



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques

## *Mémoire de Master*

**Domaine :** Mathématiques et Informatique

**Filière :** Mathématiques

**Option :** EDPs et applications

## Thème

---

*Problème inverse pour une équation de chaleur non locale fractionnaire avec  
conditions aux limites non locales*

---

**Présentée par :**

*M<sup>me</sup> BOUZIDI Chourouk*

**Soutenu publiquement le :** 01/07/2023.

**Devant le jury composé de :**

|                    |                           |                              |
|--------------------|---------------------------|------------------------------|
| <b>Président :</b> | ARIOUA Yacine             | M.C.A., Université de M'sila |
| <b>Encadreur :</b> | NOUIRI Brahim             | M.C.A., Université de M'sila |
| <b>Examineur :</b> | BENMEDDOUR Mohamedourabah | M.A.A., Université de M'sila |

Année universitaire 2022/2023

---

## Remerciements

---

Avant tout, je voudrais exprimer ma gratitude envers Allah, Le Très-Haut, pour toujours et éternellement me donner la patience et la capacité de mener à bien mes recherches. Je tiens également à exprimer ma reconnaissance envers mon superviseur, Mr. "Mouiri Brahim", qui m'a accordé sa confiance pour mener ce travail, ainsi que pour toutes les heures consacrées à cette recherche. Je souhaite également remercier Dr "Saad Abdelkbir" pour son aide et pour m'avoir prêté son ordinateur personnel afin que je puisse travailler avec. Je lui suis extrêmement reconnaissant et je prie Allah de la récompenser abondamment. Je tiens également à remercier Dr. "Yacine Brioua" pour son orientation précieuse. Enfin, je souhaite exprimer ma gratitude à tout l'équipe du département des Mathématiques de l'université "Mohammed Boudeiaf".

---

# Dédicaces

---

Je dédie cette mémoire :

Oh Dieu, mérite sa majesté et la perfection de ses attributs qu'il nous a conférés et aidez-nous à compléter cette étude, à Dieu Tout-Puissant

Il a placé le ciel sous ses pieds et l'a honoré dans son cher livre ... À ma mère bien-aimée ... Mon espoir et mon soutien ... Au propriétaire de la biographie parfumée et de la pensée éclairée ... À mes bras fermes ... et à mon exemple fidèle ... mon père bien-aimé.

À mon mari et mon soutien, qui a été patient avec moi sur ce chemin, et à mon fils Yazan, la prunelle de mes yeux ... à mes frères qui ont eu un grand impact Sur de nombreux obstacles et difficultés.

à mon cher moi, qui a travaillé si dur pour terminer cette note.

À tous les chers membres de la famille.

À tous mes amis et tous les chers professeurs qui n'ont pas hésité à nous contacter.

Pour celui qui est mentionné par le cœur et non mentionné par la plume.

À vous tous, je dédie le fruit de mon travail.

Enfin, je demande à Dieu Tout-Puissant de rendre acceptable cette œuvre de justice.

---

# Résumé

---

Dans ce mémoire, nous avons considéré un problème inverse de terme source pour une équation de chaleur fractionnaire avec involution et des conditions aux limites non locales. Ce problème simule le processus de propagation de la chaleur dans un fil fermé mince enroulé autour d'une isolation faiblement perméable. Ce problème inverse consiste à déterminer un membre droit inconnu de l'équation, qui ne dépend que de la variable spatiale. Les résultats d'existence et d'unicité pour le problème donné sont obtenus via la méthode de Fourier et les propriétés de calcul fractionnaire conformable.

**Mots-Clés :** Équation de chaleur, Involution, Dérivée fractionnaire conformable, Méthode de Fourier, Conditions aux limites non locales.

In this memoir, we have considered an inverse source term problem for a fractional heat equation with involution and non-local boundary conditions. This problem simulates the process of heat propagation in a thin closed wire wrapped around a low permeable insulation. This inverse problem consists in determining an unknown right side of the equation, which depends only on the spatial variable. The existence and uniqueness results for the given problem are obtained via Fourier's method and conformable fractional calculus properties.

**Keywords :** Heat equation, Involution, Conformable fractional derivative, Fourier method, Non-local boundary conditions.

---

# Table des matières

---

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introduction générale</b>   | <b>1</b>  |
| <b>Notations</b>   | <b>5</b>  |
| <b>1 Préliminaire sur des outils mathématiques utilisés</b>                  | <b>6</b>  |
| 1.1 Espaces normés . . . . .   | 6         |
| 1.2 Espaces de Hilbert . . . . .   | 7         |
| 1.3 Opérateur linéaire . . . . .   | 7         |
| 1.3.1 Opérateur Adjoint . . . . .  | 8         |
| 1.3.2 Opérateur Auto-adjoints . . . . .                                      | 9         |
| 1.4 Convergence uniforme d'une série de fonction . . . . .                   | 9         |
| 1.5 Involutions . . . . .  | 10        |
| 1.6 Quelques notions sur le calcul fractionnaire conforme . . . . .          | 11        |
| 1.6.1 La transformée de Laplace fractionnaire conforme . . . . .             | 12        |
| <b>2 Problème spectral</b>   | <b>17</b> |
| 2.1 Problème spectral . . . . .  | 17        |
| 2.1.1 Solution générale de l'équation (2.1) . . . . .                        | 17        |
| 2.1.2 Valeurs propres et fonctions propres du problème (2.1)-(2.2) . . . . . | 18        |
| <b>3 Existence et unicité de la solution</b>                                 | <b>20</b> |
| 3.1 Unicité de La Solution du Problème . . . . .                             | 20        |
| 3.2 Construction d'une Solution Formelle du Problème . . . . .               | 24        |
| 3.3 Résultats Principaux . . . . .   | 25        |
| <b>Bibliographie</b>   | <b>27</b> |

---

---

# Table des figures

---

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | Disposition schématique des points sur un fil fermé . . . . . | 1 |
|---|---|---|

---

# Introduction générale

---

Les équations différentielles avec involution, ont apparemment commencé avec les travaux de Babbage [4], et ont été discutées plus tard par Carleman [7] en 1932. À la fin des années 1960 et au début des années 1970, Przewoerska-Rolewicz a abordé de nombreuses questions sur les équations différentielles avec involutions dans une série de beaux articles [15, 14, 16, 17] puis a compilé ses résultats sous forme un livre [18]. Pour les solutions généralisées des équations différentielles fonctionnelles, voir le livre de Wiener [25]. Récemment, Kaliev et al. [8, 9], Orazov et Sadybekov [13, 12], Sadybekov et Sarsenbi [21], Sarsenbi [22], Sarsenbi et Tengaeva [23], ont traité des problèmes spectraux et des problèmes inverses pour les équations d'évolution avec involution. Dans [6], Cabada et Tojo ont mentionné une application d'une équation parabolique avec une involution liée à la conduction de la chaleur.

Dans ce mémoire, nous considérons un fil métallique fermé de longueur 2 qui est enroulé autour d'une feuille fine de matériau isolant, comme illustré dans Figure 1.

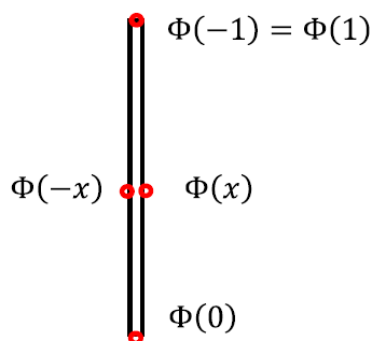


FIGURE 1 – Disposition schématique des points sur un fil fermé

Soit  $x = 0$  la position la plus basse du fil. Le fil contourne l'isolant vers la gauche jusqu'au point  $-1$  et vers la droite jusqu'au point  $1$ . Le fil est fermé, donc les points  $-1$  et  $1$  coïncident.

La couche d'isolant est supposée légèrement perméable. De ce fait, la température d'un côté de l'isolant influence le processus de diffusion de l'autre côté. Par conséquent, l'équation de la chaleur classique change avec l'ajout d'un terme supplémentaire  $\varepsilon\Phi_{xx}(-x, t)$  à  $\Phi_{xx}(x, t)$  où  $|\varepsilon| < 1$ . Soit  $u(x, t)$  est la température au point  $x$  de la fil à l'instant  $t$ .

Nous allons considérer le processus de diffusion de la chaleur qui est décrit par une équation de la chaleur. Ainsi, ce processus est décrit par l'équation de chaleur non locale avec dérivée fractionnaire en temps  $t$  au sens conformable telle que

$$\mathcal{D}_t^{(\alpha)}\Phi(x, t) = \Phi_{xx}(x, t) - \varepsilon\Phi_{xx}(-x, t) + f(x), \quad (x, t) \in D_T, \quad (1)$$

où  $D_T = \{(x, t) : -1 < x < 1 \text{ et } 0 < t < T\}$  avec  $T > 0$ ,  $f(x)$  est l'influence d'une source externe qui ne change pas avec le temps  $t$  et  $\mathcal{D}_t^{(\alpha)}$  est la dérivée fractionnaire à gauche au sens conformable d'ordre  $0 < \alpha < 1$  définie par :

$$\mathcal{D}_t^{(\alpha)}\Phi(x, t) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\Phi(x, t + \mu t^{1-\alpha}) - \Phi(x, t)}{\mu}.$$

Comme information supplémentaire, nous prenons les valeurs d'une condition initiale et d'une condition finale de la température

$$\Phi(x, 0) = \varphi(x), \quad \Phi(x, T) = \psi(x), \quad x \in [-1, 1]. \quad (2)$$

Puisque le fil est fermé, il est naturel de supposer que la température aux extrémités du fil est la même à tout moment :

$$\Phi(-1, t) = \Phi(1, t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

Considérons un processus dans lequel la température à une extrémité à chaque instant  $t$  est proportionnelle au taux de vitesse de changement de la valeur moyenne de la température

dans tout le fil. Alors,

$$\Phi(-1, t) = \gamma \mathcal{D}_t^{(\alpha)} \int_{-1}^1 \Phi(x, t) dx, \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

où  $\gamma > 0$  est le coefficient de proportionnalité. Pour  $\alpha = 1$ , le problème inverse (1)-(4) a été étudié par M. Sadybekov et al., [20].

## Réduction à un problème inverse équivalent

En utilisant (1) et (4), on obtient :

$$\begin{aligned} \Phi(-1, t) &= \gamma \mathcal{D}_t^{(\alpha)} \int_{-1}^1 \Phi(x, t) dx \\ &= \gamma \int_{-1}^1 \mathcal{D}_t^{(\alpha)} \Phi(x, t) dx \\ &= \gamma \int_{-1}^1 [\Phi_{xx}(x, t) - \varepsilon \Phi_{xx}(-x, t)] dx + \gamma \int_{-1}^1 f(x) dx \\ &= \gamma [\Phi_x(1, t) + \varepsilon \Phi_x(-1, t) - \Phi_x(-1, t) - \varepsilon \Phi_x(1, t)] + \gamma \int_{-1}^1 f(x) dx \\ &= \gamma(1 - \varepsilon) [\Phi_x(1, t) - \Phi_x(-1, t)] + \gamma \int_{-1}^1 f(x) dx. \end{aligned}$$

Alors, nous avons :

$$\Phi_x(-1, t) - \Phi_x(1, t) + a\Phi(-1, t) = \gamma_1 \int_{-1}^1 f(x) dx. \quad (5)$$

où  $a = \frac{1}{\gamma(1-\varepsilon)}$  et  $\gamma_1 = \frac{1}{1-\varepsilon}$ . On pose

$$u(x, t) = \Phi(x, t) - \gamma \int_{-1}^1 f(x) dx. \quad (6)$$

Avec (6), l'équation (1) devienne :

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) - \varepsilon u_{xx}(-x, t) + f(x). \quad (7)$$

Avec (6), les conditions initiale et finale (2) deviennent :

$$u(x, 0) = \varphi_1(x) \text{ et } u(x, T) = \psi_1(x), \quad x \in [-\pi, \pi], \quad (8)$$

où,  $\varphi_1(x) = \varphi(x) - \gamma \int_{-1}^1 f(x)dx$  et  $\psi_1(x) = \psi(x) - \gamma \int_{-1}^1 f(x)dx$ .

Grâce (6), les conditions aux limites (3)-(4) réduisent aux conditions aux limites non locales suivantes :

$$\begin{cases} u(-1, t) = u(1, t), \\ u_x(-1, t) - u_x(1, t) + au(-1, t) = 0. \end{cases} \quad t \in [0, T]. \quad (9)$$

Nous avons la proposition suivante :

**Proposition 0.1.**  $\{\Phi(x, t), f(x)\}$  est une solution du problème inverse (1)-(4) si et seulement si  $\{u(x, t), f(x)\}$  est une solution du problème inverse (7)-(9).

Notre objective dans ce mémoire est l'étude de l'existence et l'unicité de la solution du problème équivalent (7)-(9). Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivante : dans le premier chapitre, nous rappelons certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires dans ce mémoire concernant les espaces fonctionnels.

Dans le deuxième chapitre, nous considérons une classe de problèmes spectraux pour un opérateur différentiel ordinaire du second ordre avec involution d'inversion et des conditions aux limites non locales. On prouve que les fonctions propres de ce problème spectral est complet et orthogonal dans  $L^2(-1, 1)$ .

Dans le dernier chapitre, nous avons montré l'existence et l'unicité de la solution du problème (7)-(9) par la méthode de Fourier et les propriétés de calcul fractionnaire conforme..

On termine ce mémoire par une conclusion et quelques perspectives.

---

# Notations

---

|                              |   |    |
|------------------------------|---|----|
| $\mathbb{C}$ :               | Ensemble des nombres complexes .....  | 7  |
| $\Gamma(\cdot)$ :            | La fonction Gamma d'Euler .....   | 11 |
| $\mathcal{D}_a^{(\alpha)}$ : | l'opérateur de la dérivée fractionnaire conformable à gauche d'ordre $\alpha$ ..... | 11 |
| $\mathcal{D}_b^{(\alpha)}$ : | l'opérateur de la dérivée fractionnaire conformable à droite d'ordre $\alpha$ ..... | 11 |
| $\mathcal{L}$ :              | La transformée de laplace classique .....   | 12 |
| $\mathcal{L}_\alpha$ :       | La transformée de laplace fractionnaire conformable à d'ordre $\alpha$ .....        | 12 |
| $\Omega$ :                   | Domaine borné dans $\mathbb{R}$ .....   | 6  |
| $\mathbb{R}$ :               | Ensemble des nombres réels .....  | 6  |

# PRÉLIMINAIRE SUR DES OUTILS MATHÉMATIQUES UTILISÉS

Dans ce chapitre, nous rappelons certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires dans ce mémoire concernant les espaces fonctionnels, un problème inverse et la méthode de Fourier.

## 1.1 Espaces normés

**Définition 1.1** ([3]). ,[[19]] Soient  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{K}$  .une norme sur  $E$  ,est une application  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ , vérifiant les condition suivantes :

1.  $\|x\| \geq 0$  et  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ .
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ , pour tout  $x \in E$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ .
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ , pour tout  $x, y \in E$ .

**Remarque 1.1** ([3]). ,[[19]] L'espace vectoriel  $E$  muni d'un norme s'appelle espace normé ,noté par  $(E, \|\cdot\|)$ . Les application suivantes sont des normes usuelle sur  $\mathbb{R}^n$ .

$$\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{pour tout } p \geq 1$$

**Exemple 1.1** ([3]). ,[[19]] Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  , l'espace vectoriel des fonctions de carré intégrable sur  $\Omega$  est :  $L^2(\Omega) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty \}$ .  
l'application  $\|\cdot\| : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par :  $\|f\| = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$  est une norme.

## 1.2 Espaces de Hilbert

**Définition 1.2** ([3]). ,[[19]] (Produit scalaire) Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{K}$ . un produit scalaire sur  $E$  est une application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \longrightarrow \mathbb{K}$  tel que pour tout  $x, y, x_1, x_2 \in E$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  on a :

1.  $\langle x, x \rangle \geq 0$  et  $\langle x, x \rangle \iff x = 0$ .
2.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ .
3.  $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$ .
4.  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

**Remarque 1.2** ([3]). ,[[19]] Un produit scalaire sur  $E$  définit une norme sur  $E$  donnée par :  $\forall x \in E : \|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$

**Exemple 1.2** ([3]). ,[[19]] L'espace  $\mathbb{R}^n$  muni de produit scalaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : (x, y) = \sum_{i=0}^n x_i y_i.$$

est un produit scalaire .

## 1.3 Opérateur linéaire

**Définition 1.3** ([19]). Un opérateur  $A : X \longrightarrow Y$  est appelé linéaire, si :

1. son domaine  $D(A)$  est un espace linéaire
2. pour tous  $x, y \in D(A)$ , et tous les nombres  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . L'égalité

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay \tag{1.1}$$

condition de l'équation (1.1) est une combinaison de deux condition :

- additivité de l'opérateur :  $A(x + y) = Ax + Ay, \forall x, y \in D(A)$  ;
- homogénéité de l'opérateur :  $A(\alpha x) = \alpha Ax, \forall x \in D(A), \alpha \in \mathbb{C}$

**Exemple 1.3** ([19]). Dans l'espace des fonctions continues ,considérez qu'un opérateur  $A : C[0, 1] \longrightarrow C[0, 1]$  défini par :

$$Au(x) = au(x) + b; (a, b \text{ sont des constantes}).$$

Le domaine de l'opérateur  $A$  est l'espace entier ,c'est  $D(A) = C[0, 1]$ . c'est donc un espace linéaire vers maintenant vérifier la deuxième condition dans la définition de la linéarité . pour

$u_1, u_2 \in D(A)$  , nous avons :

$$A(\alpha u_1 + \beta u_2) = a(\alpha u_1 + \beta u_2) + b \quad (1.2)$$

$$= \alpha a u_1 + \alpha b + \beta a u_2 + \beta b + b - \alpha b - \alpha b - \beta b \quad (1.3)$$

$$= \alpha A u_1 + \beta A u_2 + b(1 - \alpha - \beta). \quad (1.4)$$

à son tour, il est facile de voir que pour satisfaire la condition dans la définition d'un opérateur linéaire pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , il faut et il suffit d'avoir  $b = 0$ .

Ainsi ,l'opérateur  $A$  sera linéaire , si son action est donnée par la formule :

$$A u(x) = a u(x).$$

Cet exemple d'un opérateur  $A$  est une généralisation directe de la notion d'une fonction réel . Cependant ,dans la théorie des fonctions ,la linéarité d'une fonction signifie généralement que nous avons  $y = ax + b$  .Cependant ,dans le cas des opérateurs, il est nécessaire d'avoir  $b = 0$  pour remplir la condition dans la définition d'un opérateur linéaire .

### 1.3.1 Opérateur Adjoint

**Théorème 1.1** ([19]). Soient  $E$  un espace de hilbert et  $A \in L(E)$  . Il existe un unique opérateur continue de  $E$  dans  $E$  , noté  $A^*$  et appelé l'adjoint de  $A$  ,tel que :

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle, \forall x, y \in E.$$

En outre , on a  $(A^*)^* = A$  et  $\|A^*\| = \|A\| = \|A^* A\|^{1/2}$  .

**Propriétés 1.1** ([19]). Soient  $A$  et  $B$  deux éléments de  $L(E)$  . On a :

– pour  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{C}$ , on a

$$(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^*$$

– L'adjoint de  $AB$  est  $B^* A^*$

– Si  $A$  est inversible ,  $A^*$  l'est aussi et on a

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

– L'adjoint de  $e^A$  est  $e^{A^*}$  ,

$$e^{A^*} = (e^A)^*$$

– Le spectre de l'adjoint de  $A$  est donné par

$$\sigma(A^*) = \sigma(\bar{A}) = \{\bar{\alpha}, \alpha \in \sigma(A)\}$$

### 1.3.2 Opérateur Auto-adjoints

[[19]] Soit  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateurs non-bornés à domaine dense . On va définir un opérateur non-borné  $A^* : D(A^*) \subset H' \rightarrow H'$  comme suit . On pose

$$D(A^*) = \left\{ v \in H' ; \exists c \text{ tel que } |\langle v, Au \rangle| \leq c \|u\| \forall u \in D(A). \right\}$$

Il est clair que  $D(A^*)$  est un sous-espace vectoriel de  $H'$  . On va maintenant définir  $A^*v$  pour  $v \in D(A^*)$  . Étant donné  $v \in D(A^*)$  on considère l'application  $g : D(A) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$g(u) = \langle v, Au \rangle, u \in D(A);$$

On a

$$|g(u)| \leq c \|u\|, \forall u \in D(A).$$

Grâce au théorème de Han Banach forme analytique on sait que  $g$  peut être prolongée à une application linéaire  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$|f(u)| \leq c \|u\|, \forall u \in H.$$

Par suit  $f \in H'$  . On remarquera que le prolongement de  $g$  est unique puisque  $f$  est continue sur  $H$  et que  $D(A)$  est dense.

On pose

$$A^*v = f.$$

**Définition 1.4** ([19]). L'opérateur qu'on la note par  $A^* : D(A^*) \subset H' \rightarrow H'$  est appelé l'adjoint de l'opérateur  $A$  . est défini par

$$\langle v, Au \rangle_{H',H} = \langle A^*v, u \rangle_{H',H}, \forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*).$$

Un opérateur  $A$  est dit auto-adjoint si  $A = A^*$  .

**Proposition 1.1** ([19]). soit  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  un opérateur non-borné à domaine dense . Alors  $A^*$  est fermé . i.e.  $G(A^*)$  est fermé dans  $H' \times H'$  .

## 1.4 Convergence uniforme dune sérié de fonction

**Définition 1.5.** Soit  $(f_n)$  une suit de fonctions définie sur  $I$  à valeur dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  . On dit que  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$  si  $(S_n)$  converge uniformément sur  $I$  .

- Remarque 1.3.** 1. Si  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$ , alors  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$ .
2. Si  $\sum f_n$  et  $\sum g_n$  converge uniformément sur  $I$ , alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\sum (f_n + \lambda g_n)$  converge uniformément sur  $I$ .

## 1.5 Involutions

Le concept d'involution est fondamental pour la théorie des groupes et des algèbres, mais, en même temps, étant un objet dans l'analyse mathématique, ses propriétés analytiques permettent l'obtention d'informations complémentaires concernant cet objet. Afin d'être clair à cet égard, définissez ce que nous comprenons par l'intervention dans ce contexte analytique. Nous suivons les définitions.

**Définition 1.6** ([6]). Soit  $A \subset \mathbb{R}$  un ensemble contenant plus d'un point et  $f : A \rightarrow A$  une fonction telle que  $f$  ne soit pas l'identité  $Id$ . Alors  $f$  est une involution si :

$$f^2 \equiv f \circ f = Id$$

Ou, de manière équivalente, Si :

$$f = f^{-1}.$$

Si  $A = \mathbb{R}$ , on dit que  $f$  est une involution. Les involutions sont également appelées \*Fonction de Carleman\* dans la littérature.

**Définition 1.7** ([6]). Soit  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow A$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Nous disons que  $f$  est une ordre  $n$  involution si :

1.  $f^n \equiv f \circ \overbrace{\dots}^n \circ f = Id$ ,
2.  $f^k \neq Id$ ,  $k = 1, \dots, n - 1$ .

**Exemple 1.4** ([6]). Voici un exemple d'une circonscription définie sur un ensemble qui n'est pas un suo-ensemble de  $\mathbb{R}$  :

$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = e^{\frac{2\pi}{n}i}$ , est une ordre  $n$  sur le plan complexe.

**Exemple 1.5** ([6]). Les involution suivantes sont les exemples les plus courants :

1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -x$ , est une involution appelée réflexion.
2.  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ , connue sous le nom d'inversion.
3. Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $cb + a^2 \neq 0$ ,  $c \neq 0$ ,

$$f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}, f(x) = \frac{ax + b}{cx - a},$$

Est une famille de fonctions connues sous le nom d'inversions bilinear . Si  $a^2 + bc > 0$  , la lutte contre l'involution est dit hyperbolique et a deux point fixes dans son domaine .

## 1.6 Quelques notions sur le calcul fractionnaire conformable

Dans cette section , nous commençons par rappeler quelques concepts sur le calcul fractionnaire conformable .

**Définition 1.8** ([2]). (Les dérivées fractionnaires conformables à gauche )

1. Soient  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction donné et  $\alpha \in ]0, 1]$  . Alors ,la dérivée fractionnaire conformable à gauche d'ordre  $\alpha$  est définie par :

$$\mathcal{D}_a^{(\alpha)}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \quad (1.5)$$

Si  $\mathcal{D}_a^{(\alpha)}(f)(t)$  existe sur  $]a, +\infty[$  , alors

$$\mathcal{D}_a^{(\alpha)}(f)(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} \mathcal{D}_a^{(\alpha)}(f)(t).$$

Lorsque  $a = 0$  , nous écrivons  $\mathcal{D}^{(\alpha)}$  , qui est la définition originale introduit par Khalil et al .et on dit que  $f$  est  $\alpha$  différentiable chaque fois que  $\mathcal{D}^\alpha$  existe .

2. Soient  $f : ]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction donnée et  $\alpha \in ]0, 1]$  . Alors ,la dérivée fractionnaire conformable à droit d'ordre  $\alpha$  est définie par :

$$\mathcal{D}_b^{(\alpha)}(f)(t) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(b-t)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \quad (1.6)$$

Si  $\mathcal{D}_b^{(\alpha)}(f)(t)$  existe sur  $] -\infty, b[$  , alors  $\mathcal{D}_b^{(\alpha)}(f)(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} \mathcal{D}_b^{(\alpha)}(f)(t)$ .

**Propriétés 1.2** ([2]). Pour  $f, g : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $0 < \alpha \leq 1$  , nous avons les propriétés suivantes :  
Si  $f$  est  $\alpha$ -différentiable ,alors  $f$  est continue .

1.  $\mathcal{D}^{(\alpha)}(af + bg) = a\mathcal{D}^\alpha(f) + b\mathcal{D}^\alpha(g)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  .

2.  $\mathcal{D}^{(\alpha)}(af + bg) = a\mathcal{D}^\alpha(f) + b\mathcal{D}^\alpha(g)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  .

3.  $\mathcal{D}^\alpha t^k = \begin{cases} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha)} t^{k-\alpha} & \text{si } k \in \mathbb{N} \text{ et } k > \alpha, \\ 0 & \text{si } k \in \mathbb{N} \text{ et } k < \alpha, \end{cases}$

où  $\Gamma(\cdot)$  est la fonction Gamma d'Euler et  $n < \alpha \leq n + 1$ .

4.  $\mathcal{D}^{(\alpha)}(C) = 0$  où  $C$  est une contante.

5.  $\mathcal{D}^{(\alpha)}(fg) = f\mathcal{D}^{(\alpha)}(g) + \mathcal{D}^{(\alpha)}g(f)$  .

$$6. \mathcal{D}^{(\alpha)}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\mathcal{D}^{(\alpha)}(f) - f\mathcal{D}^{(\alpha)}(g)}{g^2} \quad \text{avec } g \neq 0,$$

Si  $f$  est  $n$  fois différentiable sur  $[a, +\infty[$  alors on a :

$$\mathcal{D}^{(\alpha)}(f)(t) = (t - a)^{n+1-\alpha} f^{(n+1)}(t), \quad n < \alpha \leq n + 1.$$

Soit  $h(t) = (f \circ g)(t)$  telle que  $f$  et  $g$  sont des fonction  $\alpha$ -différentiables , alors :

$$\mathcal{D}^{(\alpha)}(h)(t) = \mathcal{D}^{(\alpha)}(f)(g(t)) \cdot \mathcal{D}^{(\alpha)}(g)(t) \cdot g^{\alpha-1}(t).$$

**Remarque 1.4** ([5]). On a :

– Si  $f$  est différentiable alors :

$$\mathcal{D}_\alpha^a(f)(t) = (t - a)^{1-\alpha} f'(t).$$

– Si  $f$  est différentiable alors :

$$\mathcal{D}_\alpha^b(f)(t) = -(b - t)^{1-\alpha} f'(t).$$

### 1.6.1 La transformée de Laplace fractionnaire conformable

Dans cette section, nous présentons la définition de la transformé de Laplace fractionnaire conformable et certaines des ses propriétés.

**Définition 1.9.** (La transformée de Laplace fractionnaire conformable, [2]).

Soient  $\alpha \in ]0, 1]$  et  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction donnée. Alors, la transformée de Laplace fractionnaire conformable d'ordre  $\alpha$  est définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha \{f(t)\} = \mathcal{F}_\alpha(s) &= \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} f(t) e^{-s \frac{t^\alpha}{\alpha}} dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^\tau t^{\alpha-1} f(t) e^{-s \frac{t^\alpha}{\alpha}} dt. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Si  $\alpha = 1$ , alors (1.7) est la définition classique de la transformée de Laplace.

**Théorème 1.2.** ([2]) Soient  $\alpha \in ]0, 1]$  et  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction différentiable. Alors,

$$\mathcal{L}_\alpha \{\mathcal{D}^{(\alpha)} f(t)\} = s \mathcal{F}_\alpha(s) - f(0) \quad (1.8)$$

*Démonstration.* Avec  $\mathcal{D}^{(\alpha)}(f)(t) = (t - a)^{n+1-\alpha} f^{(n+1)}(t)$ ,  $n < \alpha \leq n + 1$ , nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha \{\mathcal{D}^{(\alpha)} f(t)\} &= \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^\tau t^{\alpha-1} \mathcal{D}^{(\alpha)} f(t) e^{-s \frac{t^\alpha}{\alpha}} dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^\tau t^{\alpha-1} t^{1-\alpha} f'(t) e^{-s \frac{t^\alpha}{\alpha}} dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^\tau f'(t) e^{-s \frac{t^\alpha}{\alpha}} dt, \end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\alpha \{ \mathcal{D}^{(\alpha)} f(t) \} &= \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \left[ f(t) e^{-s \frac{t^\alpha}{\alpha}} \right]_0^\tau + \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^\tau s t^{\alpha-1} f(t) e^{-s \frac{t^\alpha}{\alpha}} dt \\ &= -f(0) + s \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^\tau t^{\alpha-1} f(t) e^{-s \frac{t^\alpha}{\alpha}} dt \\ &= s \mathcal{F}(s) - f(0), \quad s > 0.\end{aligned}$$

**Lemme 1.1.** ([2]). Soient  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction telle que  $\mathcal{L}_\alpha \{ f(t) \} (s) = \mathcal{F}_\alpha(s)$  existe. Alors, nous avons :

$$\mathcal{F}_\alpha(s) = \mathcal{L} \left\{ f \left( (\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right\} (s), \quad (1.9)$$

où  $\mathcal{L}$  est la transformée de Laplace classique telle que

$$\mathcal{L} \{ f(t) \} (s) = \mathcal{F}(s) := \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt. \quad (1.10)$$

Démonstration. Avec le changement de variable  $x = \frac{t^\alpha}{\alpha}$ , on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\alpha(s) &= \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^\tau t^{\alpha-1} f(t) e^{-s \frac{t^\alpha}{\alpha}} dt \\ &= \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_0^\tau f \left( (\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} \right) e^{-sx} dx \\ &= \mathcal{L} \left\{ f \left( (\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right\} (s)\end{aligned}$$

**Exemple 1.6.** En utilisant (1.9), nous obtenons :

1.  $\mathcal{L}_\alpha \left\{ \sin \left( w \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right\} (s) = \mathcal{L} \left\{ \sin \left( w \frac{((\alpha t)^{1/\alpha})^\alpha}{\alpha} \right) \right\} = \mathcal{L} \{ \sin(wt) \} = \frac{w}{s^2 + w^2}, \quad s > 0.$
2.  $\mathcal{L}_\alpha \left\{ \cos \left( w \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) \right\} (s) = \mathcal{L} \left\{ \cos \left( w \frac{((\alpha t)^{1/\alpha})^\alpha}{\alpha} \right) \right\} = \mathcal{L} \{ \cos(wt) \} = \frac{s}{s^2 + w^2}, \quad s > 0.$

**Définition 1.10.** (Ordre exponentiel fractionnaire conformable, ([2]))

Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ . Une fonction  $f$  est dite d'ordre exponentiel fractionnaire conformable  $\mu$ , s'il existe des constantes  $M > 0$  et  $t_0 \geq 0$  telle que

$$|f(t)| \leq M e^{\mu \frac{t^\alpha}{\alpha}}, \quad t \geq t_0. \quad (1.11)$$

**Théorème 1.3.** (Existence de la transformée de Laplace fractionnaire conformable, ([2])).

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ , et d'ordre exponentiel fractionnaire  $\mu$ , alors la transformée de Laplace fractionnaire conformable  $\mathcal{F}_\alpha(s)$  de  $f$  existe pour tout  $s > \mu$ .

Démonstration.  $f$  est continu par morceaux et d'après (1.7) nous avons :

$$I = \int_{t_0}^{+\infty} t^{\alpha-1} f(t) e^{-s \frac{t^\alpha}{\alpha}} dt = I_1 + I_2,$$

Où

$$I_1 = \int_0^{t_0} t^{\alpha-1} f(t) e^{-s \frac{t^\alpha}{\alpha}} dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{t_0}^{+\infty} t^{\alpha-1} f(t) e^{-s \frac{t^\alpha}{\alpha}} dt$$

Pour  $t \in [0, t_0]$ ,  $f$  est continue par morceaux. Soit  $B = \max_{0 \leq t \leq t_0} |f(t)|$ , alors

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{t_0} t^{\alpha-1} f(t) e^{-s \frac{t^\alpha}{\alpha}} dt \right| &\leq \int_0^{t_0} \left| t^{\alpha-1} f(t) e^{-s \frac{t^\alpha}{\alpha}} \right| dt \\ &\leq B \int_0^{t_0} t^{\alpha-1} e^{-s \frac{t^\alpha}{\alpha}} dt \\ &\leq B \left( \frac{1 - e^{-s \frac{t_0^\alpha}{\alpha}}}{s} \right), \end{aligned}$$

d'où, l'intégrale  $I_1$  existe.

Pour  $t \in [t_0, +\infty[$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \left| \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^{\tau} t^{\alpha-1} f(t) e^{-s \frac{t^\alpha}{\alpha}} dt \right| &\leq \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^{\tau} t^{\alpha-1} |f(t)| e^{-s \frac{t^\alpha}{\alpha}} dt \\ &\leq M \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^{\tau} t^{\alpha-1} e^{-(s-\mu) \frac{t^\alpha}{\alpha}} dt \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable  $x = (s - \mu) \frac{t^\alpha}{\alpha}$ , on obtient :

$$\left| \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^{\tau} t^{\alpha-1} f(t) e^{-s \frac{t^\alpha}{\alpha}} dt \right| \leq \frac{M}{s - \mu},$$

d'où, l'intégrale  $I_2$  est convergente pour  $s > \mu$ . Par conséquent, la transformée de Laplace fractionnaire conformable existe pour  $s > \mu$ .

### Propriétés 1.3. ([2])

1. La transformée de Laplace fractionnaire conformable est un opérateur linéaire :

$$\mathcal{L}_\alpha \{ \mu f(t) + \lambda g(t) \} (s) = \mu \mathcal{L}_\alpha \{ f(t) \} + \lambda \mathcal{L}_\alpha \{ g(t) \} \quad (1.12)$$

où  $\mu$  et  $\lambda$  sont des constantes réels.

2. Nous avons :

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ f(t) e^{-k \frac{t^\alpha}{\alpha}} \right\} (s) = \mathcal{L} \left\{ f \left( (at)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right\} \Big|_{s=s+k}, \quad s > -k. \quad (1.13)$$

3. Soient  $\alpha \in ]0, 1]$  et  $f(t)$  et  $g(t)$  sont des fonctions. La transformée de Laplace fractionnaire de la produit de convolution de  $f$  et  $g$  est donnée par :

$$\mathcal{L} \{ (f * g) (t) \} = \mathcal{F}_\alpha(s) \mathcal{G}_\alpha(s), \quad (1.14)$$

où

$$(f * g)(t) = \int_0^t f \left( (t^\alpha - \tau^\alpha)^{1/\alpha} \right) g(\tau) \frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}}.$$

Démonstration.

1. Trivial par (1.7).

2. En utilisant Lemme (1.1), on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\alpha \left\{ f(t) e^{-k \frac{t^\alpha}{\alpha}} \right\} (s) &= \mathcal{L} \left\{ f \left( (\alpha t)^{1/\alpha} \right) e^{-k \frac{((\alpha t)^{1/\alpha})^\alpha}{\alpha}} \right\} (s) \\ &= \mathcal{L} \left\{ f \left( (\alpha t)^{1/\alpha} \right) e^{-kt} \right\} (s) \\ &= \mathcal{L} \left\{ f \left( (\alpha t)^{1/\alpha} \right) \right\} (s) \Big|_{s=s+k}, \quad s > -k.\end{aligned}$$

Par exemple :

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ \cos \left( r \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) e^{-k \frac{t^\alpha}{\alpha}} \right\} (s) = \mathcal{L} \left\{ \cos (rt) \right\} \Big|_{s=s+k} = \frac{s}{s^2 + r^2} \Big|_{s=s+k} = \frac{s+k}{(s+k)^2 + r^2}$$

et

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ \sin \left( r \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) e^{-k \frac{t^\alpha}{\alpha}} \right\} (s) = \mathcal{L} \left\{ \sin (rt) \right\} \Big|_{s=s+k} = \frac{r}{s^2 + r^2} \Big|_{s=s+k} = \frac{r}{(s+k)^2 + r^2}$$

3. d'après Lemme (1.1) et la définition de convolution, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\alpha \{ (f * g)(t) \} (s) &= \mathcal{L} \left\{ (f * g)(t) \left( (\alpha t)^{1/\alpha} \right) \right\} (s) \\ &= \int_0^{+\infty} (f * g) \left( (\alpha t)^{1/\alpha} \right) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^t f \left( (\alpha(t-x))^{1/\alpha} \right) g \left( (\alpha x)^{1/\alpha} \right) dx \right) e^{-st} dt.\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\mathcal{L}_\alpha \{ (f * g)(t) \} (s) = \int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} f \left( (\alpha(t-x))^{1/\alpha} \right) g \left( (\alpha x)^{1/\alpha} \right) e^{-st} dt dx.$$

On pose  $y = t - x$ , nous avons :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_\alpha \{(f * g)(t)\}(s) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f((\alpha y)^{1/\alpha}) g((\alpha x)^{1/\alpha}) e^{-s(x+y)} dy dx \\
 &= \left( \int_0^{+\infty} f((\alpha y)^{1/\alpha}) e^{-sy} dy \right) \left( \int_0^{+\infty} g((\alpha x)^{1/\alpha}) e^{-sx} dx \right) \\
 &= \mathcal{L} \left\{ f((\alpha y)^{1/\alpha}) \right\}(s) \cdot \mathcal{L} \left\{ g((\alpha x)^{1/\alpha}) \right\}(s) \\
 &= \mathcal{L}_\alpha \{f(t)\}(s) \cdot \mathcal{L}_\alpha \{g(t)\}(s) \\
 &= \mathcal{F}_\alpha(s) \mathcal{G}_\alpha(s).
 \end{aligned}$$

**Définition 1.11.** (Voir [[1],[24]] Fonction exponentielle fractionnaire conforme)

Pour tout  $t \geq 0$ , la fonction exponentielle fractionnaire conforme est définie par :

$$E_\alpha(\lambda, t) = \exp \left( \lambda \cdot \frac{t^\alpha}{\alpha} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k (t)^\alpha k}{\alpha^k k!}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.15)$$

# PROBLÈME SPECTRAL

Dans ce chapitre, nous considérons une classe de problèmes spectraux pour un opérateur différentiel ordinaire du second ordre avec involution d'inversion et des conditions aux limites non locales. Nous avons prouvé que le système de fonctions propres est complet et orthogonal dans  $L^2(-1, 1)$ .

## 2.1 Problème spectral

L'utilisation de la méthode de séparation des variables pour résoudre le problème inverse (7)-(9) conduit à un problème spectral pour l'opérateur  $\mathcal{L}$  donné par l'expression différentielle :

$$\mathcal{L}X(x) = -X''(x) + \varepsilon X''(-x) = \lambda X(x), \quad x \in [-1, 1], \quad (2.1)$$

et les conditions aux limites de type périodique

$$\begin{cases} X(-1) = X(1), \\ X'(-1) - X'(1) + aX(-1) = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $\lambda \geq 0$  est un paramètre et  $a = \frac{1}{\gamma(1-\varepsilon)}$  avec  $|\varepsilon| < 1$ . On remarque que le problème spectral (2.1)-(2.2) a été étudié par M. Kirane et al. [10] et M.A. Sadybekov et al. [20].

### 2.1.1 Solution générale de l'équation (2.1)

Pour construire une solution générale de l'équation (2.1), nous avons le théorème suivant :

**Théorème 2.1** ([11]). *La solution générale de l'équation (2.1) est donnée sous la forme suivante :*

$$X(x) = A \cos(\mu_1 x) + B \sin(\mu_2 x), \quad \mu_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}} \text{ et } \mu_2 = \sqrt{\frac{\lambda}{1+\varepsilon}}, \quad (2.3)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes arbitraires.

*Démonstration.* Il est facile de voir que les fonctions (2.3) sont des solutions de (2.1). Démontrons l'absence d'autres solutions. Toute fonction  $X(x)$  peut être représentée comme une somme de

fonctions paires et impaires c'est à dire

$$X(x) = S(x) + W(x), \quad (2.4)$$

où  $S$  est une fonction paire et  $W$  est une fonction impaire.

En remplaçant (2.4) dans (2.1), on obtient :

$$\begin{cases} S''(x) = -\mu_1^2 S(x), \\ W''(x) = -\mu_2^2 W(x). \end{cases} \quad (2.5)$$

On résoudre (2.5) et avec (2.4), on obtient (2.3). □

### 2.1.2 Valeurs propres et fonctions propres du problème (2.1)-(2.2)

Pour les valeurs propres et les fonctions propres du problème (2.1)-(2.2), nous avons le lemme suivant :

**Lemme 2.1.** *Le problème spectral (2.1)-(2.2) a deux suites de valeurs propres définies par :*

$$\begin{aligned} \lambda_k^1 &= (1 + \varepsilon) \pi^2 k^2, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \lambda_k^2 &= (1 - \varepsilon) \pi^2 (k + \delta_k)^2, \quad \delta_k = \frac{a}{k+1} O(1), \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

avec les fonctions propres normalisées correspondantes données par :

$$\begin{aligned} X_k^1 &= \sin(k\pi x), \quad k \in \mathbb{N}^*, \\ X_k^2 &= v_k \cos(k + \delta_k) \pi x, \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

où  $v_k$  une suite donnée par :

$$\frac{1}{v_k^2} = \|\cos(k + \delta_k) \pi x\|^2 = 1 + \frac{a^2}{(k + \delta_k) \pi [a^2 + (k + \delta_k)^2 \pi^2]}.$$

**Lemme 2.2.** *Le système de fonctions (2.7) est complet et orthogonal dans  $L^2(-1, 1)$ .*

*Démonstration.* Soit  $f(x)$  une fonction arbitraire orthogonale au système (2.6). Nous avons :

$$0 = \int_{-1}^1 f(x) \sin(k\pi x) dx = \int_0^1 [f(x) - f(-x)] \sin(k\pi x) dx.$$

Cependant, le système  $\{\sin(k\pi x), k \in \mathbb{N}\}$  forme une base dans  $L^2(0, 1)$ . Donc, on a :

$$f(x) - f(-x) = 0 \text{ pour tout } x \in [-1, 1], \quad (2.8)$$

d'où  $f$  est une fonction paire.

D'autre part, l'orthogonalité de  $f(x)$  à toutes les fonctions propres  $X_k^2(x)$  avec  $n \in \mathbb{N}$ , on trouve :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^1 f(x) X_k^2(x) dx = v_k \int_{-1}^1 f(x) \cos(k + \delta_k \pi x) dx \\ &= v_k \int_0^1 [f(x) + f(-x)] \cos(k + \delta_k \pi x) dx \end{aligned}$$

Mais, le système  $\{v_k \cos(k + \delta_k) \pi x, k \in \mathbb{N}\}$  forme une base dans  $L^2(0, 1)$ . Donc, on a :

$$f(x) + f(-x) = 0, \text{ pour tout } x \in [-1, 1], \quad (2.9)$$

d'où,  $f$  est une fonction impaire. Par conséquent, de (2.8) et (2.9), on obtient  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in [-1, 1]$ .  $\square$

## EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION

Dans ce chapitre, nous avons montré un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème (7)-(9) par la méthode de Fourier et les propriétés de calcul fractionnaire conforme.

### 3.1 Unicité de La Solution du Problème

Laissez la paire de fonctions  $(u(x, t), f(x))$  être une solution du problème inverse (??) à (??). Laissez-nous présenter des notations

$$u_{k,i}(t) = \int_{-1}^{+1} u(x, t)X_{k,i}(x)dx, \quad f_{k,i} = \int_{-1}^{+1} f(x)X_{k,i}(x)dx, \quad i = 1, 2 \quad (3.1)$$

Nous appliquons l'opérateur  $\mathcal{D}_t^{(\alpha)}$  à  $u_{k,i}(t)$ . Alors, en utilisant l'équation (??), En intégrant par des pièces, Nous obtenons un problème

$$\mathcal{D}_t^{(\alpha)}u_{k,i}(t) + \lambda_{k,i}u_{k,i}(t) = f_{k,i}, \quad 0 < t < T, \quad i = 1, 2; \quad (3.2)$$

Et d'après (??),(??)

Nous avons

$$\begin{cases} u(x, 0) = \phi(x) - \gamma \int_{-1}^{+1} f(x)dx = \phi_1(x) \\ u(x, T) = \psi(x) - \gamma \int_{-1}^{+1} f(x)dx = \psi_1(x) \end{cases} \quad (3.3)$$

Alors

$$\implies \begin{cases} u_{k,i}(0) = \phi_{k,i} - \sigma_{k,i}, & i = 1, 2; \\ u_{k,i}(T) = \psi_{k,i} - \sigma_{k,i}, & i = 1, 2. \end{cases} \quad (3.4)$$

Donc, Nous utilisons la notation

$$\phi_{k,i} = \int_{-1}^{+1} \phi(x)X_{k,i}(x)dx,$$

$$\psi_{k,i} = \int_{-1}^{+1} \psi(x)X_{k,i}(x)dx,$$

Et

$$\sigma_{k,i} = \gamma \int_{-1}^{+1} f(x) dx \int_{-1}^{+1} X_{k,i}(x) dx,$$

Il est facile de voir que la fonction  $\tilde{u}_{k,1}(t) = (\lambda_{k,i})^{-1} f_{k,i}$  est une solution partielle de l'équation inhomogène (??) Et d'après la transformée de Laplace conformable fractionnaire :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha \left\{ \mathcal{D}_t^{(\alpha)} u_{k,i}(t) + \lambda_{k,i} u_{k,i}(t) \right\} = \mathcal{L}_\alpha \left\{ f_{k,i} \right\} &\implies \mathcal{L}_\alpha \left\{ \mathcal{D}_t^{(\alpha)} u_{k,i}(t) \right\} + \mathcal{L}_\alpha \left\{ \lambda_{k,i} u_{k,i}(t) \right\} = \mathcal{L}_\alpha \left\{ f_{k,i} \right\} \\ &\implies \mathcal{L}_\alpha \left\{ \mathcal{D}_t^{(\alpha)} u_{k,i}(t) \right\} + \lambda_{k,i} \mathcal{L}_\alpha \left\{ u_{k,i}(t) \right\} = \mathcal{L}_\alpha \left\{ f_{k,i} \right\} \end{aligned}$$

Alors

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ \mathcal{D}_t^{(\alpha)} u_{k,i}(t) \right\} = s \mathcal{U}_\alpha(s) - u_{k,i}(0) \quad (3.5)$$

On a

$$\mathcal{U}_\alpha(s) = \mathcal{L} \left\{ u \left( (\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right\} (s) \quad (3.6)$$

Et

$$\mathcal{L}_\alpha \left\{ u_{k,i}(t) \right\} = \mathcal{U}_\alpha(s) \quad ; \quad \mathcal{L}_\alpha \left\{ f_{k,i} \right\} = \mathcal{F}_\alpha(s) \quad (3.7)$$

En remplaçant (3.5),(3.7) dans l'équation suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha \left\{ \mathcal{D}_t^{(\alpha)} u_{k,i}(t) \right\} + \lambda_{k,i} \mathcal{L}_\alpha \left\{ u_{k,i}(t) \right\} = \mathcal{L}_\alpha \left\{ f_{k,i} \right\} &\implies s \mathcal{U}_\alpha(s) - u_{k,i}(0) - \lambda_{k,i} \mathcal{U}_\alpha(s) = \mathcal{F}_\alpha(s) \\ &\implies (s + \lambda_{k,i}) \mathcal{U}_\alpha(s) - u_{k,i}(0) = \mathcal{F}_\alpha(s) \\ &\implies (s + \lambda_{k,i}) \mathcal{U}_\alpha(s) - (\phi_{k,i} - \sigma_{k,i}) = \mathcal{F}_\alpha(s) \end{aligned}$$

On a  $u_{k,i}(0) = \phi_{k,i} - \sigma_{k,i}$  Alors

$$(s + \lambda_{k,i}) \mathcal{U}_\alpha(s) = \mathcal{F}_\alpha(s) + (\phi_{k,i} - \sigma_{k,i}) \implies \mathcal{U}_\alpha(s) = \frac{1}{(s + \lambda_{k,i})} \mathcal{F}_\alpha(s) + \frac{1}{(s + \lambda_{k,i})} (\phi_{k,i} - \sigma_{k,i})$$

Et d'après l'inverse de la transformation de Laplace fractionnaire conformable  $\mathcal{L}_\alpha^{-1}$

on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha^{-1} \left\{ \mathcal{U}_\alpha(s) \right\} &= \mathcal{L}_\alpha^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \lambda_{k,i})} \mathcal{F}_\alpha(s) + \frac{1}{(s + \lambda_{k,i})} (\phi_{k,i} - \sigma_{k,i}) \right\} \\ &= \mathcal{L}_\alpha^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \lambda_{k,i})} \mathcal{F}_\alpha(s) \right\} + \mathcal{L}_\alpha^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \lambda_{k,i})} (\phi_{k,i} - \sigma_{k,i}) \right\} \\ &= \mathcal{L}_\alpha^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \lambda_{k,i})} \right\} \mathcal{L}_\alpha^{-1} \left\{ \mathcal{F}_\alpha(s) \right\} + \mathcal{L}_\alpha^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \lambda_{k,i})} \right\} (\phi_{k,i} - \sigma_{k,i}) \end{aligned}$$

E de

$$\mathcal{L}_\alpha^{-1} \left\{ \mathcal{F}_\alpha(s) \right\} = f_{k,i}, \quad \mathcal{L}_\alpha^{-1} \left\{ \frac{1}{(s + \lambda_{k,i})} \right\} = E_\alpha(-\lambda_{k,i}, t);$$

On a (1.15)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\alpha^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\lambda_{k,i})}\right\} &= E_\alpha(-\lambda_{k,i}, t) \\ &= \exp\left(-\lambda_{k,i} \cdot \frac{t^\alpha}{\alpha}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-\lambda_{k,i}^k (t)^\alpha k}{\alpha^k k!}\end{aligned}$$

Et nous obtenons le formulaire suivant

$$u_{k,i}(t) = \left(\phi_{k,i} - \sigma_{k,i} - \frac{f_{k,i}}{\lambda_{k,i}}\right) E_\alpha(-\lambda_{k,i}, t) + \frac{f_{k,i}}{\lambda_{k,i}}$$

Puisque  $|\varepsilon| < 1$ ,  $a > 0$ , on a  $\lambda_{k,i} > 0$  pour tout  $k, i$ .

Par conséquent,

Sous assez grand  $T$ , l'estimation

$$1 - E_\alpha(-\lambda_{k,i}, T) \geq 1 - E_\alpha(-\lambda_{0,2}, T) > 0, \quad (3.8)$$

Pour toutes les valeurs des indexes  $k, i$ .

Par conséquent, en utilisant la condition de "surdétermination finale" (??), nous obtenons

$$\begin{aligned}u(T) &= \left(\phi_{k,i} - \sigma_{k,i} - \frac{f_{k,i}}{\lambda_{k,i}}\right) E_\alpha(-\lambda_{k,i}, T) + \frac{f_{k,i}}{\lambda_{k,i}} \\ \implies \psi_{k,i} - \sigma_{k,i} &= \phi_{k,i} E_\alpha(-\lambda_{k,i}, T) - \sigma_{k,i} E_\alpha(-\lambda_{k,i}, T) - \frac{f_{k,i}}{\lambda_{k,i}} E_\alpha(-\lambda_{k,i}, T) + \frac{f_{k,i}}{\lambda_{k,i}} \\ \implies \psi_{k,i} - \sigma_{k,i} - \phi_{k,i} E_\alpha(-\lambda_{k,i}, T) + \sigma_{k,i} E_\alpha(-\lambda_{k,i}, T) &= \frac{1}{\lambda_{k,i}} f_{k,i} (1 - E_\alpha(-\lambda_{k,i}, T)) \\ \implies \psi_{k,i} - (1 - E_\alpha(-\lambda_{k,i}, T)) \sigma_{k,i} - \phi_{k,i} E_\alpha(-\lambda_{k,i}, T) &= \frac{1}{\lambda_{k,i}} f_{k,i} (1 - E_\alpha(-\lambda_{k,i}, T)) \\ \implies \frac{\psi_{k,i} - \phi_{k,i} E_\alpha(-\lambda_{k,i}, T)}{1 - E_\alpha(-\lambda_{k,i}, T)} - \sigma_{k,i} &= \frac{1}{\lambda_{k,i}} f_{k,i} \\ \implies f_{k,i} &= \lambda_{k,i} \frac{\psi_{k,i} - \phi_{k,i} E_\alpha(-\lambda_{k,i}, T)}{1 - E_\alpha(-\lambda_{k,i}, T)} - \lambda_{k,i} \sigma_{k,i}\end{aligned}$$

Alors

$$f_{k,i} = \lambda_{k,i} \frac{\psi_{k,i} - \phi_{k,i} E_\alpha(-\lambda_{k,i}, T)}{1 - E_\alpha(-\lambda_{k,i}, T)} - \lambda_{k,i} \sigma_{k,i} \quad (3.9)$$

**Lemme 3.1.** Si (3.8) détient toutes les valeurs des index  $k, i$ , la solution  $(u(x,t), f(x))$  du problème inverse (??) à (??) est unique.

Preuve. Supposons qu'il y a deux solutions généralisées du problème inverse (??)-(??) :  $(u_1(x, t), f_1(x))$  à  $(u_2(x, t), f_2(x))$ . Dénoter

$$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t), \quad f(x) = f_1(x) - f_2(x). \quad (3.10)$$

Ensuite, les fonctions  $u(x, t)$  et  $f(x)$  satisfont à l'équation (??), les conditions des limites (??) et les conditions homogènes (??) et (??) :

$$u(x, 0) = u(x, T) = 0, \quad x \in [-1, 1],$$

Alors

$$u(x, 0) = -\lambda_{k,i}\gamma \int_{-1}^{+1} f(x)dx, \quad u(x, T) = -\lambda_{k,i}\gamma \int_{-1}^{+1} f(x)dx, \quad x \in [-1, 1]$$

Par conséquent, en utilisant les notations (??) de (3.9), nous trouvons

$$f_{k,i} = -\lambda_{k,i}\sigma_{k,i} \equiv -\lambda_{k,i}\gamma \int_{-1}^{+1} f(x)dx \int_{-1}^{+1} X_{k,i}(x)dx.$$

Puisque

$$\begin{aligned} \lambda_{k,i}\gamma \int_{-1}^{+1} X_{k,i}(x)dx &= \int_{-1}^{+1} \left\{ -X''_{k,i}(x) + \varepsilon X''_{k,i}(-x) \right\} dx \\ &= (1 - \varepsilon) \left\{ X'_{k,i}(-1) - X'_{k,i}(1) \right\} \\ &= a(1 - \varepsilon)X_{k,i}(1), \end{aligned} \quad (3.11)$$

Car  $u_x(-1, t) - u_x(1, t) = au(1, t)$ ; Cela donne

$$f_{k,i} = -a(1 - \varepsilon) \left( \gamma \int_{-1}^{+1} f(x)dx \right) X_{k,i}(x). \quad (3.12)$$

Depuis  $X_{k,1}(1) = 0$ , puis pour  $i = 1$  de (3.1), nous avons  $f_{k,1} = 0$ .

Pour la solution généralisée du problème (??)- (??) il est nécessaire que  $f \in L_2(-1, 1)$ . De ceci, en vertu de l'égalité de Parseval pour les bases orthogonales, nous avons cela

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{k,i}|^2 \leq \|f\|^2 < \infty. \quad (3.13)$$

est nécessaire.

Puisque  $a(1 - \varepsilon) \neq 0$ ,

$$X_{k,2}(1) = \nu_k \cos((k\pi + \delta_k)), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0,$$

Ensuite et l'inégalité ne sont possibles qu'à

$$\left( \gamma \int_{-1}^{+1} f(x)dx \right) = 0.$$

Par conséquent, nous obtenons  $f_{k,2} = 0$ .

En utilisant ce résultat, à partir de (3.9), nous trouvons

$$u_{k,i}(t) \equiv \int_{-1}^{+1} u(x, t)X_{k,i}(x)dx = 0, \quad f_{k,i} \equiv \int_{-1}^{+1} f(x)X_{k,i}(x)dx = 0$$

Pour toutes les valeurs des index  $k \in \mathbb{N}$  pour  $i = 1$  et  $k \in \mathbb{N}_0$  pour  $i = 2$ . En outre, par

l'exhaustivité du système (??) dans  $L_2(-1, 1)$ , nous obtenons

$$u(x, t) \equiv 0, \quad f(x) \equiv 0, \quad \forall (x, t) \in \bar{\Omega}.$$

L'unicité de la solution généralisée du problème inverse (??)-(??) est prouvée.

**Corollaire 3.1.** *Si  $a > 0$ , la solution régulière  $(u(x,t), f(x))$  du problème inverse (??)-(??) est unique.*

## 3.2 Construction d'une Solution Formelle du Problème

Comme le système des fonction propres (??) forme une base orthonormale dans  $L_2(-1, 1)$ , les fonctions inconnues  $u(x, t)$  et  $f(x)$  peuvent être représentées comme

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{k,1}(t)X_{k,1}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} u_{k,2}(t)X_{k,2}(x), \quad (3.14)$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{k,1}X_{k,1}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} f_{k,2}X_{k,2}(x), \quad (3.15)$$

Où  $u_{k,1}(t)$  et  $u_{k,2}(t)$  sont des fonctions inconnues, et  $f_{k,1}$  et  $f_{k,2}$  sont des constantes.

Substituant (3.14) et (3.15) dans l'équation (??), nous obtenons les problèmes inverses (??) à (??). Si les constantes  $\sigma_{k,i}$  sont supposées être données, les solutions de ces problèmes inverses existent, sont uniques et sont représentés par des formules(3.9).

Substituant (3.9) en série (3.14) et (3.15), nous obtenons une solution formelle du problème inverse (??) à (??).

De l'analyse de formule (3.9), il est facile de voir que la solution formelle (3.14) du problème (??) à (??) sera à partir d'une série convergente si et seulement si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{k,i} \sigma_{k,i} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.16)$$

Comme ci-dessus, nous calculons

$$\lambda_{k,i} \sigma_{k,i} \equiv a(1 - \varepsilon) \left( \gamma \int_{-1}^{+1} f(x) dx \right) X_{k,i}(1), \quad (3.17)$$

Où  $X_{k,i}(1) = 0$  et

$$X_{k,2}(1) = \nu_k \cos((k\pi + \delta_k)), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0.$$

Ainsi, (3.16) détient si et seulement si  $\sigma_{k,i} = 0$  pour toutes les valeurs des index  $k, i$ . Ceci n'est possible que dans le cas

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = 0. \quad (3.18)$$

Ainsi, la condition (3.18) est une condition nécessaire pour l'existence de la solution généralisée du problème inverse (??)-(??). Dans ce cas, les problèmes (??)-(??) et (??)-(??) coïncident.

En effet, à partir de (3.18) et (??) nous avons

### 3.3 Résultats Principaux

---

# Conclusion générale

---

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème inverse de terme source pour une équation de chaleur fractionnaire avec involution et des conditions aux limites non locales. Ce travail se déroule en deux étapes :

- ✓ Nous avons étudié une classe de problèmes spectraux pour un opérateur différentiel ordinaire du second ordre avec involution d'inversion et des conditions aux limites non locales. Nous avons montré que le système de fonctions propres est complet et orthogonal dans  $L^2(-1, 1)$ .
- ✓ Nous avons montré un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème (7)-(9) par la méthode de Fourier et les propriétés de calcul fractionnaire conforme.

---

# Bibliographie

---

- [1] T. Abdeljawad. On conformable fractional calcul. *J.Comput. Appl.Math*, 2015(279) :57–66, 2015.
- [2] S. Abdelkebir. *Étude de quelques problèmes d'évolution pour des équations aux dérivées fractionnaires*. PhD thesis, Université de M'sila, Algérie, 2022.
- [3] I. Aouina. Problème inverse pour une équation de diffusion avec une condition au limite non locale. Master's thesis, Université de M'sila, Algérie, Juin 2021.
- [4] C. Babbage. An essay towards the calculus of functions. *Philos. Trans. R. Soc. Lond.*, 105 :389–423, 1815.
- [5] K. BOUAZIZ. Résolution analytique et numérique de l'équation de l'arc graphe conformable fractionnaire. Master's thesis, Université de M'sila, Algérie, 28/Juin/2021.
- [6] A. Cabada, F. Adrian, and F. Tojo. *Differential Equations With Involutions*. Atlantis Press, 2015.
- [7] T. Carleman. Sur la theorie des équations intégrales et ses applications. *Verhandl. des internat. Mathem. Kongr. I., Zurich*, pages 138–151, 1932.
- [8] I.A. Kaliev, M.F Mugafarov, and O.V. Fattahova. Inverse problem for forward-backward parabolic equation with generalized conjugation conditions. *Ufa Mathematical Journal*, 3(2) :33–41, 2011.
- [9] I.A. Kaliev and M.M. Sabitova. Problems of determining the temperature and density of heat sources from the initial and final temperatures. *J. Appl. Ind. Math.*, 4(3) :332–339, 2010.
- [10] M. Kirane, M.A. Sadybekov, and A.A. Sarsenbi. On an inverse problem of reconstructing a subdiffusion process from nonlocal data. *Math. Meth. Appl. Sci.*, pages 1–10, 2019.
- [11] A. Kopzhassarova and A. Sarsenbi. Basis properties of eigenfunctions of second-order differential operators with involution. *Abstract and Applied Analysis*, 2012 :1–6, 2012.
- [12] I. Orazov and M.A. Sadybekov. On a class of problems of determining the temperature and density of heat sources given initial and final temperature. *Sib. Math. J.*, 53(1) :146–151, 2012.

- [13] I. Orazov and M.A. Sadybekov. One nonlocal problem of determination of the temperature and density of heat sources. *Russian Math.*, 56(2) :60–64, 2012.
- [14] D. Przeworska-Rolewicz. Sur les Équations involutives et leurs applications. *Studia Math.*, 20 :95–117, 1961.
- [15] D. Przeworska-Rolewicz. On equations with different involutions of different orders and their applications to partial differential-difference equations. *Studia Math.*, 32 :101–111, 1969.
- [16] D. Przeworska-Rolewicz. On equations with reflection. *Studia Math.*, 33 :197–206, 1969.
- [17] D. Przeworska-Rolewicz. On equations with rotations. *Studia Math.*, 35 :51–68, 1970.
- [18] D. Przeworska-Rolewicz. *Equations with Transformed Argument. An Algebraic Approach, Modern Analytic and Computational Methods in Science and Mathematics*. Elsevier Scientific Publishing and PWN-Polish Scientific Publishers, Amsterdam and Warsaw, 1973.
- [19] M. Ruzhansky, M. Sadybekov, and D. Suragan. *Spectral Geometry of Partial Differential Operators*. CRC Press is an imprint of Taylor , Francis Group, an Informa business, 2020.
- [20] M.A. Sadybekov, G. Dildabek, and M.B. Ivanova. On an inverse problem of reconstructing a heat conduction process from nonlocal data. *Advance in Mathematical Physics*, 2018 :1–8, 2018.
- [21] M.A. Sadybekov and A.M. Sarsenbi. On the notion of regularity of boundary value problems for differential equation of second order with dump argument. *Mathematical Journal*, 7(1) :Article 23, 2007.
- [22] A.M. Sarsenbi. Unconditional bases related to a nonclassical second-order differential operator. *Differential Equations*, 46(4) :506–511, 2010.
- [23] A.M. Sarsenbi and A.A. Tengaeva. On the basis properties of root functions of two generalized eigenvalue problems. *Differential Equations*, 48(2) :1–3, 2012.
- [24] S. Souad and D. Nacira. Le problème de cauchy avec la dérivée conforme. Master’s thesis, Université Ibn KHaldoun-Tiaret, Algérie, 28/07/2021.
- [25] J. Wiener. *Generalized Solutions of Functional-Differential Equations*. World Scientific Publishing, New Jersey, 1993.

**ملخص:** في هذه المذكرة، درسنا مسألة عكسية لمعادلة الحرارة الكسرية مع الانقلاب وشروط حدية غير محلية. هذه المسألة تصف عملية انتشار الحرارة في سلك رفيع مغلق ملفوف حول مادة عازلة منخفضة النفاذية. تتمثل هذه المسألة العكسية في تحديد الطرف الأيمن غير المجهول من المعادلة والمتعلق فقط بالمتغير المكاني. بداية درسنا المسألة الطيفية المرفقة حيث برهننا أن جملة الدوال الذاتية تشكل جملة تامة ومتعامدة في الفضاء  $L^2(-1,1)$  ثم أثبتنا الوجود والوحدانية للحل وذلك باستعمال طريقة فورييه وخواص الحساب الكسري المطابق.

**كلمات مفتاحية:** معادلة الحرارة، الانقلاب، الحساب الكسري المطابق، طريقة فورييه، شروط حدية غير محلية.

---

Dans ce mémoire, nous avons considéré un problème inverse de terme source pour une équation de chaleur fractionnaire avec involution et des conditions aux limites non locales. Ce problème simule le processus de propagation de la chaleur dans un fil fermé mince enroulé autour d'une isolation faiblement perméable. Ce problème inverse consiste à déterminer un membre droit inconnu de l'équation, qui ne dépend que de la variable spatiale. Les résultats d'existence et d'unicité pour le problème donné sont obtenus via la méthode de Fourier et les propriétés de calcul fractionnaire conformable.

**Mots-Clés :** Équation de chaleur, Involution, Dérivée fractionnaire conformable, Méthode de Fourier, Conditions aux limites non locales.

---

In this memoir, we have considered an inverse source term problem for a fractional heat equation with involution and non-local boundary conditions. This problem simulates the process of heat propagation in a thin closed wire wrapped around a low permeable insulation. This inverse problem consists in determining an unknown right side of the equation, which depends only on the spatial variable. The existence and uniqueness results for the given problem are obtained via Fourier's method and conformable fractional calculus propertie.

**Keywords :** Heat equation, Involution, Conformable fractional derivative, Fourier method, Non-local boundary conditions.