



# UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière** : Mathématiques

**Option** : Mathématiques Appliquées et discrètes

Par

BELLIL Amina

Sujet

Etude des solutions auto similaires pour le système couplé de l'équation de Camassa-Holm

Dirigé par :

Mr. N. Benhamidouche

Promotion : 2013/2014

# Table des matières

Introduction	2
1 Quelques définitions et notions de base préliminaires	3
1.1 Equation aux dérivées partielles linéaires	3
1.2 Equations aux dérivées partielles non linéaires	6
1.3 Définition de l'équation de Camassa-Holm	6
1.4 Solution " Travelling Wave " pour l'équation de CH	7
2 Les solutions auto similaires du système couplé de l'équation de Camassa-Holm	11
2.1 Théorème principal	12
2.2 Méthode de séparation	13
3 Solution auto similaire générale pour le système couplé de l'équation de Camassa-Holm	18
3.1 Conditions d'invariances d'échelles du système couplé de l'équation de Camassa- Holm	19
3.2 Théorème de la forme bilinéaire	21
3.3 Solution auto similaire générale	23
3.3.1 Théorème principal	23
3.4 Méthode de Séparation	24
Conclusion	29
Bibliographie	30

# Introduction

Les équations aux dérivées partielles jouent un rôle très important dans l'étude de plusieurs phénomènes physiques, notamment de type d'évolution. C'est à dire celles qui dépendent du temps. L'équation de Camassa-Holm (CH) est une équation qui est liée à beaucoup d'applications en mécanique des fluides et en particulier dans l'étude de la propagation des ondes continues de l'eau peu profonde.

L'origine de cette équation a été introduite par Fuchssteiner et Fokas [8] en 1981, où elle apparaît en tant que membre d'une famille entière d'équations Bi-hamiltoniennes produites par la méthode d'opérateurs de récursion. Cependant quelques coefficients n'ont pas été correctement calculés. Ceci peut être la raison pour laquelle aucune attention particulière ne lui a été donnée jusqu'à sa redécouverte en 1993 par Camassa et Holm dans le cadre de la vague d'eau ([16, 17]). Ils ont dérivé cette équation comme modèle pour la propagation des ondes continue de l'eau peu profonde avec  $u$  représentant la taille de la surface de l'eau librement au-dessus d'un fond plat. La pertinence de l'équation comme modèle pour la vague d'eau peu profonde a été étudiée par Johnson dans [18].

En 1998, Ils ont introduit la 2ème version, c'est une équation semblable qui a été découverte indépendamment par Dai [9] comme un modèle pour les vagues non linéaires dans cylindrique axialement symétrique hyperélastique-tige, dans ce cas  $u(x, t)$  représente le tronçon radial.

Khesin et misiolek [7] ont démontré que l'équation de CH est l'équation de la ligne géodésique associée à l'espace métrique  $L^2$  et  $H^1$ . Tian, Song et Yin [20, 21] ont considéré l'équation de Camassa-Holm généralisée et ils ont construit une nouvelle solution exacte de type "peakon".

A.Constantin et J.Escher ont étudié les solutions globales et blow-up pour l'équation de Camassa-Holm. Ensuite une généralisation de l'équation de (CH) a été proposée sous la forme d'un système couplé de deux équations. Yuen dans [23] a cherché les solutions auto similaires du système en utilisant la méthode de séparation pour obtenir une classe pour les solutions auto similaires. De même, S.Zhou, C.MU et L.Wang ont récemment étudié les solutions auto similaires pour le système de Camassa-Holm modifié dans[19].

Le but principal de ce mémoire est l'étude des solutions auto similaires du système couplé de l'équation de Camassa-Holm, tel que proposé par Yuen[23], cet article consiste la base de notre travail.

L'essentiel du présent travail est de détailler et généraliser les résultats obtenus dans [23].

Dans le premier chapitre, on donne quelques notions de base et quelques outils nécessaires à notre travail.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des solutions auto similaires du système couplé de l'équation de Camassa-Holm en appliquant la méthode de séparation tel que présenté dans [23] .

Enfin, dans le troisième chapitre, on présente une contribution qui consiste à généraliser la forme auto similaire détaillé dans le chapitre précédent. Cette contribution peut ouvrir d'autre perspective au futur .

## Bibliographie

## Conclusion

Dans ce travail, nous avons cherché des solutions auto similaires pour le système couplé de Camassa-Holm.

Le travail est basé tout d'abord sur les travaux de M.Yuen [23] qui s'est intéressé à l'étude de solutions auto similaires du système couplé de l'équation de CH, nous avons ainsi détaillé tous les aspects mathématiques du problème.

Nous avons réalisé au cours de ce travail une généralisation des résultats obtenus dans [23], en cherchant des solutions auto similaires de forme générale, ainsi nous avons réussi à donner une généralisation du théorème principal liée à l'existence de cette solution pour le système.

## Bibliographie

- [1] A. Constantin: The Hamiltonian structure of the Camassa-Holm equation. *Expo.Math.* 15,53-85(1997).
- [2] A. Constantin, J. Escher: Global existence and blow-up for a shallow water equation. *Annali Sc. Norm. Sup. Pisa.* 26, 303-328 (1998).
- [3] A. Constantin: Global existence of solutions and breaking waves for a shallow water equation: a geometric approach. *Ann.Inst.Fourier(Grenoble).* 50, 321-362 (2000).
- [4] A.Constantin, H.P.McKean: A shallow water equation on the circle. *Comm, Pure Appl. Math.*52, 949-982 (1999).
- [5] A.Constantin, Ivanov R. On an integrable two-component Camassa-Holm shallow water system. *PhysLett A*, 2008, 372(48): 7129-7132.
- [6] A. Constantin, On the Blow-up Solutions of a Periodic Shallow Water Equation, *J. Nonlinear Sci.* 10 (2000), 391-399.
- [7] B. Khesin and G. Misiolek, Euler equations on homogeneous spaces and Virasoro orbits, *Adv. Math*, 176 (2003), pp. 116-144.
- [8] B. Fuchssteiner and A. S. Fokas. Symplectic structures, their Backlund transformations and hereditary symmetries. *Phys. D*, 4(1):47-66, 1981/82.
- [9] Dai H H. Model equations for nonlinear dispersive waves in a compressible Mooney-Rivlin rod. *ActaMechanica*, 1998, 127: 193-207.
- [10] Jonatan Lenells: Traveling wave solutions of The Camassa-Holm equation, Department of Mathematics, Lund University, P.O. Box 118, 22100 Lund, Sweden(2005).
- [11] J. Escher, O. Lechtenfeld and Z. Yin, Well-posedness and Blow-up Phenomena for the 2-component Camassa-Holm equation, *Discrete Contin.Dyn. Syst. Ser. A* 19 (2007),493-513.
- [12] Lixin Tian, Meijie Ni, Blow-up Phenomena for the Degasperis-Procesi Equation

- with Strong Dispersive Term, Nonlinear Scientific Research Center, Jiangsu University Zhenjiang, Jiangsu, 212013, P.R.China, (2007).
- [13] M. Chen, S.-Q. Liu, Y. Zhang, A 2-component Generalization of the Camassa-Holm Equation and Its Solutions, *Lett. Math. Phys.* 75 (2006), 1.15.
- [14] N. Benhamidouche, *cour mathématiques appliquée, université de M.sila, master2*, (2013).
- [15] P. Goldreich and S. Weber, Homologously Collapsing Stellar Cores, *Astrophys. J.* 238 (1980), 991.997.
- [16] R. Camassa and D. D. Holm. An integrable shallow water equation with peaked solitons. *Phys. Rev. Lett.*, 71(11):1661-1664, 1993.
- [17] R. Camassa, D. D. Holm, and J. Hyman. A new integrable shallow water equation. *Adv. Appl. Mech.*, 31:1-33, 1994.
- [18] R. S. Johnson. Camassa-Holm, Korteweg-de Vries and related models for water waves. *J. Fluid Mech.*, 455:63-82, 2002 *Contin Dyn Syst.* 13(3), 659-682 (2005).
- [19] Shouming ZHOU , Chunlai MU , Liangchen WANG: SELF-SIMILAR SOLUTIONS AND BLOW-UP PHENOMENA FOR A TWO-COMPONENT SHALLOW WATER SYSTEM, College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China (2013).
- [20] Tian, L., Yin, J.: New Compacton solutions and solitary solutions of fully nonlinear generalized Camassa-Holm equation. *Chaos, Solitons and Fractals.* 20(4):289-299 (2004).
- [21] Tian, L., Song, X.: New peaked solitary wave solutions of the generalized Camassa-Holm equation. *Chaos, Solitons and Fractals.* 19(3):621-637 (2004).
- [22] Y. Li, P. Olver: Well-posedness and blow-up solutions for an integrable nonlinearly dispersive model wave equation. *J. Differential Equations.* 162, 27-63 (2000).

[23] Yuen M W. Self-similar blowup solutions to the 2-component Camassa-Holm equations. *J Math Phys*, 2010,51(7): 093524.

[24] Yuen. M. W., Analytical Blowup Solutions to the 2-dimensional Isothermal Euler-Poisson Equations of Gaseous Stars, *J. Math. Anal. Appl.* 341 (2008), 445.456.

[25] Y.B. Deng, J.L. Xiang and T. Yang, Blowup Phenomena of Solutions to Euler-Poisson Equations, *J. Math. Anal. Appl.* 286 (2003), 295.306.

[26] Zhengrong Liu a,1, Tifei Qian b:Department of Mathematics, Yunnan University and Institute of Applied Mathematics of Yunnan Province, Kunming, Yunnan 650091,China(2001).

## ملخص:

إن الهدف من هذه الأطروحة هو دراسة الحلول من نوع التماثل الذاتي لجملة معادلتين "Camassa-Holm", تفصيل و تعميم هذه الحلول بمساعدة من المراجع

M.Yuen

الكلمات المفتاح:

-حلول التماثل الذاتي, لجملة معادلتين "Camassa\_Holm"

---

## Résumé:

L'objectif de ce travail est d'étudier les solutions auto similaires du système couplé de l'équation de Camassa-Holm.

On a cherché et détailler les solutions auto similaires du système, en se référant aux travaux de M.Yuen.

On a généralisé les résultats obtenus par M.Yuen.

## Mots clés:

Peakons, solution auto similaire, système couplé de l'équation de Camassa-Holm.

---

## Abstract:

The objective of this work is to study the self similar solution to the two-component of Camassa-Holm equation.

We looked and detail the self similar solution to the two-component of Camassa-Holm equation, referring to the work of Yuen.

We generalized the results obtained by M.Yuen.

## Key words:

Peakons, self-similar solution, two-component of Camassa-Holm equation.