

UNIVERSITÉ DE M'SILA

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES

Département de Mathématiques

Mémoire de Fin D'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Licence**

Domaine :Mathématiques et Informatique

Filière :Mathématiques

Spécialité :Mathématiques Appliquées

Par

sujet

Étude analytique et numérique de quelques problèmes inverses
--

Dirigé par :

.

Promotion:2014/2015

Remerciements

Merci

Table des matières

Introduction	1
1 RAPPELS SUR DES OUTILS MATHÉMATIQUES	3
1.1 Espaces normés	3
1.2 Espaces de Banach	4
1.3 Espaces de Hilbert	5
1.4 Opérateurs sur un espace de Hilbert	6
1.5 Ensemble convexe	6
1.6 Théorème du point fixe de Schauder	6
2 Problème de coefficient inverse de l'équation parabolique avec frontière périodique et conditions intégraux surdétermination	9
2.1 Introduction	9
2.2 Existence et unicité de la solution du problème inverse	11
2.3 Méthode Numérique	24
2.3.1 Utilise de schéma Crank-Nicolson sur problème (2) – (5)	26
2.4 Exemples et discussions numériques	29
3 Problème mixte avec conditions intégraux pour une certaine classe des équations hyperbolique	31
3.1 Introduction	31
3.2 l'inégalité de l'énergie et ses conséquences	32

3.3 Solvabilité du problème	36
Conclusion	41
Bibliographie	42

Introduction générale.

La définition des problèmes inverses n'est pas simple. On peut les caractériser de façon stricte par des définitions mathématiques pour chaque problème, mais bien souvent cette appellation recouvre des problèmes divers qui partagent tous le même caractère mal posé par opposition aux problèmes dits directs.

Durant les 20 dernières années, les problèmes inverses se sont beaucoup développés grâce à leur fortes implications dans des domaines très variés. Par exemple en médecine dans la reconstruction de l'intérieur du corps humain à partir de mesures de type électriques ou ultrason non invasives en biologie, en écologie, dans l'industrie, dans la recherche pétrolière pour l'identification des perméabilités dans un réservoir, dans le traitement d'image pour la restauration d'images floues, en l'hydrogéologie (identification des perméabilités hydrauliques). Mais aussi les progrès des techniques mathématiques dans le domaine des problèmes inverses durant ces 20 dernières années ont permis de diversifier les approches et d'affiner les observations nécessaires à la reconstruction de coefficients inconnus.

Par les problème inverses généralement sont des problème mal posé car si l'on charaché à resoudre l'equation

$$AX = Y$$

cela nécessite l'inversion l'opérateur A , cette opération n'est pas forcément évidente d'un point de vue numérique et d'après Hadamard [30], une problème est bien pose s'il verifie les trois conditions suivantes:

- la solution existe;
- elle est unique;
- elle dépend continument des donnes.

Danc, si l'une des trois condition n'est pas satisfait, on dit que le problème est mal posé. Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous allons commencer par donner un rappel sur les espaces vectoriels normés et espaces de Banach et de Hilbert et leurs propriétés, ainsi que quelques résultats indispensables sur les opérateurs linéaires continus dans les espaces de Hilbert, l'ensemble convexe et Théorème du point fixe de Schauder.

Dans le second chapitre, nous étudie le problème inverse de trouver un coefficient de diffusion dépendant du temps dans une équation parabolique avec frontière périodique et condition intégraux surdétermination .

Le problème donnée par:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = a(t)u_{xx} + F(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T \\ u(0, t) = u(1, t), \quad u_x(0, t) = u_x(1, t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ \int_0^1 xu(x, t)dx = E(t), \quad 0 \leq t \leq T \end{array} \right.$$

Sous une hypothèse sur les données, l'existence, l'unicité, et la dépendance continu sur les données de la solution sont présentées, en utilisant la méthode de Fourier généralisée. L'exactitude et la l'efficacité de calcul de la méthode proposée est vérifiée à l'aide des exemples numériques.

Dans le dernier chapitre , nous étudions un problème mixte avec des conditions intégrales pour une certaine classe de deux dimensions de second ordre des équations hyperboliques.

le problème donnée par:

$$\left\{ \begin{array}{l} lu = u_{tt} - a(t) \Delta u = f(x, t), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad t \in [0, T] \\ \ell_1 u = u(x, 0) = \varphi(x), \quad \ell_2 u = u_t(x, 0) = \beta(x), \quad x \in \Omega \\ \int_0^{b_i} x_i^k u(x, t) dx_i = 0, \quad i = 1, 2; \quad k = 0, 1, \end{array} \right.$$

Nous démontrons l'existence, l'unicité, et dépendance continu sur la solution généralisation . On utilise une méthode d'analyse fonctionnelle basée sur une estimation a priori et la densité de l'image d'opérateur généré par problème considéré.

Chapitre 1

RAPPELS SUR DES OUTILS MATHÉMATIQUES

Dans ce chapitre, nous allons donner un rappel sur l'espace vectoriels normés et l'espace Hilbert et leurs propriétés, ainsi que quelques résultats indispensables sur les opérateurs linéaires continus dans les espaces de Hilbert et ensemble convexe et Théorème du point fixe de Schauder.

1.1 Espaces normés

Définition 1.1.1 (Norme). Soit E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{k} ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Une norme sur E , est une application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{k}$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tout $x, y \in E$.

Remarque 1.1.1 L'espace vectoriel E muni d'une norme s'appelle espace normé, noté par $(E, \|\cdot\|)$

1. $E = \mathbb{R}^n$, nous avons les normes suivantes :

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i| \\ \|x\|_p &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ pour } p \geq 1 \\ \|x\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)\end{aligned}$$

2. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . L'espace vectoriel des fonctions de carré intégrable sur Ω est :

$$L^2(\Omega) = \left\{ g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\Omega} |g(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

L'application $\|\cdot\| : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$: donnée par :

$$\|g\| = \left(\int_{\Omega} |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

3. $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty &= \max \{ |f(t)| / t \in [a, b] \} \\ \|f\|_1 &= \int_a^b |f(t)| dt \\ \|f\|_p &= \left[\int_a^b |f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

1.2 Espaces de Banach

Définition 1.2.1 (Suite de Cauchy) Soit F un espace vectoriel normé. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de F est de Cauchy si et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > m \geq N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

Définition 1.2.2 (*Espace complet*) Soit F un espace vectoriel normé. On dit que F est complet si toute suite de Cauchy dans F est convergente dans F .

Définition 1.2.3 (*Espace de Banach*) Un espace de Banach est un espace normé complet.

Proposition 1.2.1 soit F est espace de Banach, alors toute suite bornée admet une sous suite converge dans F .

1.3 Espaces de Hilbert

Définition 1.3.1 (*Produit scalaire*) Soit F un espace vectoriel sur le corps \mathbb{k} . Un produit scalaire sur F est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : F \times F \rightarrow \mathbb{k}$ telle que pour tout $x, y, x_1, x_2 \in F$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{k}$ on a:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
3. $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$
4. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

Définition 1.3.2 (*Espace préhilbertien*) Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Remarque 1.3.1 Un produit scalaire sur F définit une norme sur F donnée par :

$$\forall x \in F : \|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

Définition 1.3.3 (*Espace de Hilbert*) Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien sur \mathbb{k} complet pour la norme induite par le produit scalaire

1.4 Opérateurs sur un espace de Hilbert

Définition 1.4.1 (*Opérateur linéaire continu*) Soit H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert réels. On appelle opérateur linéaire continu de H_1 dans H_2 , toute application $L : H_1 \rightarrow H_2$ telle que :

Linéarité : $\forall x, y \in H_1, \alpha, \beta \in \mathbb{R} : L(\alpha x + \beta y) = \alpha Lx + \beta Ly$.

Continuité : $\exists K > 0, \forall x \in H_1 : \|Lx\|_{H_2} \leq K \|x\|_{H_1}$.

On définit la norme de l'opérateur L par :

$$\|L\| = \sup_{x \in H_1} \frac{\|Lx\|_{H_2}}{\|x\|_{H_1}}$$

1.5 Ensemble convexe

Définition 1.5.1 (*Ensemble convexe*) Un ensemble S est dit convexe si pour tout points x et y de S , le segment $[x, y]$ est inclus dans S i.e

$$\forall x, y \in S, \forall t \in [0, 1] : (1 - t)x + ty \in S$$

1.6 Théorème du point fixe de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach. Le Théorème du point fixe de Schauder est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Et nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.6.1 Soit K un sous ensemble non vide, compact, convexe dans un espace de Banach E et supposons $T : K \rightarrow K$ une application continue. Alors T admet un point fixe.

Preuve. Soit $T : K \rightarrow K$ une application continue. Comme K est compact, T est uniformément continue ; donc, si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $\forall x, y \in K$,

on a

$$\|x - y\| \leq \delta \Rightarrow \|T(x) - T(y)\| \leq \varepsilon \quad (1.6.1)$$

de plus, il existe un ensemble fini de points $\{x_1, x_2, \dots, x_p\} \subset K$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_i recouvrent K ; i.e. $K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} B(x_j, \delta)$

Si on désigne $L = \text{Vec}(T(x_j))_{1 \leq j \leq p}$ alors L est de dimension finie, et $K^* := K \cap L$

est compact convexe de dimension finie. Pour $1 \leq j \leq p$, on définit la fonction continue

$\psi_j : K \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\psi_j = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x - x_j\| \geq \delta, \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} & \text{sinon} \end{cases}$$

il est clair ψ_j que est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle en dehors.

On a donc, pour tout $x \in K$, $\sum_{j=1}^p \psi_j(x) > 0$, on peut définir sur K les fonctions continues positives ψ_j par

$$\varphi_j = \frac{\psi_j}{\sum_{k=1}^p \psi_k(x)},$$

pour les quelles on a $\sum_{j=1}^p \varphi_j(x) = 1$ pour tout $x \in K$.

Posant, pour $x \in K$,

$$g(x) = \sum_{j=1}^p \varphi_j(x) T(x_j).$$

La fonction g est continue (car elle est la somme des fonctions continues) et prend ses valeurs dans K (car $g(x)$ est un comment des $T(x_j)$).

Si on prend la restriction $g_{/K^*} : K^* \rightarrow K^*$ (d'après théorème de Brouwer) g possède un point fixe $y \in K^*$.

De plus :

$$\begin{aligned}
T(y) - y &= T(y) - g(y) \\
&= \sum_{j=1}^p \varphi_j(y) T(y) - \sum_{j=1}^p \varphi_j(y) T(x_j) \\
&= \sum_{j=1}^p \varphi_j(y) [T(y) - T(x_j)]
\end{aligned}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$ alors $\|y - x_j\| < \delta$ et par suite $\|T(y) - T(x_j)\| < \delta$.

On a pour tout j

$$\begin{aligned}
\|f(y) - y\| &\leq \sum_{j=1}^p \varphi_j(x) [T(y) - T(x_j)] \\
&\leq \sum_{j=1}^p \varepsilon \varphi_j(y) = \varepsilon
\end{aligned}$$

Pour tout entier m , on peut trouver un point $y_m \in K$ tel que $\|T(y_m) - y_m\| \leq 2^{-3}$

Et puisque K est compact, de la suite $(y_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ on peut extraire une sous suite (y_{m_k}) qui converge vers un point $y^* \in K$: Alors T étant continue, la suite $(T(y_{m_k}))$ converge vers $T(y^*)$, et on conclut que $T(y^*) = y^*$, i.e y^* est un point fixe de T sur K . ■

Chapitre 2

Problème de coefficient inverse de l'équation parabolique avec frontière périodique et conditions intégraux surdétermination

2.1 Introduction

Ce papier examine le problème inverse de découverte pour trouver un coefficient de diffusion dépendant de temps dans une équation parabolique avec frontière périodique et les conditions intégraux de surdétermination .

Conformément à une certaine supposition sur les données, l'existence, l'unicité, et données de la solution sont montrées en utilisant la méthode généralisée de Fourier. L'exactitude et l'efficacité informatique de la méthode proposée sont vérifiées avec l'aide des exemples numériques .

Dénoter le domaine D_T par

$$D_T = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T\} \quad (1)$$

Considérer l'équation

$$u_t = a(t)u_{xx} + F(x, t) \quad (2)$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3)$$

la condition de frontière périodique

$$u(0, t) = u(1, t) \quad u_x(0, t) = u_x(1, t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (4)$$

et la condition de surdétermination

$$\int_0^1 xu(x, t)dx = E(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (5)$$

le problème pour trouver une paire $\{a(t), u(x, t)\}$ dans (2) – (5) s'appeler un problème inverse.

Définition 2.1.1 *La couple $\{a(t), u(x, t)\}$ form de classe $C[0, T] \times C^{2,1}(D_T) \cap C^{1,0}(\bar{D}_T)$ pour quelles conditions (2) – (5) est satisfait et $a(t) > 0$ sur l'intervalle $[0, T]$, s'appelle une solution classique du problème inverse (2) – (5).*

L'identification de paramètre dans une équation différentielle parabolique des données de condition intégrale surdétermination joue un rôle important dans l'ingénierie et la physique [1 – 7] ce cette condition intégrale dans des problèmes paraboliques est aussi appelée des moments de la chaleur [3].

Les problèmes de valeur de frontière pour des équations paraboliques dans une ou deux conditions classiques locales sont remplacés aux moments de chaleur [6, 8]. Ces sortes de conditions comme (5) surgissent des applications importantes de beaucoup dans le transfert de chaleur, thermoélasticité, théorie contrôle, sciences de la vie, et ainsi de suit. Par exemple, dans la chaleur propagation dans une tige mince, La loi de variation $E(t)$ de la quantité totale de chaleur dans la tige est rendu [6] Dans [7], un physique mécanique on a aussi donné l'interprétation des conditions intégrales.

Les déclarations diverses de problèmes inverses sur détermination de coefficient thermique dans unidimensionnel l'équation de chaleur a été étudiée dans [3, 4, 5, 9] , dans des papiers [3, 4, 5], le temps-dépendent le coefficient thermique est déterminé du moment de la chaleur.

Problèmes de valeur de frontière et problèmes inverses pour équations paraboliques avec conditions de frontière périodiques sont examiné dans [10, 11] , dans le travail présent, un moment de chaleur est utilisé condition de frontière périodique pour la détermination de coefficient thermique

L'existence et l'unicité de la solution classique du problème (2) – (5) est réduite à des principes de point fixe en appliquant la méthode de Fourier

Ce papier organisé comme suit dans section 2, l'existence et l'unicité de la solution du problème inverse (2) – (5) sont prouvé en utilisant la méthode de Fourier.

Problème est affiché, dans section 3, procédure numérique pour la solution du problème inverse en utilisant le schéma Crank-Nicolson combiné avec une méthode itération donnée. Enfin, à la section 4, les expériences numériques sont présentées et discutées .

2.2 Existence et unicité de la solution du problème inverse

Nous avons les suppositions suivantes sur les données du problème(2) – (5)

$$(A_1) \quad E(t) \in C^1 [0, T] , \quad E'(t) > 0, \quad \text{pour tous } t \in [0, T]$$

$$(A_2) \quad \varphi \in C^4 [0, 1]$$

$$(1) \quad \varphi(0) = \varphi(1), \quad \varphi'(0) = \varphi'(1), \quad \varphi''(0) = \varphi''(1), \quad \int_0^1 x\varphi(x)dx = E(0)$$

$$(2) \quad \varphi_n \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$(A_3) \quad F(x, t) \in C(\bar{D}_T) ; F(x, t) \in C^4 [0, 1] \text{ pour tout } t \in [0, T]$$

$$(1) \quad F(0, t) = F(1, t), \quad F_x(0, t) = F_x(1, t), \quad F_{xx}(0, t) = F_{xx}(1, t).$$

$$(2) \quad F_n(t) \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$\text{où } \varphi_n = \int_0^1 \varphi(x) \sin(2\pi nx) dx, \quad F_n(t) = \int_0^1 F(x, t) \sin(2\pi nx) dx, \quad n = 1, 2, \dots;$$

Théorème 2.2.1 *Supposons que les hypothèses $(A_1) - (A_3)$ sont satisfaites. Alors les propriétés suivantes sont vraies.*

1. Le problème inverse (2) – (5) a une solution dans D_T .
2. La solution du problème inverse (2) – (5) est unique dans D_{T_0} , où le numéro T_0 ($0 < T_0 < T$) est déterminé par les données du problème .

Preuve. En appliquant la procédure standard de la méthode de Fourier, nous obtenons la représentation suivante pour la solution de (2) – (4) pour $a(t) \in [0, T]$.

Le problème donné par:

$$\begin{cases} u_t = a(t)u_{xx} + F(x, t), 0 < x < 1, 0 < t < T \\ u(0, t) = u(1, t), \quad u_x(0, t) = u_x(1, t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad (\text{I})$$

On recherche de la solution de problème (I):

La solution secret sous form

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n(t) \sin(\lambda x), \quad F(x, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} F_n(t) \sin(\lambda x)$$

La condition de frontière périodique:

$$u(0, t) = u(1, t)$$

Nous compenser on valeurs de $x = 0$ et $x = 1$ alors

$$\begin{cases} u(0, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n(t) \sin(\lambda \cdot 0) = 0 \\ u(1, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n(t) \sin(\lambda \cdot 1) \end{cases} \Rightarrow \sin(\lambda \cdot 1) = 0$$

Et il

$$\lambda = n\pi$$

Et

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) \quad \text{et} \quad u_x(x, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n(t) \lambda \cos(\lambda x)$$

Nous compenser les valeurs de $x = 0$ et $x = 1$ alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x(0, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n(t) \lambda \cos(\lambda \cdot 0) \\ u_x(1, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n(t) \lambda \cos(\lambda \cdot 1) \end{array} \right. \Rightarrow \cos(\lambda \cdot 1) = 1$$

Et il

$$\lambda = 2n\pi$$

Et il faut

$$\lambda = 2n\pi, \quad n = 1, 2, \dots;$$

Remplacé la formule de λ dans la solution suivante:

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n(t) \sin(2n\pi x), \quad F(x, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} F_n(t) \sin(2n\pi x) \quad (6)$$

On a

$$\varphi_n = \int_0^1 \varphi(x) \sin(2\pi n x) dx, \quad F_n(t) = \int_0^1 F(x, t) \sin(2\pi n x) dx, \quad n = 1, 2, \dots;$$

On recherche $u_n(t)$:

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n(t) \sin(2n\pi x)$$

Et il à partir de la solution nous concluons

$$u_t(x, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n'(t) \sin(2n\pi x), \quad u_{xx}(x, t) = -(2n\pi)^2 \sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n(t) \sin(2n\pi x)$$

Alors d'après (2) :

$$\sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n'(t) \sin(2n\pi x) = -(2n\pi)^2 a(t) \sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n(t) \sin(2n\pi x) + \sum_{n \geq 1}^{\infty} F_n(t) \sin(2n\pi x)$$

$$u_n'(t) = -(2n\pi)^2 a(t) u_n(t) + F_n(t) \quad (I1)$$

Alors (I1) est équation différentielle premier ordre non homogène.

On pose:

$$u_n(t) = y \Rightarrow y' = -(2n\pi)^2 a(t)y + F_n(t)$$

Utilise de gement de variable

$$g(t) = e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 a(s) ds} y$$

Donc

$$\begin{aligned} g'(t) &= (2n\pi)^2 a(t) e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 a(s) ds} y + y' e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 a(s) ds} \\ g'(t) &= ((2n\pi)^2 a(t)y + y') e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 a(s) ds} \end{aligned}$$

On a

$$F_n(t) = ((2n\pi)^2 a(t)y + y')$$

Remplacé $F_n(t)$

$$\begin{aligned} g'(t) &= F_n(t) e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 a(s) ds} \\ g(t) &= \int_0^t F_n(\tau) e^{\int_0^{\tau} (2n\pi)^2 a(s) ds} d\tau + C \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 a(s) ds} \cdot \int_0^t F_n(\tau) e^{\int_0^{\tau} (2n\pi)^2 a(s) ds + \int_t^{\tau} (2n\pi)^2 a(s) ds} d\tau + C e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 a(s) ds} \\ y(t) &= \int_0^t F_n(\tau) e^{\int_t^{\tau} (2n\pi)^2 a(s) ds} d\tau + C e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 a(s) ds} \end{aligned}$$

Alors

$$u_n(t) = \int_0^t F_n(\tau) e^{-\int_{\tau}^t (2n\pi)^2 a(s) ds} d\tau + C e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 a(s) ds} \quad (7)$$

On recherche la conctante C :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n(t) \sin(2n\pi x) \\ u(x, 0) &= \sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n(0) \sin(2n\pi x), u_n(0) = \int_0^1 u(x, 0) \sin(2n\pi x) \text{ on a } u(x, 0) = \varphi(x) \end{aligned}$$

On a

$$u_n(0) = \int_0^1 \varphi(x) \sin(2n\pi x) = \varphi_n$$

D'après (7)

$$u_n(0) = C = \varphi_n$$

Donc

$$u_n(t) = \int_0^t F_n(\tau) e^{-\int_{\tau}^t (2n\pi)^2 a(s) ds} d\tau + \varphi_n e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 a(s) ds} \quad (8)$$

Nous avons

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n(t) \sin(2n\pi x)$$

Après avoir trouvé la valeur de $u_n(t)$, nous trouvons une compensation dans la solution

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} \left[\int_0^t F_n(\tau) e^{-\int_{\tau}^t (2n\pi)^2 a(s) ds} d\tau + \varphi_n e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 a(s) ds} \right] \sin(2n\pi x) \quad (9)$$

■

Les suppositions $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$, $F(0, t) = F(1, t)$, et $F_x(0, t) = F_x(1, t)$ sont conformes pour la représentation de (2) de la solution $u(x, t)$ pour être valide. En outre, sous les hypothèses de régularité $\varphi(x) \in C^4 [0, 1]$; $F(x, t) \in C(\bar{D}_T)$ et $F(x, t) \in C^4 [0, 1]$ pour tout $t \in [0, T]$.

série (9) et la dérivées partielles de x convergent uniformément de dans \bar{D}_T puisque de majorant la sommes sont absolument convergentes. $u(x, t)$, $u_x(x, t)$ convergent de façon uniforme dans \bar{D}_T puisque de majorant la sommes sont absolument convergente. Donc, la sommes $u(x, t)$ et $u_x(x, t)$ sont continues dans \bar{D}_T .

En outre, le dérivée partielle de t et la série de dérivée partielle xx le deuxième ordre de la série dérivée partielle est convergent uniformément pour $0 < \varepsilon \leq t$ (le ε est un numéro positif arbitraire). Et ainsi de suite $u(x, t) \in C^{2,1}(D_T) \cap C^{1,0}(\bar{D}_T)$ et satisfait les conditions (2) – (4). En outre, $u_t(x, t)$ est continue dans \bar{D}_T parce que de majorant la somme de la séries de dérivé partielle t est absolument convergent dans la condition $\varphi''(0) = \varphi''(1)$ et $F_{xx}(0, t) = F_{xx}(1, t)$ dans \bar{D}_T

l'équation (9) peut être différencié dans la condition (A_1) on obtenir

$$\int_0^1 xu(x, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} u_n(t) \int_0^1 x \sin(2n\pi x) dx, \text{ on a } \int_0^1 x \sin(2n\pi x) dx = -\frac{1}{2n\pi}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 xu(x, t) = -\sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi} u_n(t) = E(t)$$

Et il

$$\int_0^1 xu_t(x, t) = E'(t) \quad (10)$$

Et cela donne

$$a(t) = p[a(t)] \quad (11)$$

On recherche $a(t)$:

$$u_t(x, t) = a(t)u_{xx}(x, t) + F(x, t)$$

On multiplie l'équation (2) par x

$$xu_t(x, t) = a(t)xu_{xx}(x, t) + xF(x, t)$$

Alors

$$\int_0^1 xu_t(x, t) = a(t) \int_0^1 xu_{xx}(x, t) + \int_0^1 xF(x, t)$$

On a

$$\int_0^1 xu_{xx}(x, t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} (2n\pi)u_n(t), \int_0^1 xF(x, t) = -\sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi} F_n(t)$$

Donc

$$E'(t) = a(t) \sum_{n \geq 1}^{\infty} (2n\pi)u_n(t) - \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi} F_n(t)$$

On conclure

$$a(t) = \frac{E'(t) + \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi} F_n(t)}{\sum_{n \geq 1}^{\infty} (2n\pi) u_n(t)}$$

De (11) on a

$$p[a(t)] = \frac{E'(t) + \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi} F_n(t)}{\sum_{n \geq 1}^{\infty} 2n\pi \left(\int_0^t F_n(\tau) e^{-\int_{\tau}^t (2n\pi)^2 a(s) ds} d\tau + \varphi_n e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 a(s) ds} \right)} \quad (12)$$

Dénot:

$$C_0 = \min_{t \in [0, T]} E'(t) + \min_{t \in [0, T]} \left(\sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi} F_n(t) \right)$$

$$C_1 = \max_{t \in [0, T]} E'(t) + \max_{t \in [0, T]} \left(\sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi} F_n(t) \right)$$

$$C_2 = \min_{t \in [0, T]} \left(\sum_{n \geq 1}^{\infty} (2n\pi) \left(\int_0^t F_n(\tau) e^{-\int_{\tau}^t (2n\pi)^2 a(s) ds} d\tau + \varphi_n e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 a(s) ds} \right) \right)$$

On recherche de min de C_2

On pose

$$h(t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} (2n\pi) \left(\int_0^t F_n(\tau) e^{-\int_{\tau}^t (2n\pi)^2 a(s) ds} d\tau + \varphi_n e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 a(s) ds} \right)$$

$$h'(t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} (2n\pi) \left(-(2n\pi)^2 a(t) \varphi_n e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 a(s) ds} + F_n(t) e^{-\int_{\tau}^t (2n\pi)^2 a(s) ds} \right)$$

Il est après que nous trouvons compenser $t = 0$

$$h'(0) = - \sum_{n \geq 1}^{\infty} (2n\pi) \left((2n\pi)^2 a(0) \varphi_n - F_n(0) e^{\int_0^\tau (2n\pi)^2 a(s) ds} \right)$$

On a

$$\begin{aligned} E(t) &= - \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi} u_n(t) = - \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi} \left(\int_0^t F_n(\tau) e^{-\int_\tau^t (2n\pi)^2 a(s) ds} d\tau + \varphi_n e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 a(s) ds} \right) \\ E'(t) &= - \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi} u'_n(t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} \left((2n\pi) a(t) \varphi_n e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 a(s) ds} - \frac{1}{2n\pi} F_n(t) e^{-\int_\tau^t (2n\pi)^2 a(s) ds} \right) \\ &\Rightarrow E'(0) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} \left((2n\pi) a(0) \varphi_n - \frac{1}{2n\pi} F_n(0) e^{\int_0^\tau (2n\pi)^2 a(s) ds} \right) \end{aligned}$$

Donc

$$E'(0) \leq h'(0) \Rightarrow \min h'(0) = E'(0)$$

On conséquence

$$C_2 = E'(0)$$

On recherche C_3

$$C_3 = \max_{t \in [0, T]} \sum_{n \geq 1}^{\infty} 2n\pi \left(\int_0^t F_n(\tau) e^{-\int_\tau^t (2n\pi)^2 a(s) ds} d\tau + \varphi_n e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 a(s) ds} \right)$$

On a

$$e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 a(s) ds} \leq 1 \text{ et } e^{-\int_\tau^t (2n\pi)^2 a(s) ds} \leq 1$$

Donc

$$\sum_{n \geq 1}^{\infty} 2n\pi \left(\int_0^t F_n(\tau) e^{-\int_\tau^t (2n\pi)^2 a(s) ds} d\tau + \varphi_n e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 a(s) ds} \right) \leq \sum_{n \geq 1}^{\infty} 2n\pi \left(\int_0^t F_n(\tau) d\tau + \varphi_n \right)$$

On a trouvé

$$C_3 = \sum_{n \geq 1}^{\infty} 2n\pi \left(\int_0^t F_n(\tau) d\tau + \varphi_n \right)$$

Donc

$$\begin{aligned} C_0 &= \min_{t \in [0, T]} E'(t) + \min_{t \in [0, T]} \left(\sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi} F_n(t) \right), \\ C_1 &= \max_{t \in [0, T]} E'(t) + \max_{t \in [0, T]} \left(\sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi} F_n(t) \right) \\ C_2 &= E'(0), \quad C_3 = \sum_{n \geq 1}^{\infty} 2n\pi \left(\int_0^t F_n(\tau) d\tau + \varphi_n \right) \end{aligned} \quad (13)$$

il facile de vérifier que $C_k > 0$ $k = 1, 2, 3, 4$ et $C_2 < C_3$

$$E'(0) < \sum_{n \geq 1}^{\infty} 2n\pi \left(\int_0^t F_n(\tau) e^{-\int_{\tau}^t (2n\pi)^2 a(s) ds} d\tau + \varphi_n e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 a(s) ds} \right)$$

En utilisant la représentation (11) l'estimation suivante est vraie

$$0 < \frac{C_0}{C_3} \leq a(t) \leq \frac{C_1}{C_2} \quad (14)$$

Présenter l'ensembl de M comme

$$M = \left\{ a(t) \in C[0, T] : \frac{C_0}{C_3} \leq a(t) \leq \frac{C_1}{C_2} \right\} \quad (15)$$

Il est facile de voir que:

$$P : M \rightarrow M$$

Montrer que l'opérateur P est compact.

Soit $M_1 \in M$ un ensemble borné arbitraire puisque $P(M_1) \subset M$, alors $P(M_1)$ est borné uniformément. En suit, nous avons pour $a(t) \in M_1$ et $t_1, t_2 \in [0, T]$

On pose

$$k(t) = E'(t) + \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi} F_n(t)$$

$$N(t) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} 2n\pi \left(\int_0^t F_n(\tau) e^{-\int_{\tau}^t (2n\pi)^2 a(s) ds} d\tau + \varphi_n e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 a(s) ds} \right)$$

Alors

$$\begin{aligned} |P(a(t_1)) - P(a(t_2))| &= \left| \frac{k(t_1)}{N(t_1)} - \frac{k(t_2)}{N(t_2)} \right| \\ &= \left| \frac{k(t_1)N(t_2) - k(t_2)N(t_1)}{N(t_1)N(t_2)} \right| \\ &= \left| \frac{k(t_1)N(t_2) - k(t_2)N(t_1) + k(t_1)N(t_1) - k(t_1)N(t_1)}{N(t_1)N(t_2)} \right| \end{aligned}$$

Alors

$$|P(a(t_1)) - P(a(t_2))| \leq \left| \frac{k(t_1) - k(t_2)}{N(t_2)} \right| + \left| \frac{k(t_1)(N(t_2) - N(t_1))}{N(t_1)N(t_2)} \right| \quad (16)$$

Théorème 2.2.2 (*d'accroissent fini*)

soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, il existe une constante $c \in [a, b]$ telle que:

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = f'(c)$$

alors on applique le théorème

$\exists t \in [t_1, t_2]$ telle que $f = e^{-(2n\pi)^2 \int_0^t a(s) ds}$

$$\left| \frac{e^{-(2n\pi)^2 \int_0^{t_1} a(s) ds} - e^{-(2n\pi)^2 \int_0^{t_2} a(s) ds}}{t_1 - t_2} \right| = -(2n\pi)^2 a(t) e^{-(2n\pi)^2 \int_0^t a(s) ds}$$

$$\left| e^{-(2n\pi)^2 \int_0^{t_1} a(s) ds} - e^{-(2n\pi)^2 \int_0^{t_2} a(s) ds} \right| = -(2n\pi)^2 a(t) |t_1 - t_2| e^{-(2n\pi)^2 \int_0^t a(s) ds}$$

$$\left| e^{-(2n\pi)^2 \int_0^{t_1} a(s) ds} - e^{-(2n\pi)^2 \int_0^{t_2} a(s) ds} \right| \leq (2n\pi)^2 |t_1 - t_2| \max_{t \in [0, T]} a(t)$$

on obtient

$$|N(t_1) - N(t_2)| \leq \left| \sum_{n \geq 1}^{\infty} 2n\pi \varphi_n \left(e^{\int_0^{t_1} - (2n\pi)^2 a(s) ds} - e^{\int_0^{t_2} - (2n\pi)^2 a(s) ds} \right) \right| \\ + \left| \sum_{n \geq 1}^{\infty} 2n\pi \left(\int_0^{t_1} F_n(\tau) e^{-\int_{\tau}^{t_1} (2n\pi)^2 a(s) ds} d\tau - \int_0^{t_2} F_n(\tau) e^{-\int_{\tau}^{t_2} (2n\pi)^2 a(s) ds} d\tau \right) \right|$$

on pose

$$A = \sum_{n \geq 1}^{\infty} 2n\pi \varphi_n \left(e^{\int_0^{t_1} - (2n\pi)^2 a(s) ds} - e^{\int_0^{t_2} - (2n\pi)^2 a(s) ds} \right)$$

donc

$$A \leq \sum_{n \geq 1}^{\infty} (2n\pi)^3 \varphi_n |t_1 - t_2| \max_{t \in [0, T]} a(t)$$

et

$$B = \sum_{n \geq 1}^{\infty} 2n\pi \left(\int_0^{t_1} F_n(\tau) e^{-\int_{\tau}^{t_1} (2n\pi)^2 a(s) ds} d\tau - \int_0^{t_2} F_n(\tau) e^{-\int_{\tau}^{t_2} (2n\pi)^2 a(s) ds} d\tau \right)$$

Nous trouvons B :

$$B = \sum_{n \geq 1}^{\infty} 2n\pi e^{-\int_{\tau}^0 (2n\pi)^2 a(s) ds} \int_0^T F_n(\tau) \left(e^{-\int_0^{t_1} (2n\pi)^2 a(s) ds} - e^{-\int_0^{t_2} (2n\pi)^2 a(s) ds} \right) d\tau \\ + \sum_{n \geq 1}^{\infty} 2n\pi e^{-\int_{\tau}^0 (2n\pi)^2 a(s) ds} \left(\int_T^{t_1} F_n(\tau) e^{-\int_0^{t_1} (2n\pi)^2 a(s) ds} d\tau - \int_T^{t_2} F_n(\tau) e^{-\int_0^{t_2} (2n\pi)^2 a(s) ds} d\tau \right)$$

Sens

$$B \leq \sum_{n \geq 1}^{\infty} (2n\pi)^3 |t_1 - t_2| \max_{t \in [0, T]} a(t) \int_0^T F_n(\tau) d\tau + \sum_{n \geq 1}^{\infty} 2n\pi |t_1 - t_2| \max F(t)_n$$

alors

$$|N(t_1) - N(t_2)| \leq \left[(C_4 + C_5) \frac{C_1}{C_2} + C_6 \right] |t_1 - t_2| \quad (17)$$

$$C_4 = \sum_{n \geq 1}^{\infty} (2n\pi)^3 \varphi_n, \quad C_5 = \int_0^T (2n\pi)^3 F_n(\tau) d\tau, \quad C_6 = \max_{t \in [0, T]} \left(\sum_{n \geq 1}^{\infty} 2n\pi F(t)_n \right)$$

À cette fin, prendre un arbitraire $\varepsilon > 0$

Comme $k(t)$ est continue dans $[0, T]$ puis $\exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon), \forall t_1, t_2 \in [0, T] (|t_1 - t_2| \leq \delta)$

$$|k(t) - k(t)| < \frac{C_2 \varepsilon}{2} \quad (18)$$

Laisser

$$\delta = \min \left\{ \delta_1(\varepsilon), \frac{C_2}{2((C_4 + C_5) C_1 + C_2 C_6) C_1} \varepsilon \right\}$$

La form (17) pour $|t_1 - t_2| \leq \delta$, nous obtenons:

$$|P(a(t_1)) - P(a(t_2))| < \varepsilon$$

Ainsi, l'ensemble $P(M_1)$ équicontinue. Alors $P(M_1)$ est un ensemble compact et la opérateur P est compact et cartes de l'ensemble M sur lui -même. En utilisant théorème point de fixed le schauder, nous avons une solution $a(t) \in [0, T]$ de l'equation (11) .

Maintenant, laissez nous montrons qu'il existe $D_{T_0}(0 < T_0 < T)$ et la solution (a, u) du problème (2) – (5) est unique dans D_{T_0} .

On supposons que (b, v) est également la couble de solution au problème de(2) – (5) Alors form de la représentation (9) et (11) de la solution nous avons:

$$\begin{aligned} u(x, t) - v(x, t) &= \sum_{n \geq 1}^{\infty} \varphi_n (e^{-(2\pi n)^2 \int_0^t a(s) ds} - e^{-(2\pi n)^2 \int_0^t b(s) ds}) \sin 2\pi n x \\ &+ \sum_{n \geq 1}^{\infty} \int_0^t F_n(\tau) (e^{-(2\pi n)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} - e^{-(2\pi n)^2 \int_{\tau}^t b(s) ds}) d\tau. \sin 2\pi n x \end{aligned}$$

$$a(t) - b(t) = P[a(t)] - P[b(t)]$$

Où

$$P[a(t)] - P[b(t)] = \frac{E'(t) + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n\pi} F_n(t)}{\sum_{n \geq 1} 2n\pi \left(\int_0^t F_n(\tau) e^{-\int_\tau^t (2n\pi)^2 a(s) ds} d\tau + \varphi_n e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 a(s) ds} \right)} \cdot \frac{E'(t) + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n\pi} F_n(t)}{\sum_{n \geq 1} 2n\pi \left(\int_0^t F_n(\tau) e^{-\int_\tau^t (2n\pi)^2 b(s) ds} d\tau + \varphi_n e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 b(s) ds} \right)}$$

L'estimation suivante est vraie après l'unification de tous, nous trouvons:

$$|P[a(t)] - P[b(t)]| \leq \frac{E'(t) + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n\pi} F_n(t)}{C_2^2} \cdot \left(\sum_{n \geq 1} 2n\pi \varphi_n \left| e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 a(s) ds} - e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 b(s) ds} \right| + \sum_{n \geq 1} 2n\pi \int_0^t F_n(\tau) \left| e^{-(2n\pi)^2 \int_\tau^t a(s) ds} - e^{-(2n\pi)^2 \int_\tau^t b(s) ds} \right| d\tau \right) \quad (19)$$

En utilisant les estimations

$$\left| e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 a(s) ds} - e^{\int_0^t -(2n\pi)^2 b(s) ds} \right| \leq (2n\pi)^2 T \max_{0 \leq t \leq T} |a(t) - b(t)| \quad (20)$$

$$\left| e^{\int_\tau^t -(2n\pi)^2 a(s) ds} - e^{\int_\tau^t -(2n\pi)^2 b(s) ds} \right| \leq (2n\pi)^2 T \max_{0 \leq t \leq T} |a(t) - b(t)|$$

On obtient

$$\max |P[a(t)] - P[b(t)]| \leq \alpha \max_{0 \leq t \leq T} |a(t) - b(t)| \quad (21)$$

On a

$$\max |P[a(t)] - P[b(t)]| \leq \frac{C_1(C_4 + C_5)}{C_2^2} T_0 \max_{0 \leq t \leq T} |a(t) - b(t)|$$

Soit $\alpha \in (0, 1)$ soit numéro fixe arbitraire. fixe un nombre T_0 , $0 < T_0 < T$, de telle sorte que

$$\frac{C_1(C_4 + C_5)}{C_2^2} T_0 < \alpha \quad (22)$$

En suit, de l'égalité (13) nous obtenons:

$$\|a - b\|_{C[0, T_0]} \leq \alpha \|a - b\|_{C[0, T_0]} \quad (23)$$

Ceci implique $a = b$ par substitute $a = b$ in (12), nous avons $u = v$.

2.3 Méthode Numérique

Nous utilisons la méthode de différence finie avec un prophète correcteur approche de tayp, c'est suggéré dans[2]. Appliquez cette méthode au problème (2) – (5).

$$\begin{cases} u_t = a(t)u_{xx} + F(x, t), 0 < x < 1, 0 < t < T \\ u(0, t) = u(1, t), u_x(0, t) = u_x(1, t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

Le schéme donne

$$\mathbf{1.} \quad u(x + h, t) = u(x, t) + hu_x + \frac{h^2}{2}u_{xx}$$

$$\mathbf{2.} \quad u(x - h, t) = u(x, t) - hu_x + \frac{h^2}{2}u_{xx}$$

$$\mathbf{1 + 2} \Rightarrow u_{xx} = \frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{h^2}$$

$$\mathbf{3.} \quad u(x, t + \tau) = u(x, t) + \tau u_t$$

$$\mathbf{4.} \quad u(x, t - \tau) = u(x, t) - \tau u_t$$

I) Schéme centere

$$\mathbf{3 - 4} \Rightarrow u_t = \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t - \tau)}{2\tau}$$

II) Schéma à droit

$$\mathbf{3} \Rightarrow u_t = \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau}$$

III) Schéma à gauche

$$\mathbf{4} \Rightarrow u_t = \frac{u(x, t) - u(x, t - \tau)}{\tau}$$

On not

$$u(x_i, t_j) = u_i^j, \quad F(x_i, t_j) = F_i^j, \quad \varphi(x_i) = \varphi_i, \quad a(t_j) = a^j$$

Il'existe trois schéme

1. Schémé explicite

Appliquer cette problème (2)

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} &= a^j \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + F_i^j \\ \Rightarrow \frac{1}{\tau} (u_i^{j+1} - u_i^j) &= \frac{a^j}{h^2} (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) + F_i^j \end{aligned}$$

2. Schéme implicté ($j = j + 1$ pour la drivé de x),

$$\frac{1}{\tau} (u_i^{j+1} - u_i^j) = \frac{a^{j+1}}{h^2} (u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}) + F_i^{j+1}$$

3. Schéme Crank-Nicolson

donne par: (explicite+implicté)/2 alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} (u_i^{j+1} - u_i^j) &= \frac{1}{2} (a^{j+1} + a^j) \frac{1}{2h^2} \\ &\times [(u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j) + (u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1})] \\ &+ \frac{1}{2} (F_i^{j+1} + F_i^j) \end{aligned}$$

2.3.1 Utilise de schéma Crank-Nicolson sur problème (2) – (5)

Nous subdivisons les intervalles $[0, 1]$ et $[0, T]$ en N_x et N_t sous intervalles des longueurs égales $h = \frac{1}{N_x}$, et $\tau = \frac{T}{N_t}$, respectivement. alors nous ajoutons deux lignes $x = 0$ et $x = (N_x + 1)h$ produire les points factices nécessaires pour avoir affaire avec la deuxième condition de frontière.

Nous choisissons l'arrangement d'original de Crank-Nicolson, qui est absolument stable et a un deuxième ordre exactitu dans tous les deux h et τ [15]. Le schéma Crank-Nicolson pour (2) – (5) est comme suit

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} (u_i^{j+1} - u_i^j) &= \frac{1}{2} (a^{j+1} + a^j) \frac{1}{2h^2} \\ &\times [(u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j) + (u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1})] \\ &+ \frac{1}{2} (F_i^{j+1} + F_i^j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_i^0 &= \varphi_i \\ u_0^j &= u_{N_x} \\ u_1^j &= u_{N_x+1} \end{aligned} \tag{24}$$

Où $1 \leq i \leq N_x$ et $0 \leq j \leq N_t$ sont les indices pour de étapes spatial et des pas étapes de temps, respectivement $u(x_i, t_j) = u_i^j$, $F(x_i, t_j) = F_i^j$, $\varphi(x_i) = \varphi_i$, $a(t_j) = a^j$ et $x_i = ih, t_j = j\tau$ au niveau $t = 0$, l'ajustement devrait être fait selon la condition initiale et les exigences de compatibilité.

Équations linéaires de système du forma $N_x \times N_x$ de l'équation (21)

$$AU^{j+1} = b, \tag{25}$$

Où

$$U^j = (u^j, u^j, \dots, u_{N_x}^j)^{tr}, \quad 0 \leq j \leq N_t,$$

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_{N_x})^{tr},$$

$$A = \begin{bmatrix} -2(1+R) & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & -2(1+R) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2(1+R) & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \\ & & & & 0 & 1 & -2(1+R) & 1 \\ 1 & & & & 0 & 1 & -2(1+R) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} R &= \frac{2h^2}{\tau(a^{j+1} + a^j)}, j = 0, 1, \dots, N_t & (26) \\ b_1 &= 2(1-R)u_1^j - u_2^j - u_{N_x}^j - R\tau(F_1^{j+1} + F_1^j), j = 0, 1, \dots, N_t \\ b_{N_x} &= -u_{N_x-1}^j + 2(1-R)u_{N_x}^j - u_1^j - R\tau(F_{N_x}^{j+1} + F_{N_x}^j), j = 0, 1, \dots, N_t \\ b_i &= -u_{i-1}^j + 2(1-R)u_i^j - u_{i+1}^j - R\tau(F_i^{j+1} + F_i^j), i = 2, 3, \dots, N_x - 1, j = 0, 1, \dots, N_t \end{aligned}$$

Maintenant, construisons le mécanisme corrigeant le prévision.

D'abord, multiplication (2) près x de 0 à 1 et en utilisant (4) et (5), nous obtenons:

$$a(t) = \frac{E'(t) - \int_0^1 xF(x, t)dx}{u_x(1, t)}. \quad (27)$$

L'approximation de différence finie de (27) est:

$$a^j = \frac{\left[\left((E^{j+1} - E^j) / \tau - (Fin)^j \right) \right] h}{u_{N_x+1}^j - u_{N_x}^j}, \quad (28)$$

Où $E^j = E(t_j)$, $(Fin)^j = \int_0^1 xF(x, t)dx$, $j = 0, 1, \dots, N_t$ pour $j = 0$,

$$a^0 = \frac{\left[\left((E^1 - E^0) / \tau - (Fin)^0 \right) \right] h}{\varphi_{N_x+1} - \varphi_{N_x}} \quad (29)$$

Et les valeurs de φ_i nous aident à commencer notre calcul. Dénotez les valeurs de a^j , u_i^j à l'étape d'itération de $a^{j(s)}$, $u^{j(s)}$, respectivement. Dans le calcul numérique, puisque le pas l'étape de temps est très petit, nous pouvons prendre $a^{j+1(0)} = a^j$, $u_i^{j+1(0)} = u_i^j$,

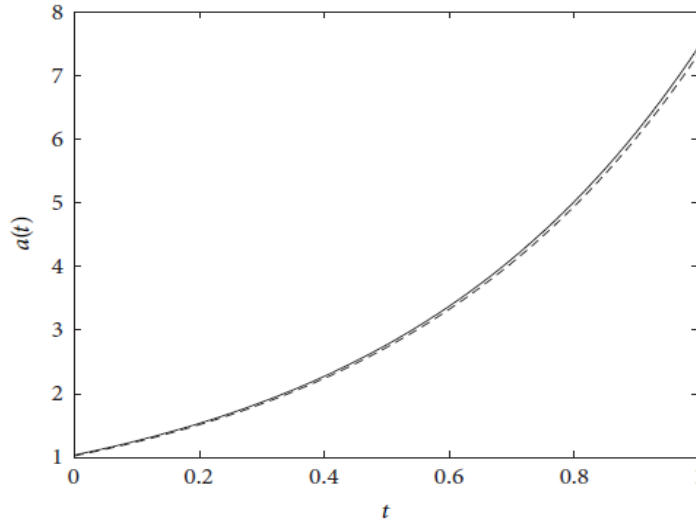
$j = 0, 1, \dots, N_t, i = 2, 3, \dots, N_x$ à chaque $(s + 1)$ pas(étape) itératif, nous déterminons d'abord $a^{j+1(s+1)}$ de la formule

$$a^{j+1(s+1)} = \frac{\left[\left((E^{j+2} - E^{j+1}) / \tau - (Fin)^{j+1} \right) \right] h}{u_{N_x+1}^{j+1(s)} - u_{N_x}^{j+1(s)}} \quad (30)$$

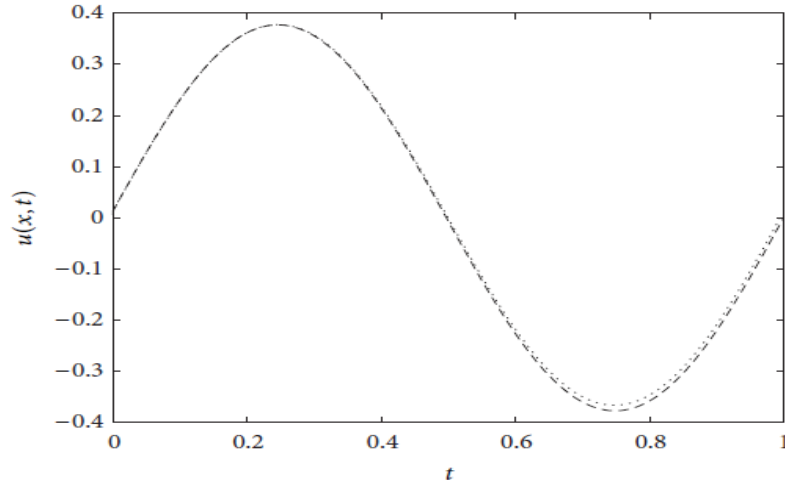
Alors à partir (24) de nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \left(u_i^{j+1(s+1)} - u_i^{j+1(s)} \right) &= \frac{1}{4h^2} (a^{j+1(s+1)} + a^{j+1(s)}) j \\ &\times \left[\begin{aligned} &\left(u_{i-1}^{j+1(s+1)} - 2u_i^{j+1(s+1)} + u_{i+1}^{j+1(s+1)} \right) \\ &+ \left(u_{i-1}^{j+1(s)} - 2u_i^{j+1(s)} + u_{i+1}^{j+1(s)} \right) \end{aligned} \right] \\ &+ \frac{1}{2} (F_i^{j+1} + F_i^j) \end{aligned}$$

$$u_0^{j+1(s)} = u_{N_x}^{j+1(s)}, u_1^{j+1(s)} = u_{N_x+1}^{j+1(s)}, s = 0, 1, 2, \dots$$



Les solutions analytiques et numériques de $a(t)$ quand $T = 1$
 .La solution analytique est montrée avec la ligne tirée.



Les solutions analytiques et numériques de $u(x, t)$ quand $T = 1$
 .La solution analytique est montrée avec la ligne tirée.

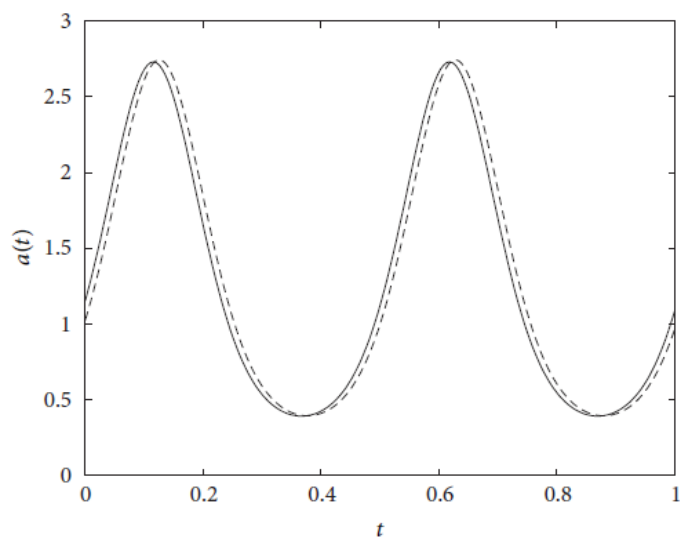
Le système de (34) peut être résolu par l'élimination de Gauss la méthode et $u_i^{j+1(s+1)}$ est déterminée. Si la différence des valeurs entre deux itérations atteint la tolérance prescrite, l'itération est arrêtée et nous acceptons les valeurs correspondantes $a^{j+1(s+1)}$, $u_i^{j+1(s+1)}$ ($i = 1, 2, \dots, N_x$) as a^{j+1} , u_i^{j+1}

($i = 1, 2, \dots, N_x$) sur ($j + 1$) pas étape de temps, respectivement. En vertu de cette itération, nous pouvons nous déplacer du niveau j au niveau $j + 1$.

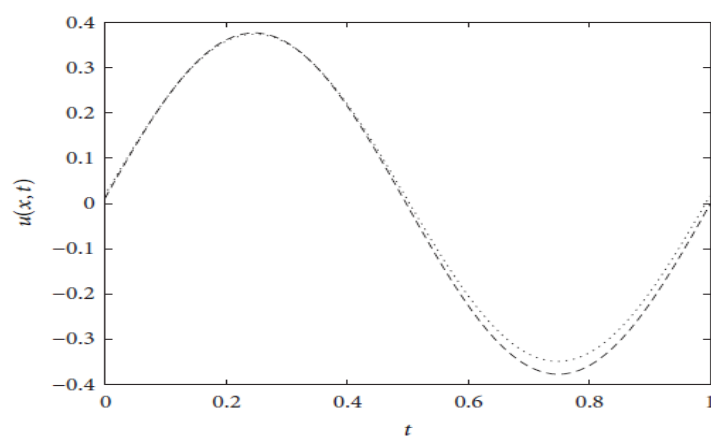
2.4 Exemples et discussions numériques

Exemple 2.4.1 Considérer le problème inverse(2) – (5), avec

$$\begin{aligned}
 F(x, t) &= (2\pi)^2 \sin(2\pi x) \exp(t) & (31) \\
 \varphi(x) &= \sin(2\pi x), \\
 E(t) &= -\frac{1}{2\pi} \exp(-t) \\
 x &\in [0, 1], t \in [0, T]
 \end{aligned}$$



Les solutions analytiques et numériques de $a(t)$ quand $T = 1$. La solution analytique est montrée avec la ligne tirée.



Les solutions analytiques et numériques de $u(x, t)$ quand $T = 1$. La solution analytique est montrée avec la ligne tirée.

Chapitre 3

Problème mixte avec conditions intégraux pour une certaine classe des équations hyperbolique

3.1 Introduction

Le papier le présent est consacré à la preuve d'existence et l'unicité d'une solution généralisée pour un problème mixte avec des conditions intégrales s'est rapporté à une certaine classe de second ordre dans une équation hyperbolique structure bidimensionnelle. C'est-à-dire, nous considérons le problème de recherche dans une fonction $u = u(x, t)$, solution du problème

$$lu = u_{tt} - a(t) \Delta u = f(x, t), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad t \in [0, T] \quad (1.1)$$

Où $\Omega_i = (0, a) \times (0, b_i)$ et $b_i, T, i = 1, 2$, Connaissent constants et $a(t)$ est Une fonction donnée satisfaisant les conditions

$$c_0 \leq a(t) \leq c_1, \quad a'(t) \leq c_2 \quad (1.2)$$

Où $c_i, i = 0, 1, 2$, sont constantes positives .

Pour(1.1), nous associons les conditions initiales

$$\ell_1 u = u(x, 0) = \varphi(x), \quad \ell_2 u = u_t(x, 0) = \beta(x), \quad x \in \Omega \quad (1.3)$$

Et les conditions intégrales

$$\int_0^{b_i} x_i^k u(x, t) dx_i = 0, \quad i = 1, 2; k = 0, 1, \quad (1.4)$$

Où f , les fonctions φ, β donnent aux fonctions tel que $f \in C(\bar{Q})$ et $\varphi, \beta \in C^1(\bar{\Omega})$.

Les données satisfont les conditions de consistance

$$\int_0^{b_i} x_i^k \varphi(x) dx_i = \int_0^{b_i} x_i^k \beta(x) dx_i = 0, \quad i = 1, 2; k = 0, 1. \quad (1.5)$$

Les résultats concernant problèmes avec conditions intégrales relaté à équations paraboliques unidimensionnelles devez latter [23], Cannon [18, 19], Cannon et van der hoek [21, 22], Cannon et al. [20], Kamynine[24], Ionkin [23], Yurchuk [17], et Benouar Yurchuk [13], Muravey-Philinovskii [25], Shi [26], Bouziani [14, 15], et Bouziani et Benouar [27]. Pour problèmes liés à unidimensionnelle équations hyperboliques, nous avons le résultat de Bouziani [26], dans lequel un Neumann et une condition intégrale sont combinés

On peut considérer le papier présent comme une extension de Bouziani [26] Dans la façon que les conditions sont purement intégrales et l'équation considérée est une bidimensionnelle. Nous écrivons d'abord le problème posé en sa forme opérationnelle $Lu = F$, où l'opérateur L est considéré de l'espace de Banach E dans l'espace de Hilbert F , qui est commodément choisi, alors nous établissons une inégalité d'énergie pour l'opérateur L , et d'étendre l'estimation obtenue à la fermeture \bar{L} , de l'opérateur L . Enfin, nous démontrons la densité de la gamme $R(L)$ de l'opérateur L dans l'espace F .

3.2 l'inégalité de l'énergie et ses conséquences

Le problème (1.1), (1.3) et (1.4) peut considérer comme la résolution de l'équation d'opérateur

$$Lu = F \quad (2.1)$$

Où $L = (l, \ell_1, \ell_2)$, $F = (f, \varphi, \beta)$ et L est un opérateur défini sur E dans F , où E est l'espace de Banach des fonctions $\partial_{x_1, x_2} u \in L^2(Q)$, ayant de la norme finie

$$\|u\|_E^2 = \sup_{0 \leq \tau \leq 0} \int_0^{x_1} ((\partial_{x_1} u(\cdot, \cdot, \tau))^2 + (\partial_{x_2} u(\cdot, \cdot, \tau))^2 + (\partial_{x_1 x_2} u_t(\cdot, \cdot, \tau))^2) dx_1 dx_2 \quad (2.2)$$

Avec $\partial_{x_1} u = \int_0^{x_1} u(\xi, x_2, t) d\xi$, $\partial_{x_1 x_2} u = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} u(\xi, \eta, t) d\xi d\eta$, et F est l'espace de Hilbert équipé du Produit scalaire

$$\begin{aligned} ((lu, \ell_1 u, \ell_2 u), (f, \varphi, \beta))_F &= \int_Q \partial_{x_1 x_2} (lu) \cdot \partial_{x_1 x_2} f dx dt + \int_{\Omega} \partial_{x_1} \ell_1 u \cdot \partial_{x_1} \varphi dx \\ &+ \int_{\Omega} \partial_{x_2} \ell_1 u \cdot \partial_{x_2} \varphi dx + \int_{\Omega} \partial_{x_1 x_2} \ell_2 u \cdot \partial_{x_1 x_2} \beta dx, \end{aligned} \quad (2.3)$$

et la norme associée

$$\|Lu\|_F^2 = \int_Q (\partial_{x_1 x_2} (lu))^2 dx dt + \int_{\Omega} (\partial_{x_1} \ell_1 u)^2 + (\partial_{x_2} \ell_1 u)^2 + (\partial_{x_1 x_2} \ell_2 u)^2 dx. \quad (2.4)$$

Le domaine de définition $D(L)$ de l'opérateur L est l'ensemble des fonctions $\partial_{x_1 x_2} u \in L^2(Q)$ tel que $\partial_{x_1 x_2} u_t$, $\partial_{x_1 x_2} u_{x_1 x_1}$, $\partial_{x_1 x_2} u_{x_2 x_2} \in L^2(Q)$ et les conditions (1.4) sont remplies.

Théorème 3.2.1 *Si $a(t)$ satisfait des conditions (1.2), alors pour toutes les fonctions $u \in D(L)$, nous avons l'estimation a priori*

$$\|u\|_E \leq c \|Lu\|_F \quad (2.5)$$

Où c est une constante positive indépendante de la solution u .

Preuve. Nous considérons le produit scalaire dans $L^2(Q^\tau)$ de (1.1) et l'opérateur différentiel integro

$$Mu = \partial_{x_1 x_2}^2 u_t = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_2} u_t(\eta_1, \eta_2, t) d\eta_2 d\eta_1 d\xi_2 d\xi_1, \quad (2.6)$$

où $Q^\tau = \Omega \times (0, \tau)$ et $\tau \in (0, T)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \int_{Q^\tau} u_{tt} \cdot \partial_{x_1 x_2}^2 u_t dx dt \\
 & - \int_{Q^\tau} a(t) u_{x_1 x_1} \cdot \partial_{x_1 x_2}^2 u_t dx dt - \int_{Q^\tau} a(t) u_{x_2 x_2} \cdot \partial_{x_1 x_2}^2 u_t dx dt \\
 & = \int_{Q^\tau} f \cdot \partial_{x_1 x_2}^2 u_t dx dt.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Nous considérons séparément l'intégrales de l'égalité (2.7). intégration par parties et prenant en compte conditions (1.3) et (1.4), Nous arrivons:

$$\int_{Q^\tau} u_{tt} \cdot \partial_{x_1 x_2}^2 u_t dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_{x_1 x_2}^2 u_t(\xi_1, \xi_2, \tau))^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_{x_1 x_2} \beta)^2 dx, \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
 - \int_{Q^\tau} a(t) u_{x_1 x_1} \cdot \partial_{x_1 x_2}^2 u_t dx dt & = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(\tau) (\partial_{x_2} u(x_1, \xi_2, \tau))^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(0) (\partial_{x_2} \varphi)^2 dx \\
 & - \frac{1}{2} \int_{Q^\tau} a'(t) (\partial_{x_2} u)^2 dx dt,
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
 - \int_{Q^\tau} a(t) u_{x_2 x_2} \cdot \partial_{x_1 x_2}^2 u_t dx dt & = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(\tau) (\partial_{x_1} u(\xi_1, x_2, \tau))^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(0) (\partial_{x_1} \varphi)^2 dx \\
 & - \frac{1}{2} \int_{Q^\tau} a'(t) (\partial_{x_1} u)^2 dx dt,
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\int_{Q^\tau} f \cdot \partial_{x_1 x_2}^2 u_t dx dt = \int_{Q^\tau} \partial_{x_1 x_2} f \cdot \partial_{x_1 x_2} u_t dx dt \tag{2.11}$$

La substitution de (2.8)(2.9)(2.10) à (2.11)(2.7) produit

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (\partial_{x_1 x_2} u_t(\xi_1, \xi_2, \tau))^2 dx + \int_{\Omega} a(\tau) (\partial_{x_2} u(x_1, \xi_2, \tau))^2 dx \\
 & + \int_{\Omega} a(\tau) (\partial_{x_1} u(\xi_1, x_2, \tau))^2 dx \\
 & = 2 \int_{Q^\tau} \partial_{x_1 x_2} f \cdot \partial_{x_1 x_2} u_t dx dt + \int_{\Omega} a(0) (\partial_{x_1} \varphi)^2 dx + \int_{\Omega} a(0) (\partial_{x_2} \varphi)^2 dx \\
 & + \int_{\Omega} (\partial_{x_1 x_2} \beta)^2 dx + \int_{Q^\tau} a'(t) (\partial_{x_1} u)^2 dx dt + \int_{Q^\tau} a'(t) (\partial_{x_2} u)^2 dx dt.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Utilisation de l'inégalité Cauchy et prenant en compte conditions (1.2), il qui suit

$$\begin{aligned} & \|\partial_{x_1} u(\xi_1, x_2, \tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_{x_1} u(x_1, \xi_2, \tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_{x_1 x_2} u_t(\xi_1, \xi_2, \tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.13) \\ \leq & c_3 \left(\|\partial_{x_1 x_2} f\|_{L^2(Q)}^2 + \|\partial_{x_1} \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_{x_2} \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_{x_1 x_2} \beta\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ & + c_4 \int_0^\tau \left(\|\partial_{x_1} u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_{x_2} u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_{x_1 x_2} u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt \end{aligned}$$

Où

$$c_3 = \max \frac{(1, c_1)}{c_0} \quad , \quad c_4 = \max \frac{(1, c_2)}{c_0} \quad (2.14)$$

En appliquant le lemme de Gronwall [15] à l'inégalité (2.13), Nous arrivons

$$\begin{aligned} & \|\partial_{x_1} u(\xi_1, x_2, \tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_{x_2} u(x_1, \xi_2, \tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_{x_1 x_2} u_t(\xi_1, \xi_2, \tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.15) \\ \leq & c_3 e^{c_4 T} \left(\|\partial_{x_1 x_2} f\|_{L^2(Q)}^2 + \|\partial_{x_1} \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_{x_2} \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_{x_1 x_2} \beta\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \end{aligned}$$

Depuis le droit côté de (2.15) ne dépend pas de τ , alros en prenant

Le supremum en ce qui concerne T sur l'intervalle $[0, T]$, nous obtenons l'inégalité désirée (2.5), avec $c = c_3/2 \exp(c_4 T/2)$. Ceci complète la preuve de Théorème 2.5. ■

Proposition 3.2.1 *L'opérateur $L : E \rightarrow F$ peut être fermée.*

Preuve. La preuve de cette proposition est analogue pour faire des propositions 3.1 dans [15]. ■

Soit \bar{L} la fermeture de l'opérateur L et $D(\bar{L})$ son domaine de définition.

Définition 3.2.1 *La solution de l'équation*

$$\bar{L}u = F \quad (2.16)$$

Est appelé la forte solution de problème (1.1), (1.3) et (1.4).

Nous étendons l'inégalité (2.5) à l'ensemble des solutions $u \in D(\bar{L})$ en passant à la limite et établissons ainsi l'unicité d'une solution et fait d'être fermé de la gamme $R(\bar{L})$ de l'opérateur L dans l'espace F .

3.3 Solvabilité du problème

Théorème 3.3.1 *Si conditions (1.2) sont satisfaits, alors pour tout $F = (f, \varphi, \beta) \in F$, il existe une solution forte unique $u = \bar{L}^{-1}F = \overline{L^{-1}}F$ de problème (1.1), (1.3) et(1.4).*

Preuve. Prouver ce problème (1.1), (1.3) et (1.4) a une solution forte unique pour tout $F \in F$, il suffit pour le prouver $R(L)$ est dense dans F . Pour ceci nous avons besoin de la proposition suivante. ■

Proposition 3.3.1 *Si conditions (1.2) sont satisfaites, et si pour $\partial_{x_1x_2}w \in L^2(Q)$,*

$$\int_Q \partial_{x_1x_2}(lu) \cdot \partial_{x_1x_2}w dxdt = 0 \quad (3.1)$$

Pour toutes les fonctions $u \in D_0(L) = \{u/u \in D(L), \ell_1u = \ell_2u = 0\}$, alors $\partial_{x_1x_2}w = 0$ presque partout dans Q .

Utiliser le fait cette relation (3.1) est donnée pour tout $u \in D_0(L)$, nous pouvons exprimer en forme particulière.

Laissez u être définie comme:

$$u = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq s \\ \int_s^t (t - \tau)u_{\tau\tau}d\tau, & s \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.2)$$

Et laissé u_{tt} la solution de l'équation:

$$a(t)\partial_{x_1x_2}u_{tt} = \int_t^T \partial_{x_1x_2}w d\tau \quad (3.3)$$

Nous avons maintenant

$$\partial_{x_1x_2}w = -(a(t)\partial_{x_1x_2}u_{tt})_t \quad (3.4)$$

continuer la preuve de la proposition, nous avons besoin de lemme suivant.

Lemme 3.3.1 *Si conditions (1.2) sont satisfaites, alors la fonction u définie par relations (3.2) et (3.3) possède des dérivées en ce que concerne t jusqu'au troisième ordre appartenant à $L^2(Q)$.*

La preuve de ce lemme est analogue à celui de [31, Lemme 4.1].

Nous prouvons maintenant la proposition. Remplacement $\partial_{x_1x_2}w$ en (3.1), par sa représentation (3.4), nous avons

$$-\int_Q \partial_{x_1x_2}u_{tt}(a(t)\partial_{x_1x_2}u_{tt})_t dxdt + \int_Q \partial_{x_1x_2}u_{x_1x_1}(a(t)\partial_{x_1x_2}u_{tt})_t dxdt + \int_Q \partial_{x_1x_2}u_{x_2x_2}(a(t)\partial_{x_1x_2}u_{tt})_t dxdt = 0 \quad (3.5)$$

Nous écrivons les termes de (3.5) en forme:

$$\begin{aligned} & -\int_Q \partial_{x_1x_2}u_{tt}(a(t)\partial_{x_1x_2}u_{tt})_t dxdt \quad (3.6) \\ & = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(s)(\partial_{x_1x_2}u_{tt}(x, s))^2 dx - \int_{Q_s} a'(t)(\partial_{x_1x_2}u_{tt})^2 dxdt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_Q \partial_{x_1x_2}u_{x_1x_1}(a(t)\partial_{x_1x_2}u_{tt})_t dxdt \quad (3.7) \\ & = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(T)(\partial_{x_2}u_t(x, T))^2 dx - \frac{1}{2} \int_{Q^s} a'(t)(\partial_{x_2}u_t)^2 dxdt \\ & \quad - \int_{Q^s} a'(t)\partial_{x_2}u\partial_{x_2}u_{tt} dxdt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_Q \partial_{x_1x_2}u_{x_2x_2}(a(t)\partial_{x_1x_2}u_{tt})_t dxdt \quad (3.8) \\ & = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(T)(\partial_{x_1}u_t(x, T))^2 dx - \frac{1}{2} \int_{Q_s} a'(t)(\partial_{x_1}u_t)^2 dxdt \\ & \quad - \int_{Q_s} a'(t)\partial_{x_1}u\partial_{x_1}u_{tt} dxdt. \end{aligned}$$

Conditions d'union (3.5), (3.6), (3.7) et (3.8) et conditions utilisantes (1.2), Nous obtenons l'inégalité

$$\begin{aligned} & \|\partial_{x_1 x_2} u_{tt}(x, s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_{x_1} u_t(x, T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_{x_2} u_t(x, T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq c_5 \left\{ \|\partial_{x_1 x_2} u_{tt}\|_{L^2(Q_s)}^2 + \|\partial_{x_1} u_t\|_{L^2(Q_s)}^2 + \|\partial_{x_2} u_t\|_{L^2(Q_s)}^2 + \|\partial_{x_1} u\|_{L^2(Q_s)}^2 + \|\partial_{x_2} u\|_{L^2(Q_s)}^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Où

$$c_5 = \max \frac{c_0}{2} \left(\frac{c_2}{2} + \frac{c_2^2}{2}, 1 \right). \quad (3.10)$$

Utilisant maintenant l'inégalité Friedrichs [28], exprimer les normes $\partial_{x_1} u$ et $\partial_{x_2} u$, en termes des normes de $\partial_{x_1} u_t$ et $\partial_{x_2} u_t$, respectivement, alors il suit

De (3, 9) cela

$$\begin{aligned} & \|\partial_{x_1 x_2} u_{tt}(x, s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_{x_1} u_t(x, T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_{x_2} u_t(x, T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq c_6 \left\{ \|\partial_{x_1 x_2} u_{tt}\|_{L^2(Q_s)}^2 + \|\partial_{x_1} u_t\|_{L^2(Q_s)}^2 + \|\partial_{x_2} u_t\|_{L^2(Q_s)}^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Continuer, nous présentons la nouvelle fonction θ définie par

$$\theta(x, t) = \int_t^T u_{\tau\tau} d\tau \quad (3.12)$$

Alors

$$u_t(x, t) = \theta(x, s) - \theta(x, t), \quad u_t(x, T) = \theta(x, s) \quad (3.13)$$

D'où

$$\begin{aligned} & (1 - 2c_6(T - s)) \left(\|\partial_{x_1} \theta(x, s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_{x_2} \theta(x, s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_{x_1 x_2} u_{tt}(x, s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ & \leq 2c_6 \left\{ \|\partial_{x_1 x_2} u_{tt}(x, s)\|_{L^2(Q_s)}^2 + \|\partial_{x_1} \theta\|_{L^2(Q_s)}^2 + \|\partial_{x_2} \theta(x, s)\|_{L^2(Q_s)}^2 \right\}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

Par conséquent, si $s_0 > 0$ satisfait

$$(1 - 2c_6(T - s)) = \frac{1}{2}, \quad (3.15)$$

Alors (3.14) implique

$$\begin{aligned} & \left(\|\partial_{x_1}\theta(x, s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_{x_2}\theta(x, s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_{x_1x_2}u_{tt}(x, s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ & \leq 2c_6 \left\{ \|\partial_{x_1x_2}u_{tt}(x, s)\|_{L^2(Q_s)}^2 + \|\partial_{x_1}\theta\|_{L^2(Q_s)}^2 + \|\partial_{x_2}\theta(x, s)\|_{L^2(Q_s)}^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

pour tout $s \in [T - s_0, T]$

Si nous dénotons la somme de termes impliquant des normes sur le côté droit (3, 16) par $y(s)$, nous obtenons

$$-\frac{dy(s)}{ds} \leq 4c_6y(s). \quad (3.17)$$

Intégration (3.17) plus (s, T) et étant donné que $y(T) = 0$, nous obtenons

$$y(s)e^{4c_6s} \leq 0 \quad (3.18)$$

Il suit alors (3.18) qui $\partial_{x_1x_2}w = 0$ Presque partout dans Q_{T-s_0} .

Manière d'agir de cette façon pas à pas, nous le prouvons que $\partial_{x_1x_2}w = 0$ dans Q .

Pour conclure, nous prouvons le théorème 3.1. Nous devrions prouver la validité de l'égalité $\overline{R(L)} = F$.

Depuis F est un espace de Hilbert, $\overline{R(L)} = F$ maintient, si

$$\begin{aligned} (Lu, W)_F &= \int_Q \partial_{x_1x_2}(lu) \cdot \partial_{x_1x_2}w dx dt + \int_{\Omega} \partial_{x_1}\ell_1u \cdot \partial_{x_1}w_0 dx \\ &+ \int_{\Omega} \partial_{x_2}\ell_1u \cdot \partial_{x_2}w_0 dx + \int_{\Omega} \partial_{x_1x_2}\ell_2u \cdot \partial_{x_1x_2}w_1 dx. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Il s'ensuit que $w = 0$, $w_0 = 0$ et $w_1 = 0$, presque partout dans Q , où $W = (w, w_0, w_1) \in R(L)^\perp$.

Mettre $u \in D_0(L)$ en (3.19), nous obtenons

$$\int_Q \partial_{x_1 x_2} (lu) \cdot \partial_{x_1 x_2} w dx dt = 0. \quad (3.20)$$

D'où, la proposition 3.2 implique que $w = 0$. Ainsi (3.19) prend la forme

$$\int_{\Omega} \partial_{x_1} \ell_1 u \cdot \partial_{x_1} w_0 dx + \int_{\Omega} \partial_{x_2} \ell_1 u \cdot \partial_{x_2} w_0 dx + \int_{\Omega} \partial_{x_1 x_2} \ell_2 u \cdot \partial_{x_1 x_2} w_1 dx = 0, \quad \forall u \in D_0(L) \quad (3.21)$$

Depuis les ensembles $\ell_1 u$ et $\ell_2 u$ sont indépendantes et les gammes des opérateurs trace ℓ_1 Et ℓ_2 Sont partout dense dans les espaces de Hilbert ayant les normes $(\int_{\Omega} ((\partial_{x_1} w_0)^2 + (\partial_{x_2} w_0)^2) dx)^{\frac{1}{2}}$ et $(\int_{\Omega} (\partial_{x_1 x_2} w_1)^2 dx)^{\frac{1}{2}}$ respectivement, puis $w_0 = 0$, $w_1 = 0$, presque partout dans Ω . Ceci complète la preuve de Théorème 3.1.

Conclusion générale.

Dans ce mémoire on a établi des résultats de l'existence et l'unicité associés à étude analytique et numérique de deux problèmes inverses

- Dans la première partie du mémoire, Le problème inverse quant simultanément identification de diffusivité thermique dépendant de temps et la distribution de température dans unidimensionnelle équation de chaleur avec frontière périodique et surdétermination intégrale on a considéré des conditions .Ce problème inverse a été étudié des points de vue tant théoriques et numériques .Dans la partie théorique du papier, les conditions pour l'existence, unicité, et dépendance continue aux données du problème ont été établi. Dans la partie numérique, la sensibilité de Crank-Nicolson arrangement de différence finie combiné avec une méthode itération avec les exemples a été illustrés.
- Dans la deuxième partie de ce mémoire nous avons établir un résultat l'existence ,l'unicité de un problème mixte avec des conditions intégrales pour une classe de deux dimensions de second ordre des équations hyperboliques.On utilise une méthode d'analyse fonctionnelle basée sur une estimation a priori et densité de l'image opérateur généré par problème considéré. .

Merci

Bibliographie

- [1] J. R. Cannon, Y. P. Lin, and S. Wang, “Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation,” *The Journal of the Australian Mathematical Society B*, vol. 33, no.2, pp. 149–163, 1991.
- [2] J. R. Cannon, Y. Lin, and S. Wang, “Determination of source parameter in parabolic equations,” *Meccanica*, vol. 27, no. 2, pp.85–94, 1992.
- [3] M. I. Ivanchoy, “Inverse problems for the heat-conduction equation with nonlocal boundary condition,” *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 45, no. 8, pp. 1186–1192, 1993.
- [4] M. I. Ivanchoy and N. V. Pabyrivska, “Simultaneous determination of two coefficients in a parabolic equation in the case of nonlocal and integral conditions,” *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 53, no. 5, pp. 674–684, 2001.
- [5] F. Kanca and M. I. Ismailov, “The inverse problem of finding the time-dependent diffusion coefficient of the heat equation from integral overdetermination data,” *Inverse Problems in Science and Engineering*, vol. 20, no. 4, pp. 463–476, 2012.
- [6] J. R. Cannon, “The solution of the heat equation subject to the specification of energy,” *Quarterly of Applied Mathematics*, vol.21, pp. 155–160, 1963.
- [7] V. M. Vīgak, “Construction of a solution of the heat conduction problem with integral conditions,” *Doklady Akademii Nauk Ukrainy*, vol. 8, pp. 57–60, 1994.
- [8] N. I. Ivanchoy, “Boundary value problems for a parabolic equation with integral conditions,” *Differential Equations*, vol. 40,no.4, pp. 591–609, 2004.

-
- [9] W. Liao, M. Dehghan, and A. Mohebbi, “Direct numerical method for an inverse problem of a parabolic partial differential equation,” *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 232, no. 2, pp. 351–360, 2009.
- [10] I. Sakinc, “Numerical solution of a quasilinear parabolic problem with periodic boundary condition,” *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, vol. 39, no. 2, pp. 183–189, 2010.
- [11] J. Choi, “Inverse problem for a parabolic equation with spaceperiodic boundary conditions by a Carleman estimate,” *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, vol. 11, no. 2, pp. 111–135, 2003.
- [12] G. W. Batten Jr., Second-order correct boundary conditions for the numerical solution of the mixed boundary problem for parabolic equations, *Math.Comp.* 17 (1963), 405–413. MR 27#6399. Zbl 133.38601.
- [13] N.-E. Benouar and N. I. Yurchuk, A mixed problem with an integral condition for parabolic equations with a Bessel operator, *Differentsial’nye Uravneniya* 27 (1991), no. 12, 2094–2098 (Russian), [translated in *Differential Equations* 27 (1991), no. 12, 1482–1487. Zbl 788.35056]. MR 92k:35120.
- [14] A. Bouziani, Mixed problem with boundary integral conditions for a certain parabolic equation, *J. Appl. Math. Stochastic Anal.* 9 (1996), no. 3, 323–330. MR 97f:35090. Zbl 864.35049.
- [15] —, Solution forte d’un problème mixte avec condition intégrale pour une classe d’équations paraboliques [Strong solutions of a mixed problem with an integral condition for a class of parabolic equations], *Maghreb Math. Rev.* 6 (1997), no. 1, 1–17 (French). MR 99a:35109.
- [16] —, Solution forte d’un problème mixte avec une condition non locale pour une classe d’équations hyperboliques [Strong solution of a mixed problem with a nonlocal condition for a class of hyperbolic equations] *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. (6)* 8 (1997), no. 1-6, 53–70 (French). MR 99f:35118.

-
- [17] A. Bouziani and N.-E. Benouar, Problé‘me mixte avec conditions intégrales pour une classe d’équations paraboliques [Mixed problem with integral conditions for certain parabolic equations], *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 321 (1995), no. 9, 1177–1182 (French). MR 97f:35085. Zbl 837.35057.
- [18] J. R. Cannon, The solution of the heat equation subject to the specification of energy, *Quart. Appl. Math.* 21 (1963), 155–160. MR 28#3650.
- [19] —, The One-Dimensional Heat Equation, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, vol. 23, Addison-Wesley, Massachusetts, 1984. MR 86b:35073. Zbl 567.35001
- [20] J. R. Cannon, S. Esteva Pérez, and J. van der Hoek, A Galerkin procedure for the diffusion equation subject to the specification of mass, *SIAM J. Numer. Anal.* 24 (1987), no. 3, 499–515. MR 88e:65132. Zbl 677.65108.
- [21] J. R. Cannon and J. van der Hoek, The existence of and a continuous dependence result for the solution of the heat equation subject to the specification of energy, *Boll. Un. Mat. Ital. Suppl.* (1981), no. 1, 253–282. MR 83h:35055. Zbl 538.35038.
- [22] —, An implicit finite difference scheme for the diffusion equation subject to the specification of mass in a portion of the domain, *Numerical Solutions of Partial Differential Equations*, North-Holland, Amsterdam, 1982, pp. 527–539. MR 83c:65212. Zbl 477.65072.
- [23] N. I. Ionkin, The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition, *Differencial’nye Uravnenija* 13 (1977), no. 2, 294–304 (Russian). MR 58#29240a.
- [24] L. I. Kamynin, A boundary-value problem in the theory of heat conduction with nonclassical boundary conditions, *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* 4 (1964), 1006–1024 (Russian), [translated in *U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys.* 4 (1964), no. 6, 33–59. Zbl 206.39801]. MR 30#1316.
- [25] L. A. Muraveř and A. V. Filinovskii, A problem with a nonlocal boundary condition for a parabolic equation, *Mat. Sb.* 182 (1991), no. 10, 1479–1512 (Russian). MR 92k:35119.

- [26] P. Shi, Weak solution to an evolution problem with a nonlocal constraint, *SIAM J. Math. Anal.* 24 (1993), no. 1, 46–58. MR 93m:35090. Zbl 810.35033.
- [27] N. I. Yurchuk, A mixed problem with an integral condition for some parabolic equations, *Differentsial'nye Uravneniya* 22 (1986), no. 12, 2117–2126, [translated in *Differential Equations* 22 (1986), 1457–1463. Zbl 654.35041]. MR 88g:35100.
- [28] K. Rektorys, *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering*, 2nd ed., D. Reidel Publishing, Dordrecht, 1980, translated from the Czech by Michael Basch. MR 83e:49001. Zbl 481.49002.
- [29] J. B. Keller. Inverse problems. *Amer. Math. Monthly*, 83 :107–118, 1976.
- [30] J. Hadamard. *Lectures on Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale University Press, 1923.
- [31] A. Bouziani, Mixed problem with boundary integral conditions for a certain parabolic equation, *J. Appl. Math. Stochastic Anal.* 9 (1996), no. 3, 323–330. MR 97f:35090. Zbl 864.35049.