lambda - \lambda_B)^{\frac{\beta_B}{\pi}-1}(\lambda - \lambda_C)^{\frac{\beta_C}{\pi}-1} \quad (3.18)$$

avec

$$\beta_A = 0; \beta_B = \pi; \beta_C = 0 \quad (3.19)$$

$$\frac{df}{d\lambda} = M(\lambda - 1)^{-1}(\lambda + 1)^{-1} \quad (3.20)$$

on trouve

$$f = M \int \frac{1}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)} d\lambda + N \quad (3.21)$$

alors

$$f = \frac{-M}{2} \log\left(\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}\right) \quad (3.22)$$

cela implique

$$f = \frac{M}{2} \log\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\right) \quad (3.23)$$

pour déterminer les constantes  $M$  et  $N$ , on choisit le point  $O(\lambda = \infty; f = 0)$

$$0 = \frac{M}{2} \log(1) + N \quad (3.24)$$

Alors

$$N = 0 \quad (3.25)$$

et le point  $M(\lambda = 0; f = iHU)$ , on trouve

$$iHU = \frac{M}{2} \log(i^2) = M \log(i^2) = M \log \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right) = \left(\frac{i\pi M}{2}\right) \quad (3.26)$$

mais

$$M = \frac{2HU}{\pi} \quad (3.27)$$

ou bien

$$f = \frac{2HU}{\pi} \log\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\right) \quad (3.28)$$

on trouve la relation

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{2HU}{\pi} \frac{1}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)} \quad (3.29)$$

cela implique

$$f = \frac{HU}{\pi} \log\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\right) \Leftrightarrow \exp^{\frac{f\pi}{HU}} = \frac{(\lambda - 1)}{(\lambda + 1)} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1 + \exp^{\frac{f\pi}{HU}}}{1 - \exp^{\frac{f\pi}{HU}}} \quad (3.30)$$

est la relation entre les deux plans  $f$  et  $\lambda$

### 6<sup>eme</sup> étape

Pour la solution de notre problème en utilisant la relation suivante

$$U \frac{dz}{d\lambda} = U \frac{dz}{df} \frac{df}{d\lambda} \quad (3.31)$$

cela implique

$$\frac{dZ}{d\lambda} = \frac{1}{U} e^{\Omega} \times \frac{2HU}{\pi(\lambda - 1)(\lambda + 1)} \quad (3.32)$$

alors

$$\frac{dZ}{d\lambda} = \frac{1}{U} \exp\left[\left(1 - \frac{\beta}{\pi}\right) \log(\sqrt{\lambda^2 - 1} + \lambda)\right] \times \frac{2HU}{\pi} \frac{1}{\lambda^2 - 1} \quad (3.33)$$

et

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{2H}{\pi} \left[ \frac{(\sqrt{\lambda^2 - 1} + \lambda)^{\left(1 - \frac{\beta}{\pi}\right)}}{\lambda^2 - 1} \right] \quad (3.34)$$

après les calculs, on trouve

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{2H}{\pi} \left[ \frac{(\lambda + i\sqrt{1 - \lambda^2})^{\left(1 + \frac{\beta}{\pi}\right)}}{\lambda^2 - 1} \right] \quad (3.35)$$

tel que :  $-1 \leq \lambda \leq 1$  .Alors :

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{2H}{\pi} \left[ \frac{(\lambda + i\sqrt{1-\lambda^2})^{(-1+\frac{\beta}{\pi})}}{\lambda^2 - 1} \right] = \frac{2H}{\pi} \left[ \frac{\cos((1 - \frac{\alpha}{\pi})\arccos\lambda) + i\sin((1 - \frac{\beta}{\pi})\arccos\lambda)}{\lambda^2 - 1} \right] \quad (3.36)$$

Cela implique

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{2H}{\pi} \left[ \frac{\cos((1 - \frac{\beta}{\pi})\arccos\lambda)}{\lambda^2 - 1} + \frac{i\sin((1 - \frac{\beta}{\pi})\arccos\lambda)}{\lambda^2 - 1} \right] \quad (3.37)$$

pour :  $\beta = \frac{\pi}{3}$

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{2H}{\pi} \left[ \frac{\cos(\frac{2}{3}\arccos\lambda)}{\lambda^2 - 1} + \frac{i\sin(\frac{2}{3}\arccos\lambda)}{\lambda^2 - 1} \right] \quad (3.38)$$

Après les calculs on trouve

$$Z - Z_0 = \frac{-H}{\pi} [\log[(2\cos A + 1)(\cos A + 1)] - i\sqrt{3}\log[(2\cos A - 1)(\cos A + 1)]] \quad (3.39)$$

tel que :  $A = \frac{\arccos\lambda}{3}$

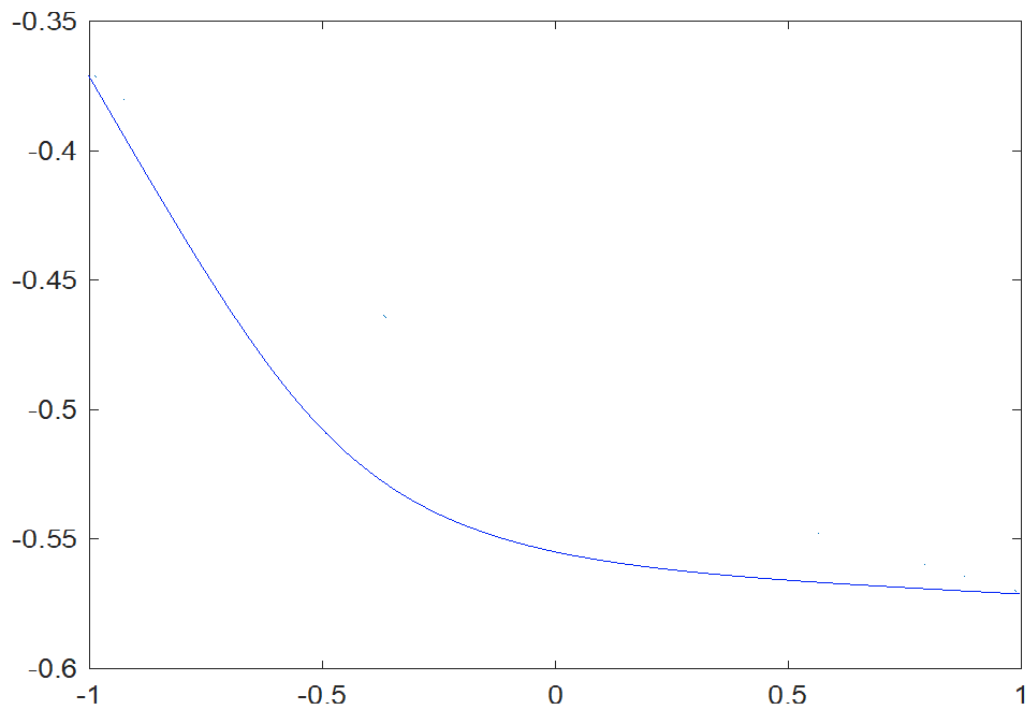


FIGURE 3.3 – la forme de surface libre pour  $\beta = \frac{\pi}{3}$

## CONCLUSION

Dans ce mémoire , on a étudié analytiquement un problème d'écoulement potentiel bidimensionnel à surface libre d'un fluide incompressible et non visqueux devant un obstacle de forme deux plaques en négligeant les effets de la gravité et de la tension de surface. On a appliqué la technique d'hodographe introduite par Kirchhoff et la transformation de Schwartz Christoffel pour résoudre notre problème, c'est-à-dire pour trouver la solution exacte qui donne la courbe qui présente la forme de la surface libre. Cette résolution est très important pour des recherche futures surtout dans le côté numérique.

# Bibliographie

- [1] A. Amara et A. Gasmi, The effet of surface tension on the jet flow in U-shaped channel, International Journal of Pure and Applied Mathematics. Vol. 118, No. 3 (2018), 625-635.
- [2] Amara Oussama, Zerouki Charaf Eddine. Simulation numérique d'un écoulement de fluide autour d'un obstacle carré : influence de l'angle d'inclinaison. 2020. Mémoire de master. Université Ibn Khaldoun de Tiaret.
- [3] Abdelkader Gasmi, H.Mekias A Jet from Container and Flow past a Vertical Flat Plate in a Channel With the Surface Tension Effects, Applied Math Sciences, vol.1, 2007, no.54, 2687-2698.
- [4] S. Amiroudine et J. L. Battaglia, Mécanique des fluides, Dunod, Paris. (2011).
- [5] B. Bouderah, A. Gasmi, et H. Serguine, Zero Gravity of Free-Surface Jet Flow, International Mathematical Forum. 2, (2007), no. 66, 3273 - 3277.
- [6] R.Benhamouda,"Notions de mecanique des fluides",cours et exercices corrigés,Centre de publication universitaire,2008
- [7] Bouhellala Kharfia. Mécanique des fluides. Cours et Applications. 2020. Université de Béchar Tahri Mohammed, Faculté de Technologie, Département de Génie Civile et Hydrologie.
- [8] Brahim, Bouderah, Wahiba delloum et Abdelkader Gasmi A Free Surface Flow over a polygonal obstacle, international Mathematical Forum, 2, 2007 no.66, 3279-3284.
- [9] N. Bounab et B. Bouderah, Computing Solution of the Flow due to a Nozzle, International Journal of Computer Applications.

- 
- [10] chadala fatma zohra, un problème d'écoulement d'un jet à surface libre , 2022-2023.
- [11] Darrozes, J. S. et François. C. Mécaniques des fluides incompressibles. Springer-Verlag, 1982.
- [12] A.Merzougui, H.Mekias et F.Guechi Surface tension effect on a two dimensional channel flow against an inclined wall, Algerian Journal of applied Fluid Mech , Vol.2, 2007, 1718-5130.
- [13] J.Roussel Cours de Mécanique des fluides, C.P.I.2-Chem.I.St2 : 2005-2006.

**ملخص :**

في هذا العمل قمنا بدراسة مشكلة عددية تتعلق بالتدفق المحتمل وثنائي الأبعاد غير قابل للضغط وغير لزج أمام عائق على شكل لوحين يصنعان زاوية  $\beta = \pi / 3$  مع محور الفواصل و إستخدمنا بعض طرق التحولات المطابقة لدراسة السطح الحر السائلة .

**الكلمات المفتاحية :** السطح الحر ، السائل ، التدفق ، توتر السطح ، الحل الدقيق

**Résumé**

Dans ce travail, nous avons étudié un problème numérique lié à un écoulement potentiel, bidimensionnel, incompressible et non visqueux devant un obstacle en forme deux plaques qui fait un angle  $\beta = \frac{\pi}{3}$  avec l'axe de les espaceurs, et nous avons utilisé certaines méthodes de transformations conformes pour étudier la surface libre de liquide.

**Mots clés :** surface libre, liquide, écoulement, tension superficielle, solution exacte

**Abstract**

In this work, we studied a numerical problem related to potential, two-dimensional, incompressible, non-viscous flow in front of an obstacle in the shape of tow plates that makes an angle  $\beta = \frac{\pi}{3}$  with the axis of the spacers, and we used some methods of conformal transformations to study the liquid free surface.

**Keywords :** free surface, liquid, flow, surface tension, exact solution