

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES DE L'INGENIEUR

DEPARTEMENT D'ELECTROTECHNIQUE



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME

D'INGENIEUR D'ETAT EN ELECTROTECHNIQUE

OPTION

COMMANDE ELECTRIQUE

THEME

**MODELISATION DES PHENOMENES ELECTROMAGNETIQUES
PAR LA METHODE DES VOLUMES FINIS DANS UN
DISPOSITIF AXISYMETRIQUE**

Proposé et dirigé par :

Mr HAMIMID Mourad

Présenté par :

CHOUBAR Khoutir

HERREM Zina

Année Universitaire : 2005 / 2006





Remerciements

Tout d'abord nous remercions le bon Dieu tout puissant de la bonne santé, de la volonté et de la patience qu'il nous a accordées tout au long de nos études.

Nous tenons en premier lieu à remercier cordialement, notre cher encadreur M.r Hamimid Mourad pour sa précieuse collaboration et sa pertinent conseil, qu'il n'ait cessé de nous donner tout au long de l'élaboration de ce modeste travail.

Nous remercions également tous les enseignants



Dédicaces

*Plus que tout, je voudrais dédier ce modeste travail à mes
parents pour leur encouragement, leur patience et leur
amour ... ils sont l'origine de tout ce que j'ai accompli de
bien.*

A tout mes frères et ma familles.

A tous ce qu'ils ont aimé me voir ce jour là.

C. KHOUITIR

Sommaire	
Liste Des Figures	
Table Des Symboles	
Introduction Générale.....	1
CHAPITRE I	
Equations Electromagnétique (Equations aux Dérivées Partielles)	
I.1 Introduction.....	3
I.2 Equations générales de Maxwell.....	3
I.2.1 Loi de Faraday.....	3
I.2.1.1 Théorème d'Ampère.....	4
I.2.1.2 Théorème de Gausse.....	5
I.2.1.3 Loi de conservation du champ d'induction magnétique.....	8
I.2.1.4 Loi de comportement des matériaux (milieux physiques).....	9
I.2.2 Interprétation physique des équations de Maxwell.....	10
I.2.3 Formulation des équations électromagnétiques.....	11
I.2.3.1 Modèle magnétodynamiques.....	11
I.3 Modèle Géométrique.....	17
CHAPITRE II	
Formulation Mathématique Des Phénomènes Electromagnétiques	
II.1 Introduction	20
II.2. Modèle Mathématique de l'Electromagnétisme :	20
II.3 Hypothèse Simplification.....	21

II.4 Formulation électromagnétique à l'aide du potentiel vecteur magnétique.....	22
II.5. Exemple Illustratif Simple.....	24
II.6 Formulations Analytiques Monodimensionnelles en Coordonnées Cylindriques.....	25
II.7 Conclusion.....	28

CHAPITRE III

Résolution des problèmes Electromagnétiques Par les Méthodes Numériques

III.1 Introduction.....	29
III.2 Méthode Différences Finies.....	29
III.3 La Méthode Des Eléments Finis.....	29
III.4 La Méthode des Volumes Finis.....	30
III.5 Exemple Illustratif De La <i>MVF</i>	30
III.6 Validation De La Méthode Des Volumes Finis.....	32
III.7 CONCLUSION.....	33

Chapitre IV

Formalisation De L'équation Electromagnétique Dans Cas Axisymétrique Par La Méthode Des Volumes Finis

IV.1 Introduction.....	34
IV.2 Formulation axisymétrique de l'équation électromagnétique par la <i>MVF</i> ...	34
IV.3 Condition Aux Limites.....	36
IV.4 Discrétisation du Domaine.....	37

IV.5 Méthodes de résolution des systèmes d'équations algébriques.....	39
IV.5.1 Méthodes Directes.....	39
IV.5.2 Méthodes Itératives.....	39
IV.5.2.1 Méthode de Jacobi.....	39
IV.5.2.2 Méthode de Gauss- Seidel	
CHAPITRE V	
APPLICATIONS	
V.1 Introduction.....	42
V.2 Représentation Bidimensionnelle.....	43
V.3 Modèle Géométrique.....	43
V.4 Conductions aux limites.....	44
V.6 Résultats électriques.....	44
V.7 Effet De La Conductivité Electrique Sur La Distribution De P.V.M.....	45
V.8 Effet De La fréquence Sur La Distribution De P.V.M.....	47
V.9 Distribution De potentiel vecteur magnétique dans l'espace.....	47
V.10 Distribution De L'induction Magnétique.....	48
V.11 Distribution des lignes du champ électrique.....	49
V.12 Desité du courant et de puissance induite dans la charge.....	50
V.13 Distribution de la densité de puissance dans la charge.....	51
Conclusion Générale.....	52
Annexe	53
Bibliographie	57

Fig.I.1. Exemple type.....	18
Fig.1. Représentation cylindrique et axisymétrique.....	24
Fig.2. Modèle axisymétrique.....	25
Fig II.3.Potentiel vecteur magnétique.....	28
Fig.III.1. Illustratif de la MVF.....	31
FigIII.2. comparaison entre la méthode analytique et la méthode numérique.....	32
Fig. IV.1. Maillage du domaine d'étude.....	34
Fig. IV.2. Description d'un volume fini.....	35
Fig.IV.3. Limites du domaine d'étude magnétique.....	37
Fig.V.1 système à symétrie de révolution	42
Figure V.2 Modèle bidimensionnel	43
Fig.V.4 Conditions aux limites imposées au modèle d'étude.....	44
Fig.V.6. Effet de la conductivité électrique sur le PVM.....	45
Fig.V.7. Distribution de PVM avec $\sigma=0$ S.....	46
Fig.V.8. Distribution de PVM avec $\sigma=500$ S.....	46
Fig.V.9.Distribution de PVM avec $\sigma=1000$ S.....	46
Fig.V.10. Distribution de PVM avec $\sigma=1500$ S.....	46
Fig.V.11. Effet de la fréquence sur le PVM.....	47
Fig.V.12 distribution du potentiel vecteur magnétique dans l'espace.....	48
Fig.V.13. distribution de l'induction magnétique ($f=1$ kHz).....	49
Fig.V.14. distribution de l'induction magnétique ($f=10$ kHz).....	49
Fig.V.15. variation du champ électrique.....	49
Fig.V.16. La densité du courant induite dans la charge.....	50
Fig.V.16. La densité de puissance induite dans la charge.....	50

Fig.V.17. Distribution de la densité dePuissance $f=50$ Hz.....	51
Fig.V.18. Distribution de la densité dePuissance $f=10$ kHz.....	51
Fig.V.19 Variation De La Densité De Puissance Dans Un Chemin Horizontale	51

Introduction Générale

Les machines électriques, les appareils de coupure, les appareillages à haute tension sont tous, durant leur fonctionnements, soumis à l'action des champs électromagnétiques. Dans toute machine électrique, l'enroulement ou l'aimant d'excitation, produit un champ magnétique. Autour des isolateurs et des bornes à haute tension des transformateurs, règne un champ électrostatique important. Dans les conducteurs, le champ électrostatique assure la circulation du courant électrique.

La connaissance du champ permet d'avoir accès au calcul des performances et du fonctionnement de ces appareils électriques. En effet, dans une machine électrique, l'évolution du champ en chaque point de l'espace permet d'en déduire le flux, et donc la force électromotrice ou le couple.

Autour d'un isolateur, la valeur du champ permet d'apprécier la possibilité de tenue diélectrique dans diverses situations et d'estimer la durée de vie du matériau considéré.

Donc, dans de nombreuses étapes de conception d'un appareil électrique l'évaluation du champ électrique et du champ magnétique apparaît comme un travail nécessaire.

La modélisation numérique des systèmes à induction électromagnétiques consiste l'outil de base pour la conception et l'optimisation de ces systèmes. Cette modélisation passe par la résolution numérique (éléments finis, volumes finis,...) des équations des champs décrivant les phénomènes physiques et leur couplage.

Pour cela, plusieurs méthodes numériques ont été développées, vu que les solutions analytiques ne pouvaient être obtenues que pour des configurations simples. Le développement de ces méthodes a connu ces dernières années un essor remarquable.

Dans le cadre de notre travail, nous proposons la méthode des volumes finis (M.V.F) pour la résolution des équations aux dérivées partielles dans le domaine d'étude, compte tenu des conditions aux limites, à celle d'un système d'équations algébriques dont la solution conduit à la distribution des champs (électromagnétisme : potentiel vecteur magnétique, induction magnétique distribution du champ électrique puissance induite,...etc.).

Ainsi, notre travail sera organisé de la manière suivante :

Les équations EDP, dans le domaine électromagnétique ainsi que leurs interprétation physique. Sont représenté dans le premier chapitre.

Dans le deuxième chapitre nous sommes intéressés à l'équation électromagnétique (équations aux dérivées partielles).

Dans le troisième chapitre nous sommes intéressés à la formulation mathématique des équations de Maxwell Nous avons également étudié un dispositif cylindrique de géométrie simple pour avoir la distribution de potentiel vecteur magnétique le long d'un chemin radial.

La résolution des équations aux dérivées partielles nécessite (dans le cas où la solution analytique est pratiquement impossible ou dans le cas où les dispositifs à étudier présentent une géométrie complexe), des méthodes numériques de discrétisations sont utilisées. Nous introduisons dans le deuxième chapitre les différentes méthodes de résolution des EDP ainsi que la méthode des volumes finis.

Le quatrième chapitre consacré à la présentation et à la formalisation de l'équation électromagnétique dans le cas Axisymétrique par la méthode des volumes finis.

Les résultats de la méthode numérique développés sur un dispositif cylindrique axisymétrique, seront exposés dans le cinquième chapitre. On y étudiera l'influence des différents paramètres sur le comportement de champ électromagnétique ainsi que la distribution de la densité de puissance.

CHAPITRE I

Equations Electromagnétique (Equations aux Dérivées Partielles)

I.1 Introduction

I.2 Equations générales de Maxwell

I.2.1 Loi de Faraday

I.2.1.1 Théorème d'Ampère

I.2.1.2 Théorème de Gauss

I.2.1.3 Loi de conservation du champ d'induction magnétique

I.2.1.4 Loi de comportement des matériaux (milieux physiques)

I.2.2 Interprétation physique des équations de Maxwell

I.2.3 Formulation des équations électromagnétiques

I.3 Modèle Géométrique

I.1 Introduction

C'est J. C. Maxwell (1831-1879), qui apporta à l'étude de l'électromagnétisme la puissance d'un formalisme mathématique, précisant les notions qualitatives introduites par Faraday. Il parvint à établir le groupe d'équation qui portent son nom, et qui constituent toujours la base de nos connaissances théoriques de l'électromagnétisme.

Dans ces formulations J. C. Maxwell tient à décrire des relations entre les grandeurs électromagnétiques dans le cas général et où l'espace et le temps ont une influence, dans un milieu physique quelconque, avec une densité de courant (J) variable et une distribution de charge (ρ). Ces équations sont introduites comme postulats fondamentaux de l'électromagnétisme[1].

I.2 Equations générales de Maxwell

I.2.1 Loi de Faraday

La force électromotrice (e) induite dans un circuit (c) placé dans un champ électrique (\vec{E}) est donné par l'intégrale curviligne suivant [2] .

$$e = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

où (c) est une boucle fermée (circuit).

Or, d'après la loi de Faraday, la force électromotrice (e) induite dans un circuit fermé (c) est égale à l'opposé de la dérivée, par rapport au temps du flux magnétique à travers ce même circuit. Mathématiquement, elle est exprimée par :

$$e = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{Où} \quad \Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

avec :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

où (S) est une surface s'appuyant sur le contour (C).

Il vient alors que :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

En appliquant le théorème de Stokes sur le terme gauche de cette égalité, on obtient :

$$\iint_S (\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} = 0$$

Cette relation étant vraie quelque soit la forme du circuit (c) et la surface (S) s'appuyant sur ce circuit. La quantité à intégrer doit être identiquement nulle ce qui s'exprime par la relation suivante :

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I.1})$$

I.2.1.1 Théorème d'Ampère

Le théorème d'ampère s'énonce ainsi : la circulation du vecteur champ magnétique (\vec{H}) sur un contour fermé orienté (C), quelconque, est lié au courant I, enlacé par (C), par la relation suivante [2] :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{enlacé}} = \sum_{i=1}^n I_i$$

Si on désigne par \vec{J} le vecteur densité du courant I, dans ce cas, la loi d'ampère prend la forme suivante :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

En appliquant le théorème de Stokes sur le terme gauche de cette égalité, on obtient :

$$\iint_S \vec{\text{rot}} \vec{H} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Ainsi, par identification, on déduit que :

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{I.2})$$

A cette équation, doit être associée la loi d'Ohm généralisée

$$\vec{J} = \vec{J}_{\text{ex}} + \sigma \vec{E} + \sigma(\vec{\mathcal{V}} \wedge \vec{B}) + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{I.3})$$

où :

$\vec{\mathcal{V}}$: Vecteur vitesse des pièces conductrices susceptible de se déplacer [m/s],

σ : Conductivité électrique [S/m],

\vec{J}_{ex} : Densité du courant d'excitation ou de source [A/m²],

$\sigma \vec{E}$: Densité des courants induits par variation du champ électrique E [A/m²],

$\sigma(\vec{\mathcal{V}} \wedge \vec{B})$: Densité des courants induits par mouvement [A/m²].

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$: Vecteur densité de courant de déplacement [A/m²].

I.2.1.2 Théorème de Gauss

Le flux du vecteur champ électrique (\vec{E}) sortant d'une surface fermée (S), est égale au quotient par, ϵ_0 de la somme des charges électriques situées à l'intérieur de cette surface (S) [2] :

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Si les charges libres sont réparties uniformément selon une densité volumique (ρ), la relation précédente devient :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

L'application du théorème d'Ostrogradski-Green nous permet de transformer l'intégrale du membre gauche, de l'équation précédente, de la manière suivante :

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$$

Le volume d'intégration, de même que la surface de gausse (S) sont choisis arbitrairement. L'identité des deux intégrales portant toutes les deux sur ce même volume (V) d'intégration, implique l'identité des entités intégrées, d'où :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Le vecteur intensité de polarisation \vec{P} est le moment électrique d'un petit volume.

Cette polarisation produit une densité fictive égale à $\operatorname{div}(\vec{P})$. On aura donc :

$$\operatorname{div}(\epsilon_0 \vec{E}) = \rho + \rho_p$$

En remplaçant l'expression de ρ_p dans l'équation précédente on aura :

$$\operatorname{div}(\epsilon_0 \vec{E}) + \operatorname{div}(\vec{P}) = \rho$$

Il vient alors que :

$$\operatorname{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho$$

Par définition, on appelle vecteur induction électrique \vec{D} , le vecteur dont l'expression est donné par la relation suivante [2][3] :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Ainsi, ce vecteur obéit à la relation locale suivante :

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad (\text{I.4})$$

Si le champ électrique dépendant du temps, la variation temporelle du champ induction électrique \vec{D} est donc non nulle. Il vient alors que :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{D}) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Or partant de fait que la variation temps et espace sont considérées indépendantes, on aura :

$$\text{div} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

En tenant compte de l'équation de continuité $\text{div}(\vec{J}_C) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$, On aura :

$$\text{div} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_C \right) = 0$$

Le vecteur $\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_C \right)$ représente la densité du courant totale \vec{J} .

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{I.5})$$

tels que :

\vec{J}_D : représente la densité du courant de déplacement,

\vec{J}_C : représente la densité du courant de conduction.

Or partant du principe que la divergence du rotationnel de tout vecteur est identiquement nulle, il vient alors que le vecteur $(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_C)$, défini dans une certaine portion

de l'espace, comme un champ de rotationnel \vec{H} [2].

tel que :

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_C$$

ou

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J}$$

Cette formule montre bien que Maxwell ait dû tenir compte des phénomènes dus à la variation temporelle du vecteur champ d'induction électrique (\vec{D}), par cette procédure il a modifié la loi d'ampère donné par l'équation (I.2)

I.2.1.3 Loi de conservation du champ d'induction magnétique

D'après l'équation (I.1), nous avons :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Formons la divergence de chaque, membre de cette équation, et utilisons l'identité, il vient alors :

$$-\text{div}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial(\text{div} \vec{B})}{\partial t} = 0$$

L'intégration de cette relation conduit à $\text{div} \vec{B} = f(r)$.

Si $f(r)$ n'était pas identiquement nulle, cette relation implique l'existence de monopoles magnétiques. Or de tels monopoles ou charges magnétiques libres n'ont jamais été mis en évidence, nous poserons alors [2][3] :

$$\text{div} \vec{B} = 0 \tag{I.6}$$

I.2.1.4 Loi de comportement des matériaux (milieux physiques)

Au système d'équations de Maxwell il fallait introduire des relations traduisant le comportement physique du milieu.

■ Induction et champ électrique

Pour tout champ électrique, dans un milieu isotrope, de permittivité ε , nous avons [4] :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

où : $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$;

ε_0 : Permittivité absolue du vide [F/m]

ε_r : Permittivité relative du milieu.

Cette relation décrit la relation entre le vecteur induction électrique \vec{D} et le vecteur champ électrique \vec{E} . Elle est linéaire si ε est constante.

Dans le cas des conducteurs non polarisés, nous avons :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

Avec:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36 * \pi * 10^9} \text{ [F/m]}$$

■ Induction et champ magnétiques

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \tag{I.7}$$

avec :

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

où

μ_0 : Perméabilité magnétique absolue du vide, $\mu_0 = 4.\pi.10^{-7}$ [H/m],

μ_r : Perméabilité relative du milieu.

Dans le cas d'un aimant permanent, nous avons :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_{re}$$

\vec{B}_{re} : Vecteur induction magnétique rémanente.

I.2.2 Interprétation physique des équations de Maxwell

L'objet des équations de Maxwell consiste à relier, par des équations locales, les champs \vec{E} et \vec{B} à leurs sources : les densités de charges et de courants, (ρ) et (\vec{J}) dans le cas le plus générale, en particulier, en régime variable.

La loi de Faraday donnée par l'équation (I.1), exprime le couplage électromagnétique en régime dynamique et où la variation temporelle du vecteur champ d'induction magnétique (\vec{B}) détermine la variation spatiale du vecteur champ électrique \vec{E} .

La deuxième loi exprimée par la relation (I.2) indique que toute variation spatiale du vecteur champ magnétique \vec{H} est égale à la densité du courant. Elle exprime la dépendance du champ magnétique de la densité du courant totale (conduction + déplacement). Cette relation peut être interprétée comme étant le taux de variation spatiale du champ en fonction du taux de mouvement des charges.

Ces deux équations ((I.1) et (I.2)) assurent le couplage électrique magnétique.

La loi de la divergence de l'induction magnétique \vec{B} donnée par la relation (I.4) indique que, le flux, à travers une surface quelconque fermée S, est toujours nulle. C'est à dire que les lignes vectorielles de l'induction ne commencent et ne se terminent nulle part. Elles sont donc, fermées sur elles-mêmes, créant ainsi des trajectoires circulaires, soit elles se ferment à l'infinie.

La loi de la divergence de l'induction électrique \vec{D} donnée par la relation (I.5) indique que, toute charge électrique est considérée comme une source d'un champ électrique; autrement dit, les lignes de champs électriques commencent et se terminent autour des charges électriques.

L'équation (I.7) détermine la relation entre le champ magnétique et l'induction magnétique. Cette relation donne la courbe d'aimantation $\vec{B} = f(\vec{H})$. Une variation de \vec{H} conduit à une variation de l'induction \vec{B} , on trouve par la suite le cycle d'hystérésis dont la forme se diffère d'un matériau à un autre ; donc d'un dispositif électrotechnique à un autre. On peut constater que cette équation, et celle qui lie l'induction électrique au champ électrique, interprète l'influence des propriétés des matériaux sur le rendement du système.

I.2.3 Formulation des équations électromagnétiques

Tous les phénomènes électromagnétiques que l'on veut généralement étudier aux seins des dispositifs électrotechniques sont régis par les quatre équations aux dérivées partielles de MAXWELL et par les trois relations du milieu considéré. Nous disposerons alors du système des sept équations. Ces équations décrivent globalement tous les phénomènes électromagnétiques, mais suivants les dispositifs que l'on étudie, certains phénomènes deviennent négligeables ; les équations se découpent alors, en donnant naissances à des modèles plus simples [5].

I.2.3.1 Modèle magnétodynamiques

Ce modèle s'applique aux dispositifs électromagnétiques dans lesquels les sources de courant ou de tension varient dans le temps. C'est à dire que le terme qui représente la variation temporelle de vecteur d'induction magnétique est non nul, ainsi, les champs électrique et magnétique sont alors couplés par la présence des courants de Foucault [5].

Ecrivons les deux équations de Maxwell qui se présentent sans terme source :

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\text{div}} \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

La deuxième équation indique que \vec{B} est un champ de rotationnel. Ceci implique qu'il existe un vecteur \vec{A} , tel que :

$$\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A} \tag{I.8}$$

Le potentiel vecteur \vec{A} joue un rôle primordiale, où la connaissance de \vec{A} implique la connaissance de tout les autres grandeurs physiques.

Nous avons alors :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Sachant que $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, On obtient donc :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{A}) = -\text{rot} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \\ \Rightarrow \text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Ceci nous permet de constater que le champ $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ est un champ conservatif, il vient alors que :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } U$$

soit :

(I.9)

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } U$$

U est le potentiel électrique scalaire du champ électromagnétique ; on remarque qu'en régime variable, l'expression de \vec{E} dépend à la fois de U et de \vec{A} .

A partir de l'équation (I.2) et de l'équation (I.7) nous avons :

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \vec{B} \right) = \vec{J}$$

A partir des équations (I.3), (I.8), et de l'équation (I.9), nous avons :

$$\begin{aligned}
\text{rot}\left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}\right) &= \vec{J}_{\text{ex}} + \sigma \cdot \vec{E} + \sigma(\vec{\mathcal{V}} \wedge \text{rot } \vec{A}) - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\
\Leftrightarrow \text{rot}\left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}\right) &= \vec{J}_{\text{ex}} - \sigma\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{grad } U\right) + \sigma(\vec{\mathcal{V}} \wedge \text{rot } \vec{A}) - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{I.10}) \\
\Leftrightarrow \text{rot}\left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}\right) + \sigma\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \text{grad } U + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \sigma(\vec{\mathcal{V}} \wedge \text{rot } \vec{A}) &= \vec{J}_{\text{ex}}
\end{aligned}$$

Les termes $-\sigma\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, $-\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, $\sigma(\vec{\mathcal{V}} \wedge \text{rot } \vec{A})$, $(-\sigma \text{grad } U)$ représentent les densités des courants induits. Ils traduisent le caractère dynamique dans le temps et dans l'espace des phénomènes électromagnétiques.

Dans le cas où la pièce à chauffer est immobile par rapport à l'inducteur l'équation (I.10) devient :

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}\right) + \sigma\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \text{grad } U + \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{grad } U\right)) = \vec{J}_{\text{ex}}$$

Afin de résoudre cette équation à deux inconnue (\vec{A} , U), de plus le potentiel vecteur \vec{A} ne peut pas être défini par la seule condition $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$; on doit introduire une deuxième équation, généralement, l'équation de conservation de courant est la plus utilisée.

$$\text{div}\left[\sigma\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \text{grad } U + \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{grad } U\right))\right] = 0 \quad (\text{I.11})$$

Si l'on sait calculer \vec{A} et U à partir du système d'équation (I.10) et (I.11), remarquons qu'une assez grande indétermination pèse sur U et \vec{A} cherchons à préciser la liberté de choix de ces potentiels [7]. Pour ce faire, supposons que nous avons trouvé deux couple (\vec{A}, U) et (\vec{A}_1, U_1) correspondant au même champ électromagnétique caractérisé en chaque point de l'espace par \vec{E} et \vec{B} . Nous pouvons alors écrire à la fois [2] :

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}_1$$

Soit

$$\text{rot}(\vec{A}_1 - \vec{A}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{A}_1 = \vec{A} + \text{grad } f$$

où f est une fonction scalaire quelconque de l'espace et du temps.

De même, on peut écrire pour ce qui est du champ \vec{E}

$$\vec{E} = -\text{grad } U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\text{grad } U_1 - \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t}$$

qui donnent, en tenant compte de $\vec{A}_1 = \vec{A} + \text{grad } f$

$$\text{grad } U = \text{grad} \left(U_1 + \frac{\partial f}{\partial t} \right)$$

En résumé, si le couple de potentiels (\vec{A}, U) correspond à un champ électromagnétique caractérisé en chaque point par les champs \vec{E} et \vec{B} , le couple de potentiels (\vec{A}_1, U_1) correspond au même champ électromagnétique ce qui donne une infinité de solution. Cela veut dire que le potentiel vecteur \vec{A} ne peut être défini par la seule condition $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$; on doit également fixer sa divergence.

Pour surmonter ce problème, une condition peut être proposée pour donner l'unicité de solution. Cette condition s'appelle la condition de Jauge, il y a deux conditions de jauge largement employées.

☛ Jauge de Lorentz :

La condition de Jauge de Lorentz consiste à imposer dans le cas le plus complexe où la densité volumique de charge qui n'est plus nulle, une fonction V qui doit être évaluée comme suit :

$$\vec{\text{div}} \vec{A} = (\sigma + j\omega\epsilon) \mu U \quad (\text{I.12})$$

Ce qui nous permettons d'avoir un système :

$$\begin{cases} \text{rot} \left(\text{vrot} \vec{A} \right) + (\sigma + j\omega\epsilon) \left(\frac{1}{(\sigma + j\omega\epsilon)\mu} \text{div} \vec{A} + j\omega \vec{A} \right) = \vec{J}_s \\ \text{div} \left[-(\sigma + j\omega) \text{grad} V \right] - j\omega(\sigma + j\omega\epsilon)(\sigma\mu V) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.13})$$

☛ Jauge de Coulomb :

La condition de jauge de Coulomb qui est la plus souvent utilisée en électromagnétisme [10]. Elle consiste à imposer le terme $\vec{\text{div}} \vec{A} = 0$ (densité volumique de charge nulle et qui est le cas dans presque tous les dispositifs à induction classique) par l'introduction du terme $\left[-\text{grad} \left(\frac{1}{\mu_P} \text{div} \vec{A} \right) \right]$ appelé terme de pénalité, μ_P doit être prise égal à μ . L'unicité de la solution a été démontré par O. Biro [11]. Avec ce terme de pénalité les équations (I.10) et (I.11) deviennent :

$$\vec{\text{rot}}(\text{vrot} \vec{A}) - \text{grad}(\text{vdiv} \vec{A}) + \sigma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{grad} U \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{grad} U \right) \right) = \vec{J}_{\text{ex}} \quad (\text{I.14})$$

$$\text{div} \left[\sigma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{grad} U \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{grad} U \right) \right) \right] = 0 \quad (\text{I.15})$$

Le système d'équations différentielles (I.14) et (I.15) ne peut être résolu qu'à partir des conditions aux limites bien spécifiées. Généralement deux types de conditions existent :

☛ Condition de type Dirichlet :

La fonction inconnue doit être spécifiée sur les limites :

$$\vec{A} = 0 \quad (\text{Condition de Dirichlet homogène})$$

$$\vec{A} \neq 0 \quad (\text{Condition de Dirichlet non homogène})$$

☛ **Condition de type Neumann :**

Elle exprime la variation de la fonction inconnue à une surface :

$$\frac{\vec{\partial A}}{\vec{\partial n}} = 0 \quad (\text{Condition de Neumann homogène})$$

$$\frac{\vec{\partial A}}{\vec{\partial n}} \neq 0 \quad (\text{Condition de Neumann non homogène})$$

\vec{n} : est la normale (exprime la nullité ou la constance de la dérivée normale à la frontière)

Cas de dispositifs alimentés en courant harmonique

On suppose que la perméabilité μ ne dépend pas de l'induction magnétique (cas linéaire) ; si les courants d'excitation sont de nature alternative, on peut utiliser une représentation de FRESNEL pour modéliser leur variation temporelle.

L'utilisation des formes complexes permet alors de remplacer les termes :

$$\sigma \frac{\vec{\partial A}}{\partial t} \quad \text{Par} \quad j\omega\sigma \vec{A}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon (\frac{\vec{\partial A}}{\partial t})) \quad \text{Par} \quad j\omega(\epsilon(j\omega \vec{A}))$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \text{grad } U) \quad \text{Par} \quad j\omega(\epsilon(\text{grad } U))$$

En introduisant un changement de variable suivant $U = \frac{\partial u}{\partial t}$, on remplace :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \text{grad } \frac{\partial u}{\partial t}) \quad \text{Par} \quad j\omega(j\omega\epsilon(\text{grad } u))$$

Le système d'équations (I.14) et (I.15) se ramène alors au système d'équations

suivants :

$$\vec{\text{rot}}(\nu \vec{\text{rot}} \vec{A}) - \vec{\text{grad}}(\nu \text{div} \vec{A}) + j\omega(\sigma + j\omega\varepsilon)(\vec{A} + \vec{\text{grad}} u) = \vec{J}_{\text{ex}} \quad (\text{I.16})$$

$$\text{div}(j\omega(\sigma + j\omega\varepsilon)(\vec{A} + \vec{\text{grad}} u)) = 0 \quad (\text{I.17})$$

I.3 Modèle Géométrique

Les équations citées précédemment s'appliquent sur des géométries complexes, dont les phénomènes électromagnétiques sont modélisés en fonction des propriétés physiques affectées pour chaque milieu de la géométrie.

Généralement ces milieux sont divisés en deux [9]:

- ☛ Un milieu conducteur (de charge électrique libre)
- ☛ Un milieu non conducteur

En électrotechnique un milieu conducteur se divise généralement en :

- ☛ Région de l'excitation (inducteur)
- ☛ Région de la charge (induit)

Le milieu non conducteur se divise généralement en :

- ☛ Région de l'air
- ☛ Région du circuit magnétique

Selon les matériaux utilisés μ , ε et σ peuvent être soit des scalaires, modélisant alors le comportement des matériaux isotropes, soit des tenseurs qui permettent de tenir compte des effets d'anisotropie souvent rencontrés dans les machines électriques [9].

Exemple illustrative

Soit le système électromagnétique suivant :

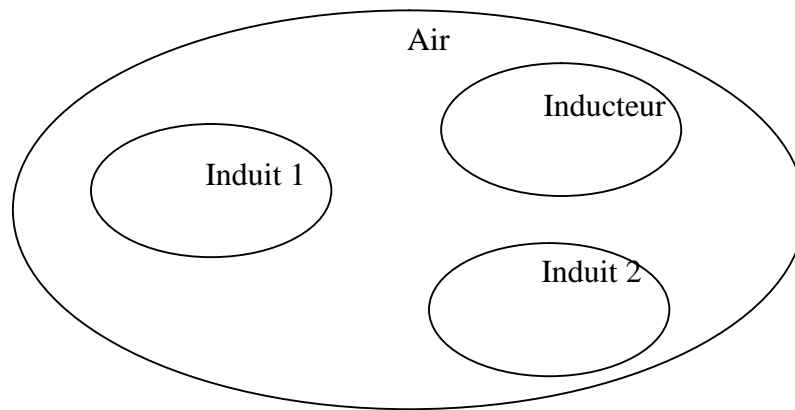


Fig.I.1. Exemple type.

avec : Induit 1 : Matériau magnétique conducteur.

Induit 2 : Matériau magnétique non- conducteur.

Avant d'écrire les équations aux dérivées partielles à résoudre dans chacune des sous-régions du modèle de la figure précédente. On doit tout d'abord donner l'équation électromagnétique générale régissant l'évolution spatiale-temporelle du système.

$$\vec{\text{rot}}(\nu \vec{\text{rot}} \vec{A}) - \vec{\text{grad}}(\nu \text{div} \vec{A}) + \sigma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\text{grad}} U \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\text{grad}} U \right) \right) = \vec{J}_{\text{ex}}$$

Cas d'un milieu linéaire :

$$\vec{\text{rot}}(\nu \vec{\text{rot}} \vec{A}) - \vec{\text{grad}}(\nu \text{div} \vec{A}) + j\omega(\sigma + j\omega\varepsilon)(\vec{A} + \vec{\text{grad}} u) = \vec{J}_{\text{ex}}$$

Les équations aux dérivées partielles à résoudre dans chacune des sous-régions du modèle de la figure précédente sont alors :

Air :

$$\vec{\text{rot}}(\nu_0 \vec{\text{rot}} \vec{A}) - \vec{\text{grad}}(\nu_0 \text{div} \vec{A}) = \vec{0}$$

Inducteur

$$\vec{\text{rot}}(\nu_0 \vec{\text{rot}} \vec{A}) - \vec{\text{grad}}(\nu_0 \text{div} \vec{A}) = \vec{J}_{\text{ex}}$$

Induit 1**Cas linéaire :**

$$\vec{\text{rot}}(\nu \vec{\text{rot}} \vec{A}) - \vec{\text{grad}}(\nu \text{div} \vec{A}) + j\omega(\sigma + j\omega\epsilon)(\vec{A} + \vec{\text{grad}} u) = \vec{0}$$

Cas non- linéaire :

$$\vec{\text{rot}}(\nu \vec{\text{rot}} \vec{A}) - \vec{\text{grad}}(\nu \text{div} \vec{A}) + \sigma\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\text{grad}} U\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\text{grad}} U\right)\right) = \vec{0}$$

Induit 2

$$\vec{\text{rot}}(\nu \vec{\text{rot}} \vec{A}) - \vec{\text{grad}}(\nu \text{div} \vec{A}) = \vec{0}$$

CHAPITRE II

Formulation Mathématique Des Phénomènes Electromagnétiques

II.1. Introduction

II.2. Modèle Mathématique de l'Electromagnétisme

II.3 Hypothèse Simplification

II.4 Formulation électromagnétique à l'aide du potentiel vecteur magnétique

II.5. Exemple Illustratif Simple

II.6 Formulations Analytiques Monodimensionnelles en Coordonnées Cylindriques

II.7 Conclusion

II.1. Introduction :

L'électromagnétisme est une branche de la physique qui étudie l'ensemble des phénomènes électriques couplés.

Les phénomènes électromagnétiques se présentent dans plusieurs dispositifs, ces phénomènes sont produits par des charges électriques, des courants et des aimants permanents.

Les phénomènes électromagnétiques intervenant dans les dispositifs électrotechniques sont décrits par les équations de Maxwell. Ces phénomènes s'appliquent à des milieux très différents qu'on peut diviser en générale en deux : un milieu conducteur et un milieu non conducteur [7].

II.2. Modèle Mathématique de l'Electromagnétisme :

Il s'agit des équations de Maxwell qui décrivent l'évolution spatiale et temporelle des phénomènes électromagnétiques. Ces équations constituent un système d'équation aux dérivées partielles reliant les phénomènes électriques et magnétiques caractérisés par le champ électrique \vec{E} et le champ magnétique \vec{H} :

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J}_t \quad (\text{Équation de Maxwell- Ampère}) \quad (\text{II.1})$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Équation de Maxwell- Faraday}) \quad (\text{II.2})$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{Théorème de convergence}) \quad (\text{II.3})$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho \quad (\text{Théorèmes de Gauss}) \quad (\text{II.4})$$

Avec :

\vec{B} : Induction magnétique

\vec{D} : Induction électrique

\vec{E} : Champ électrique

\vec{H} : Champ magnétique

\vec{J}_t : Densité de courant Total

ρ : Densité de charge volumique

Avec :

$$J_t = J_s + J_D$$

Ou :

J_s : Densité de courant de conduction

J_D : Densité de courant de déplacement

Chacune de ces équations traduit les propriétés physiques des grandeurs électromagnétiques.

A ces équations, on ajoute les équations de comportement du milieu :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_r \quad (\text{Relation magnétique}) \quad (\text{II.5})$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (\text{Relation diélectrique}) \quad (\text{II.6})$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} + \sigma(\vec{v} \wedge \vec{B}) + \vec{J}_s \quad (\text{Loi d'ohm}) \quad (\text{II.7})$$

Où : $B_r, \vec{v}, \vec{J}_s, \varepsilon, \mu$ et σ désignent respectivement l'induction magnétique rémanente la vitesse en un point (si la pièce a étudiée en mouvement), la densité du courant d'excitation (courant de la source), la permittivité électrique, la perméabilité magnétique et la conductivité électrique. Avec :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

Tel que :

ε_0 : est la permittivité du vide est égale à $10^{-9}/36\pi$ (F/m)

ε_r : est la permittivité relative du milieu considéré

μ_0 : est la perméabilité du vide est égale à $4 \pi 10^{-7}$ (H/m)

μ_r : est la perméabilité relative du milieu considéré

II.3 Hypothèse Simplification

La plupart des travaux accomplis jusqu'à présent dans le domaine de calcul des champs et des courants induits pour les systèmes électromagnétiques, sont fondés sur les hypothèses suivantes :

- La densité volumique de charge est considérée comme nulle ($\rho=0$), ce qui est le cas de presque tous les dispositifs classiques à induction.

- L'induction magnétique rémanente, peut être considérée comme nulle ($\vec{B}_r = 0$) dans le cas où il n'y a pas d'aimants permanents.
- En l'absence de mouvement ($v=0$), on aura $(\vec{v} \wedge \vec{B}) = 0$.

Avec les hypothèses ainsi formulées. Les équations de Maxwell en régime sinusoïdal sont :

$$\text{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \vec{J}_s \quad (\text{II.8})$$

$$\text{rot} \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad (\text{II.9})$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{II.10})$$

$$\text{div} \vec{D} = 0 \quad (\text{II.11})$$

Ce système des équations possède plusieurs inconnues, pour réduire le nombre d'inconnus on est amené à utiliser des formulations adéquates.

II.4 Formulation électromagnétique à l'aide du potentiel vecteur magnétique

L'utilisation du potentiel vecteur magnétique \vec{A} et du potentiel scalaire électrique V permet de condenser ce système et de réduire le nombre des inconnues. L'équation (II.10) nous donne :

$$\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad (\text{II.12})$$

L'équation (II.9) donne après avoir remplacé \vec{B} par $\text{rot} \vec{A}$:

$$\text{rot} (\vec{E} + j\omega \vec{A}) = \vec{0} \Rightarrow (\vec{E} + j\omega \vec{A}) = -\text{grad} V \quad (\text{II.13})$$

$$\text{donc :} \quad \vec{E} = -\left(j\omega \vec{A} + \text{grad} V \right) \quad (\text{II.14})$$

L'équation (II.8) devient :

$$\vec{\text{rot}}\left(\frac{1}{\mu} \vec{\text{rot}} \vec{A}\right) = -\sigma\left(j\omega \vec{A} + \vec{\text{grad}} V\right) + \vec{J}_s \quad (\text{II.15})$$

L'approche qui est souvent utilisée en régime variable dans le temps est

$$\vec{A}^* = \vec{A} + \vec{\text{grad}}\left(\int V dt\right)$$

Donc l'équation (II.15) devient :

$$\vec{\text{rot}}\left(\frac{1}{\mu} \vec{\text{rot}} \vec{A}^*\right) + j\omega\sigma \vec{A}^* = \vec{J}_s \quad (\text{II.16})$$

Pour plus de commodité on peut noter par la suite \vec{A}^* par \vec{A} .

Dans une configuration axisymétrique la formulation à l'aide de potentiel vecteur offre un double intérêt :

- Le système à une seule inconnue \vec{A}
- Cette inconnue ne possède qu'une seule composant $\vec{A} = A_\varphi \vec{i}_\varphi = A \vec{i}_\varphi$

Les courant étant perpendiculaire au plan d'étude, les différentes grandeurs ont les composantes suivantes :

$$\vec{J}_s \begin{bmatrix} 0 \\ J_{s\varphi} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{E} \begin{bmatrix} 0 \\ E_\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{A} \begin{bmatrix} 0 \\ A_\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{B} \begin{bmatrix} B_r \\ 0 \\ B_z \end{bmatrix}, \quad \vec{H} \begin{bmatrix} H_r \\ 0 \\ H_z \end{bmatrix}$$

En coordonnées cylindriques $\vec{\text{rot}} \vec{A}$ s'écrit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right) \vec{e}_z \quad (\text{II.17})$$

En tenant compte des hypothèses précédentes, on écrit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \begin{cases} -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} & \vec{e}_r \\ 0 & \vec{e}_\varphi \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} & \vec{e}_z \end{cases}$$

La formulation axisymétrique de l'équation (II.16) devient :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right) = j\omega\sigma A_\varphi - J_{s\varphi} \quad (\text{II.18})$$

Pour plus de commodité, on note $A_\varphi = A$, $J_{s\varphi} = J_s$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu r} \frac{\partial(rA)}{\partial r} \right) = j\omega\sigma A - J_s \quad (\text{II.19})$$

II.5 Exemple Illustratif Simple

Dans cet exemple on étudiera un dispositif cylindrique à une symétrie de révolution par rapport à l'axe dont la solution analytique est connue. Ce dispositif consiste en un conducteur et une charge de forme cylindrique l'inducteur est parcourue par une densité de courant J_s . Fig.1

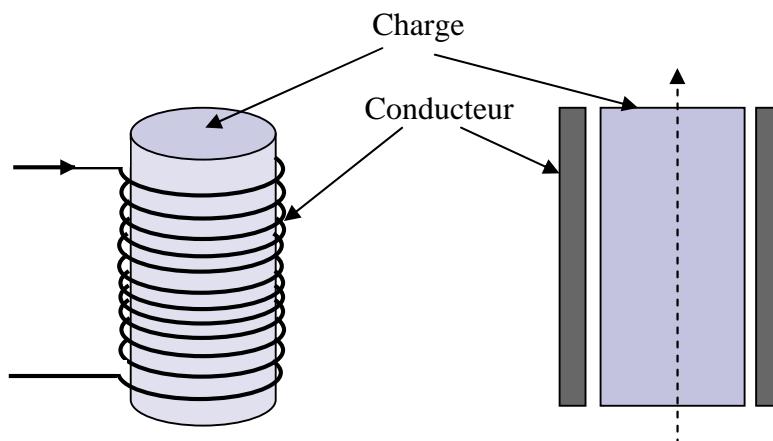


Fig.1. Représentation cylindrique et axisymétrique

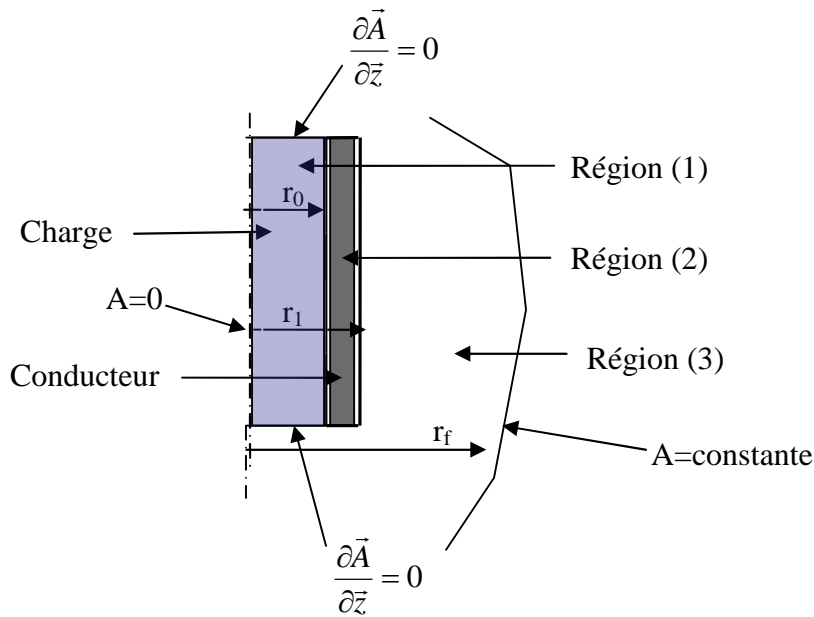


Fig.2. Modèle axisymétrique

II.6 Formulations Analytiques Monodimensionnelles en Coordonnées Cylindriques

Considérons que le dispositif (Fig.2) a une géométrie très long suivant z dans ce cas le potentiel vecteur magnétique a une seul composante suivante r.

L'équation électromagnétique (II.9) devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu r} \frac{\partial(rA)}{\partial r} \right) = j\omega\sigma A - J_s \tag{II.6.1}$$

$$\text{Avec : } \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{d(rA)}{dr} \tag{II.6.2}$$

La résolution de cette équation sera établie pour les différentes régions du dispositif (charge, inducteur et air)

Région (1) : dans la charge

$$0 < r < r_0$$

$$\begin{cases} J_s = 0 \\ \sigma = 0 \\ \mu = \mu_1 \end{cases}$$

L'intégration de l'équation (I.6.1) dans cette région donne :

$$A_1 = \frac{1}{2} c_1 \mu_1 . r + \frac{D_1}{r} \quad (\text{I.6.3})$$

De l'équation (I.6.2) on trouve :

$$B_1 = c_1 \mu_1 \quad (\text{I.6.4})$$

Région (2) : dans l'inducteur

$$r_0 < r < r_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} J = J_s = \frac{I_s}{s} \\ \sigma = 0 \\ \mu = \mu_2 \end{array} \right.$$

Avec I_s : est le courant de source

L'intégration de l'équation (I.6.1) dans cette région donne :

$$A_2 = -\frac{1}{3} . J_s \mu_2 . r^2 + \frac{1}{2} c_2 \mu_2 . r + \frac{D_2}{r} \quad (\text{I.6.5})$$

De l'équation (I.6.2) on trouve :

$$B_2 = -J_s \mu_2 . r + c_2 \mu_2 \quad (\text{I.6.6})$$

Région (3) : dans l'air

$$r_1 < r < r_f$$

$$\left\{ \begin{array}{l} J = 0 \\ \sigma = 0 \\ \mu = \mu_3 \end{array} \right.$$

L'intégration de l'équation (I.6.1) dans cette région donne

$$A_3 = \frac{1}{2} c_3 \mu_3 . r + \frac{D_3}{r} \quad (\text{I.6.7})$$

De l'équation (I.6.2) on trouve :

$$B_3 = c_3 \mu_3 \quad (\text{I.6.8})$$

Calcul les coefficients suivant : $D_1, D_2, D_3, c_1, c_2, c_3$

- Pour $r \approx 0 \Rightarrow A_1 = 0$

De l'équation (I.6.3) on trouve que $D_1 = 0$

- Pour $r \approx \infty$ on trouve que : $B_3 = 0$

De l'équation (I.6.8) on trouve que : $c_3 = 0$

- Pour $r = r_1 \Rightarrow H_2 = H_3 \Rightarrow \frac{B_2}{\mu_2} = \frac{B_3}{\mu_3}$ (la composante tangentielle est continue)

De l'équation (I.6.6) on trouve que : $c_2 = J_s r_1$

- Pour $r = r_0 \Rightarrow H_1 = H_2 \Rightarrow \frac{B_1}{\mu_1} = \frac{B_2}{\mu_2}$ (la composante tangentielle est continue)

De l'équation (I.6.4) et (I.6.6) on trouve que $c_1 = (r_1 - r_0)J_s$

- Pour $r = r_0$ on $A_1 = A_2$

De l'équation (I.6.3) et (I.6.5) on trouve que $D_2 = \frac{1}{3} J_s \cdot \mu_2 \cdot r_0^3 + \left(\frac{1}{2} \cdot (r_1 - r_0) \cdot \mu_1 - \frac{1}{2} J_s \mu_2 \cdot r_1\right) r_0^2$

- Pour $r = r_1 \Rightarrow A_2 = A_3$

De l'équation (I.6.5) et (I.6.7) on trouve que : $D_3 = -\frac{1}{3} \mu_2 r_1^3 + \frac{1}{2} c_2 \mu_2 r_1^2 + D_2$

Finalement on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 = 0 \\ D_2 = \frac{1}{3} J_s \cdot \mu_2 \cdot r_0^3 + \left(\frac{1}{2} \cdot (r_1 - r_0) \cdot \mu_1 - \frac{1}{2} J_s \mu_2 \cdot r_1\right) r_0^2 \\ D_3 = -\frac{1}{3} \mu_2 r_1^3 + \frac{1}{2} c_2 \mu_2 r_1^2 + D_2 \\ c_1 = (r_1 - r_2) \cdot J_s \\ c_2 = J_s r_1 \\ c_3 = 0 \end{array} \right.$$

Applications :

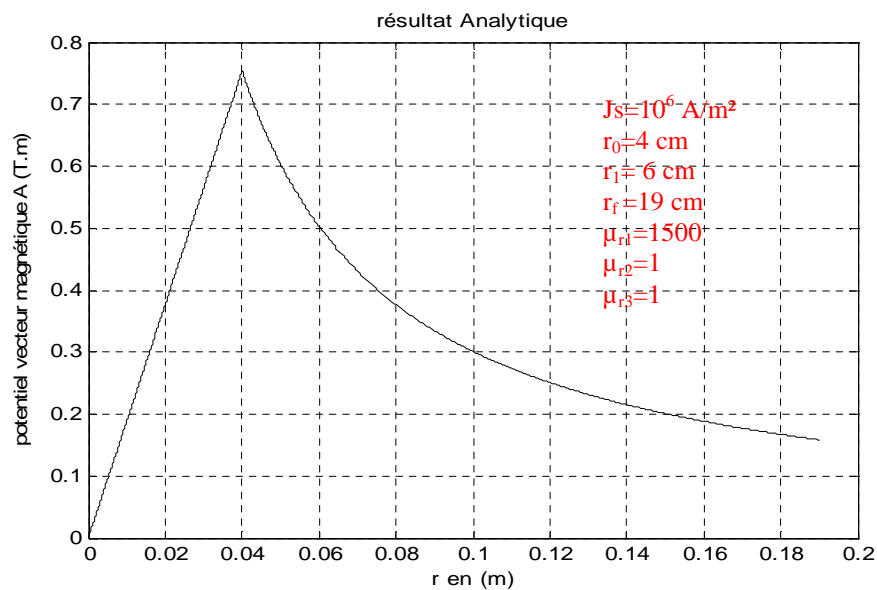


Fig II.3.Potentiel vecteur magnétique

II.7 Conclusion

Nous sommes intéressés, dans ce chapitre à la formulation mathématique des équations de Maxwell qui décrivent tout dispositif électrotechnique.

Nous avons également étudié un dispositif cylindrique de géométrie simple pour avoir la distribution de potentiel vecteur magnétique le long d'un chemin radial. Le but de cette étude analytique est la validation des résultats obtenus par des méthodes numériques, le développement des méthodes numériques capables pour la résolution des équations aux dérivées partielles fera l'objet du prochain chapitre.

CHAPITRE III

Résolution des problèmes Electromagnétiques Par les Méthodes Numériques

III.1 Introduction

III.2 Méthode Différences Finies

III.3 La Méthode Des Eléments Finis

III.4 La Méthode des Volumes Finis

III.5 Exemple Illustratif De La *MVF*

III.6 Validation De La Méthode Des Volumes Finis

III.7 CONCLUSION

III.1 Introduction

La résolution des équations aux dérivées partielles (EDP) se fait soit par des méthodes analytiques dans les cas simples soit généralement par des méthodes numériques tel que la méthode des différences finis (MDF), la méthode des éléments finis (MEF), la méthode des volumes finis (MVF)..ect. Ces méthodes ont été améliorées par l'avènement de l'informatique moderne.

L'utilisation des méthodes numériques de discrétisation consiste à ramener la résolution de EDP à la résolution d'un système d'équations algébriques dans le domaine d'étude compte tenu des conditions au limites.

La solution obtenue permet de connaître l'inconnu dans chaque élément fini, Ainsi la distribution des grandeurs physiques dans le domaine d'étude.

Pour notre travail nous avons utilisé la MVF est cela pour deux raisons; la première est qu'elle est facile à concevoir contrairement à la MEF et la deuxième est qu'elle peut être appliquer à des géométries complexes contrairement à la MDF.

Ce chapitre sera consacré à la présentation de la méthode des volumes finis de chacune équations étudiées dans le cas axisymétrique.

III.2 Méthode Différences Finies

C'est une méthode basée sur le théorème de Taylor ou l'on remplace l'opérateur différentiel par opérateur aux différences.

le domaine d'étude est découpé au moyen d'une grille carrée le cas bidimensionnel et une grille cubique dans le cas tridimensionnel , l'équation à résoudre est écrite pour chaque point ou nœud de maillage , pour cela on aura un système d'équation possédant un nombre d'équations égal au nombre de nœuds .

Cette méthode s'adapte mal aux objets de géométrie complexe, elle est plutôt réservée aux domaines à géométrie simple et aux frontières régulières tels que les carrés et les rectangles [7].

III.3 La Méthode Des Eléments Finis

C'est une méthode qui a été utilisée en premier lieu en génie civil et en mécanique et n'a trouvé sa place en génie électrique que vers les années soixante. Elle est plus générale car elle est mieux adaptée aux géométries complexes et aux non linéarités des matériaux.

Dans cette méthode on cherche à exprimer une formulation intégrale basée soit sur la méthode des résidus pondérés soit sur la méthode variationnelle. La méthode des éléments

finis consiste à subdiviser le domaine d'étude en domaines élémentaires appelés éléments finis et à représenter l'inconnue sur chaque élément par les fonctions d'interpolation simples en fonction des valeurs de l'inconnue en chacun des sommets de cet élément. L'inconnue devra vérifier globalement les conditions de continuité à l'interface et au passage d'un milieu à un autre.

Cette méthode est très puissante pour la résolution des équations différentielles surtout dans les géométries complexes. Sa mise en œuvre par contre, est assez compliquée et demande une place mémoire assez importante[7][8].

III.4 La Méthode des Volumes Finis

La MVF est une méthode de discrétisation. Elle est utilisée, en particulier en mécanique des fluides ou elle est apparue il y a une vingtaine d'années. Depuis, la méthode de volume finis a connu un essor considérable non seulement pour la modélisation en mécanique des fluides, mais aussi pour la modélisation d'autres branches de l'ingénierie scientifique : la thermique, l'électromagnétisme etc.

L'analyse mathématique de la méthode du volume finis a permis de développer récemment les principes fondamentaux qui en font une méthode de discrétisation performante. L'idée de base de la formulation des volumes finis est facile à comprendre et permet de donner l'interprétation physique des phénomènes.

Le domaine du calcul est subdivisé en un nombre d'éléments finis (figure III.1). Chaque élément contient quatre nœuds pour le cas bidimensionnel axisymétrique. Un volume fini entoure chaque nœud. L'équation différentielle est projetée sur une fonction de projection bien déterminée et ensuite est intégrée dans chacun des volumes élémentaires. Pour calculer l'intégrale dans ce volume élémentaire, la fonction inconnue est représentée à l'aide d'une fonction d'approximation (linéaire, parabolique, puissance, exponentielle, etc.) entre deux nœuds consécutifs. Ensuite, la forme intégrale est discrétisée dans le domaine d'étude.

L'équation discrétisée de cette façon exprime le principe de conservation pour l'inconnu dans l'élément de volume et la solution obtenue est constituée uniquement par les valeurs nodales.

Pour éclaircir tout ce qui est, on va donner un exemple illustratif [7][9][10].

III.5 Exemple Illustratif De La MVF

Rappelons la formulation en coordonnées cylindrique de l'équation électromagnétique :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu r} \frac{\partial(rA)}{\partial r} \right) = j\omega\sigma A - J_s \quad (\text{III.1})$$

Le domaine d'étude est subdivisé en un nombre fini de nœuds .Chaque volume entoure un nœuds principale « P ». Les nœuds voisins sont appelés « E » côté Est et « W » côté West. Les lignes en tirés représentent les interfaces entre les volumes finis « e » côté est et « w » côté West (Fig.III.1).

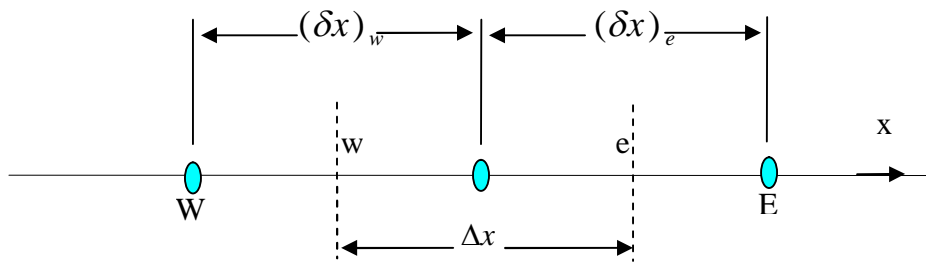


Fig.III.1. Illustratif de la MVF

Pour le problème à une dimension, le volume fini a une dimension $\Delta v = \Delta x \times 1 \times 1$

Dans cet exemple la fonction de projection est prise égale à l'unité .L'équation (III.1) est intégrée sur le volume correspondant au point « P », on obtient :

$$\int_w^e \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\mu r} \frac{d(rA)}{dr} \right) \right] dr = \int_w^e [j\omega\sigma A - J_s] dr \quad (III.2)$$

$$\int_w^e \frac{d}{dr} \left(k \frac{d(rA)}{dr} \right) dr = \int_w^e (j\omega\sigma A - J_s) dr \quad (III.3)$$

Avec $k = \frac{1}{\mu r}$

$$\left(k \frac{d(rA)}{dr} \right)_e - \left(k \frac{d(rA)}{dr} \right)_w = \int_w^e (j\omega\sigma A - J_s) dr \quad (III.4)$$

Une approximation linéaire a été choisit pour exprimer la variation de A entre deux noeuds voisins. Le résultat obtenu est constitué uniquement par les valeurs nodales.

$$\left[k_e \frac{(rA)_E - (rA)_P}{\Delta r_e} - k_w \frac{(rA)_P - (rA)_W}{\Delta r_w} \right] \Delta r = [j\omega\sigma_p A_p - J_{sp}] \Delta r \quad (III.5)$$

On met l'équation (III.5) sous la forme algébrique suivante :

$$a_p A_p = a_E A_E + a_W A_W + b \quad (III.6)$$

Tels que :

$$a_E = \frac{k_e r_E}{\Delta r_e}; \quad a_W = \frac{k_w r_W}{\Delta r_w}; \quad a_P = a_E + a_W + j\omega\sigma_p \Delta r; \quad b = J_s \Delta r$$

Ainsi, on obtient une équation algébrique reliant chaque nœud principal ‘‘P’’ avec les nœuds voisins ‘‘E’’ et ‘‘W’’. Si la discrétisation de domaine comporte N nœuds. Cela aboutit à un système de N équation à N inconnues qui exprime les valeurs nœuds de A. Le système obtenu sera résolu par des méthodes numériques de résolution (directes ou itératives). En partant de ce principe, on peut étendre la formulation monodimensionnelle au cas bidimensionnel axisymétrique.

III.6 Validation De La Méthode Des Volumes Finis

Une comparaison a été faite entre le résultat obtenu analytiquement (voir chapitre I) et celle obtenue par la MVF montre la précision de cette méthode.

La figure (III.2) montre la concordance du résultat obtenu analytiquement avec celle de la méthode des volumes finis

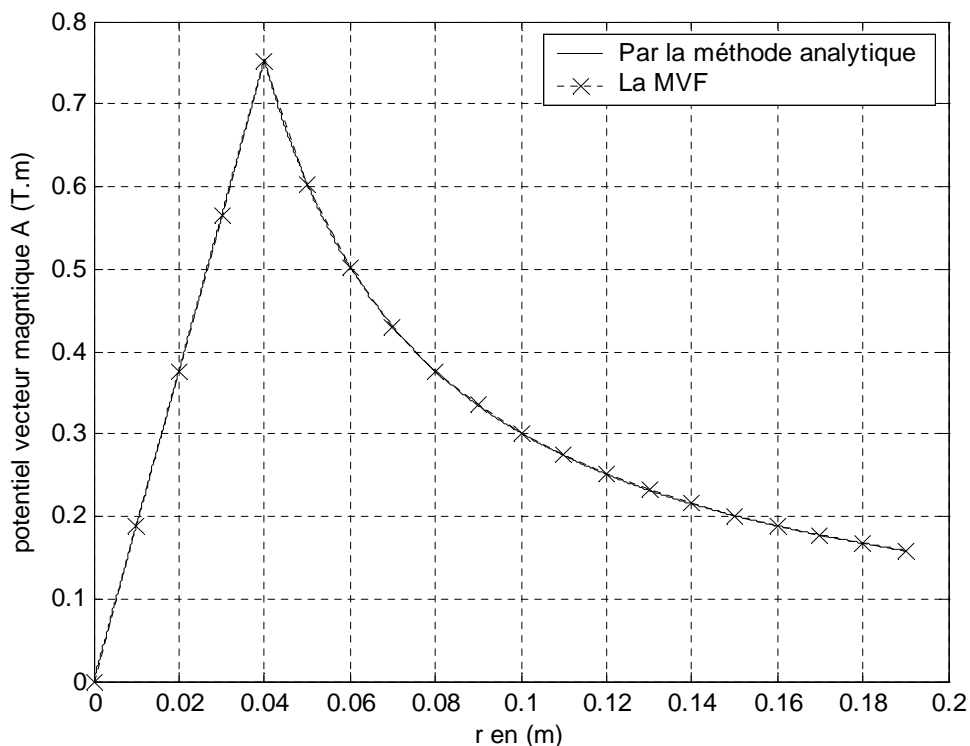


figure (III.2) comparaison entre la méthode analytique et la méthode numérique

III.7 CONCLUSION

Le présent chapitre a été consacré à la présentation de quelques méthodes numériques de résolution des problèmes électromagnétiques.

On a vu également la présentation et l'introduction d'une nouvelle méthode de résolution c'est la méthode des volumes finis, cette méthode est validée sur un exemple où la solution analytique est connue. Donc l'utilisation de cette méthode pour la résolution des problèmes complexes est possible.

CHAPITRE III

Résolution des problèmes Electromagnétiques Par les Méthodes Numériques

III.1 Introduction

III.2 Méthode Différences Finies

III.3 La Méthode Des Eléments Finis

III.4 La Méthode des Volumes Finis

III.5 Exemple Illustratif De La *MVF*

III.6 Validation De La Méthode Des Volumes Finis

III.7 CONCLUSION

III.1 Introduction

La résolution des équations aux dérivées partielles (EDP) se fait soit par des méthodes analytiques dans les cas simples soit généralement par des méthodes numériques tel que la méthode des différences finis (MDF), la méthode des éléments finis (MEF), la méthode des volumes finis (MVF)..ect. Ces méthodes ont été améliorées par l'avènement de l'informatique moderne.

L'utilisation des méthodes numériques de discrétisation consiste à ramener la résolution de EDP à la résolution d'un système d'équations algébriques dans le domaine d'étude compte tenu des conditions au limites.

La solution obtenue permet de connaître l'inconnu dans chaque élément fini, Ainsi la distribution des grandeurs physiques dans le domaine d'étude.

Pour notre travail nous avons utilisé la MVF est cela pour deux raisons; la première est qu'elle est facile à concevoir contrairement à la MEF et la deuxième est qu'elle peut être appliquer à des géométries complexes contrairement à la MDF.

Ce chapitre sera consacré à la présentation de la méthode des volumes finis de chacune équations étudiées dans le cas axisymétrique.

III.2 Méthode Différences Finies

C'est une méthode basée sur le théorème de Taylor ou l'on remplace l'opérateur différentiel par opérateur aux différences.

le domaine d'étude est découpé au moyen d'une grille carrée le cas bidimensionnel et une grille cubique dans le cas tridimensionnel , l'équation à résoudre est écrite pour chaque point ou nœud de maillage , pour cela on aura un système d'équation possédant un nombre d'équations égal au nombre de nœuds .

Cette méthode s'adapte mal aux objets de géométrie complexe, elle est plutôt réservée aux domaines à géométrie simple et aux frontières régulières tels que les carrés et les rectangles [7].

III.3 La Méthode Des Eléments Finis

C'est une méthode qui a été utilisée en premier lieu en génie civil et en mécanique et n'a trouvé sa place en génie électrique que vers les années soixante. Elle est plus générale car elle est mieux adaptée aux géométries complexes et aux non linéarités des matériaux.

Dans cette méthode on cherche à exprimer une formulation intégrale basée soit sur la méthode des résidus pondérés soit sur la méthode variationnelle. La méthode des éléments

finis consiste à subdiviser le domaine d'étude en domaines élémentaires appelés éléments finis et à représenter l'inconnue sur chaque élément par les fonctions d'interpolation simples en fonction des valeurs de l'inconnue en chacun des sommets de cet élément. L'inconnue devra vérifier globalement les conditions de continuité à l'interface et au passage d'un milieu à un autre.

Cette méthode est très puissante pour la résolution des équations différentielles surtout dans les géométries complexes. Sa mise en œuvre par contre, est assez compliquée et demande une place mémoire assez importante[7][8].

III.4 La Méthode des Volumes Finis

La MVF est une méthode de discrétisation. Elle est utilisée, en particulier en mécanique des fluides ou elle est apparue il y a une vingtaine d'années. Depuis, la méthode de volume finis a connu un essor considérable non seulement pour la modélisation en mécanique des fluides, mais aussi pour la modélisation d'autres branches de l'ingénierie scientifique : la thermique, l'électromagnétisme etc.

L'analyse mathématique de la méthode du volume finis a permis de développer récemment les principes fondamentaux qui en font une méthode de discrétisation performante. L'idée de base de la formulation des volumes finis est facile à comprendre et permet de donner l'interprétation physique des phénomènes.

Le domaine du calcul est subdivisé en un nombre d'éléments finis (figure III.1). Chaque élément contient quatre nœuds pour le cas bidimensionnel axisymétrique. Un volume fini entoure chaque nœud. L'équation différentielle est projetée sur une fonction de projection bien déterminée et ensuite est intégrée dans chacun des volumes élémentaires. Pour calculer l'intégrale dans ce volume élémentaire, la fonction inconnue est représentée à l'aide d'une fonction d'approximation (linéaire, parabolique, puissance, exponentielle, etc.) entre deux nœuds consécutifs. Ensuite, la forme intégrale est discrétisée dans le domaine d'étude.

L'équation discrétisée de cette façon exprime le principe de conservation pour l'inconnu dans l'élément de volume et la solution obtenue est constituée uniquement par les valeurs nodales. Pour éclaircir tout ce qui est, on va donner un exemple illustratif [7][9][10].

III.5 Exemple Illustratif De La MVF

Rappelons la formulation en coordonnées cylindrique de l'équation électromagnétique :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu r} \frac{\partial(rA)}{\partial r} \right) = j\omega\sigma A - J_s \quad (\text{III.1})$$

Le domaine d'étude est subdivisé en un nombre fini de nœuds .Chaque volume entoure un nœuds principale « P ». Les nœuds voisins sont appelés « E » côté Est et « W » côté West. Les lignes en tirés représentent les interfaces entre les volumes finis « e » côté est et « w » côté West (Fig.III.1).

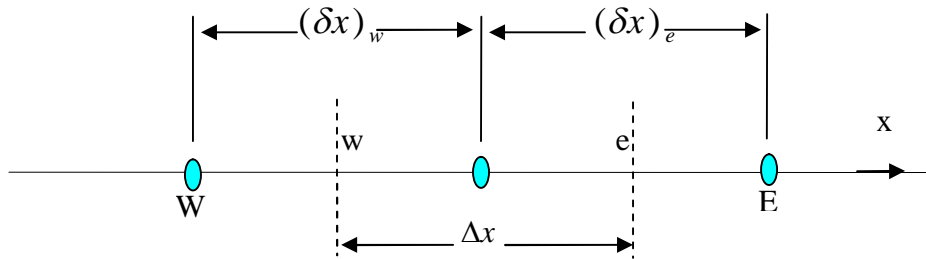


Fig.III.1. Illustratif de la MVF

Pour le problème à une dimension, le volume fini a une dimension $\Delta v = \Delta x \times 1 \times 1$
 Dans cet exemple la fonction de projection est prise égale à l'unité .L'équation (III.1) est intégrée sur le volume correspondant au point « P », on obtient :

$$\int_w^e \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\mu r} \frac{d(rA)}{dr} \right) \right] dr = \int_w^e [j\omega\sigma A - J_s] dr \quad (III.2)$$

$$\int_w^e \frac{d}{dr} \left(k \frac{d(rA)}{dr} \right) dr = \int_w^e (j\omega\sigma A - J_s) dr \quad (III.3)$$

Avec $k = \frac{1}{\mu r}$

$$\left(k \frac{d(rA)}{dr} \right)_e - \left(k \frac{d(rA)}{dr} \right)_w = \int_w^e (j\omega\sigma A - J_s) dr \quad (III.4)$$

Une approximation linéaire a été choisit pour exprimer la variation de A entre deux noeuds voisins. Le résultat obtenu est constitué uniquement par les valeurs nodales.

$$\left[k_e \frac{(rA)_E - (rA)_P}{\Delta r_e} - k_w \frac{(rA)_P - (rA)_W}{\Delta r_w} \right] \Delta r = [j\omega\sigma_p A_p - J_{sp}] \Delta r \quad (III.5)$$

On met l'équation (III.5) sous la forme algébrique suivante :

$$a_p A_p = a_E A_E + a_W A_W + b \quad (III.6)$$

Tels que :

$$a_E = \frac{k_e r_E}{\Delta r_e}; \quad a_W = \frac{k_w r_W}{\Delta r_w}; \quad a_P = a_E + a_W + j\omega\sigma_p \Delta r; \quad b = J_s \Delta r$$

Ainsi, on obtient une équation algébrique reliant chaque nœud principal ‘‘P’’ avec les nœuds voisins ‘‘E’’ et ‘‘W’’. Si la discrétisation de domaine comporte N nœuds. Cela aboutit à un système de N équation à N inconnues qui exprime les valeurs nœuds de A. Le système obtenu sera résolu par des méthodes numériques de résolution (directes ou itératives). En partant de ce principe, on peut étendre la formulation monodimensionnelle au cas bidimensionnel axisymétrique.

III.6 Validation De La Méthode Des Volumes Finis

Une comparaison a été faite entre le résultat obtenu analytiquement (voir chapitre I) et celle obtenue par la MVF montre la précision de cette méthode.

La figure (III.2) montre la concordance du résultat obtenu analytiquement avec celle de la méthode des volumes finis

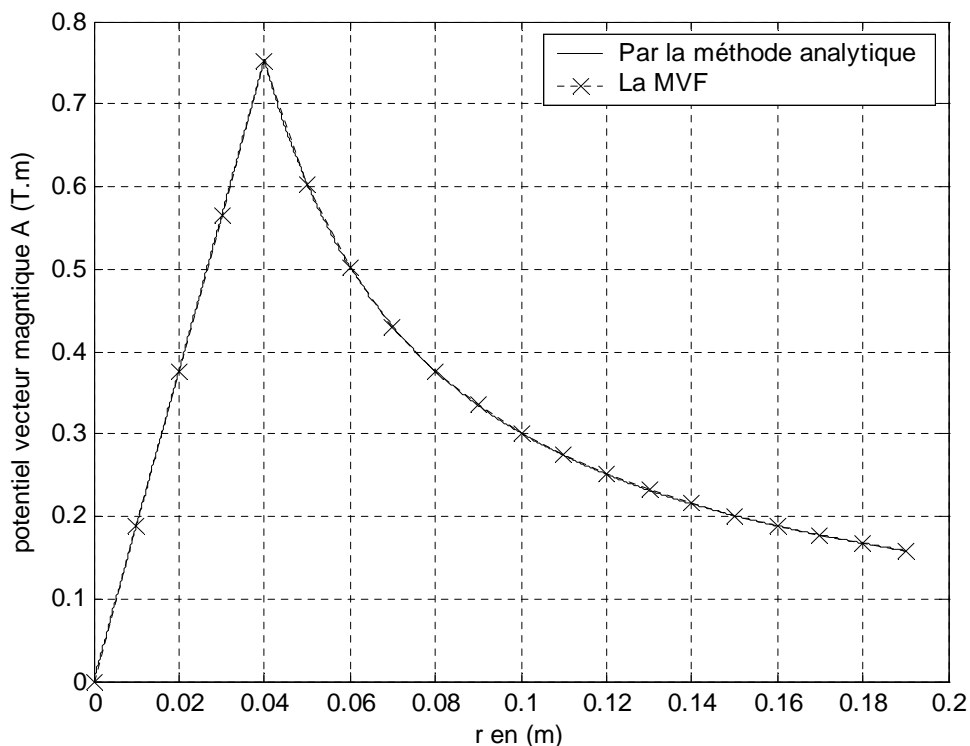


figure (III.2) comparaison entre la méthode analytique et la méthode numérique

III.7 CONCLUSION

Le présent chapitre a été consacré à la présentation de quelques méthodes numériques de résolution des problèmes électromagnétiques.

On a vu également la présentation et l'introduction d'une nouvelle méthode de résolution c'est la méthode des volumes finis, cette méthode est validée sur un exemple où la solution analytique est connue. Donc l'utilisation de cette méthode pour la résolution des problèmes complexes est possible.

Chapitre IV

Formalisation De L'équation Electromagnétique Dans Cas Axisymétrique Par La Méthode Des Volumes Finis

IV.1 Introduction

IV.2 Formulation axisymétrique de l'équation électromagnétique par la MVF

IV.3 Condition Aux Limites

IV.4 Discrétisation du Domaine

IV.5 Méthodes de résolution des systèmes d'équations algébriques

IV.5.1 Méthodes Directes

IV.5.2 Méthodes Itératives

IV.5.2.1 Méthode de Jacobi

IV.5.2.2 Méthode de Gauss- Seidel

IV.5.2.3 Méthode de relaxation

IV.6 Conclusion

IV.1 Introduction

Le chapitre précédent contient des équations différentielles qui ne peuvent être résolues d'une manière générale par des méthodes analytiques, des méthodes numériques de discrétisation doivent être utilisées.

IV.2. Formulation axisymétrique de l'équation électromagnétique par la MVF

Rappelons la formulation en coordonnées axisymétriques de l'équation électromagnétique [10] :

$$-\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu r} \frac{\partial (rA)}{\partial r} \right) + j\omega\sigma A = J_s \quad (\text{IV.1})$$

Le domaine d'étude Ω est subdivisé en un nombre d'éléments finis. Un volume fini entoure chaque nœud (Fig. IV.1)

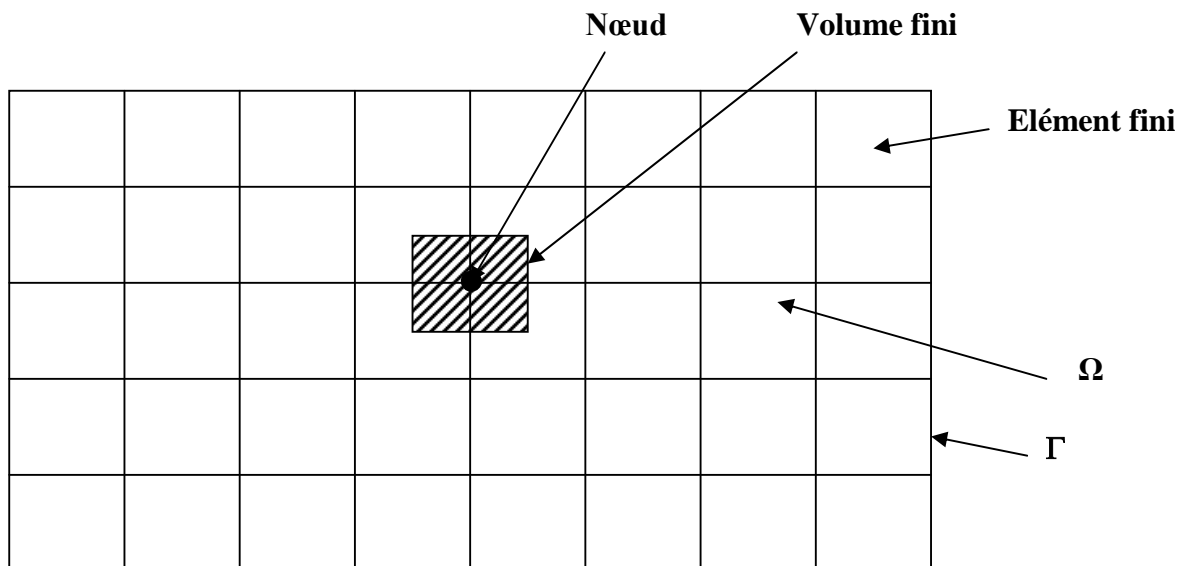


Fig. IV.1. Maillage du domaine d'étude

Chaque nœud principal "P" est entouré par quatre nœuds voisins celui du Nord "N", du sud "S", de l'est "E" et de l'ouest "W" (Fig. IV.2).

Les lignes en tirets représentent les interfaces entre les volumes finis. Le volume fini est délimité par les points ("e" : est, "w" : ouest, "n" : nord et "s" : sud).

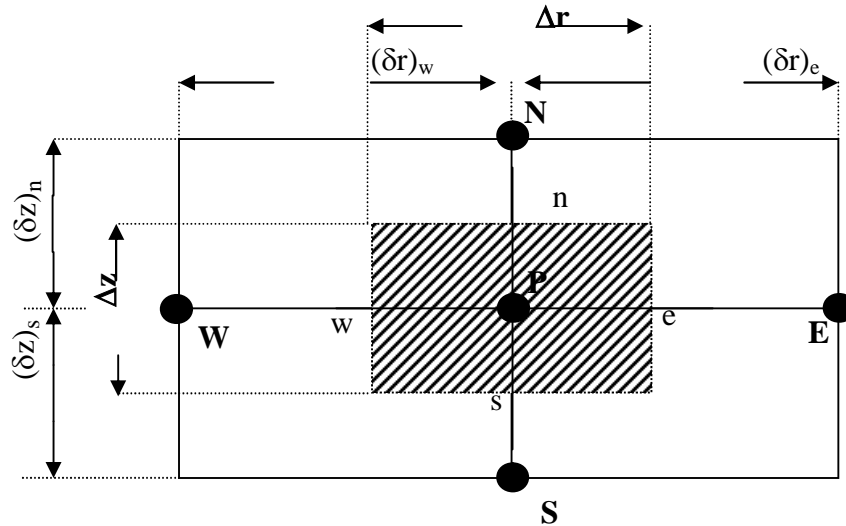


Fig. IV.2. Description d'un volume fini

On projette l'équation différentielle (IV.1) sur une fonction de projection β_i , puis on l'intègre sur le volume fini correspondant au nœud "P", on obtient :

$$\iint_{r,z} \beta_i \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu r} \frac{\partial (rA)}{\partial r} \right) \right] r dr dz = \iint_{r,z} \beta_i [j\omega\sigma A - J_s] r dr dz \quad (IV.2)$$

Où :

- β_i : Fonction de projection choisie $1/r$
(pour la méthode des éléments finis $\beta_i = \alpha_i/r$)
- α_i : Fonction d'interpolation.

L'équation (IV.2) devient alors :

$$\iint_{r,z} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu r} \frac{\partial (rA)}{\partial r} \right) \right] dr dz = \iint_{r,z} [j\omega\sigma A - J_s] dr dz \quad (IV.3)$$

L'intégrale de la partie gauche de l'égalité (IV.3) sur le volume fini limité par (e,w,s,n) est :

$$\int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right) dr dz + \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu r} \frac{\partial (rA)}{\partial r} \right) dr dz \quad (IV.4)$$

après intégration on aura :

$$\left[\left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right)_n - \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z} \right)_s \right] \Delta r + \left[\left(\frac{1}{\mu r} \frac{\partial (rA)}{\partial r} \right)_e - \left(\frac{1}{\mu r} \frac{\partial (rA)}{\partial r} \right)_w \right] \Delta z \quad (IV.5)$$

Pour exprimer la variation de A entre les nœuds voisins, on choisit un profil linéaire.

$$\left[\frac{A_N - A_P}{\mu_n (\delta z)_n} - \frac{A_P - A_S}{\mu_s (\delta z)_s} \right] \Delta r + \left[\frac{(rA)_E - (rA)_P}{\mu_e r_e (\delta x)_e} - \frac{(rA)_P - (rA)_W}{\mu_w r_w (\delta x)_w} \right] \Delta z \quad (IV.6)$$

L'intégrale de la partie droite de l'égalité (IV.3) donne :

$$\int \int_{r \ z} (j\omega\sigma A - J_s) dr dz = [j\omega\sigma_P A_P - J_{sP}] \Delta r \Delta z \quad (IV.7)$$

Ainsi l'équation algébrique finale s'écrit sous la forme :

$$k_P A_P = k_E A_E + k_W A_W + k_S A_S + k_N A_N + D_P \quad (IV.8)$$

tels que :

$$k_E = \frac{r_E \Delta z}{\mu_e r_e (\delta r)_e}$$

$$k_W = \frac{r_W \Delta z}{\mu_w r_w (\delta r)_w}$$

$$k_N = \frac{\Delta r}{\mu_n (\delta z)_n}$$

$$k_S = \frac{\Delta r}{\mu_s (\delta z)_s}$$

$$k_P = k_E + k_W + k_N + k_S + j\omega\sigma_P \Delta r \Delta z$$

$$D_P = J_{sP} \Delta r \Delta z$$

Le résultat obtenu représente une équation algébrique reliant l'inconnue au nœud principal "P" aux inconnues aux nœuds voisins "W", "E", "S" et "N".

IV.3 Condition Aux Limites

Jusqu'à ici on a trouvé les équations des nœuds internes, pour les limites du domaine d'étude, en général il existe deux types des conditions :

Condition de Dirichlet : Cette condition impose les valeurs de A aux bords du domaine d'étude, dans le dispositif de notre travail la condition de Dirichlet est homogène $A=0$ à une distance bien déterminée.

Condition de Neumann : Elle est utilisée dans le cas où le système à étudier présente des plans de symétrie.

IV.4 Discrétisation du Domaine :

On présente ci-dessous les limites du domaine

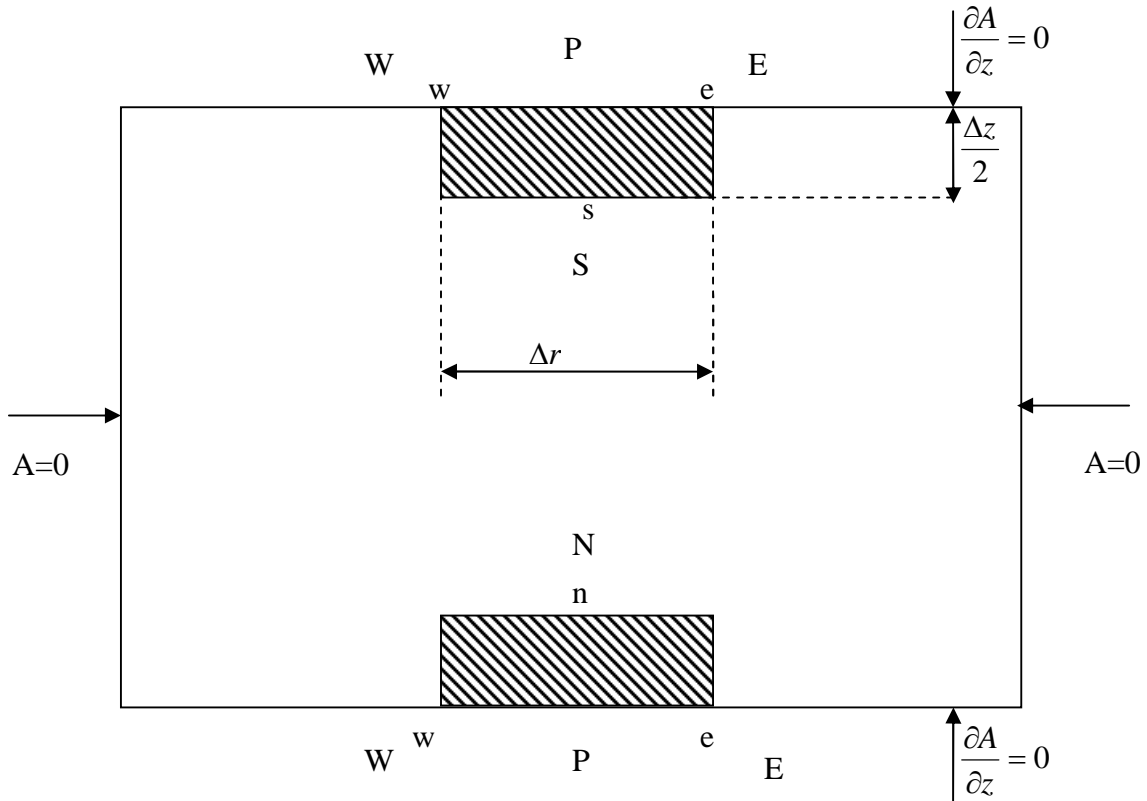


Fig.IV.3. Limites du domaine d'étude magnétique

On constate la limite où il a un point principal P et deux points voisins suivant de l'axe (r) qui sont E(Est), W(West) et un point sur l'axe (Oz) qui est N(Noid) ou S(Sud).

- **Cas ou le point voisin est le point N :**

$$\int_p^e \int_w^n \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) dr dz + \int_p^e \int_w^n \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu r} \cdot \frac{\partial(rA)}{\partial r} \right) dr dz = [j\omega\sigma A - J_s] dr dz \quad (IV,9)$$

Où :

$$\left(\left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right)_n - \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right)_p \right) \Delta r + \left(\left(\frac{1}{\mu r} \cdot \frac{\partial(rA)}{\partial r} \right)_e - \left(\frac{1}{\mu r} \cdot \frac{\partial(rA)}{\partial r} \right)_w \right) \frac{\Delta z}{2} = [j\omega\sigma_p - J_s] \Delta r \cdot \frac{\Delta z}{2} \quad (IV,10)$$

En utilisant la condition de NEUMANN $\left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z}\right)_p = 0$, l'équation précédente devint :

$$\left[\frac{1}{\mu_n} \frac{(A_N - A_p)}{(\partial z)_n} \right] \Delta r + \left[\frac{1}{\mu_e r_e} \frac{(r_E A_E - r_p A_p)}{(\partial r)_e} - \frac{1}{\mu_w r_w} \frac{(r_p A_p - r_w A_w)}{(\partial r)_w} \right] \frac{\Delta z}{2} = [j.w.\sigma_p - J_s] \Delta r \frac{\Delta z}{2} \quad (IV,11)$$

Soit :

$$k_E = \frac{r_E \Delta z}{2 \mu_e r_e (\delta r)_e}$$

$$k_W = \frac{r_W \Delta z}{2 \mu_w r_w (\delta r)_w}$$

$$k_N = \frac{\Delta r}{\mu n (\delta z)_n}$$

$$k_p = k_E + k_W + k_N + jw\sigma_p \Delta r \frac{\Delta z}{2}$$

$$d_p = J_s \Delta r \frac{\Delta z}{2}$$

Ainsi, l'équation algébrique sera :

$$k_p \cdot A_p = k_E \cdot A_E + k_W \cdot A_W + k_N \cdot A_N + d_p \quad (IV.12)$$

• **Cas ou le point voisin est le point S :**

$$\iint_{s_w}^p \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right) dr dz + \iint_{s_w}^p \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu r} \cdot \frac{\partial(rA)}{\partial r} \right) dr dz = [jw\sigma A - J_s] dr dz \quad (IV.13)$$

Où a

$$\left(\left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right)_p - \left(\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} \right)_s \right) \Delta r + \left(\left(\frac{1}{\mu r} \cdot \frac{\partial(rA)}{\partial r} \right)_e - \left(\frac{1}{\mu r} \cdot \frac{\partial(rA)}{\partial r} \right)_w \right) \frac{\Delta z}{2} = [j.w.\sigma_p - J_s] \Delta r \frac{\Delta z}{2} \quad (IV,14)$$

En utilisant la condition de Neumann $\left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial z}\right)_p = 0$, l'équation (IV.14) devint :

$$\left[\frac{1}{\mu_s} \frac{(A_p - A_s)}{(\partial z)_s} \right] \Delta r + \left[\frac{1}{\mu_e r_e} \frac{(r_E A_E - r_p A_p)}{(\partial r)_e} - \frac{1}{\mu_w r_w} \frac{(r_p A_p - r_w A_w)}{(\partial r)_w} \right] \frac{\Delta z}{2} = [j.w.\sigma_p - J_s] \Delta r \frac{\Delta z}{2} \quad (IV.15)$$

soit :

$$k_E = \frac{r_E \Delta z}{2 \mu_e r_e (\delta r)_e}$$

$$k_W = \frac{r_W \Delta z}{2 \mu_w r_w (\delta r)_w}$$

$$k_s = \frac{\Delta r}{\mu_s(\delta z)_s}$$

$$k_p = k_E + k_W + k_s + j\omega\sigma_p \Delta r \frac{\Delta z}{2}$$

$$d_p = J_{sp} \Delta r \frac{\Delta z}{2}$$

Ainsi, l'équation algébrique sera :

$$k_p \cdot A_p = k_E \cdot A_E + k_W \cdot A_W + k_s \cdot A_s + d_p \tag{IV.16}$$

IV.5 Méthodes de résolution des systèmes d'équations algébriques

Pour la résolution des systèmes d'équations algébriques linéaires obtenues, il existe deux grandes catégories de méthodes

- ☛ les méthodes directes
- ☛ Les méthodes itératives.

IV.5.1 Méthodes Directes

Ces méthodes conduisent à une solution en un nombre fini d'étapes (éventuellement grand), cependant, comme l'ordinateur représente chaque nombre par un ensemble limité de digits, les méthodes directes sont précis mais demandent beaucoup d'espace mémoire et de temps de calcul

IV.5.2 Méthodes Itératives

Pour les matrices d'ordre élevé, comportant de nombreux éléments nuls (matrice creuse), on utilise les méthodes itératives qui font passer d'un estimé $X^{(k)}$ de la solution à un autre estimé $X^{(k+1)}$ de cette solution, s'il y a convergence, la solution ne pourrait être atteinte qu'après un nombre d'itérations. Parmi ces méthodes, nous citons les méthodes linéaires :

IV.5.2.1 Méthode de Jacobi

Elle est basée sur la transformation du système $[A] [X] = [B]$ en

$$X_i^{(k+1)} = \left[b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} X_j^k \right] / a_{ii} ; (i \neq j), i = 1, \dots, n$$

On estime une valeur arbitraire initiale X_i^0 pour ($k=0$), le calcul sera arrêté si

$$\left| X_i^{(k+1)} - X_i^k \right| < \text{er}, \text{ dans le cas d'une précision absolue et } \frac{\left| X_i^{(k+1)} - X_i^k \right|}{X_i^k} < \varepsilon \text{ dans le cas}$$

d'une précision relative [23].

er : Précision imposée par l'utilisateur.

IV.5.2.2 Méthode de Gauss- Seidel

Cette méthode consiste à transformer le système $[A] [X] = [B]$ en :

$$X_i^{(k+1)} = \left[b_i - \sum_{j=1}^{(i-1)} a_{ij} X_j^{(k+1)} - \sum_{j=(i+1)}^n a_{ij} X_j^k \right] / a_{ij} \quad : i = 1, \dots, n$$

En donnant aux inconnues X_i^k des valeurs arbitraires initiales X_i^0 (pour $k=0$)

Le processus sera arrêté si : $\frac{\left| X_i^{(k+1)} - X_i^k \right|}{X_i^k} < \text{er}$ dans le cas d'une précision relative [23].

er : Précision imposée par l'utilisateur.

IV.5.2.3 Méthode de relaxation

Pour améliorer la rapidité de la convergence, si on est sûr qu'il n'y a pas divergence, dans le cas des méthodes itératives, on utilise un facteur de relaxation α tel que [23] :

$$X_i^{(k+1)} = X_i^k + \alpha(X_i^{(k+1)} - X_i^k)$$

IV.6 Conclusion

Le procéder du dispositif électromagnétique est décrit par des équations aux dérivées partielles, la résolution de ces équations passent par deux étapes :

- ☛ La première étape consiste à transformer les (EDP) en un système d'équations algébriques, en utilisant une des méthodes numériques de discrétisation (MVF).
- ☛ La seconde consiste à résoudre le système d'équations algébriques obtenu dont la solution donne les valeurs des grandeurs recherchées en utilisant les méthodes de résolution.

Dans le cadre de notre travail, la méthode utilisée pour la résolution des systèmes d'équations algébriques en électromagnétisme obtenues après avoir appliqué la MVF, est la méthode itérative.

CHAPITRE V

APPLICATIONS

- V.1 Introduction
- V.2 Représentation Bidimensionnelle
- V.3 Modèle Géométrique
- V.4 Conductions aux limites
- V.5 Résultats Magnétiques
- V.6 Résultats électriques
- V.7 Effet De La Conductivité Electrique Sur La Distribution De P.V.M
- V.8 Effet De La fréquence Sur La Distribution De P.V.M
- V.9 Distribution De potentiel vecteur magnétique dans l'espace
- V.10 Distribution De L'induction Magnétique
- V.11 Distribution des lignes du champ électrique
- V.12 Densité du Courants et de Puissance Induite Dans La Charge
- V.13 Distribution de la densité de puissance dans la charge

V.1 Introduction

Dans ce chapitre nous proposons comme application un système cylindrique axisymétrique (figure V.1) ce système à induction électromagnétique peut être schématiquement représenté par un ensemble de trois principaux objet : l'inducteur (conducteur en cuivre) la charge (matériau magnétique et/ou conducteur) et l'espace environnant (isolant électrique).

L'étude d'un tel système nécessite l'utilisation d'un modèle de représentation ou modélisation (analytique, numérique...). Cette modélisation constitue l'élément de base pour la conception et l'optimisation du dispositif avant sa réalisation.

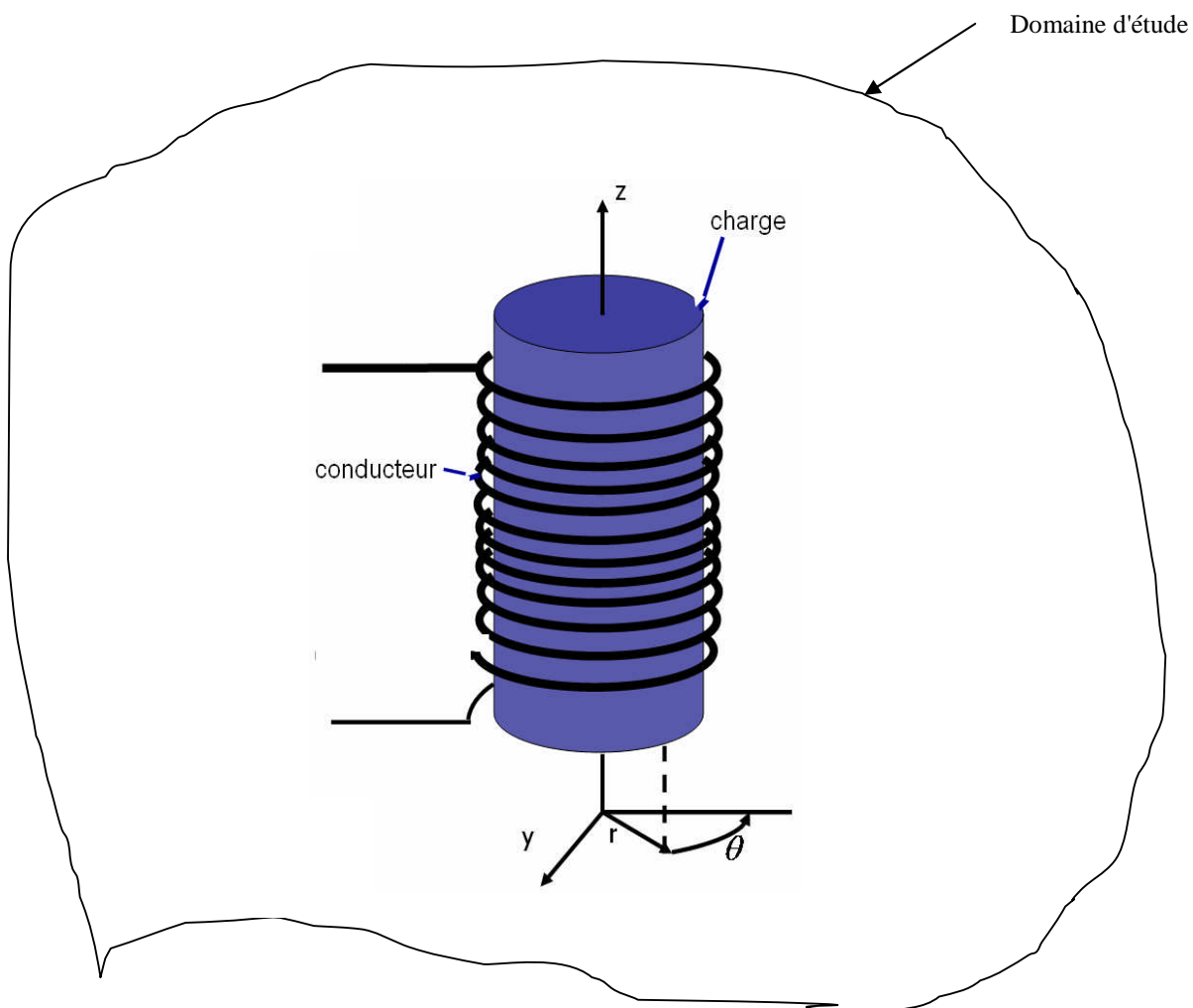


Fig.V.1 système à symétrie de révolution

V.2 Représentation Bidimensionnelle

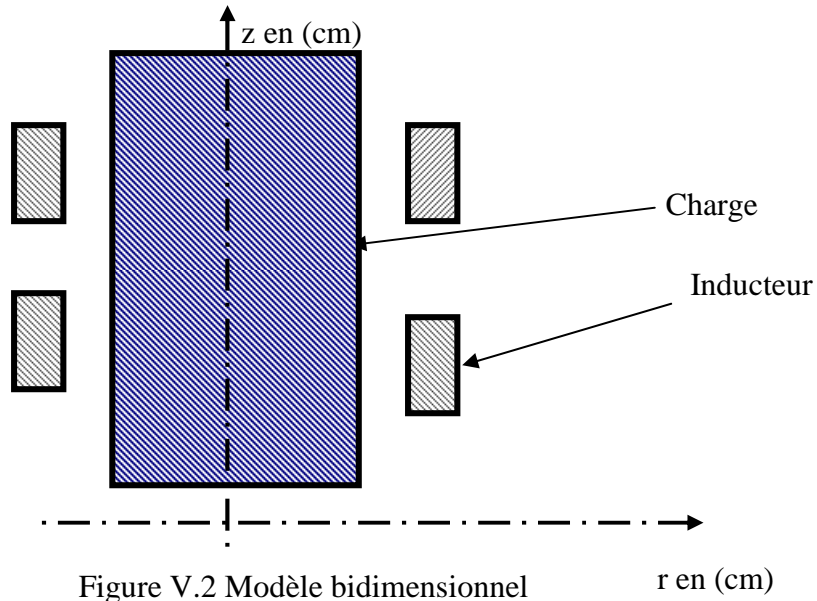


Figure V.2 Modèle bidimensionnel

V.3 Modèle Géométrique

Le système pourvu une symétrie de révolution, l'étude sera appliquée uniquement sur la moitié géométrique de la Figure V.2. Les dimensions du système seront présentées sur la Figure V.3.

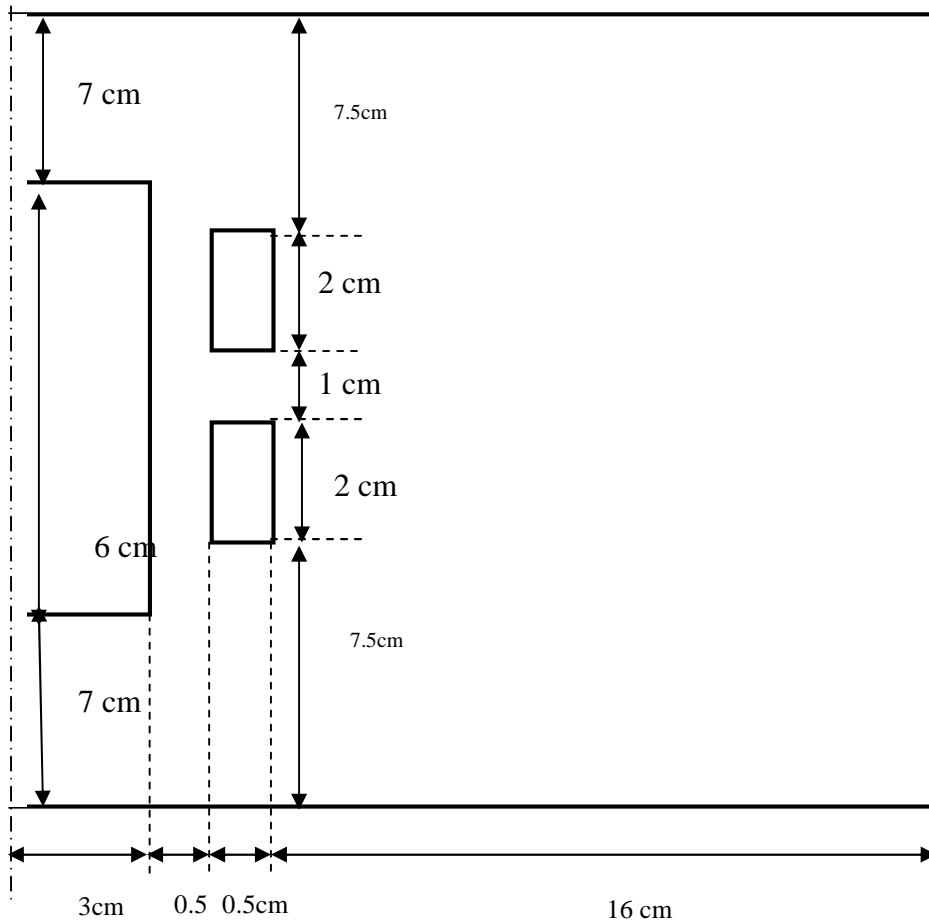


Fig.V.3 Modèle géométrique

V.4 Conductions aux limites

En raison de la symétrie cylindrique axiale, des conditions aux limites du type Dirichlet nulles sont imposées sur l'axe de symétrie et aussi les tronçons (AB-BC-CD) du domaine. Les points A, B, C et D, Limitant le domaine d'étude, sont placés suffisamment éloignés ce qui en parfaite concordance avec le type de conditions imposées. Ces choix est adopté suite à plusieurs testes effectués.

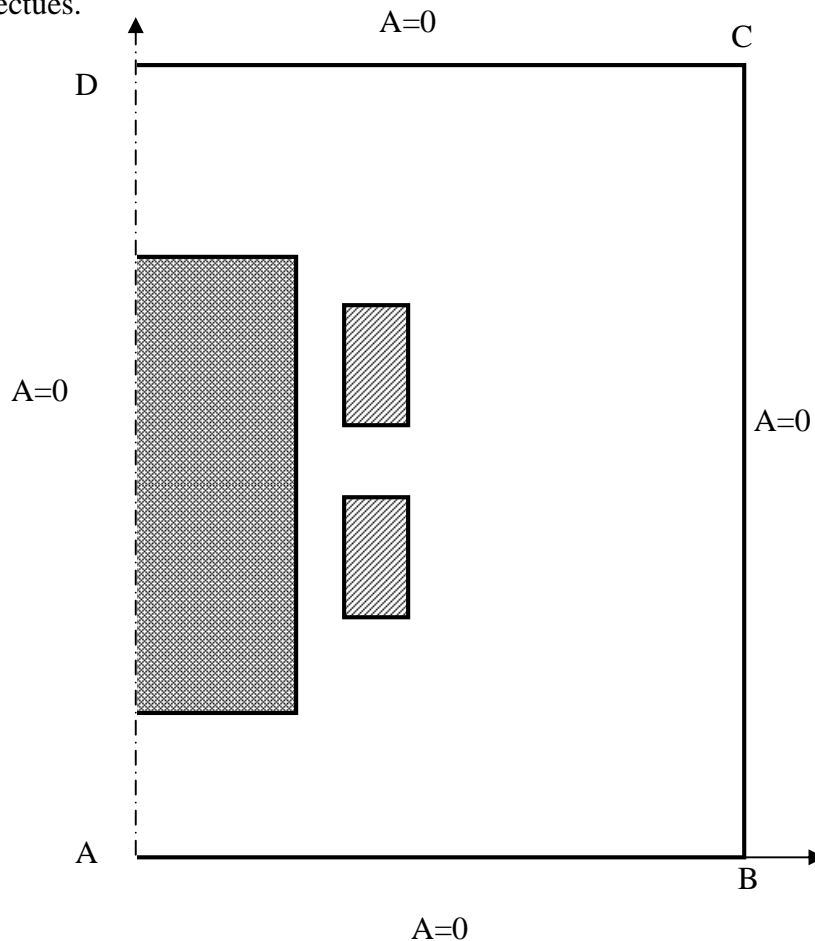


Fig.V.4 Conditions aux limites imposées au modèle d'étude.

V.5 Résultats Magnétiques

Dans le but de localiser tout les facteurs pouvant influencer sur le comportement électromagnétique du système nous avons choisi d'examiner, séparément, d'une manière paramétrique l'effet magnétique tels que la distribution du potentiel vecteur magnétique, l'induction magnétique ainsi que l'effet de peau sur la charge pour différents valeur de la fréquence.

V.6 Résultats électriques

Puisque le flux magnétique traversant la charge est variable dans le temps et d'après le théorème de Faraday ils existent des courants induits dans la charge "courants de Foucault",

donc nous avons étudié la distribution du champ électrique dans les différentes régions ainsi que la distribution de la densité de puissance induite dans la charge.

V.7 Effet De La Conductivité Electrique Sur La Distribution De P.V.M

La Figure V.6 montre la variation du potentiel vecteur magnétique \vec{A} le long d'un chemin radial situé entre les inducteurs, avec différentes valeurs de la conductivité électrique et pour une valeur constante de la fréquence ($f=10000$ Hz). On voit clairement l'ors que la conductivité électrique augmente le champ ne pénètre pas dans la charge ce phénomène est connu sous : " l'effet de peau".

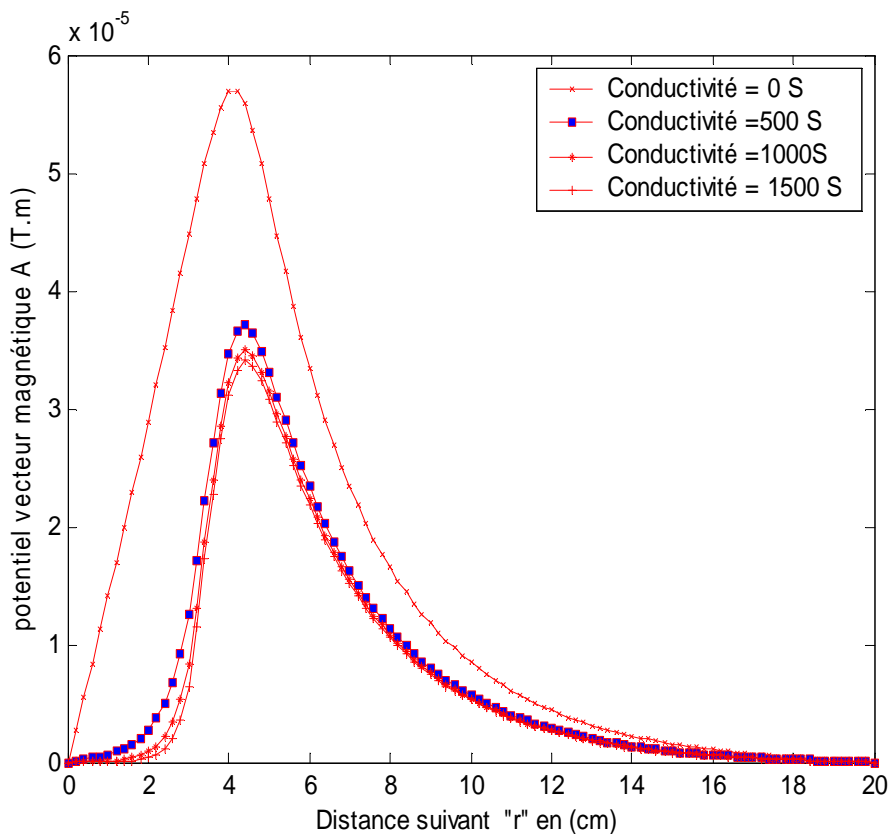


Fig.V.6. Effet de la conductivité électrique sur le PVM

Les figures V.7, IV8, V.9 et V.10 montrent la distribution du potentiel vecteur magnétique dans l'espace et dans la charge on voit que la pénétration du potentiel vecteur magnétique dans la charge est diminuée l'ors de l'augmentation de la conductivité électrique.

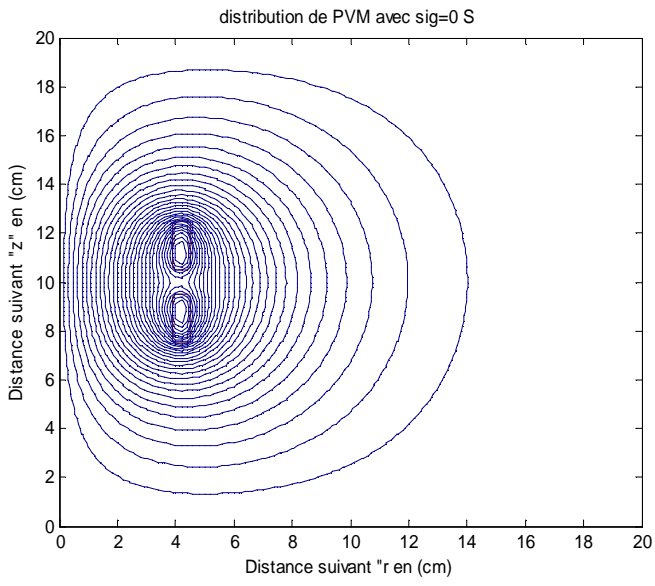


Fig.V.7. Distribution de PVM avec $\sigma=0$ S

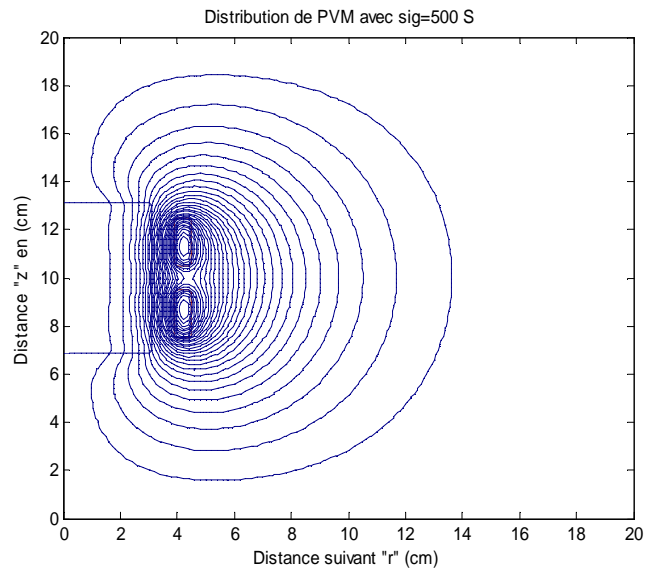


Fig.V.8. Distribution de PVM avec $\sigma=500$ S

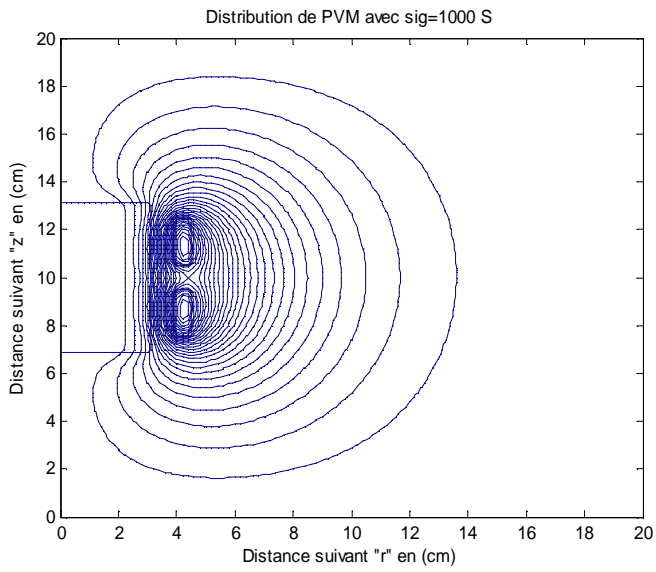


Fig.V.9. Distribution de PVM avec $\sigma=1000$ S

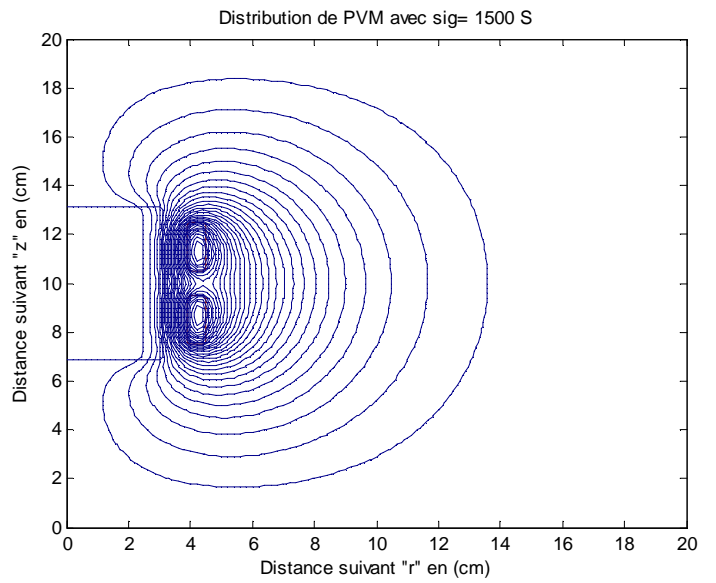


Fig.V.10. Distribution de PVM avec $\sigma=1500$ S

V.8 Effet De La fréquence Sur La Distribution De P.V.M

La figure V.11 montre l'effet de la fréquence pour une valeur constante de la conductivité électrique ($\sigma=1000$ S) sur la distribution du potentiel vecteur magnétique on voit que l'augmentation de la fréquence est suivie par une atténuation du potentiel vecteur magnétique et que le champ ne pénètre pas dans la charge aux fréquences plus élevées.

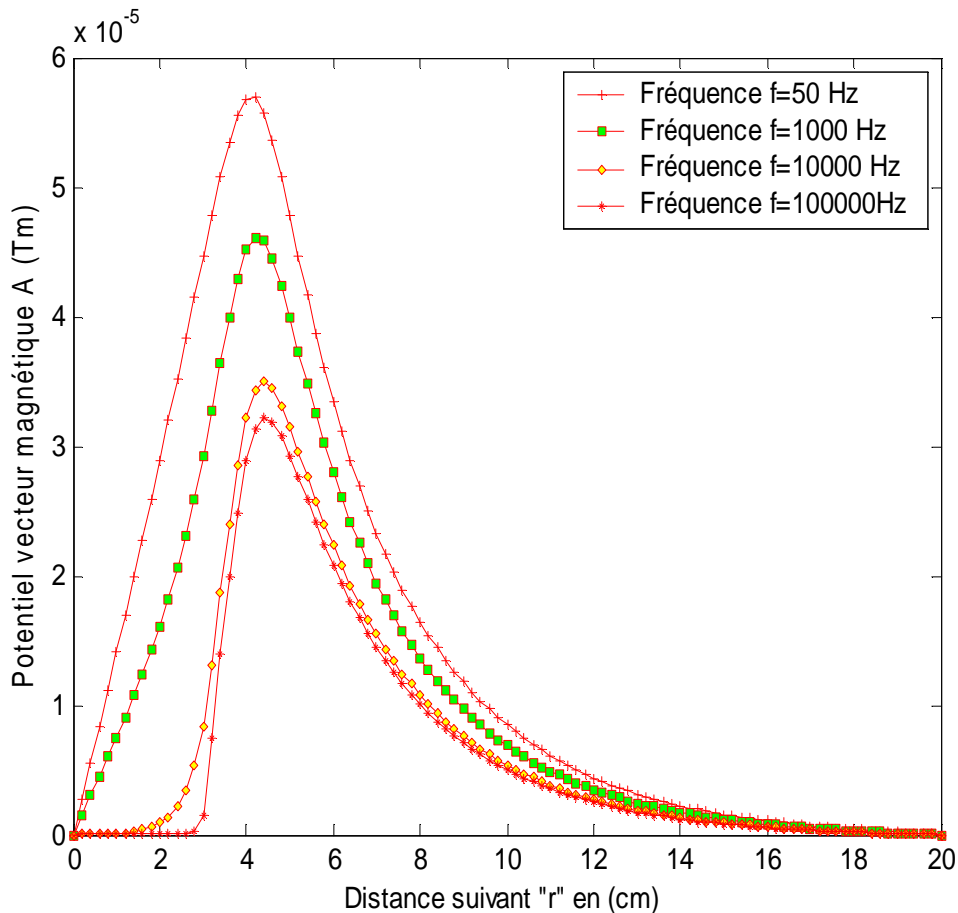


Fig.V.11. Effet de la fréquence sur le PVM

V.9 Distribution De potentiel vecteur magnétique dans l'espace

La figure V.12 présente la distribution de potentiel vecteur magnétique on voit que le maximum de potentiel vecteur magnétique est situé sur les inducteurs.

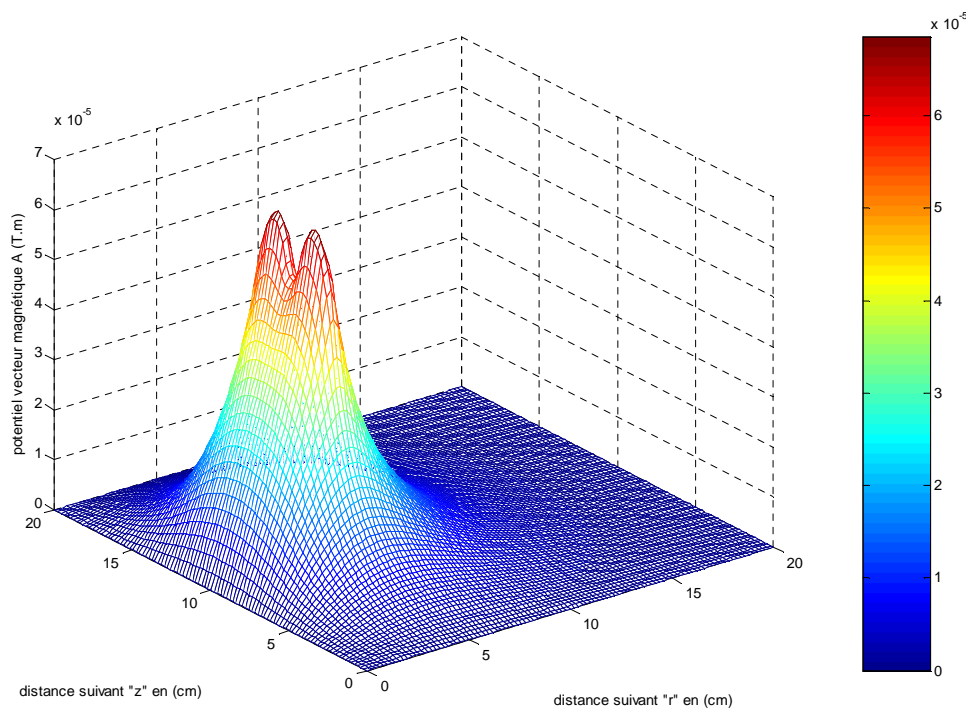


Fig.V.12 distribution du potentiel vecteur magnétique dans l'espace

V.10 Distribution De L'induction Magnétique

Les figures V.13 et V.14 montrent respectivement la distribution du champ vecteur induction magnétique pour une fréquence de 1kHz et de 10kHz et pour une même valeur de la conductivité électrique $\sigma=1000 \text{ S}$.

On voit clairement la canalisation de l'induction magnétique dans la charge vu sa grande perméabilité magnétique ($\mu_r=1500$).

Mais sur la figure V.14 on voit que le champ ne pénètre pas dans la charge à cause l'effet de peau sur la surface de la charge vu la grande valeur de la fréquence.

Sur les deux figures on voit bien la circulation de champ d'induction magnétique autour des inducteurs.

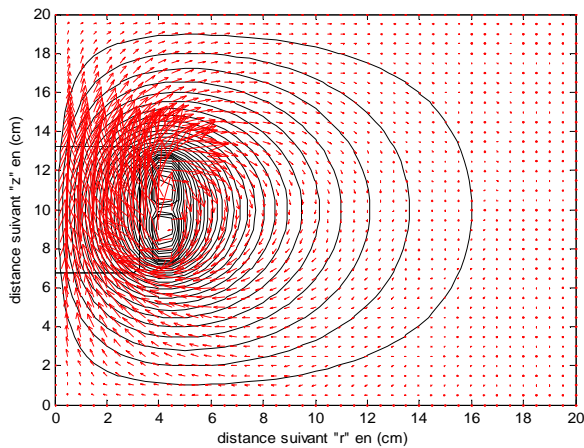


Fig.V.13. distribution de l'induction magnétique ($f=1\text{kHz}$)

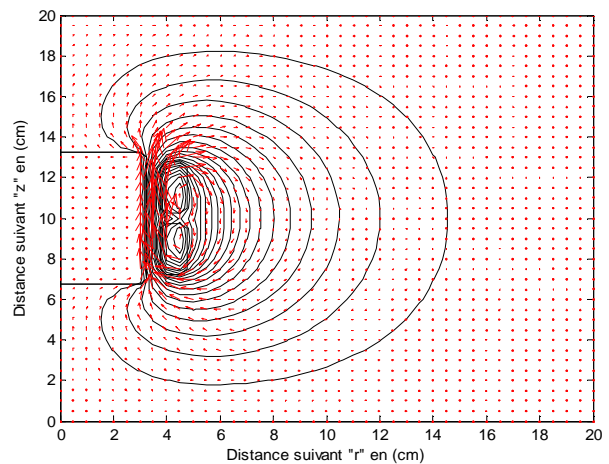


Fig.V.14. distribution de l'induction magnétique ($f=10\text{kHz}$)

V.11 Distribution des lignes du champ électrique

La figure V.15 illustre la variation du champ électrique le long d'un chemin radial situé au milieu des inducteurs pour une valeur constante de la fréquence $f=10\text{kHz}$. On voit que la variation du champ électrique est similaire à celle du potentiel vecteur magnétique, elle ne diffère que par la valeur de la pulsation.

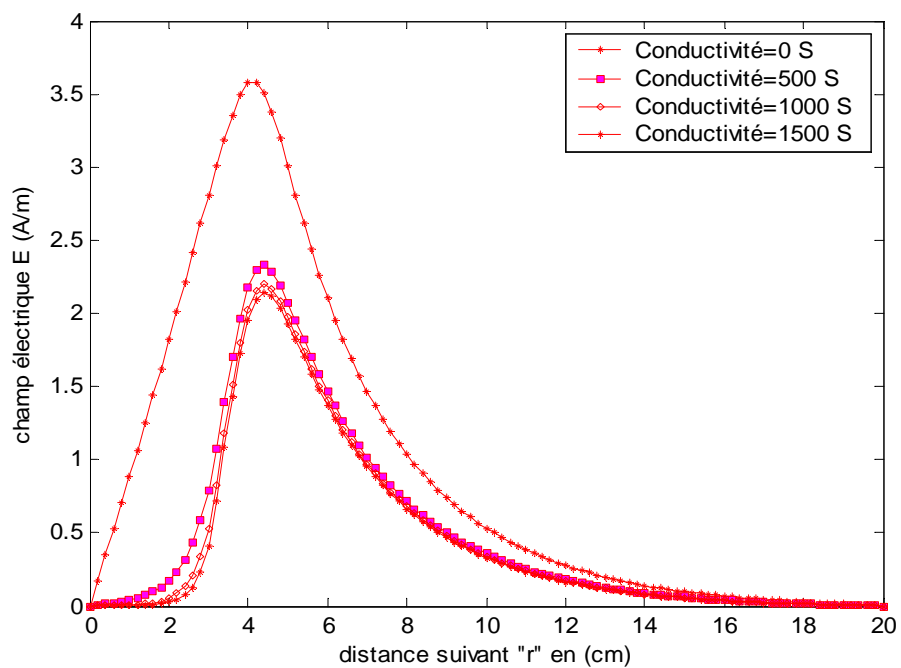


Fig.V.15. variation du champ électrique

V.12 Densité du Courants et de Puissance Induite Dans La Charge

Les figures V.16 et V.17 représentent, sur le même chemin à l'intérieur de la charge seulement, respectivement la distribution de la densité de courant induite et la densité de puissance induite pour différentes valeurs de la fréquence et pour une valeur constante de la conductivité électrique ($\sigma=1000$ S).

Pour des fréquences plus élevées on voit que les courants induites circulent sur la surface de la charge ce qui justifie le phénomène physique connu sous " l'effet de peau".
Donc l'augmentation de la fréquence donne des courants induits plus élevée que celle des fréquences faibles surtout sur la surface de la charge.

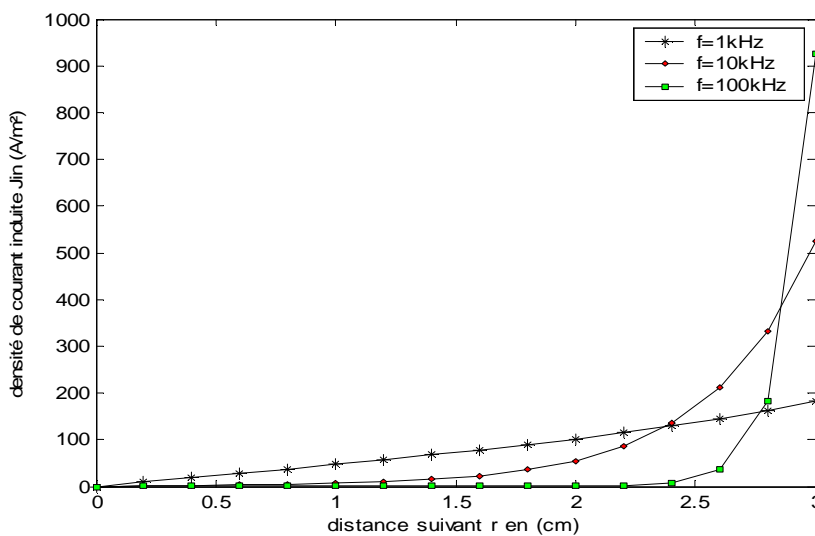


Fig.V.16. La densité du courant induite dans la charge

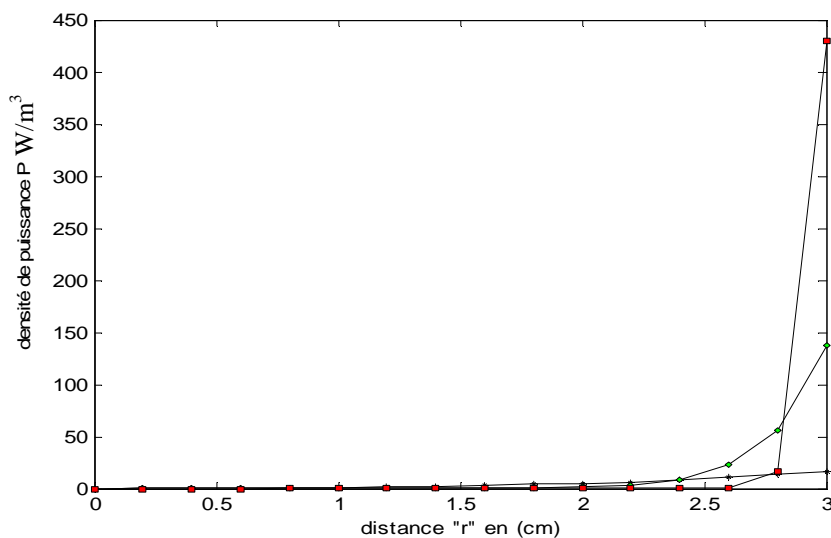


Fig.V.16. La densité de puissance induite dans la charge

V.13 Distribution de la densité de puissance dans la charge

les figures V.17 et V.18 présentent la distribution de la densité de puissance dans la charge pour différentes valeurs de la fréquence. On voit clairement la condensation des lignes de la densité de puissance sur la surface de la charge Fig.V.18

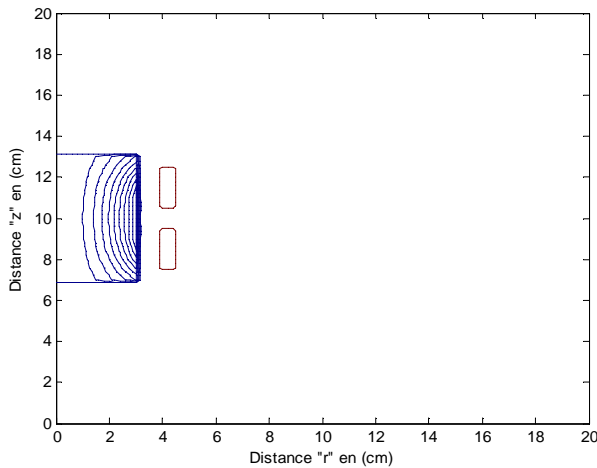


Fig.V.17. Distribution de la densité de puissance $f=50$ Hz

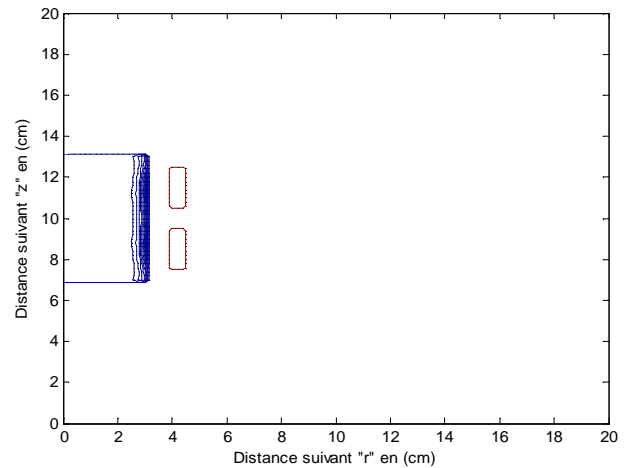


Fig.V.18. Distribution de la densité de puissance $f=10$ kHz

La figure V.19 montre sur un chemin axial suivant l'axe Z à la surface de la charge, l'évolution de la densité de puissance, on voit que le maximum se situe en face des conducteurs.

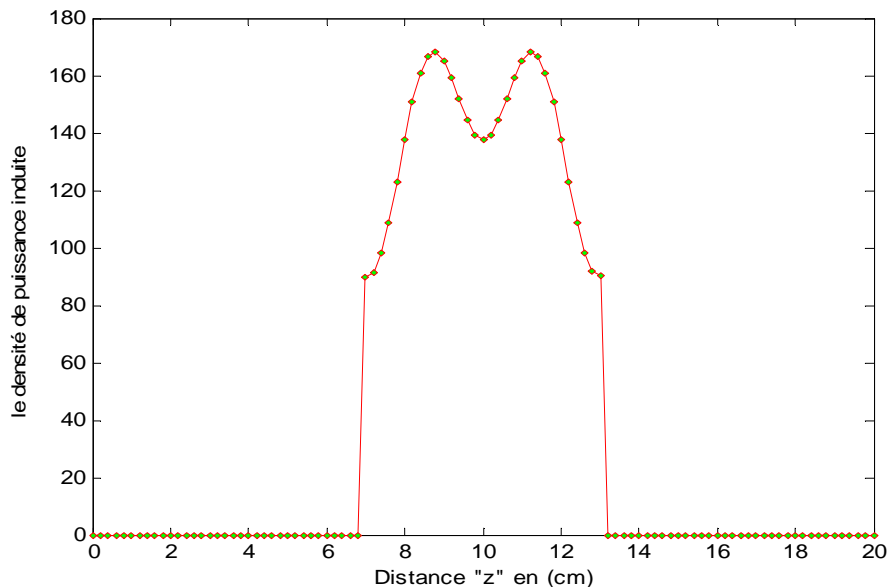


Fig.V.19 Variation De La Densité De Puissance Dans Un Chemin Horizontale

Conclusion Générale

Arrivé au terme de ce travail nous espérons avoir apporté une certaine clarification dans l'exposé de la méthode des volumes finis et des caractéristiques de sa mise en œuvre numérique.

L'étude des dispositifs électromagnétiques nécessitent la compréhension de plusieurs phénomènes physiques. Ces phénomènes ont été décrits par les modèles mathématiques de l'électromagnétisme.

Pour simplifier cette étude, on a considéré que notre système possède une symétrie de révolution et l'étude se fait seulement sur la moitié du dispositif et dans le cas bidimensionnel.

Une nouvelle méthode de résolution a été introduite pour la résolution des équations aux dérivées partielles cette méthode est connue en mécanique c'est la méthode des volumes finis.

La MVF est validée sur un exemple où la solution analytique est connue, les résultats sont conformes.

Plusieurs applications du modèle élaboré nous permettent d'éclaircir le comportement du champ électrique et magnétique ainsi que la distribution de la densité de puissance dans la charge.

Une remarquable répartition de la densité de puissance sur la surface de la charge quand les fréquences de travail sont plus élevées cette remarquable importante fait l'objet d'une application très connue dans l'industrie c'est le chauffage par induction ou le soudage par induction.

Un phénomène très connue en électrotechnique l'hors de l'augmentation de fréquence c'est l'effet de peau, ce phénomène est clairement visible dans notre travail se qui justifie d'une part l'efficacité de la méthode des volumes finis pour la résolution des EDP dans le domaine électromagnétique et d'autre part l'efficacité de notre programme.

Comme perspectives notre travail accepte une éventuelle extension telle que le couplage magnétothermique dans le cas où l'étude se fait sur un dispositif chauffé par induction, l'introduction des équations mécanique de mouvement le cas où l'étude se fait sur un actionneur électromagnétique, des relais électromécaniques...etc.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Programme analytique                                     %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

clear
clc
format short e
;J=1e6
;ri=0
;r0=0.04
;r1=0.06
;rf=0.19
;mu0=4*pi*1e-7
;mur1=1
;mur2=1
;mur3=1
;mu1=mur1*mu0
;mu2=mur2*mu0
;mu3=mur3*mu0
;dr=1e-4
;(c1=J*(r1-r0
;c2=J*r1
;c3=0
;d2=0.5*c1*mu1*r0^2+1/3*J*mu2*r0^3-0.5*c2*mu2*r0^2
;d3=-1/3*J*mu2*r1^3+0.5*c2*mu2*r1^2+d2
;i=0
for r=0:dr:r0
;i=i+1
;(A(i)=(0.5*c1*mu1*r
end

for r=r0+dr:dr:r1
;i=i+1
;(A(i)=(-1/3*J*mu2*r^2+c2*0.5*mu2*r+d2/r
end
for r=r1+dr:dr:rf
;i=i+1
;(A(i)=(0.5*c3*mu3*r+d3/r
end
;r=0:dr:rf
plot(r,A,'r-'),grid on,hold on

```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
% f f f f f f f f f f      Programme numerique de volume fini      f f f f f f f f f f  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

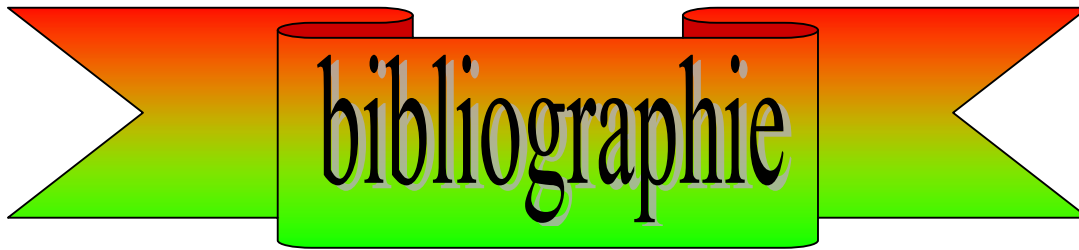
```
clear all; clc
```

```
f=50;  
w=2*pi*f;  
J=1e6;  
r0=0.04;  
r1=0.06;  
rf=0.19;  
mu0=4*pi*1e-7;  
mur1=1;  
mur2=1;  
mur3=1;  
mu1=mur1*mu0;  
mu2=mur2*mu0;  
mu3=mur3*mu0;  
dr=.1e-3;  
sig1=0;  
sig2=0;  
sig3=0;  
Js1=0;  
Js2=J;  
Js3=0;  
% 1er région  
i=0;  
for r=0:dr:r0  
    i=i+1;  
    sig(i)=sig1;  
    mu(i)=mu1;  
    Js(i)=Js1;  
end
```

```
%2ème région
for r=r0+dr:dr:r1
    i=i+1;
    sig(i)=sig2;
    mu(i)=mu2;
    Js(i)=Js2;
end
%3ème région
for r=r1+dr:dr:rf
    i=i+1;
    sig(i)=sig3;
    mu(i)=mu3;
    Js(i)=Js3;
end
b=i;
A(b)=5.7033e-004;

for i=1:b-1
    A(i)=0;
end
i=2;
r(i)=dr;
for i=2:b
    i=i+1;
    r(i)=r(i-1)+dr;
end
intA=A;
err=1;
while(err>5e-6)
    for i=2:b-1
        re=r(i)+dr/2;
        rw=r(i)-dr/2;
        KE=r(i+1)/(mu(i+1)*re*dr);
        KW=r(i-1)/(mu(i-1)*rw*dr);
```

```
Kp=KE*r(i)/r(i+1)+KW*r(i)/r(i-1)+j*w*sig(i)*dr;  
A(i)=(KE*A(i+1)+KW*A(i-1)+Js(i)*dr)/Kp;  
end  
MA=abs(A);  
err=norm((MA-intA)/MA)  
intA=MA;  
end  
r=0:dr:rf;  
plot(r,MA,'B:'),grid on,hold on
```



[1] : MICHEL HULIN, NICOLE HULIN et DENISE PERRIN

« Equation de MAXWELL ondes électromagnétique »

Dunod, France : 1991

[2] : M.BERTIN, J.P.FAROUX et J.RENAULT

« Electromagnétique électrostatique et magnétique »

Dunod, pairs, France : 1999

[3] : EDGARD ELBAZ

« L'électromagnétisme à l'électrofaible monopoles magnétiques »

Ellipses, pairs : 1989.

[4] : JOSEPH A.EDMINISTER

« Electromagnétisme »

Série Schaum, pairs, France 1985.

[5] : LIONEL JANNAUD

« Electrostatique et de magnétostatique »

Ellipses, pairs, France : 2004.

[6] : CHRISTIAN GARING

« Ondes électromagnétiques »

Ellipses, pairs, France : 1998.

[7] : AUSLEN DER

« Optimisation Méthode numérique »

Masson, New York, USE : 1986.

[8] : ANDRE VENDER VORST

« Electromagnétisme transmission propagation et rayonnement »

De bœck Université, Belgique : 1998.

[9] : AZZOUÏ SEDDIK

« Modélisation des phénomènes électromagnétique et thermique

Couplés dans les dispositifs de chauffage par induction par Couplage:

Méthode des volumes finis (CVM)-Algorithme Alterné »

Thèse de Magister, machines électriques Batna : 2002.

[10] : HAMIMID MOURAD

« Modélisation axisymétrique par la Méthodes des volumes finis

Du Transformateur à plasma thermique inductif »

Thèse Magister, Réseaux électriques, Batna : 2000/2001.

[11] : H.K.VERSTEEY AND W.MALAL

« The finite volume méthode »

Asekera, Longhman, USE : 1995

[12] : BELKHIRI YAMINA

« Modélisation des phénomènes électromagnétique et thermique

Couple par la Méthode des volumes finis (CVM) »

Thèse Magister, électrotechnique, Batna : 2004.

[13] : PIERRE BRISSONNEAU

« Magnétisme et matériaux magnétisme »

Hermès, pairs, France : 1997.

[14] : ELEUTERIE F.TORO

« Riemann sol vers and numerical methods for fluid dynamics »

Springer, Germanie : 1997

[15] : BENKOIDER MOUNIA

« Modélisation des phénomènes électromagnétiques par la méthode

Des éléments diffus »

Thèse Magister, électrotechnique, Batna : 2002.

[16] : M'ZION NASSIMA

« Modélisation dynamique des phénomènes électromagnétiques

Dans les dispositifs électrotechnique à parties mobiles par

Couplage élément finis –Méthodes analytique »

Thèse Magister, Réseaux électriques. Batna : 2000/2001.

[17] : GHERABLI FATIHA

« Modélisation des phénomènes électromagnétiques par la
Méthode de galerkine sans maillage »

Thèse Magister, électrotechnique Batna : 2001.

[18] : BRIOUA MOURAD

« Etude de champ élastique d'un réseaux un idiome sionnel
De dislocation interfaciales dans un materieux tricouches en
el astate anisotrope »

Thèse Docteur a d'état en Génie mécanique: Batna : novembre 2005.

[19] : A. CHAHHATB

« Simulation numérique de l'aero thermodynamique in station
D'un écoulement tabulent compressible dans un moteur alternatif »

Thèse Magister, Génie mécanique Blida : 1998.

[20] : IBBIR NADIA

« Etude de la connvetion naturelle dans une cavité rectangulaire
Contenant de métallique »

Thèse Magister, Génie mécanique Batna : Mars 2006.

[21] : MEHAMED MOKHTARI

« MATLAB 5.2 & 5.3 et Simulink 2 & 3 »

Springer, verla berelin heidelerger, Allemagne : 2000.

[22] : ADRIAN BIRAN et MOSHE BREINER

« MATLAB pour l'ingénieur version 6 et 7 »

Pearson, France : 2004.

**MEMOIRE DE FIN D'ETUDES EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME
D'INGENIEUR D'ETAT EN GENIE ELECTROTECHNIQUE**

OPTION : *COMMANDE ELECTRIQUE*

Proposé et dirigé par : Monsieur *HAMIMID Mourad*

Etudié par : *CHOUBAR Khoutir & HERREM Zina*

Thème :

***MODELISATION DES PHENOMENES ELECTROMAGNETIQUE PAR LA
METHODE DES VOLUMES FINIS DANS UN DISPOSITIF
AXISYMETRIQUE***

Résumé :

Les phénomènes électromagnétiques se présentent dans plusieurs dispositifs (les machines électriques, les appareils de coupure, les appareillages à haute tension etc...) ces phénomènes sont produits par des charges électriques, des courants et des aimants permanents. On trouve également le champ électrique et magnétique dans les produits métallurgiques chauffés par induction.

L'électromagnétisme considère les phénomènes électriques et magnétiques à un niveau macroscopique. La connaissance du champ permet de connaître les performances de ces dispositifs en régime permanent et transitoire.

Pour concevoir de tels dispositifs, l'évaluation du champ électromagnétique apparaît comme un outil nécessaire. La géométrie de ces dispositifs est généralement très complexe. L'utilisation des méthodes numériques de discrétisation facilitent l'études de ces dispositifs.

MOTS CLES :

Phénomènes électromagnétiques

Méthodes des volumes finis

Maillages

Effet de peau.

