



UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de
MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Géométrie d'espaces de Banach et Analyse harmonique

Par

SAMIHA AICHOUCHE

Sujet

TYPE ET COTYPE DES ESPACES DE BANACH

Soutenu publiquement le 27/05/2013 devant le jury composé de:

Président:	Mr. SAADI KHALIL	MC. B	Université de M'sila.
Rapporteur:	Mr. DAHMANE ACHOUR	PROF	Université de M'sila.
Examineur:	Mr. E. AHIA	MA. A	Université de M'sila.

Promotion: 2012/2013

Remerciements

Malgré tout le soin apporté à la rédaction de ce mémoire, il est possible que quelques erreurs soient toujours en présentées dans ce travail.

A terme de cette étude, j'ai le plaisir et le devoir de remercier en premier lieu le bon dieu, le tout puissant de nous avoir donné la volonté et le courage pour accomplir cette tâche.

*Avec une immense estimation, j'exprime mes plus grands remerciements à **Monsieur D. ACHOUR**, qui m'a encadrée d'une manière exemplaire: de compétence et de disponibilité à mon égard.*

Je tiens à exprimer tous mes respects à mes parents, mes frères et mes sœurs qui m'ont toujours encouragée.

Mes remerciements à tous les professeurs du département de Mathématiques.

Je ne saurais aussi oublier mes amis et mes collègues qui ont participé de loin ou de près et qui m'ont aidée à l'élaboration de ce mémoire.

MERCI.

Résumé

Nous nous intéressons ici à étudier une classe d'espaces, que nous appellerons des espaces de type p et de cotype q , avec quelques propriétés générales, et nous donnerons quelques exemples, ensuite nous montrerons le théorème de Kwapien, affirmant qu'un espace de Banach est isomorphe à un espace de Hilbert si et seulement s'il est à la fois de type 2 et de cotype 2.

Et on utilisera les notions de cotype q pour montrer quelques théorèmes dans la théorie des opérateurs (p, q) -sommants.

Mots clés : Espace de Banach de type p , Espace de Banach de cotype q , Type et cotype gaussiennes, Théorème de Kwapien, Opérateur de type p , Opérateur de cotype q , Cotype et opérateurs (p, q) -sommants.

Notations générale

$L^p(\mu)$	Espace des classes d'équivalence p.p des fonctions \mathcal{T} -mesurable.
$\mathcal{C}(K)$	Espace des fonctions continues de K dans \mathbb{R} .
$l_p(X)$ (resp. $l_p^n(X)$)	Espace des suites (x_i) (resp. $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$) dans X absolument p -sommables.
$l_p^\omega(X)$ (resp. $l_p^{\omega, \infty}(X)$)	Espace des suites (x_i) (resp. $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$) dans X faiblement p -sommables.
l_p	Espace des suites scalaires.
$\mathcal{L}(X; Y)$	Espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y .
$\sigma(X, X^*)$	Topologie faible définie sur X .
$\sigma(X^*, X)$	Topologie *-faible définie sur X^* .
B_X	Boule unité fermée de X .
(Ω, \mathcal{A}, P)	Espace de probabilité.
\mathcal{B}	Tribu borélienne.
$L^0(E)$	Espace des classes d'équivalence p.s des variables aléatoires à valeurs dans E .
$L^p(E)$	Espace des $X \in L^0(E)$ telles que $\ X(\cdot)\ \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
$L^p(\mu, E)$	Espace des classes d'équivalence p.p des fonctions $(\mathcal{T}-\mathcal{B})$ -mesurables.
$(\varepsilon_i)_{i \geq 1}$	Suite de Rademacher(Bernoulli) de variable aléatoire définies sur Ω à valeur dans $\{-1, 1\}$ indépendantes, symétriques.
$(r_i)_{i \geq 1}$	Suite des fonctions de Rademacher $r_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.
$\Pi_{p,q}(X, Y)$	Espace de Banach des opérateurs linéaires (p, q) -sommants de X dans Y .
$\Pi_p(X, Y)$	Espace de Banach des opérateurs linéaires p -sommants de X dans Y .

Table des matières

Introduction	2
1 Préliminaires	3
1.1 Espaces de fonctions	3
1.1.1 Espace L_p	3
1.1.2 Espace $\mathcal{C}(K)$	5
1.2 Compléments sur les espaces de Banach	6
1.2.1 La distance de Banach-Masur	6
1.2.2 Principe de réflexivité locale	6
1.3 Notion fondamentales de Probabilités	7
1.3.1 Espaces $L^p(\Omega, \mathcal{A}, P; E)$	10
1.3.2 La suite de Rademacher (Bernoulli)	10
1.3.3 Variables gaussiennes	13
1.3.4 Inégalités de Khintchine et Kahane	14
1.4 Espaces des suites p -sommables et leurs opérateurs	15
1.4.1 Espaces des suites p -sommables	15
1.4.2 Opérateurs (p, q) -sommants	18
2 Type et cotype des espaces de Banach	20
2.1 Introduction	20
2.2 Type et Cotype de Radmacher (Définition et premières propriétés)	24
2.3 Type et Cotype gaussiennes	36

3	Généralisation de type et de cotype et Quelques applications	39
3.1	Généralisation de type et de cotype des espaces de Banach	39
3.2	Quelques applications de type et de cotype	41
3.2.1	Factorisation par un espace de Hilbert et Théorème de Kwapien	41
3.2.2	Cotype et opérateurs (p, q) -sommants	43
	Bibliographie	54

Introduction

Les notions de type et de cotype appelées aussi type ou cotype de Rademacher, sont des notions très importantes, elles sont basées sur des relaxations de l'identité du parallélogramme généralisée. Ces deux notions fournissent un outil puissant en théorie linéaire des espaces de Banach et sont fortement liées à la géométrie de l'espace.

Notre travail de mémoire est divisé en trois chapitres qui sont les suivants:

Dans le premier chapitre, on donne un aperçu général sur les espaces de Banach classiques, comme les espaces $L_p(\mu)$ et l'espace des fonctions continues sur un compact, puis on donne quelques notions fondamentales de probabilités, plus-précisément les variables aléatoires à valeur dans un espace de Banach qui forment les espaces $L^p(\Omega, \mathcal{A}, P; E)$, et on y trouvera par exemple les inégalités de Kahane, généralisant au cadre vectoriel les inégalités de Khintchine (bien connues en analyse classique), on définit aussi dans ce chapitre, l'espace des suites p -sommable, les opérateurs (p, q) -sommants (ceux sont des opérateurs entre des espaces de Banach, qui transforment les suites faiblement q -sommables en des suites absolument p -sommables) et on donne quelques propriétés relatifs à cette classe des opérateurs.

L'objectif de deuxième chapitre, est d'étudier la notion de type et de cotype présentée sous sa forme la plus fructueuse par **Maurey et Pisier** en 1974. On dit que X est de type p (avec $1 \leq p \leq 2$), s'il existe une constante $C \geq 1$ telle que

$$\left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i \right\|^2 dP(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p} .$$

Pour tous $x_1, \dots, x_n \in X$, $(\varepsilon_i)_{i \geq 1}$ étant une suite de Bernoulli. On dit que X est de cotype q (avec $2 \leq q \leq +\infty$), s'il existe une constante $C \geq 1$ telle que

$$\left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i \right\|^2 dP(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{C} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{1/q}.$$

Tout espace de Banach est de type 1 (par l'inégalité triangulaire) et de cotype $+\infty$ (à cause de l'orthogonalité des variables de Bernoulli). Il est important d'observer que ces notions ne dépendent que des sous-espaces de dimension finie de X . ce sont donc des notions locales, aussi des notions duales mais ceci n'est pas vrai en toute généralité. Grâce à l'identité du parallélogramme, il est clair que tout espace de Hilbert est à la fois de type 2 et de cotype 2.

Dans le troisième chapitre, on peut généraliser la définition de type et de cotype aux opérateurs linéaires continues, et l'objectif essentiel de ce chapitre est de démontrer le théorème Kwapien qui assure que si X est un espace de Banach de type 2 et de cotype 2 il est donc isomorphe à un espace de Hilbert. Ce résultat s'appuie sur des théorèmes de factorisation par un espace de Hilbert.

On termine ce chapitre par quelques applications de notions de type et de cotype sur la factorisation par un espace de Hilbert, et on essaye d'étudier la relation entre la notion de cotype et les opérateurs (p, q) -sommants.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espaces de fonctions

1.1.1 Espace L_p

Soit (T, \mathcal{T}, μ) un espace mesuré. Soit f une fonction \mathcal{T} -mesurable, on définit:

$$\|f\|_p = \left(\int_T |f(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ si } 1 \leq p < \infty$$
$$\|f\|_\infty = \sup \text{ess } |f(t)| = \inf \{C : |f(t)| \leq C \text{ p.p}\}, \text{ si } p = \infty$$

Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\mu)$ est l'ensemble des classes d'équivalence, modulo l'égalité presque partout, des fonctions \mathcal{T} -mesurables telles que $\|f\|_p < \infty$. On retrouve les espaces l_p , lorsque l'on muni $T = \mathbb{N}$ de la tribu grossière et de la mesure de comptage.

Lemme 1.1.1 Soit $0 < r \leq 1$. Pour tous scalaires positifs $(\alpha_i)_{i=1}^n$ on a:

$$(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)^r \leq \alpha_1^r + \dots + \alpha_n^r.$$

Proposition 1.1.1 (Inégalité de Minkowski généralisé) Soit (T_1, μ_1) et (T_2, μ_2) deux espaces mesurés σ -finies, et soit $1 \leq r < \infty$, alors pour tout fonction mesurable positive $f : T_1 \times T_2 \rightarrow [0, \infty]$, on a

$$\left(\int_{T_1} \left(\int_{T_2} f(x, y) d\mu_2(y) \right)^r d\mu_1(x) \right)^{\frac{1}{r}} \leq \int_{T_2} \left(\int_{T_1} f(x, y)^r d\mu_1(x) \right)^{\frac{1}{r}} d\mu_2(y).$$

Preuve. Pour tout $x \in T_1$, on note $g(x) = \int_{T_2} f(x, y) d\mu_2(y)$, et on utilise l'inégalité de Hölder et le théorème de Fubini:

$$\begin{aligned} \int_{T_1} (g(x))^r d\mu_1(x) &= \int_{T_1} (g(x))^{r-1} \int_{T_2} f(x, y) d\mu_2(y) d\mu_1(x), \\ &= \int_{T_1} \int_{T_2} (g(x))^{r-1} f(x, y) d\mu_2(y) d\mu_1(x), \\ &= \int_{T_2} \int_{T_1} (g(x))^{r-1} f(x, y) d\mu_1(x) d\mu_2(y), \\ &\stackrel{\text{L.H}}{\leq} \int_{T_2} \left(\int_{T_1} (g(x))^{r-1 \frac{r}{r-1}} d\mu_1(x) \right)^{\frac{r-1}{r}} \left(\int_{T_1} f(x, y)^r d\mu_1(x) \right)^{\frac{1}{r}} d\mu_2(y), \\ &= \left(\int_{T_1} (g(x))^r d\mu_1(x) \right)^{\frac{r-1}{r}} \int_{T_2} \left(\int_{T_1} f(x, y)^r d\mu_1(x) \right)^{\frac{1}{r}} d\mu_2(y), \end{aligned}$$

Donc

$$\left(\int_{T_1} (g(x))^r d\mu_1(x) \right)^{\frac{1}{r}} \leq \int_{T_2} \left(\int_{T_1} f(x, y)^r d\mu_1(x) \right)^{\frac{1}{r}} d\mu_2(y).$$

Ce qui achève la preuve. ■

Remarque 1.1.1 Si $0 < r \leq 1$, on obtient l'inégalité de Minkowski généralisé inverse; et pour la preuve on utilise l'inégalité de Hölder inverse.

Lemme 1.1.2 Soit (T, μ) un espace mesuré, Soient f, g sont des fonctions de $L^r(\mu)$.

* Pour $1 \leq r < \infty$ on a (l'inégalité de Minkowski):

$$\|f + g\|_{L^r(\mu)} \leq \|f\|_{L^r(\mu)} + \|g\|_{L^r(\mu)}.$$

* Pour $0 < r < 1$ on a (l'inégalité de Minkowski inverse):

$$\|f + g\|_{L^r(\mu)} \geq \|f\|_{L^r(\mu)} + \|g\|_{L^r(\mu)}.$$

Le résultat de représentation suivant montre que si $1 \leq p \leq \infty$, on peut identifier $(L^p)^*$ à L^{p^*} :

Théorème 1.1.1 Soit $p : 1 \leq p \leq \infty$ et soit $\varphi \in (L^p(\mu))^*$ alors il existe un unique $g \in L^{p^*}(\mu)$ tel que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_T gf, \quad \forall f \in L^p(\mu).$$

De plus on a

$$\|\varphi\|_{(L^p)^*} = \|g\|_{L^{p^*}}.$$

1.1.2 Espace $\mathcal{C}(K)$

Soit K un espace topologique compact. On désigne par $\mathcal{C}(K)$, l'espace de Banach des fonctions continues de K dans \mathbb{R} muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_{\mathcal{C}(K)} := \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Remarque 1.1.2 *Nous remarquons que $L^\infty(K)$ contient $\mathcal{C}(K)$ lorsque K est compact, donc le dual de $L^\infty(K)$ est un sous-espace du dual de $\mathcal{C}(K)$ que nous allons maintenant décrire. Il est en général "plus grand" que $L^1(K)$.*

Le dual de $\mathcal{C}(K)$

On rappelle que si (X, d) est un espace métrique, sa tribu Borélienne, \mathcal{B}_X , est par définition la tribu engendrée par ses ouverts. Une mesure borélienne sur X est une mesure définie sur la tribu borélienne de X . On dit en outre que μ est finie si $\mu(X) < +\infty$ et que μ est σ -finie s'il existe une suite croissante de Boréliens B_n telle que $X = \cup_n B_n$ et $\mu(B_n) < +\infty$ pour tout n . Les mesures boréliennes régulières sont définies comme suit :

Définition 1.1.1 *Soit (X, d) un espace métrique et μ une mesure borélienne sur X alors μ est dite régulière si pour tout $A \in \mathcal{B}_X$ on a*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) : O \text{ ouvert}, A \subset O\} \text{ et } \mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compact}, K \subset A\}.$$

Si (K, d) est compact et μ est une mesure borélienne finie alors la forme linéaire ℓ_μ définie par

$$\ell_\mu(f) := \int_K f d\mu, \quad \forall f \in \mathcal{C}(K).$$

est continue ($|\ell_\mu(f)| \leq \|f\| \mu(K)$) et positive au sens où $\ell_\mu(f) \geq 0$ pour tout $f \geq 0$. Comme on a $\ell_\mu(1) = \mu(K)$ donc:

$$\|\ell_\mu\|_{\mathcal{C}(K)^*} = \mu(K).$$

Le théorème de représentation de Riesz énonce que réciproquement toute forme linéaire continue et positive sur $\mathcal{C}(K)$ se représente par une mesure borélienne finie.

Théorème 1.1.2 (Théorème de représentation de Riesz) Soit (K, d) un espace métrique compact et ℓ une forme linéaire continue et positive sur $\mathcal{C}(K)$. Il existe une unique mesure borélienne finie et régulière μ sur K telle que $\ell = \ell_\mu$.

Définition 1.1.2 Soit (K, d) un espace métrique compact, on appelle mesure de Radon sur K toute forme linéaire continue sur $\mathcal{C}(K)$. On note $\mathcal{M}(K) := \mathcal{C}(K)^*$ l'espace des mesures de Radon sur K , et pour tout $\ell \in \mathcal{M}(K)$:

$$\|\ell\|_{\mathcal{M}(K)} = \|\ell\|_{\mathcal{C}(K)^*} = \sup_{\|f\|_{\mathcal{C}(K)} \leq 1} |\langle \ell, f \rangle|.$$

Evidemment pour une mesure de Radon positive $\ell = \ell_\mu$ on a

$$\|\ell\|_{\mathcal{M}(K)} = \ell(1) = \mu(K).$$

1.2 Compléments sur les espaces de Banach

1.2.1 La distance de Banach-Masur

Définition 1.2.1 On appelle la distance de **Banach-Mazur** de deux espaces de Banach X et Y en posant:

$$d(X, Y) = \inf \{ \|T\| \|T^{-1}\| ; T : X \rightarrow Y \text{ isomorphisme} \}.$$

avec la convention $d(X, Y) = \infty$ si X et Y ne sont pas isomorphes.

Remarque 1.2.1 Il est clair que si X est isomorphe à un espace de Hilbert H (c'est-à-dire $d(X, H) < +\infty$), alors, pour tout autre espace de Hilbert H' auquel X est isomorphe, on a, $d(X, H) = d(X, H')$; on note cette valeur commune d_X .

1.2.2 Principe de réflexivité locale

Définition 1.2.2 Un espace de Banach Y est **finiment représentable** dans un espace de Banach X si pour tout $\epsilon > 0$, et pour tout sous-espace E de Y de dimension finie, il existe une application linéaire $T : E \rightarrow X$, avec

$$\|x\| \leq \|T(x)\| \leq (1 + \epsilon) \|x\|, \quad x \in E.$$

De façon équivalente, Y est **finiment représentable** dans un espace de Banach X si pour tout $\epsilon > 0$, et pour tout sous-espace E de Y de dimension finie, on puisse trouver un sous espace F de X de dimension finie tel que $d(E, F) \leq (1 + \epsilon)$.

Définition 1.2.3 *On dit que Y est **isomorphiquement finiment représentable** dans X s'il existe une constante $C \geq 1$ telle que, pour tout sous-espace E de Y de dimension finie, et pour tout $\epsilon > 0$, on puisse trouver un sous espace F de X de dimension finie tel que $d(E, F) \leq C(1 + \epsilon)$. Pour $C = 1$, on dit simplement finiment représentable.*

Exemple 1.2.1 • *Tout sous-espace de E est finiment représentable dans E .*

- *Pour $1 \leq p < +\infty$, $L^p([0, 1])$ est finiment représentable dans l_p .*
- *L'espace de fonctions $\mathcal{C}([0, 1])$ est finiment représentable dans l'espace c_0 .*

Théorème 1.2.1 (Principe de réflexivité locale) [LQ04] *Soit X un espace de Banach. Pour tout sous-espace E de X^{**} de dimension finie, tout sous-espace F de X^* de dimension finie, et tous $\epsilon > 0$, il existe un isomorphisme T de E sur un sous-espace $T(E)$ de X tel que:*

1. $\|T\| \|T^{-1}\| \leq 1 + \epsilon$;
2. $T|_{E \cap X} = Id_{E \cap X}$;
3. $\langle \varphi, T\Psi \rangle = \langle \Psi, \varphi \rangle$ pour tout $\Psi \in E$ et tout $\varphi \in F$.

En particulier, le bidual X^{**} est finiment représentable dans X .

1.3 Notion fondamentales de Probabilités

On appelle espace de probabilité un triplet (Ω, \mathcal{A}, P) où (Ω, \mathcal{A}) est un espace mesurable et $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ une probabilité sur \mathcal{A} , de masse totale 1.

Ω représente l'ensemble de toutes les éventualités possibles.

\mathcal{A} est l'ensemble des événements, qui sont les parties de Ω , donc il faut voir un événement $A \in \mathcal{A}$ comme un sous-ensemble de Ω contenant toutes les éventualités ω pour lesquelles une certaine propriété est vérifiée.

Rappelons qu'un sous-ensemble B de Ω est dite négligeable si $B \subset A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) = 0$. On supposera toujours \mathcal{A} complète pour P , c'est-à-dire si B est négligeable, alors $B \in \mathcal{A}$.

Définition 1.3.1 Soit E un espace de Banach, et \mathcal{B} sa tribu borélienne, une variable aléatoire à valeurs dans E est une application $X : \Omega \rightarrow E$ vérifiant les deux propriétés suivantes:

1. X est $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mesurable, c'est-à-dire que $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.
2. Il existe un sous-espace de Banach séparable E_0 de E tel que $P(X \in E_0) = 1$.

Définition 1.3.2 (loi de probabilité) la loi de la variable aléatoire X à valeurs dans E , noté P_X , définie par:

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)), \forall B \in \mathcal{B}.$$

En pratique on écrit plutôt:

$$P_X(B) = P(X \in B) (= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\})).$$

Par exemple: $E = \mathbb{R}^d$, $P_X(x) = P(X = x) = P(X_1 = x_1, \dots, X_d = x_d)$, avec $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $X = (X_1, \dots, X_d)$.

Définition 1.3.3 Soit X une v.a.r, si X est intégrable; son intégrale est appelée l'espérance de X , est notée $\mathbb{E}(X)$:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x dP_X(x).$$

On étend cette définition au cas où $X = (X_1, \dots, X_d)$ est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^d en prenant alors

$$\mathbb{E}(X) = (\mathbb{E}(X_1), \dots, \mathbb{E}(X_d)),$$

Pour vu bien sûr que chacune des espérances $\mathbb{E}(X_i)$ soit bien définie.

Par exemple, Si $X = 1_B$; $\mathbb{E}(X) = P(B)$

Proposition 1.3.1 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans (E, \mathcal{B}) , pour toute fonction mesurable $g : E \rightarrow [0, \infty]$, on a

$$\mathbb{E}(g(x)) = \int_E g(x) dP_X(x).$$

Si g est de signe quelconque, la formule de la proposition reste vraie à condition que les intégrales soient bien définies, ce qui revient à $\mathbb{E}(|g(x)|) < \infty$.

Cas particuliers:

- **Variable aléatoire discrètes:** C'est le cas où E est dénombrable, alors:

1. La loi de la variable aléatoire est donnée par: $P_X = \sum_{x \in E} P(X = x) \delta_x$ où δ_x désigne la mesure de Dirac en x . En effet,

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P\left(\bigcup_{x \in B} (X = x)\right) = \sum_{x \in B} P(X = x) = \sum_{x \in E} P(X = x) \delta_x.$$

2. Si $E = \mathbb{R}^d$, $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)$ avec $x = (x_1, \dots, x_d)$, $X = (X_1, \dots, X_d)$ et si $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une application mesurable intégrable on a

$$\mathbb{E}(g(x)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) P(X = x).$$

- **Variable aléatoire continue:** Nous disons que la variable aléatoire X à valeur dans \mathbb{R}^d est continue s'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $P_X(B) = \int_B f(x) dx$.

On a en particulier $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = P(X \in \mathbb{R}^d) = 1$, la fonction f est appelées la densité de (la loi de) X .

Si $d = 1$, pour tous $\alpha \leq \beta$, $P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ et $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$.

Remarque 1.3.1 Soit X_1, \dots, X_n , n variables aléatoires définies sur un même espace probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) à valeurs respectivement dans $(E_1, \mathcal{B}_1), \dots, (E_n, \mathcal{B}_n)$. Dire que ces variables sont indépendantes revient à dire que :

$$\forall B_1 \in \mathcal{B}_1, \dots, \forall B_n \in \mathcal{B}_n, P((X_1 \in B_1) \cap \dots \cap (X_n \in B_n)) = P(X_1 \in B_1) \times \dots \times P(X_n \in B_n).$$

De plus, on a alors

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n f_i(x_i)\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(f_i(x_i)).$$

dés que f_i est une fonction mesurable positive sur (E_i, \mathcal{B}_i) , pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

1.3.1 Espaces $L^p(\Omega, \mathcal{A}, P; E)$

On note $L^0(\Omega, \mathcal{A}, P; E)$ l'espace vectoriel des classes d'équivalence presque sûre des variables aléatoires à valeurs dans E , ($X = Y$ presque sûre $\Leftrightarrow P(\{X \neq Y\}) = 0$), et on note simplement

$$L^0(E) = L^0(\Omega, \mathcal{A}, P; E), \quad L^0(\mathbb{R}) = L^0.$$

Soit $p \in]0, +\infty]$; on note $L^p(\Omega, \mathcal{A}, P; E)$, l'ensemble des $X \in L^0(E)$ telles que

$$\|X(\cdot)\| \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, P), \text{ on note simplement}$$

$$L^p(E) = L^p(\Omega, \mathcal{A}, P; E), \quad L^p(\mathbb{R}) = L^p.$$

Pour $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $L^p(E)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\begin{aligned} \|X\|_p &= (\mathbb{E}(\|X\|^p))^{\frac{1}{p}}, \text{ si } 1 \leq p < \infty, \\ \|X\|_\infty &= \sup_{\omega} \text{ess} \|X(\omega)\|, \text{ si } p = \infty. \end{aligned}$$

Et les $L^p(E)$ vont en décroissant: $L^q(E) \subseteq L^p(E)$ si $q \geq p$. Pour $X \in L^p(E)$, $p \geq 1$.

On peut généraliser cette définition aux à mesure σ -finie comme suit:

Soit (T, \mathcal{T}, μ) un espace mesuré, et μ une mesure σ -finie, E un espace de Banach, et \mathcal{B} sa tribu Borélienne, on définit l'espace $L^p(\mu, E)$ de **Bochner-Lebesgue** comme espace vectoriel des classes d'équivalence presque partout des fonctions $(\mathcal{T}-\mathcal{B})$ -mesurables:

$$f : T \rightarrow E.$$

telle que $\|f(\cdot)\| \in L^p(\mu)$, cet espace est un espace de Banach pour la norme

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\mu, E)} &= \left(\int_T \|f(t)\|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ si } 1 \leq p < \infty \\ \|f\|_{L^\infty(\mu, E)} &= \sup \text{ess} \|f(t)\|, \text{ si } p = \infty \end{aligned}$$

1.3.2 La suite de Rademacher (Bernoulli)

Définition 1.3.4 Pour $i \in \mathbb{N}$, on définit $r_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, telle que

$$r_i(t) = \text{sgn}(\sin(2^i \pi t)) = \begin{cases} 1, \text{ pour } \sin(2^i \pi t) > 0, \\ 0, \text{ pour } \sin(2^i \pi t) = 0, \\ -1, \text{ pour } \sin(2^i \pi t) < 0. \end{cases}$$

La suite $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est dite la suite des fonctions de Rademacher.

Les fonctions $r_i(t)$, $i \in \mathbb{N}$ peut être décrit comme:

$$\begin{aligned} r_1(t) &= \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1 & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1) . \end{cases} \\ r_2(t) &= \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{4}) \cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ -1 & \text{si } t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \cup [\frac{3}{4}, 1) . \end{cases} \\ &\vdots \\ r_{i+1}(t) &= \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \cup_{s=1}^{2^i} [\frac{2s-2}{2^{i+1}}, \frac{2s-1}{2^{i+1}}) \\ -1 & \text{si } t \in \cup_{s=1}^{2^i} [\frac{2s-1}{2^{i+1}}, \frac{2s}{2^{i+1}}) \end{cases} \end{aligned}$$

Les fonctions de Rademacher ont été introduites par Rademacher en 1922, voir [RA22].

Remarque 1.3.2 1) $r_i(t) = \pm 1$. $\forall i \in \mathbb{N}$.

2) On a $(r_i)_{i \geq 1}$ forme un système orthonormé dans $L^2[0, 1]$, i.e., $\int_0^1 r_i(t) r_j(t) dt = \delta_{ij}$, où

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Par exemple $\int_0^1 r_1(t) r_2(t) dt = 0$, car:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 r_1(t) r_2(t) dt, \\ &= \int_0^{\frac{1}{4}} r_1(t) r_2(t) dt + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} r_1(t) r_2(t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} r_1(t) r_2(t) dt + \int_{\frac{3}{4}}^1 r_1(t) r_2(t) dt, \\ &= \int_0^{\frac{1}{4}} 1 \times 1 dt + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 1 \times -1 dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} -1 \times 1 dt + \int_{\frac{3}{4}}^1 -1 \times -1 dt, \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{4}, \\ &= 0. \end{aligned}$$

3) Pour une suite de scalaire $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in l_2$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i(t) \right|^2 dt &= \int_0^1 \left\langle \sum_i \alpha_i r_i(t), \sum_i \alpha_i r_i(t) \right\rangle dt, \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle \int_0^1 r_j(t) r_i(t) dt, \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle, \\ &= \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2, \text{ pour } (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in l_2. \end{aligned}$$

Donc

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i \right\|_{L^2[0,1]} = \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour nos besoins, Nous pouvons rempalcement les fonctions de Rademacher par un modèle abstrait, cette fin, nous allons utiliser le langage de probabilité.

Définition 1.3.5 [FAN06, p.133] *La suite de Rademacher (Bernoulli) $(\varepsilon_i)_{i \geq 1}$ est une suite de variable aléatoire définies sur Ω à valeur dans $\{-1, 1\}$ indépendantes, symétriques, c'est-à-dire :*

$$P(\varepsilon_i = 1) = P(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{2},$$

$$P(\varepsilon_1 = \pm 1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1) = P(\varepsilon_1 = \pm 1) \times \dots \times P(\varepsilon_n = \pm 1).$$

La terminologie est justifiée par le fait que les fonctions de Rademacher sont des variables de Rademacher sur $[0, 1]$. Ainsi,

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\|^2 dt = \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|^2 = \int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i \right\|^2 dP(\omega).$$

Remarque 1.3.3

1. On note que pour tout $i \geq 1$, ε_i est centré. En effet,

$$\mathbb{E}(\varepsilon_i) = \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_i P_X(\varepsilon_i = \pm 1) = 1 \times P(\varepsilon_i = 1) - 1 \times P(\varepsilon_i = -1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

De plus, $\mathbb{E}(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \delta_{ij}$, i.e:

- $i = j \Rightarrow \mathbb{E}(\varepsilon_i^2) = 1^2 \times P(\varepsilon_i = 1) + (-1)^2 \times P(\varepsilon_i = -1) = 1,$
- $i \neq j \Rightarrow \mathbb{E}(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \mathbb{E}(\varepsilon_i) \mathbb{E}(\varepsilon_j) = 0.$

Donc $(\varepsilon_i)_{i \geq 1}$ forme un système orthonormé dans L^2 .

2. Pour une suite de scalaire $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in l_2$, on a

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i \right\|_{L^2} &= \left(\int_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) \alpha_i \right|^2 dP(\omega) \right)^{\frac{1}{2}}, \\ &= \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

1.3.3 Variables gaussiennes

Soit $(\Omega', \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité .

Définition 1.3.6 [SM87] Une variable aléatoire gaussienne réelle est une variable aléatoire $g : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ de densité :

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

où $m \in \mathbb{R}$, et $\sigma > 0$.

On écrit: $g \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, et lorsque $m = 0$ et $\sigma = 1$, on dit que g est centrée réduite, ou encore que g est une gaussienne standard.

Il est commun savoir que p -ièmes moments:

$$\left(\int_{\Omega'} |g(\omega')|^p dP(\omega')\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^p \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right) dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

d'une variable gaussienne g existe pour tout $0 < p < \infty$.

Remarque 1.3.4 [DJT95] Il est possible de calculer ces moments exactement. En fait, le p -ième moments d'une variable gaussienne standard est

$$\|g\|_{L^p}^p = \frac{2^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right).$$

avec $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{t-1} dy$; et $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ et $\Gamma(n+1) = n!$.

Et on donne par exemple les cas spécial:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}, \\ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}, \\ \Gamma\left(n + \frac{1}{3}\right) &= \frac{1.4.7\dots(3n-2)}{2^n} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right), \\ \Gamma\left(n + \frac{1}{4}\right) &= \frac{1.5.9\dots(4n-3)}{2^n} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

Exemple 1.3.1

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^1} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \\ \|g\|_{L^2} &= \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1. \end{aligned}$$

Lemme 1.3.1 Soit $A = (a)_{i,j \leq n} \in \mathbb{O}(n)$ (matrice orthogonale), et $\gamma_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} g_i$, le vecteur aléatoire $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ à la même loi que (g_1, \dots, g_n) , en particulier

$$\left\| \sum_{j=1}^n \gamma_j x_j \right\|_{L^2(X)} = \left\| \sum_{j=1}^n g_j x_j \right\|_{L^2(X)} .$$

1.3.4 Inégalités de Khintchine et Kahane

Théorème 1.3.1 (Inégalité de Khintchine 1923) [FAN06] [KH23] Pour $1 \leq p < \infty$, il existe deux constantes $a_p, b_p > 0$, telles que pour une suite de scalaire $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$, on a :

$$\begin{aligned} a_p \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i \right\|_{L^p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ si } 1 \leq p \leq 2. \\ \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i \right\|_{L^p} \leq b_p \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ si } p \geq 2. \end{aligned}$$

Théorème 1.3.2 Pour toutes ensembles finie des fonctions $\{f_i\}_{i=1}^n$ de $L^p(\mu)$ avec $(1 \leq p < \infty)$,

$$a_p \left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mu)} \leq \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i \right\|_{L^p(\mu)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq b_p \left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mu)} .$$

où a_p, b_p deux constants d'inégalité de Khintchine (en particulier $a_p = 1$ pour $2 \leq p < \infty$ et $b_p = 1$ pour $1 \leq p \leq 2$).

Preuve. Pour $t \in T$; par l'inégalité de Khintchine :

$$a_p \left(\sum_{i=1}^n |f_i(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i(t) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ pour } 1 \leq p \leq 2$$

Donc:

$$a_p^p \left(\sum_{i=1}^n |f_i(t)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \leq \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i(t) \right|^p ,$$

Et

$$a_p^p \int_T \left(\sum_{i=1}^n |f_i(t)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} d\mu(t) \leq \int_T \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i(t) \right|^p d\mu(t) ,$$

Et d'après le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} a_p^p \left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mu)}^p &\leq \mathbb{E} \int_T \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i(t) \right|^p d\mu(t), \\ &= \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i \right\|_{L^p(\mu)}^p, \end{aligned}$$

Donc

$$a_p \left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mu)} \leq \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i \right\|_{L^p(\mu)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

La même chose pour l'inverse. ■

La généralisation suivante a été obtenue par Kahane en 1964. Voir [KA64].

Théorème 1.3.3 (Inégalité de Kahane) [DJT95][KA64] *Pour $0 < p, q < \infty$, il existe une constante $K_{p,q} > 0$ tels que pour tout $x_1, \dots, x_n \in X$ on a :*

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq K_{p,q} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.4 Espaces des suites p -sommables et leurs opérateurs

1.4.1 Espaces des suites p -sommables

On désignera par X et Y deux espaces de Banach, et X^* ; Y^* sont leurs espaces duaux, et rappelons que le bidual de X noté X^{**} est le dual de X^* et qu'on peut le munir de la norme

$$\forall \xi \in X^{**}, \|\xi\|_{X^{**}} = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|_{X^*} \leq 1}} |\langle \xi, f \rangle|.$$

On note par $\mathcal{L}(X; Y)$ l'espace des opérateurs linéaires continus de X dans Y . La boule unité fermée de X sera désignée par B_X .

Définition 1.4.1 *On note par $l_p(X)$ (resp. $l_p^n(X)$) l'espace des suites (x_i) (resp. $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$) dans X absolument p -sommables, muni de la norme :*

$$\| (x_i) \|_{l_p(X)} = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \sup_i \|x_i\|, & p = \infty. \end{cases}$$

$$\text{(resp. } \| (x_i)_{1 \leq i \leq n} \|_{l_p^n(X)} = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \sup_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|, & p = \infty. \end{cases})$$

D'une façon analogue, on désigne par l_p l'espace des suites scalaires (α_i) telles que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p < \infty,$$

C'est un espace de Banach pour la norme

$$\| (\alpha_i) \|_{l_p} = \| (\alpha_i) \|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \sup_i |\alpha_i|, & p = \infty. \end{cases}$$

L'espace c_0 est l'espace des suites scalaires (α_i) telle que $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i = 0$. C'est un sous espace fermé de l_{∞} , donc un espace de Banach pour la norme:

$$\| (\alpha_i) \|_{\infty} = \sup_i |\alpha_i|.$$

Définition 1.4.2 On note par $l_p^{\omega}(X)$ (resp. $l_p^n \omega(X)$) l'espace des suites (x_i) (resp. $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$) dans X faiblement p -sommables, muni de la norme:

$$\| (x_i) \|_{l_p^{\omega}(X)} = \begin{cases} \sup_{\|\xi\|_{X^*} \leq 1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x_i, \xi \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \sup_i \left\{ \sup_{\|\xi\|_{X^*} \leq 1} |\langle x_i, \xi \rangle| \right\}, & p = \infty. \end{cases}$$

$$\text{(resp. } \| (x_i)_{1 \leq i \leq n} \|_{l_p^n \omega(X)} = \begin{cases} \sup_{\|\xi\|_{X^*} \leq 1} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, \xi \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \sup_{1 \leq i \leq n} |\langle x_i, \xi \rangle|, & p = \infty. \end{cases})$$

Remarque 1.4.1 1. Pour $1 \leq p \leq \infty$, on a $l_p(X) \subseteq l_p^w(X)$, de plus

$$\|(x_i)\|_{l_p^w(X)} \leq \|(x_i)\|_{l_p(X)}.$$

2. Si $p = \infty$, on a $l_\infty(X) = l_\infty^w(X)$ et $\|(x_i)\|_{l_\infty(X)} = \|(x_i)\|_{l_\infty^w(X)}$.

3. $l_p(X) = l_p^w(X)$ pour tout $1 \leq p < \infty$ si et seulement si $\dim(X)$ est finie.

Le lemme classique suivant, qui exprime que le dual de $l_p^n(X)$ s'identifie isométriquement à $l_{p^*}^n(X^*)$.

Lemme 1.4.1 Pour $1 < p < \infty$, et pour $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in X^*$, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^n \|\varphi_i\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i) \right| ; \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \leq 1 \right\}.$$

Preuve. Si $\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \leq 1$, on a :

$$\left| \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i) \right| \leq \sum_{i=1}^n \|\varphi_i\| \|x_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^n \|\varphi_i\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n \|\varphi_i\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

Fixons d'autre part $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, avec $\sum_{i=1}^n \lambda_i^p = 1$ et $\left(\sum_{i=1}^n \|\varphi_i\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \|\varphi_i\|$. Étant donné $\varepsilon > 0$, soit $u_1, \dots, u_n \in X$, de norme 1, tels que $\varphi_i(u_i) \geq 0$, et

$\|\varphi_i\| \leq \varphi_i(u_i) + \varepsilon$. Posons $v_i = \lambda_i u_i$. Nous voyons que :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \|\varphi_i\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \|\varphi_i\|, \\ &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(u_i) + \varepsilon \sum_{i=1}^n \lambda_i, \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi_i(v_i) + \varepsilon \sum_{i=1}^n \lambda_i, \\ &\leq \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i) \right| ; \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \leq 1 \right\} + \varepsilon \sum_{i=1}^n \lambda_i. \end{aligned}$$

D'où le résultat, en faisant tendre ε vers 0. ■

Lemme 1.4.2 Soit $1 \leq p, p^* < +\infty$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Pour tout $\alpha = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in l_p^n$ et $\beta = (\beta_i)_{1 \leq i \leq n} \in l_{p^*}^n$ on a

$$\|\alpha\|_p = \sup_{\|\beta\|_{p^*} \leq 1} \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \right| \right\}.$$

Lemme 1.4.3 Soit $1 \leq p, p^* < +\infty$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Pour tout $x_1, \dots, x_n \in X$ et $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{l_p^\omega(X)} = \sup_{\|\lambda\|_{p^*} \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\|.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{l_p^\omega(X)} &= \sup_{\|\xi\| \leq 1} \left(\sum_{i=1}^n |\xi(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \\ &\stackrel{\text{lem 1.4.2}}{=} \sup_{\|\xi\| \leq 1} \sup_{\|\lambda\|_{p^*} \leq 1} \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi(x_i) \right|, \\ &= \sup_{\|\lambda\|_{p^*} \leq 1} \left(\sup_{\|\xi\| \leq 1} \left| \xi \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) \right| \right), \\ &= \sup_{\|\lambda\|_{p^*} \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\|. \end{aligned}$$

■

1.4.2 Opérateurs (p, q) -sommants

Soient $X; Y$ deux espaces de Banach et $u \in \mathcal{L}(X; Y)$. On dira que u est (p, q) -sommant pour $(1 < p, q < \infty)$; s'il existe une constante $C > 0$; telle que pour tout $x_1, \dots, x_n \in X$

$$\left(\sum_{i=1}^n \|u(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\|\xi\|_{X^*} \leq 1} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, \xi \rangle|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1.4.1)$$

On note $\Pi_{p,q}(X, Y)$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires (p, q) -sommants de X dans Y muni de la norme

$$\pi_{p,q}(u) = \inf \{C \text{ vérifiant 1.4.1}\}.$$

Pour $p = q$ on obtient les opérateurs p -sommants.

On note $\Pi_p(X, Y)$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires p -sommants de X dans Y muni de la norme

$$\pi_p(u) = \inf \{C \text{ vérifiant 1.4.1}\}.$$

Remarque 1.4.2 si $p = \infty$, c'est simplement la continuité.

Exemple 1.4.1 Soit K un espace compact, soit μ une mesure de probabilité régulière sur K et soit $1 < p < \infty$, alors l'opérateur de multiplication est défini par:

$$\begin{aligned} u_\varphi : \mathcal{C}(K) &\rightarrow L_p(\mu) \\ f &\longmapsto f \cdot \varphi, \end{aligned}$$

avec $\varphi \in L_p(\mu)$, est p -sommant et $\pi_p(u) = \|\varphi\|_p$.

Théorème 1.4.1 (Théorème de domination de Pietsch) Si $T : X \rightarrow Y$ est un opérateur linéaire p -sommant ($1 \leq p < \infty$), il existe une probabilité de Radon μ sur $(B_{X^*}; \sigma(X^*, X))$, telle que

$$\forall x \in X, \|u(x)\| \leq \pi_p(u) \left(\int_{B_{X^*}} |\langle x, \xi \rangle|^p d\mu(\xi) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Inversement, s'il existe une probabilité de radon sur $(B_{X^*}; \sigma(X^*, X))$ et $C > 0$ telle que cette formule est vérifiée, alors u est p -sommant et $\pi_p(u) \leq C$.

Théorème 1.4.2 (Théorème d'inclusion) Soit $p \leq r$, supposons que $\frac{1}{p} + \frac{1}{s} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, alors: $\Pi_{p,q}(X, Y) \subseteq \Pi_{r,s}(X, Y)$.

Théorème 1.4.3 [DJT95] Soit $1 \leq q < p < \infty$, soit K un espace compact, et Y un espace de Banach, pour $u : \mathcal{C}(K) \rightarrow Y$, on a

$$u \text{ est } (p, 1)\text{-sommants} \Leftrightarrow (p, q)\text{-sommants}.$$

Lemme 1.4.4 [DJT95] Soit K un espace compact, et Y un espace de Banach, pour $1 \leq p < \infty$, soit $u : \mathcal{C}(K) \rightarrow Y$ est un opérateur p -sommants. si $p < q < \infty$, on a:

$$\pi_q(u) \leq \|u\|^{1-\frac{p}{q}} \pi_p(u)^{\frac{p}{q}}.$$

Théorème 1.4.4 (Multiplication de Pietsch) Pour $1 \leq p, q, r < \infty$ telle que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Si $T \in \Pi_p(X; Y)$, $S \in \Pi_q(X; Y)$, donc: $ST \in \Pi_r(X; Y)$ et $\pi_r(ST) \leq \pi_p(T) \cdot \pi_q(S)$.

Lemme 1.4.5 Pour $x_1, \dots, x_n \in X$, et $v : l_\infty^n \rightarrow X$, tel que $v(e_i) = x_i, 1 \leq i \leq n$, on a l'opérateur v est 2-sommants et $\pi_2(v) \leq C \|v\|$.

Théorème 1.4.5 (Le théorème de Grothendieck) [DJT95] Tout opérateur borné de $L^1(\mu)$ dans $L^2(\lambda)$ est 1-sommant. i.e.,

$$\mathcal{L}(L^1(\mu); L^2(\lambda)) = \Pi_1(L^1(\mu); L^2(\lambda)),$$

Avec $\pi_1(u) \leq k_G \|u\|$; k_G est la constante universelle de Grothendieck.

Chapitre 2

Type et cotype des espaces de Banach

2.1 Introduction

La structure d'espace de Banach, pour utile qu'elle soit en Analyse, avec les conséquences automatiques de la complétude et du Théorème de Baire, est assez pauvre ; quand on ajoute un grand nombre de vecteurs x_1, \dots, x_n , l'inégalité triangulaire

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\| .$$

devient vite imprécise.

À l'inverse, les espaces de Hilbert ont une structure très riche, et, si les x_i sont orthogonaux, on a exactement

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 .$$

Plus généralement, le résultat suivant:

Proposition 2.1.1 (identité du parallélogramme généralisée.) *Soit X un espace de Banach; on a :*

1. X est isométrique à un espace de Hilbert si et seulement si, pour tous $x, y \in X$:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 (\|x\|^2 + \|y\|^2) .$$

2. Dans tout espace de Hilbert H , on a, pour tous $x_1, \dots, x_n \in H$:

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\theta_i = \pm 1} \|\theta_1 x_1 + \dots + \theta_n x_n\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

3. Si X est isomorphe à un espace de Hilbert H , et si la distance de Banach-Mazur $d(X, H) \leq C$, alors:

$$\frac{1}{C^2} \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \leq \frac{1}{2^n} \sum_{\theta_i = \pm 1} \|\theta_1 x_1 + \dots + \theta_n x_n\|^2 \leq C^2 \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

4. Dans tout espace de Hilbert H , on a, pour tous variables de Bernoulli indépendantes $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ (ou des fonctions de Rademacher r_1, \dots, r_n), et pour tous $x_1, \dots, x_n \in H$:

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

Preuve. 2. On procède par récurrence sur n :

Pour $n = 1$:

$$\frac{1}{2} \sum_{\theta = \pm 1} \|\theta x\|^2 = \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|-x\|^2) = \|x\|^2.$$

Pour $n + 1$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{\theta_1, \dots, \theta_{n+1} = \pm 1} \|\theta_1 x_1 + \dots + \theta_{n+1} x_{n+1}\|^2 \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{\theta_1, \dots, \theta_n = \pm 1} \frac{1}{2} (\|\theta_1 x_1 + \dots + \theta_n x_n + x_{n+1}\|^2 + \|\theta_1 x_1 + \dots + \theta_n x_n - x_{n+1}\|^2), \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{\theta_1, \dots, \theta_n = \pm 1} (\|\theta_1 x_1 + \dots + \theta_n x_n\|^2 + \|x_{n+1}\|^2), \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{\theta_1, \dots, \theta_n = \pm 1} \|\theta_1 x_1 + \dots + \theta_n x_n\|^2 + \frac{1}{2^n} \sum_{\theta_1, \dots, \theta_n = \pm 1} \|x_{n+1}\|^2, \\ &= \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 \frac{1}{2^n} \sum_{\theta_1, \dots, \theta_n = \pm 1} 1, \\ &= \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 \frac{1}{2^n} 2^n. \end{aligned}$$

Donc:

$$\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{\theta_1, \dots, \theta_{n+1} = \pm 1} \|\theta_1 x_1 + \dots + \theta_{n+1} x_{n+1}\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2 + \|x_{n+1}\|^2.$$

3. Se vérifie immédiatement à partir de 2.
4. Par l'orthogonalité des variables de Bernoulli, indépendantes, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|^2 &= \mathbb{E} \left\langle \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i, \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\rangle, \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_i, x_j \rangle \mathbb{E}(\varepsilon_i \varepsilon_j), \\
&= \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.1.1 Soit X un espace de Banach, pour tous variables de Bernoulli indépendantes $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, et pour tous $x_1, \dots, x_n \in X$ on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^n} \sum_{\theta_i = \pm 1} \|\theta_1 x_1 + \dots + \theta_n x_n\|^2 \\
&= \sum_{\theta_1 = \pm 1} \sum_{\theta_2 = \pm 1} \dots \sum_{\theta_n = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \theta_i x_i \right\|^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n, \\
&= \sum_{\varepsilon_1 = \pm 1} \sum_{\varepsilon_2 = \pm 1} \dots \sum_{\varepsilon_n = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|^2 P(\varepsilon_1 = \pm 1) \times \dots \times P(\varepsilon_n = \pm 1), \\
&= \sum_{\varepsilon_1 = \pm 1} \sum_{\varepsilon_2 = \pm 1} \dots \sum_{\varepsilon_n = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|^2 P(\varepsilon_1 = \pm 1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1), \\
&= \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|^2, \\
&= \int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i \right\|^2 dP(\omega).
\end{aligned}$$

Comme X est isomorphe à un espace de Hilbert H , L'inégalité du 3. se réécrit donc:

$$\frac{1}{C} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|_{L^2(X)} \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \right)^{1/2}.$$

Deux questions naturelles, au vu de ces inégalités, sont les suivant:

a. Que se passe-t-il si l'on ne retient qu'une seule de ces inégalités, avec les x_i dans un espace de Banach X ?

b. Que se passe-t-il si l'on change l'exposant 2?

On est ainsi conduit aux inégalités:

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|_{L^r(X)} \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p}, \quad (2.1.1)$$

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|_{L^r(X)} \geq \frac{1}{C} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{1/q}. \quad (2.1.2)$$

Remarque 2.1.2 1. *Il est important de noter que l'exposant intervenant du coté où est situé l'espérance, joue un rôle inerte grâce aux **inégalités de Kahane**. Il peut donc être choisi arbitrairement. En le prendra en général $1, 2$ ou p^* (resp q^*), où p^* et q^* sont les exposant conjugués de p et q , respectivement.*

2. *On remarque que nécessairement, $p \leq 2$ et $q \geq 2$ dans (2.1.1) et (2.1.2); en effet:*

On prend $r = 2$, $X = l_2$, et les vecteurs x_i tous égaux à un vecteur x de norme $\|x\| = 1$. On obtient grâce aux **Remarque (1.3.3 (2))**, on a

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|_{L^2(l_2)}^2 &= \int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i \right\|_{l_2}^2 dP(\omega), \\ &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i^j \right|^2 dP(\omega), \\ &= \sum_{j=1}^n \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i^j \right\|_{L^2}^2, \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |x_i^j|^2, \\ &= \sum_{i=1}^n \|x_i\|_{l_2}^2 = \sum_{i=1}^n 1. \end{aligned}$$

Donc

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|_{L^2(l_2)} = \sqrt{n}, \text{ et } \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_{l_2}^p \right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}}.$$

Il vient, dans (2.1.1) : $\sqrt{n} \leq Cn^{\frac{1}{p}}$, pour tout $n \geq 1$, ce qui n'est possible que si $p \leq 2$; de même, (2.1.2) exige $q \geq 2$. Cette restriction faite, les exposants p et q joueront un rôle essentiel.

Ensuite, nous allons étudier comment la moyennes sont situés par rapport aux à l'aide des concepts de type et de cotype d'un espace de Banach.

2.2 Type et Cotype de Radmacher (Définition et premières propriétés)

Introduisons maintenant les notions de type et de cotype, appelées aussi type ou cotype de Rademacher, ceux-ci ont été introduits dans la théorie des espaces de Banach par Hoffmann-Jørgensen [HJ74]. Elles sont basées sur des relaxations de l'identité du parallélogramme généralisée. Elle ont été présentée sous sa forme la plus fructueuse par **Maurey et Pisier** en 1974 [MA74]. Voir [MA03] pour les commentaires historiques.

Définition 2.2.1 Soit X un espace de Banach, pour tous $x_1, \dots, x_n \in X$. $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ étant une suite de Bernoulli. On dit que X est de:

1. Type p (ou Type de Rademacher p) ($1 \leq p \leq 2$), s'il existe une constante $C \geq 1$ telle que:

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|_{L^2(X)} \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p}. \quad (2.2.1)$$

2. Cotype q (ou Cotype de Rademacher q) ($2 \leq q \leq +\infty$), s'il existe une constante $C \geq 1$ telle que:

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|_{L^2(X)} \geq \frac{1}{C} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{1/q}. \quad (2.2.2)$$

avec $\max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|$ qui remplace $\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{1/q}$ lorsque $q = \infty$.

On note par:

$T_p(X) = \inf \{ C : C \text{ qui vérifie l'inégalité (2.2.1) } \}$, et $T_p(X)$ s'appelle la constante de type p de X .

$C_q(X) = \inf \{ C : C \text{ qui vérifie l'inégalité (2.2.2) } \}$, et $C_q(X)$ s'appelle la constante de cotype q de X .

Remarque 2.2.1 *La définition des notions de type et de cotype ne faisant intervenir qu'un nombre fini, ces notions ne dépendent que des sous-espaces de dimension fini de X ; ce sont donc des notions locales. Plus précisément, si X est de type p (resp. de cotype q), et si Y est isomorphiquement finiment représentable dans X , alors Y est de type p (resp. de cotype q).*

Exemple 2.2.1

1. L'identité du parallélogramme généralisée de la proposition (2.1.1 -4) montre que l'espace de Hilbert est un à la fois de type 2 et de cotype 2, avec $T_p(X) = C_q(X) = 1$.

Et on a d'après la proposition (2.1.1-3) si X est isomorphe à un espace de Hilbert donc X est un à la fois de type 2 et de cotype 2 (mais c'est le seul cas, comme l'assure le Théorème de Kwapien).

2. L'espace de Banach est trivialement de type 1. En effet, d'après l'inégalité triangulaire on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i \right\|^2 dP(\omega) &\leq \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n \|\varepsilon_i(\omega) x_i\| \right)^2 dP(\omega), \\ &\leq \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n |\varepsilon_i(\omega)| \|x_i\| \right)^2 dP(\omega), \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\| \right)^2 dP(\omega), \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\| \right)^2 \int_{\Omega} dP(\omega), \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\| \right)^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|_{L^2(X)} \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\|.$$

Et l'espace de Banach est de type 1.

3. L'espace de Banach est trivialement de cotype $+\infty$. Pour la preuve on utilise le lemme suivant:

Lemme 2.2.1 *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé et $x_0 \in X - \{0\}$, alors il existe $x^* \in X^*$, telle que : $x^*(x_0) = \|x_0\|$ et $\|x^*\| = 1$.*

Soit $x_1, \dots, x_n \in X$, pour $1 \leq j \leq n$, on choisit $\varphi \in B_{X^*}$, telle que

$$\langle \varphi, x_j \rangle = \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|$$

Observons d'abord que, par l'orthogonalité des variables de Bernoulli, on a:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \langle \varphi \varepsilon_j(\omega), \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i \rangle dP(\omega) \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \varepsilon_j(\omega) \varepsilon_i(\omega) \langle \varphi, x_i \rangle dP(\omega), \\ &= \int_{\Omega} (\varepsilon_j(\omega) \varepsilon_1(\omega) \langle \varphi, x_1 \rangle + \dots + \varepsilon_j(\omega) \varepsilon_j(\omega) \langle \varphi, x_j \rangle + \dots + \varepsilon_j(\omega) \varepsilon_n(\omega) \langle \varphi, x_n \rangle) dP(\omega), \\ &= \langle \varphi, x_j \rangle. \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned} \langle \varphi, x_j \rangle &= \int_{\Omega} \langle \varphi \varepsilon_j(\omega), \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i \rangle dP(\omega), \\ &\leq \int_{\Omega} \|\varphi \varepsilon_j(\omega)\| \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i \right\| dP(\omega), \\ &\stackrel{\text{L.H}}{\leq} \left(\int_{\Omega} \|\varphi \varepsilon_j(\omega)\|^2 dP(\omega) \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i \right\|^2 dP(\omega) \right)^{1/2}, \\ &\leq \left(\int_{\Omega} \|\varphi\|^2 |\varepsilon_j(\omega)|^2 dP(\omega) \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i \right\|^2 dP(\omega) \right)^{1/2}, \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|_{L^2(X)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|_{L^2(X)}.$$

Et X est de cotype $+\infty$.

Définition 2.2.2 On dira que X a un type (resp. un cotype) non trivial s'il a un type $p > 1$, i.e $T_p(X) < +\infty$ (resp. un cotype $q < +\infty$, i.e $C_q(X) < +\infty$).

Exemple 2.2.2 1. l_1 ne possède aucun type non trivial, car:

Soit $(e_n)_{n \geq 1}$ la base canonique de l_1 , on a:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j(\omega) e_j \right\|_{l_1} &= \|\varepsilon_1(\omega) e_1 + \dots + \varepsilon_n(\omega) e_n\|_{l_1} = \|(\varepsilon_1(\omega), \dots, \varepsilon_n(\omega))\|_{l_1} = \sum_{j=1}^n |\varepsilon_j(\omega)| = n, \\ \left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j e_j \right\|_{L^2(l_1)} &= \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j(\omega) e_j \right\|_{l_1}^2 dP(\omega) \right)^{1/2} = \left(\int_{\Omega} n^2 dP(\omega) \right)^{1/2} = n, \\ \text{Et } \left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|_{l_1}^p \right)^{1/p} &= \left(\sum_{j=1}^n \|(0, \dots, 1^j, \dots, 0)\|_{l_1}^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{j=1}^n 1^p \right)^{1/p} = n^{1/p}. \end{aligned}$$

Il n'ya pas aucun $p > 1$ qui vérifie $n \leq Cn^{1/p}$.

2. c_0 ne possède aucun cotype non trivial, car:

Soit $(e_n)_{n \geq 1}$ la base canonique de c_0 , on a:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j(\omega) e_j \right\|_{c_0} &= \|\varepsilon_1(\omega) e_1 + \dots + \varepsilon_n(\omega) e_n\|_{c_0} = \|(\varepsilon_1(\omega), \dots, \varepsilon_n(\omega))\|_{c_0} = \sup_j |\varepsilon_j(\omega)| = 1, \\ \left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j e_j \right\|_{L^2(c_0)} &= \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j(\omega) e_j \right\|_{c_0}^2 dP(\omega) \right)^{1/2} = \left(\int_{\Omega} 1^2 dP(\omega) \right)^{1/2} = 1, \\ \text{Et } \left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|_{c_0}^q \right)^{1/q} &= \left(\sum_{j=1}^n \|(0, \dots, 1^j, \dots, 0)\|_{c_0}^q \right)^{1/q} = \left(\sum_{j=1}^n 1^q \right)^{1/q} = n^{1/q}. \end{aligned}$$

Il n'ya pas aucun $q < +\infty$ qui vérifie $1 \geq \frac{1}{C}n^{1/q}$. (on peut montrer avec même preuve que l_{∞} ne possède aucun cotype non trivial).

Remarque 2.2.2 1. Si X est de type $p_1 > 1$, donc il est aussi de type p_2 pour $1 \leq p_2 < p_1$, avec $T_{p_2}(X) \leq T_{p_1}(X)$. Si X est de cotype $q_1 < +\infty$, donc il est aussi de cotype q_2 pour $q_1 < q_2 \leq +\infty$, avec $C_{q_2}(X) \leq C_{q_1}(X)$. En effet

Comme X est de type $p_1 > 1$ on a

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|_{L^2(X)} \leq T_{p_1}(X) \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^{p_1} \right)^{1/p_1}.$$

Et comme $p_2 < p_1 \Rightarrow l_{p_2}(X) \subset l_{p_1}(X)$ on trouve

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^{p_1} \right)^{1/p_1} \leq \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^{p_2} \right)^{1/p_2}.$$

Par conséquent

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|_{L^2(X)} \leq T_{p_1}(X) \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^{p_2} \right)^{1/p_2}.$$

Et $T_{p_2}(X) \leq T_{p_1}(X)$.

On utilise la même méthode pour le cotype.

2. *Le type et cotype d'un espace de Banach passent à son bidual.* Cela résulte de la réflexivité locale. En effet, supposons par exemple X de type p , et soit $\Psi_1, \dots, \Psi_n \in X^{**}$; prenons $E = \text{Vect}(\Psi_1, \dots, \Psi_n)$, soit $T : E \rightarrow X$ l'opérateur donné par la réflexivité locale:

$$\|\Psi\| \leq \|T(\Psi)\| \leq (1 + \epsilon) \|\Psi\|, \text{ pour tout } \Psi \in E.$$

Si $x_i = T(\Psi_i)$, on voit que:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \Psi_i \right\|_{L^2(X^{**})} &= \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) \Psi_i \right\|_{X^{**}}^2 dP(\omega) \right)^{1/2}, \\ &\leq \left(\int_{\Omega} \left\| T \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) \Psi_i \right) \right\|_X^2 dP(\omega) \right)^{1/2}, \\ &= \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) T(\Psi_i) \right\|_X^2 dP(\omega) \right)^{1/2}, \\ &= \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i \right\|_X^2 dP(\omega) \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

Et comme X est de type p , on a

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \Psi_i \right\|_{L^2(X^{**})} &\leq T_p(X) \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_X^p \right)^{1/p}, \\ &= T_p(X) \left(\sum_{i=1}^n \|T(\Psi_i)\|_X^p \right)^{1/p}, \\ &\leq (1 + \epsilon) T_p(X) \left(\sum_{i=1}^n \|\Psi_i\|_{X^{**}}^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

D'où

$$T_p(X^{**}) \leq (1 + \epsilon) T_p(X).$$

Comme $X \subseteq X^{**}$, et par la Remarque 2.2.1, on a $T_p(X) \leq T_p(X^{**})$, et finalement $T_p(X) = T_p(X^{**})$.

De même, pour de cotype:

Supposons X est de cotype q , on a

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \|\Psi_i\|_{X^{**}}^q \right)^{1/q} &\leq \left(\sum_{i=1}^n \|T(\Psi_i)\|_X^q \right)^{1/q}, \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_X^q \right)^{1/q}, \\ &\leq C_q(X) \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i \right\|_X^2 dP(\omega) \right)^{1/2}, \\ &= C_q(X) \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) T(\Psi_i) \right\|_X^2 dP(\omega) \right)^{1/2}, \\ &= C_q(X) \left(\int_{\Omega} \left\| T \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) \Psi_i \right) \right\|_X^2 dP(\omega) \right)^{1/2}, \\ &\leq (1 + \epsilon) C_q(X) \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \Psi_i \right\|_{L^2(X^{**})}. \end{aligned}$$

D'où

$$C_q(X^{**}) \leq (1 + \epsilon) C_q(X).$$

Comme $X \subseteq X^{**}$, et par la Remarque 2.2.1, on a $C_q(X) \leq C_q(X^{**})$, et finalement $C_q(X) = C_q(X^{**})$.

3. *Le type passe aux quotients.* En effet, si M est un sous-espace fermé de X , et $y_j = x_j + M \in X/M$, on a, pour tous $m_1, \dots, m_n \in M$:

$$\left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j y_j \right\|_{L^2(X/M)} \leq \left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j (x_j + m_j) \right\|_{L^2(X)} \leq T_p(X) \left(\sum_{i=1}^n \|x_i + m_j\|^p \right)^{1/p},$$

D'où, en prenant la borne inférieure sur les m_j :

$$\left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j y_j \right\|_{L^2(X/M)} \leq T_p(X) \left(\sum_{i=1}^n \|y_j\|^p \right)^{1/p},$$

De sorte que $T_p(X/M) \leq T_p(X)$.

Par contre le cotype ne passe pas aux quotients; en effet, on verra plus loin que l_1 est de cotype 2, alors que c_0 en est un quotient n'a pas de cotype non trivial.

Théorème 2.2.1 *Si X est de type p ($1 < p \leq 2$) donc X^* est de cotype p^* , avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ et : $C_{p^*}(X^*) \leq T_p(X)$.*

La preuve est basée sur le lemme (1.4.1) :

Démonstration du théorème. Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in X^*$, et soit $x_1, \dots, x_n \in X$ tels que $\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \leq 1$.

Observons d'abord que, par l'orthogonalité des variables de Bernoulli, indépendantes, on a:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\langle \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \varphi_i, \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\rangle &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \varphi_i, x_j \rangle \mathbb{E}(\varepsilon_i \varepsilon_j), \\ &= \sum_{i=1}^n \langle \varphi_i, x_i \rangle, \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i). \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i) \right| &= \left| \mathbb{E} \left\langle \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \varphi_i, \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\rangle \right|, \\ &\leq \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \varphi_i \right\| \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|, \\ &\stackrel{\text{L.H}}{\leq} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \varphi_i \right\|_{L^2(X^*)} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|_{L^2(X)}, \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \varphi_i \right\|_{L^2(X^*)} T_p(X) \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Et le lemme (1.4.1) implique alors:

$$\left(\sum_{i=1}^n \|\varphi_i\|^{p^*} \right)^{1/p^*} \leq T_p(X) \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \varphi_i \right\|_{L^2(X^*)}.$$

Et $C_{p^*}(X^*) \leq T_p(X)$. Ce qui achève la preuve. ■

Théorème 2.2.2

1. Si $1 \leq p \leq 2$, alors $L^p(\mu)$ est de type p et de cotype 2.
2. Si $2 \leq p < \infty$, alors $L^p(\mu)$ est de type 2 et de cotype p .

Preuve. 1. $L^p(\mu)$ est de type p ($1 \leq p \leq 2$) :

D'après l'inégalité du théorème(1.3.2) on a

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i \right\|_{L^p(\mu)}^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mu)}, \\ &= \left(\int_T \left(\sum_{i=1}^n |f_i(t)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}}, \\ \text{d'après le lemme 1.1.1} &\leq \left(\int_T \sum_{i=1}^n |f_i(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}}, \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \int_T |f_i(t)|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}}, \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^p(\mu)}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Kahane on a:

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i \right\|_{L^p(\mu)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq K_{p,2} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i \right\|_{L^p(\mu)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

D'où:

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i \right\|_{L^p(\mu)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq K_{p,2} \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^p(\mu)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Donc $L^p(\mu)$ est de type p ($1 \leq p \leq 2$).

Pour montrer que, $L^p(\mu)$ est de cotype 2, ($1 \leq p \leq 2$) l'inégalité du théorème(1.3.2) donne:

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i \right\|_{L^p(\mu)}^p \right)^{\frac{1}{p}} &\geq a_p \left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mu)}, \\ &= a_p \left(\int_T \left(\sum_{i=1}^n |f_i(t)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}}, \\ &= a_p \left\| \sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right\|_{L^{\frac{p}{2}}(\mu)}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

Comme ($\frac{1}{2} \leq \frac{p}{2} \leq 1$) on applique le lemme 1.1.2:

$$\begin{aligned} a_p \left\| \sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right\|_{L^{\frac{p}{2}}(\mu)}^{\frac{1}{2}} &= a_p \left\| |f_1|^2 + \dots + |f_n|^2 \right\|_{L^{\frac{p}{2}}(\mu)}^{\frac{1}{2}}, \\ &\geq a_p \left(\sum_{i=1}^n \left\| |f_i|^2 \right\|_{L^{\frac{p}{2}}(\mu)} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ &= a_p \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_T |f_i(t)|^{2\frac{p}{2}} d\mu(t) \right)^{\frac{2}{p}} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ &= a_p \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^p(\mu)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

Donc

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i \right\|_{L^p(\mu)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq a_p \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^p(\mu)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

L'inégalité de Kahane donne:

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i \right\|_{L^p(\mu)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq K_{2,p} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i \right\|_{L^p(\mu)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

Ce qui entraîne que

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i \right\|_{L^p(\mu)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq K_{2,p}^{-1} a_p \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^p(\mu)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ce qui le résultat annoncé.

2. $L^p(\mu)$ est de type 2 ($2 \leq p < \infty$):

D'après l'inégalité de (1.3.2) on a

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i \right\|_{L^p(\mu)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq b_p \left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mu)},$$

D'après l'inégalité de Kahane on a:

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i \right\|_{L^p(\mu)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq K_{p,2} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i \right\|_{L^p(\mu)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

Donc

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i \right\|_{L^p(\mu)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq K_{p,2} b_p \left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mu)},$$

Et d'après l'inégalité de Minkowski (lemme 1.1.2) dans $L^{\frac{p}{2}}$:

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mu)} &= \left\| \sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right\|_{L^{\frac{p}{2}}(\mu)}^{\frac{1}{2}}, \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \|f_i^2\|_{L^{\frac{p}{2}}(\mu)} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^p(\mu)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

On obtient:

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i \right\|_{L^p(\mu)}^2 \leq K_{p,2} b_p \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^p(\mu)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit p^* l'exposant conjugué, L^p est donc le dual de L^{p^*} et comme L^{p^*} est de type p^* : $1 < p^* \leq 2$, d'après le théorème 2.2.1, son dual L^p est de cotype p : $2 \leq p < \infty$. ■

Remarque 2.2.3 Comme l_p est isométrique à un sous-espace d'espace L_p et d'après la Remarque 2.2.1, on peut dire que:

- Si $1 \leq p \leq 2$, alors l_p est de type p et de cotype 2.
- Si $2 \leq p < \infty$, alors l_p est de type 2 et de cotype p .

Remarque 2.2.4 Notons tout de suite que le cotype ne se dualise pas aussi bien : on verra, en effet, que $X = l_1$ est de cotype 2, mais $X^* = l_\infty$ n'est pas de type 2, et n'a même aucun type $p > 1$.

Théorème 2.2.3 1. Soient $1 < p \leq 2$ et $p \leq r < \infty$. Si X est de type p , alors $L^r(\mu, X)$ est de type p .

2. Soient $2 \leq q < \infty$ et $1 \leq r \leq q$. Si X est de cotype q , alors $L^r(\mu, X)$ est de cotype q .

Preuve. 1. Soit $f_1, \dots, f_n \in L^r(\mu, X)$, d'après l'inégalité de Kahane, on a

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) f_i \right\|_{L^r(\mu, X)}^2 dP(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} &\leq K_{r,2} \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) f_i \right\|_{L^r(\mu, X)}^r dP(\omega) \right)^{\frac{1}{r}}, \\ &= K_{r,2} \left(\int_{\Omega} \int_T \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) f_i(t) \right\|_X^r d\mu(t) dP(\omega) \right)^{\frac{1}{r}}, \\ &= K_{r,2} \left(\int_T \int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) f_i(t) \right\|_X^r dP(\omega) d\mu(t) \right)^{\frac{1}{r}}, \\ &\leq K_{r,2} K_{2,r} \left(\int_T \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) f_i(t) \right\|_X^2 dP(\omega) \right)^{\frac{r}{2}} d\mu(t) \right)^{\frac{1}{r}}, \end{aligned}$$

Comme X est de type p , alors

$$\left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) f_i(t) \right\|_X^2 dP(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \leq T_p(X) \left(\sum_{i=1}^n \|f_i(t)\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

Donc

$$\left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) f_i \right\|_{L^r(\mu, X)}^2 dP(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \leq T_p(X) K_{r,2} K_{2,r} \left(\int_T \left(\sum_{i=1}^n \|f_i(t)\|_X^p \right)^{\frac{r}{p}} d\mu(t) \right)^{\frac{1}{r}},$$

Puis, en appliquant l'inégalité de Minkowski généralisé inverse dans $L^{\frac{p}{r}}$ (noter que $\frac{p}{r} \leq 1$), il vient:

$$\begin{aligned}
 \left(\int_T \left(\sum_{i=1}^n \|f_i(t)\|_X^p \right)^{\frac{r}{p}} d\mu(t) \right)^{\frac{1}{r}} &= \left(\int_T \left(\sum_{i=1}^n \|f_i(t)\|_X^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{r}{p}} d\mu(t) \right)^{\frac{1}{r}}, \\
 &= \left(\int_T \left(\int_{\bigcup_{1 \leq i \leq n} \{i\}} \|f_i(t)\|_X^{\frac{p}{r}} d\{i\} \right)^{\frac{r}{p}} d\mu(t) \right)^{\frac{1}{r}}, \\
 &\leq \left(\int_{\bigcup_{1 \leq i \leq n} \{i\}} \left(\int_T \|f_i(t)\|_X^r d\mu(t) \right)^{\frac{p}{r}} d\{i\} \right)^{\frac{1}{r}}, \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_T \|f_i(t)\|_X^r d\mu(t) \right)^{\frac{p}{r}} \right)^{\frac{1}{p}}, \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^r(\mu, X)}^p \right)^{\frac{1}{p}},
 \end{aligned}$$

D'où

$$\left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) f_i \right\|_{L^r(\mu, X)}^2 dP(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \leq T_p(X) K_{r,2} K_{2,r} \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^r(\mu, X)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Donc $L^r(\mu, X)$ est de type p , et $T_p(L^r(\mu, X)) \leq T_p(X) K_{r,2} K_{2,r}$.

2. Avec même détaille de 1. , d'après l'inégalité de Kahane, on a

$$\begin{aligned}
 \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) f_i \right\|_{L^r(\mu, X)}^2 dP(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} &\geq \frac{1}{K_{2,r}} \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) f_i \right\|_{L^r(\mu, X)}^r dP(\omega) \right)^{\frac{1}{r}}, \\
 &\geq \frac{1}{K_{2,r} K_{r,2}} \left(\int_T \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) f_i(t) \right\|_X^2 dP(\omega) \right)^{\frac{r}{2}} d\mu(t) \right)^{\frac{1}{r}},
 \end{aligned}$$

Comme X est de cotype q , alors

$$\left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) f_i(t) \right\|_X^2 dP(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{C_q(X)} \left(\sum_{i=1}^n \|f_i(t)\|_X^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

Donc

$$\left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) f_i \right\|_{L^r(\mu, X)}^2 dP(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{K_{2,r} K_{r,2} C_q(X)} \left(\int_T \left(\sum_{i=1}^n \|f_i(t)\|_X^q \right)^{\frac{r}{q}} d\mu(t) \right)^{\frac{1}{r}},$$

Puis, en appliquant l'inégalité de Minkowski généralisé dans $L^{\frac{q}{r}}$ (noter que $\frac{q}{r} \geq 1$), il vient:

$$\left(\int_T \left(\sum_{i=1}^n \|f_i(t)\|_X^q \right)^{\frac{r}{q}} d\mu(t) \right)^{\frac{1}{r}} \geq \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^r(\mu, X)}^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

D'où

$$\left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) f_i \right\|_{L^r(\mu, X)}^2 dP(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{K_{2,r} K_{r,2} C_q(X)} \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^r(\mu, X)}^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Donc $L^r(\mu, X)$ est de cotype q , $C_q(L^r(\mu, X)) \leq K_{2,r} K_{r,2} C_q(X)$. ■

Remarque 2.2.5 *On peut remplacer les variables de Bernoulli par d'autres variables aléatoires; par exemple, des gaussiennes.*

2.3 Type et Cotype gaussiennes

Définition 2.3.1 *Soit X un espace de Banach, pour tous $x_1, \dots, x_n \in X$. $(g_n)_{n \geq 1}$ une suite de gaussiennes standard indépendantes. On dit que X est de:*

1. Type gaussienne p ($1 \leq p \leq 2$), s'il existe une constante $C \geq 1$ telle que :

$$\left\| \sum_{i=1}^n g_i x_i \right\|_{L^2(X)} \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p}. \quad (2.3.1)$$

2. Cotype gaussienne q ($2 \leq q \leq +\infty$), s'il existe une constante $C \geq 1$ telle que :

$$\left\| \sum_{i=1}^n g_i x_i \right\|_{L^2(X)} \geq \frac{1}{C} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{1/q}. \quad (2.3.2)$$

avec $\max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|$ qui remplace $\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{1/q}$ lorsque $q = \infty$.

On note par :

$$T_p^\gamma(X) = \inf \{ C : C \text{ qui vérifie l'inégalité (2.3.1)} \},$$

$$C_q^\gamma(X) = \inf \{ C : C \text{ qui vérifie l'inégalité (2.3.2)} \}.$$

Théorème 2.3.1 Soit X un espace de Banach, et soit $(g_n)_{n \geq 1}$ une suite de gaussiennes standard indépendantes, alors:

1. Si X est de type p , $1 < p \leq 2$, on a:

$$\left\| \sum_{i=1}^n g_i x_i \right\|_{L^2(X)} \leq T_p(X) \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p}, \text{ pour tous } x_1, \dots, x_n \in X. \quad (2.3.3)$$

2. Si X est de cotype q , $2 \leq q < \infty$, on a:

$$\left\| \sum_{i=1}^n g_i x_i \right\|_{L^2(X)} \geq \frac{1}{C_q(X)} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{1/q}, \text{ pour tous } x_1, \dots, x_n \in X. \quad (2.3.4)$$

Plus généralement, ces relations restent valables en remplaçant $(g_n)_{n \geq 1}$ par n'importe quelle suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires symétriques et indépendantes, de norme 1 dans $L^2(P)$.

La preuve est basée sur le lemme suivant:

Lemme 2.3.1 [DJT95, p.213] Soit une suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires symétriques et indépendantes, et pour $0 < p < \infty$ on a:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} \left\| \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega') x_i \right\|^p dP(\omega') &= \int_{\Omega} \int_{\Omega'} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) \varphi_i(\omega') x_i \right\|^p dP(\omega') dP(\omega), \\ &= \int_{\Omega} \int_{\Omega'} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) |\varphi_i(\omega')| x_i \right\|^p dP(\omega') dP(\omega). \end{aligned}$$

Démonstration du théorème. 1. Pour $\omega' \in \Omega'$ on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} \left\| \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega') x_i \right\|^2 dP(\omega') &= \int_{\Omega} \int_{\Omega'} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) \varphi_i(\omega') x_i \right\|^2 dP(\omega') dP(\omega), \\ &= \int_{\Omega'} \int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) \varphi_i(\omega') x_i \right\|^2 dP(\omega) dP(\omega'), \\ &\leq \int_{\Omega'} T_p(X)^2 \left(\sum_{i=1}^n \|\varphi_i(\omega') x_i\|^p \right)^{\frac{2}{p}} dP(\omega'), \\ &= T_p(X)^2 \int_{\Omega'} \left(\sum_{i=1}^n |\varphi_i(\omega')|^p \|x_i\|^p \right)^{\frac{2}{p}} dP(\omega'), \end{aligned}$$

Élevant à la puissance $\frac{p}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega'} \left\| \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega') x_i \right\|^2 dP(\omega') \right)^{\frac{p}{2}} &\leq T_p(X)^p \left(\int_{\Omega'} \left(\sum_{i=1}^n |\varphi_i(\omega')|^p \|x_i\|^p \right)^{\frac{2}{p}} dP(\omega') \right)^{\frac{p}{2}}, \\ &= T_p(X)^p \left\| \sum_{i=1}^n |\varphi_i|^p \|x_i\|^p \right\|_{L^{\frac{2}{p}}(X)}, \end{aligned}$$

Puis, en appliquant l'inégalité de Minkowski dans $L^{\frac{2}{p}}$ (noter que $\frac{2}{p} \geq 1$), il vient:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n \varphi_i x_i \right\|_{L^2(X)}^p &\leq T_p(X)^p \sum_{i=1}^n \left\| |\varphi_i|^p \right\|_{L^{\frac{2}{p}}(P)} \|x_i\|^p, \\ &= T_p(X)^p \sum_{i=1}^n \|\varphi_i\|_{L^2(P)}^p \|x_i\|^p, \\ &\stackrel{\|\varphi_i\|_{L^2(P)}=1}{=} T_p(X)^p \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p. \end{aligned}$$

Cela prouve la première formule.

2. Le second se prouve de façon analogue:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega'} \left\| \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega') x_i \right\|^2 dP(\omega') \right)^{\frac{q}{2}} &\geq \frac{1}{C_q(X)^q} \left(\int_{\Omega'} \left(\sum_{i=1}^n |\varphi_i(\omega')|^q \|x_i\|^q \right)^{\frac{2}{q}} dP(\omega') \right)^{\frac{q}{2}}, \\ &= \frac{1}{C_q(X)^q} \left\| \sum_{i=1}^n |\varphi_i|^q \|x_i\|^q \right\|_{L^{\frac{2}{q}}(X)}, \end{aligned}$$

Puis, en appliquant l'inégalité de Minkowski inverse pour l'exposant $\frac{2}{q} \leq 1$:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n \varphi_i x_i \right\|_2^q &\geq \frac{1}{C_q(X)^q} \left\| |\varphi_i|^q \right\|_{L^{\frac{2}{q}}(P)} \|x_i\|^q, \\ &= \frac{1}{C_q(X)^q} \|\varphi_i\|_{L^q(P)}^2 \|x_i\|^q, \\ &\stackrel{\|\varphi_i\|_{L^2(P)}=1}{=} \frac{1}{C_q(X)^q} \|x_i\|^p. \end{aligned}$$

Cela prouve la seconde formule. ■

Corollaire 2.3.1 *Si X est de type p (cotype q) donc X est de type gaussienne p (resp. cotype gaussienne q) et $T_p^\gamma(X) \leq T_p(X)$ (resp. $C_q^\gamma(X) \leq C_q(X)$).*

En effet, comme $\|g_i\|_{L^2(P)} = 1$, et comme $T_p^\gamma(X) = \inf \{C : C \text{ qui vérifie l'inégalité (2.3.1)}\}$, on obtient $T_p^\gamma(X) \leq T_p(X)$, et $C_q^\gamma(X) = \inf \{C : C \text{ qui vérifie l'inégalité (2.3.2)}\}$, on obtient $C_q^\gamma(X) \leq C_q(X)$.

Chapitre 3

Généralisation de type et de cotype et Quelques applications

3.1 Généralisation de type et de cotype des espaces de Banach

On peut généraliser la définition de type et cotype aux opérateurs linéaires continue $\mathcal{L}(X; Y)$ avec X et Y deux espaces de Banach :

Définition 3.1.1 Soit $u \in \mathcal{L}(X; Y)$, On dit que u est de:

1. Type p ($1 \leq p \leq 2$), si pour tous $x_1, \dots, x_n \in X$, on a :

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i u(x_i) \right\|_{L^2(Y)} \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p}. \quad (3.1.1)$$

2. Cotype q ($2 \leq q \leq +\infty$), si pour tous $x_1, \dots, x_n \in X$, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^n \|u(x_i)\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|_{L^2(X)}. \quad (3.1.2)$$

On note par:

$$\begin{aligned} T_p(u) &= \inf \{ C : C \text{ qui vérifie l'inégalité (3.1.1)} \}, \\ C_q(u) &= \inf \{ C : C \text{ qui vérifie l'inégalité (3.1.2)} \}. \end{aligned}$$

Remarque 3.1.1 1. Ainsi dire que l'espace de Banach X est de type p (resp. de cotype q) revient à dire que Id_X est de type p (resp. de cotype q).

Et on remplace $T_p(X)$ (resp. $C_q(X)$) par $T_p(Id_X)$ (resp. $C_q(Id_X)$).

2. On a tout opérateur est de type 1 et de cotype $+\infty$ (avec même détaille de preuve, comme on ajoute dans type et cotype des espaces de Banach (voir chapitre 2)).

3. Si u est de type $p_1 > 1$, donc il est aussi de type p_2 pour $1 \leq p_2 < p_1$, avec $T_{p_2}(u) \leq T_{p_1}(u)$. Et si u est de cotype $q_1 < +\infty$, donc il est aussi de cotype q_2 pour $q_1 < q_2 \leq +\infty$; avec $C_{q_2}(u) \leq C_{q_1}(u)$.

Proposition 3.1.1 Soit $u \in \mathcal{L}(X; Y)$, et $u : X \rightarrow Y$ est de type p , donc l'adjoint $u^* : Y^* \rightarrow X^*$ est de cotype p^* avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$, et $C_{p^*}(u^*) \leq T_p(u)$, en particulier si X est de type p , donc X^* est de cotype p^* .

Preuve. On a d'après le lemme 1.4.1

$$\left(\sum_{i=1}^n \|u^*(y_i^*)\|^{p^*} \right)^{1/p^*} = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \langle u^*(y_i^*), x_i \rangle \right| ; \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \leq 1 \right\}.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \langle u^*(y_i^*), x_i \rangle \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \langle y_i^*, u(x_i) \rangle \right|, \\ &= \left| \mathbb{E} \left\langle \sum_{i=1}^n \varepsilon_i y_i^*, \sum_{i=1}^n \varepsilon_i u(x_i) \right\rangle \right|, \\ &\leq \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i y_i^* \right\| \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i u(x_i) \right\|, \\ &\stackrel{\text{L.H}}{\leq} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i y_i^* \right\|_{L^2(Y^*)} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i u(x_i) \right\|_{L^2(Y)}, \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i y_i^* \right\|_{L^2(Y^*)} T_p(u) \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \\ &\leq T_p(u) \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i y_i^* \right\|_{L^2(Y^*)}, \end{aligned}$$

Donc

$$\left(\sum_{i=1}^n \|u^*(y_i^*)\|^{p^*} \right)^{1/p^*} \leq T_p(u) \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i y_i^* \right\|_{L^2(Y^*)}.$$

Et u^* est de cotype p^* avec $C_{p^*}(u^*) \leq T_p(u)$. ■

Remarque 3.1.2 *On peut aussi montrer avec même preuve si u^* de type p on a aussi u de cotype p^* avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.*

3.2 Quelques applications de type et de cotype

3.2.1 Factorisation par un espace de Hilbert et Théorème de Kwapien

On dit qu'un opérateur $u : X \rightarrow Y$ est factorisable par; ou mieux, à travers, un espace de Hilbert s'il existe un espace de Hilbert H et des opérateurs $w : X \rightarrow H$ et $v : H \rightarrow Y$ tels que $u = vw$. Pour un tel u , on pose :

$$\gamma_2(u) = \inf \{ \|v\| \|w\| ; u = vw, \text{ avec } w : X \rightarrow H, v : H \rightarrow Y, H \text{ Hilbert} \}$$

On note $\Gamma_2(X, Y)$ l'espace des opérateurs factorisables par un espace de Hilbert.

Proposition 3.2.1 [LQ04] *Soit X, Y deux espaces de Banach, et $u \in \mathcal{L}(X, Y)$ un opérateur de X dans Y . Alors: X est isomorphe à un espace de Hilbert si et seulement si Id_X est factorisable à travers un espace de Hilbert; de plus, dans ce cas, on a $d_X = \gamma_2(Id_X)$.*

Théorème 3.2.1 (forme finale du Théorème de factorisation) [LQ04] *Pour $u \in \mathcal{L}(X; Y)$, on a équivalence entre:*

- a. *u se factorise à travers un espace de Hilbert, et $\gamma_2(u) \leq C$;*
- b. *Pour tout entier $n \geq 1$, toute matrice orthogonale (resp. unitaire, si les espace sont complexes) $A = (a_{i,j})_{i,j \leq n} \in \mathbb{O}(n)$ (resp. $\in \mathbb{U}(n)$), on a*

$$\sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j=1}^n a_{i,j} u(x_j) \right\|^2 \leq C^2 \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2.$$

Nous avons dit que, de façon évidente, tout espace isomorphe à un espace de Hilbert est de type 2 et de cotype 2; comme on va le voir, il n'ya pas d'autre cas.

Théorème 3.2.2 (de Kwapien) *Si un espace de Banach X est à la fois de type 2 et de cotype 2, il est isomorphe à un espace de Hilbert, et plus précisément :*

$$d_X \leq T_2(X) C_2(X).$$

Preuve. On sait, par la proposition 3.2.1, que $d_X = \gamma_2(Id_X)$. Il s'agit donc de montrer que Id_X se factorise à travers un espace de Hilbert. D'après le théorème de factorisation 3.2.1, il nous faut prouver que, si $A = (a_{i,j})_{i,j \leq n} \in \mathbb{O}(n)$, et $x_1, \dots, x_n \in X$, on a:

$$\sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right\|^2 \leq T_2(X)^2 C_2(X)^2 \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2.$$

Grâce au 2. de théorème 2.3.1, on a:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq C_2(X) \left\| \sum_{i=1}^n g_i \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right) \right\|_{L^2(X)}, \\ &= C_2(X) \left\| \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} g_i \right) x_j \right\|_{L^2(X)}, \\ \text{d'après le lemme 1.3.1} &= C_2(X) \left\| \sum_{j=1}^n g_j x_j \right\|_{L^2(X)}, \end{aligned}$$

En utilisant cette fois le 1. de théorème 2.3.1:

$$\left(\sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_2(X) T_2(X) \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Et $d_X = \gamma_2(Id_X) \leq T_2(X) C_2(X)$. Cela termine la preuve. ■

Le théorème de Kwapien admet alors la généralisation suivante, avec la même preuve:

Théorème 3.2.3 [GP86] *Soit X, Y, Z trois espace de Banach, et soit $u : X \rightarrow Y$, un opérateur de type 2, et $v : Y \rightarrow Z$, un opérateur de cotype 2. alors $vu : X \rightarrow Z$ se factorise par un espace de Hilbert et $\gamma_2(vu) \leq T_2(u) C_2(v)$.*

Remarque 3.2.1 *On trouve le théorème 3.2.2 si on prend $X = Y = Z$, et $u = v = Id_X$, donc Id_X se factorise par un espace de Hilbert et $\gamma_2(Id_X) \leq T_2(X) C_2(X)$. et d'après la proposition 3.2.1 on trouve X est isomorphe à un espace de Hilbert et $d_X = \gamma_2(Id_X)$.*

Corollaire 3.2.1 *Soit X, Z deux espaces de Banach, Si X est de type 2, et Z est de cotype 2, donc $v : X \rightarrow Z$ se factorise par un espace de Hilbert.*

Preuve. Pour la preuve on utilise le théorème 3.2.3 et on prend $u = Id_X$, on a l'opérateur u est de type 2 et l'espace Z est de cotype 2, On montre que $v : X \rightarrow Z$, un opérateur de cotype 2 :

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{i=1}^n \|v(x_i)\|_Z^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq C_2(Z) \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i v(x_i) \right\|_{L^2(Z)}, \\
 &= C_2(Z) \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(w) v(x_i) \right\|_Z^2 dP(w) \right)^{\frac{1}{2}}, \\
 &= C_2(Z) \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n v(\varepsilon_i(w) x_i) \right\|_Z^2 dP(w) \right)^{\frac{1}{2}}, \\
 &\leq C_2(Z) \|v\| \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(w) x_i \right\|_X^2 dP(w) \right)^{\frac{1}{2}}, \\
 &= C_2(Z) \|v\| \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|_{L^2(X)}.
 \end{aligned}$$

Donc v est de cotype 2.

Et d'après le théorème 3.2.3, l'opérateur v se factorise par un espace de Hilbert. ■

Corollaire 3.2.2 *Si $1 \leq p \leq 2 \leq q < \infty$, $v : L_q \rightarrow L_p$ se factorise par un espace de Hilbert.*

Preuve. Pour $1 \leq p \leq 2$, L^p est de cotype 2, et $2 \leq q < \infty$, L^q est de type 2.

D'après Corollaire 3.2.1, $v : L_q \rightarrow L_p$ se factorise par un espace de Hilbert. ■

3.2.2 Cotype et opérateurs (p, q) -sommants

Nous donnons ici la relation de cotype d'un espace de Banach avec l'opérateurs (p, q) -sommants.

Si X est de cotype q ($2 \leq q < \infty$), alors, en particulier l'identité $I : X \rightarrow X$ est $(q, 1)$ -sommants. Réciproquement, pour q ($2 < q < \infty$) si on a cette propriété, Talagrand en 1992, a montré que X est de cotype q . La preuve est assez longue, nous revoyons à (Théorème 1.1 [TALa92]).

Pour $q = 2$, ce n'est plus le cas, bien que, d'après ce qui précède X soit de Cotype 2; en effet Talagrand (Théorème 7.1 [TALb92]) a construit un espace de Banach qui n'est pas de Cotype 2, mais pour lequel $l_1^n \omega(X) \subset l_2(X)$ (ou $I : X \rightarrow X$ est $(2, 1)$ -sommants).

Théorème 3.2.4 *Soit X, Y deux espaces de Banach.*

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour $x_1, \dots, x_n \in X$ on a l'inégalité suivante:

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i \right\|_X \leq \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{l_1^n \omega(X)}.$$

2. X est de cotype q ($2 < q < \infty$), ssi l'identité $I : X \rightarrow X$ est $(q, 1)$ -sommants (ou $l_1^n \omega(X) \subset l_q(X)$). De plus

$$\pi_{q,1}(I) = C_q(X).$$

3. Si l'identité $I : X \rightarrow X$ est $(q, 1)$ -sommants, alors

$$\Pi_{q,1}(X; Y) = \mathcal{L}(X; Y).$$

4. Si Y est de cotype q ($2 \leq q < \infty$), alors

$$\Pi_{q,1}(X; Y) = \mathcal{L}(X; Y), \quad \text{et} \quad \pi_{q,1}(u) \leq C_q(Y) \|u\|, \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{L}(X; Y).$$

Preuve. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour $x_1, \dots, x_n \in X$, alors

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i \right\|_X &= \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left| \varphi \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i \right) \right| = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) \varphi(x_i) \right|, \\ &\leq \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i(\omega)| |\varphi(x_i)|, \\ &= \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^n |\varphi(x_i)| = \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{l_1^n \omega(X)}, \end{aligned}$$

D'où

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i \right\|_X \leq \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{l_1^n \omega(X)}.$$

2. \Rightarrow) On suppose que X est de cotype q ($2 \leq q < \infty$), alors pour $x_1, \dots, x_n \in X$, il existe une constante $C_q(X)$ tel que

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}} &\leq C_q(X) \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|_{L^2(X)}, \\
 &= C_q(X) \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i \right\|_X^2 dP(\omega) \right)^{\frac{1}{2}}, \\
 &\stackrel{(1)}{\leq} C_q(X) \left(\int_{\Omega} \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{l_1^n \omega(X)}^2 dP(\omega) \right)^{\frac{1}{2}}, \\
 &= C_q(X) \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{l_1^n \omega(X)} \left(\int_{\Omega} dP(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= C_q(X) \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{l_1^n \omega(X)}.
 \end{aligned}$$

Et par conséquent $I : X \rightarrow X$ est $(q, 1)$ -sommants.

\Leftrightarrow Voir [TALa92, Théorème 1.1].

3. Soit $u \in \mathcal{L}(X; Y)$, alors, pour tout $x_1, \dots, x_n \in X$, on a

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{i=1}^n \|u(x_i)\|^q \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\sum_{i=1}^n \|u\|^q \|x_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \\
 &= \|u\| \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \\
 &\stackrel{I_X \in \Pi_{q,1}(X;Y)}{\leq} \|u\| \pi_{q,1}(I) \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{l_1^n \omega(X)}.
 \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que $u \in \Pi_{q,1}(X; Y)$ et $\Pi_{q,1}(X; Y) = \mathcal{L}(X; Y)$, de plus

$$\pi_{q,1}(u) \leq \|u\| \pi_{q,1}(I).$$

4. Si Y est de cotype q ($2 \leq q < \infty$), la propriété 2. donne; $I : Y \rightarrow Y$ est $(q, 1)$ -sommants, alors pour tout $u \in \mathcal{L}(X; Y)$, on a

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{i=1}^n \|u(x_i)\|^q \right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{i=1}^n \|I(u(x_i))\|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \\
 &\stackrel{(2.)}{\leq} C_q(Y) \|(u(x_i))_{1 \leq i \leq n}\|_{l_1^n \omega(Y)}, \\
 &= C_q(Y) \sup_{\varphi \in B_{Y^*}} \sum_{i=1}^n |\varphi(u(x_i))|, \\
 &= \|u\| C_q(Y) \sup_{\varphi \in B_{Y^*}} \sum_{i=1}^n \left| \left(\varphi \circ \frac{u}{\|u\|} \right) (x_i) \right|, \\
 &= \|u\| C_q(Y) \sup_{\psi \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^n |\psi(x_i)|, \\
 &= \|u\| C_q(Y) \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{l_1^n \omega(Y)}.
 \end{aligned}$$

D'où $u \in \Pi_{q,1}(X; Y)$ et $\Pi_{q,1}(X; Y) = \mathcal{L}(X; Y)$, de plus,

$$\pi_{q,1}(u) \leq \|u\| C_q(Y).$$

■

Le théorème suivant donne la relation entre l'espace $L^2(Y)$ et l'espace des suites faiblement 2-sommables $l_2^n \omega(X)$, si l'opérateur u est r -sommants ($1 \leq r < \infty$).

Théorème 3.2.5 Soit $1 \leq r < \infty$, et $u \in \Pi_r(X; Y)$, pour $x_1, \dots, x_n \in X$ on a

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i u(x_i) \right\|_{L^2(Y)} \leq K_{r,2} b_r \pi_r(u) \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{l_2^n \omega(X)}.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i u(x_i) \right\|_{L^r(Y)} &= \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) u(x_i) \right\|_Y^r dP(\omega) \right)^{\frac{1}{r}}, \\
 &= \left(\int_{\Omega} \left\| u \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i \right) \right\|_Y^r dP(\omega) \right)^{\frac{1}{r}},
 \end{aligned}$$

Comme $u \in \Pi_r(X; Y)$ d'après le théorème de domination de Pietsch, il existe une probabilité de Radon μ sur $(B_{X^*}; \sigma(X^*, X))$, telle que

$$\left\| u \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i \right) \right\|_Y^r \leq \pi_r(u)^r \int_{B_{X^*}} \left| \left\langle \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i, \xi \right\rangle \right|^r d\mu(\xi),$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i u(x_i) \right\|_{L^r(Y)} &\leq \left(\int_{\Omega} \pi_r(u)^r \int_{B_{X^*}} \left| \left\langle \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i, \xi \right\rangle \right|^r d\mu(\xi) dP(\omega) \right)^{\frac{1}{r}}, \\
 &= \pi_r(u) \left(\int_{\Omega} \int_{B_{X^*}} \left| \left\langle \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i, \xi \right\rangle \right|^r d\mu(\xi) dP(\omega) \right)^{\frac{1}{r}}, \\
 &= \pi_r(u) \left(\int_{B_{X^*}} \int_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) \langle x_i, \xi \rangle \right|^r dP(\omega) d\mu(\xi) \right)^{\frac{1}{r}},
 \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Khintchine on obtient:

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i u(x_i) \right\|_{L^r(Y)} &\leq b_r \pi_r(u) \left(\int_{B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, \xi \rangle|^2 \right)^{\frac{r}{2}} d\mu(\xi) \right)^{\frac{1}{r}}, \\
 &\leq b_r \pi_r(u) \left(\sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, \xi \rangle|^2 \right)^{\frac{r}{2}} \int_{B_{X^*}} d\mu(\xi) \right)^{\frac{1}{r}}, \\
 &= b_r \pi_r(u) \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, \xi \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Kahane, on a

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i u(x_i) \right\|_{L^2(Y)} \leq K_{r,2} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i u(x_i) \right\|_{L^r(Y)},$$

Ce qui entraîne que

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i u(x_i) \right\|_{L^2(Y)} \leq K_{r,2} b_r \pi_r(u) \left\| (x_i)_{1 \leq i \leq n} \right\|_{l_2^n \omega(X)}.$$

■

Théorème 3.2.6 *Soit Y est de cotype q avec $(2 \leq q < \infty)$, donc pour tout espace de Banach X , et pour $r > q$, on a*

$$\Pi_r(X; Y) \subset \Pi_{q,2}(X; Y).$$

En particulier, si Y est de cotype 2, donc pour tout espace de Banach X , et pour $2 < r < \infty$, on a

$$\Pi_r(X; Y) = \Pi_2(X; Y).$$

Preuve. Comme Y est de cotype q ($2 \leq q < \infty$), on a

$$\left(\sum_{i=1}^n \|u(x_i)\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_q(Y) \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i u(x_i) \right\|_{L^2(Y)},$$

Comme $r > q \geq 2$, on a: $L^r(Y) \subset L^2(Y)$ $\left[\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i u(x_i) \right\|_{L^2(Y)} \leq \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i u(x_i) \right\|_{L^r(Y)} \right]$

Donc

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \|u(x_i)\|^q \right)^{\frac{1}{q}} &\leq C_q(Y) \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i u(x_i) \right\|_{L^r(Y)}, \\ &= C_q(Y) \left(\int_{\Omega} \left\| u \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i \right) \right\|_Y^r dP(\omega) \right)^{\frac{1}{r}}, \end{aligned}$$

Comme $u \in \Pi_r(X; Y)$ d'après le théorème de domination de Pietsch, il existe une probabilité de Radon μ sur $(B_{X^*}; \sigma(X^*, X))$, telle que

$$\left\| u \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i \right) \right\|_Y^r \leq \pi_r(u)^r \int_{B_{X^*}} \left| \left\langle \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i, \xi \right\rangle \right|^r d\mu(\xi),$$

On obtient

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \|u(x_i)\|^q \right)^{\frac{1}{q}} &\leq C_q(Y) \left(\int_{\Omega} \pi_r(u)^r \int_{B_{X^*}} \left| \left\langle \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i, \xi \right\rangle \right|^r d\mu(\xi) dP(\omega) \right)^{\frac{1}{r}}, \\ &= C_q(Y) \pi_r(u) \left(\int_{\Omega} \int_{B_{X^*}} \left| \left\langle \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i, \xi \right\rangle \right|^r d\mu(\xi) dP(\omega) \right)^{\frac{1}{r}}, \\ &= C_q(Y) \pi_r(u) \left(\int_{B_{X^*}} \int_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) \langle x_i, \xi \rangle \right|^r dP(\omega) d\mu(\xi) \right)^{\frac{1}{r}}, \end{aligned}$$

Et l'inégalité de Khintchine donne:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \|u(x_i)\|^q \right)^{\frac{1}{q}} &\leq b_r C_q(Y) \pi_r(u) \left(\int_{B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, \xi \rangle|^2 \right)^{\frac{r}{2}} d\mu(\xi) \right)^{\frac{1}{r}}, \\ &\leq b_r C_q(Y) \pi_r(u) \left(\sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, \xi \rangle|^2 \right)^{\frac{r}{2}} \int_{B_{X^*}} d\mu(\xi) \right)^{\frac{1}{r}}, \\ &= b_r C_q(Y) \pi_r(u) \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{l_2^m \omega(X)} \end{aligned}$$

Donc $\pi_{q,2}(u) \leq b_r C_q(Y) \pi_r(u)$, et $\Pi_r(X; Y) \subset \Pi_{q,2}(X; Y)$.

* Pour $q = 2$, on a $\pi_2(u) \leq b_r C_2(Y) \pi_r(u)$.

Pour l'inverse d'après le théorème de l'inclusion 1.4.2, pour $2 < r$, on a:

$$\Pi_2(X; Y) \subset \Pi_r(X; Y).$$

Ce qui entraîne que $\Pi_r(X; Y) = \Pi_2(X; Y)$. ■

Théorème 3.2.7 Si X, Y de cotype 2, pour $1 \leq r < \infty$, on a

$$\Pi_r(X; Y) = \Pi_1(X; Y).$$

Preuve. D'après le théorème d'inclusion 1.4.2, pour $1 \leq r < \infty$, on a

$$\Pi_1(X; Y) \subseteq \Pi_r(X; Y).$$

Pour l'inverse, si $1 \leq r \leq 2$:

Soit $u \in \Pi_r(X; Y)$ et $x_1, \dots, x_n \in X$ on définit un opérateur de rang finie par:

$$\begin{aligned} M : l_\infty^n &\rightarrow X \\ \lambda &\mapsto M(\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \end{aligned}$$

est 1-sommants, donc r^* -sommants et on a $l_\infty^n \xrightarrow{M} X \xrightarrow{u} Y$,

D'après le théorème 1.4.4 on a $uM : l_\infty^n \rightarrow Y$ est 1-sommants. Donc

$$\sum_{i=1}^n \|u(M(e_i))\| \leq \pi_1(uM) \|(e_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{l_1^n \omega(l_\infty^n)} \leq \pi_r(u) \cdot \pi_{r^*}(M).$$

On note $M(e_i) = x_i$, $1 \leq i \leq n$, donc on trouve

$$\sum_{i=1}^n \|u(x_i)\| \leq \pi_1(uM) \leq \pi_r(u) \cdot \pi_{r^*}(M).$$

Comme X est de cotype 2, et $2 \leq r^* < \infty$, on en déduit que M est 2-sommants et $\pi_2(M) = \pi_{r^*}(M)$.

D'autre part, par le lemme 1.4.3 nous trouvons:

$$\|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{l_1^n \omega(X)} = \sup_{\|\lambda\|_\infty \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\| = \sup_{\|\lambda\|_\infty \leq 1} \|M(\lambda)\| = \|M\|.$$

Donc, d'après le lemme 1.4.5, on a

$$\pi_2(M) \leq C \|M\| = C \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{l_1^n \omega(X)} \text{ et } \sum_{i=1}^n \|u(x_i)\| \leq C \pi_r(u) \|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{l_1^n \omega(X)}.$$

i.e u est 1-sommants, donc

$$\Pi_r(X; Y) = \Pi_1(X; Y), \text{ pour } 1 \leq r \leq 2. \quad (*)$$

Par précédemment théorème, pour $2 \leq r < \infty$, $\Pi_r(X; Y) = \Pi_2(X; Y)$.

Et comme $\Pi_1(X; Y) = \Pi_2(X; Y)$, (si $r = 2$ dans $(*)$) on obtient

$$\Pi_r(X; Y) = \Pi_1(X; Y).$$

■

Corollaire 3.2.3 *Si $1 \leq r < \infty$, tout opérateur borné de $L^1(\mu)$ dans $L^2(\lambda)$ est r -sommant. i.e.,*

$$\mathcal{L}(L^1(\mu); L^2(\lambda)) = \Pi_r(L^1(\mu); L^2(\lambda)),$$

Preuve. Comme $L^1(\mu)$ et $L^2(\lambda)$ sont de cotype 2, d'après le théorème (3.2.7), on a

$$\Pi_r(L^1(\mu); L^2(\lambda)) = \Pi_1(L^1(\mu); L^2(\lambda)),$$

D'après le théorème 1.4.5 on a

$$\mathcal{L}(L^1(\mu); L^2(\lambda)) = \Pi_1(L^1(\mu); L^2(\lambda)),$$

Donc

$$\Pi_r(L^1(\mu); L^2(\lambda)) = \mathcal{L}(L^1(\mu); L^2(\lambda)).$$

■

Théorème 3.2.8 [DJT95] *Soit Y est de cotype q avec ($2 \leq q < \infty$), et K un compact*

1. *Si $q = 2$, on a $\mathcal{L}(C(K); Y) = \Pi_2(C(K); Y)$.*
2. *Si $2 < q < \infty$, on a $\mathcal{L}(C(K); Y) = \Pi_{q,p}(C(K); Y)$, pour $p < q$.*

Preuve. 1. D'après le lemme 1.4.4, pour $q = 4$, et $p = 2$, on a

$$\pi_4(u) \leq \|u\|^{\frac{1}{2}} \pi_2(u)^{\frac{1}{2}},$$

et le théorème 3.2.6 donne

$$\pi_2(u) \leq b_4 C_2(Y) \pi_4(u),$$

Donc

$$\begin{aligned} \pi_2(u) &\leq b_4 C_2(Y) \|u\|^{\frac{1}{2}} \pi_2(u)^{\frac{1}{2}}, \\ \pi_2(u) &\leq b_4^2 C_2(Y)^2 \|u\|. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. Si nous invoquons le théorème 1.4.3, nous voyons que nous avons seulement besoin de prouver

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}(K); Y) = \Pi_{q,1}(\mathcal{C}(K); Y),$$

Pour $u \in \mathcal{L}(\mathcal{C}(K); Y)$ et $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}(K)$, on définit:

$$\begin{aligned} M : l_\infty^n &\rightarrow \mathcal{C}(K) \\ \lambda &\longmapsto M(\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i. \end{aligned}$$

On a, par le lemme 1.4.3 nous trouvons:

$$\|(f_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{l_1^n \omega(\mathcal{C}(K))} = \sup_{\|\lambda\|_\infty \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i \right\| = \sup_{\|\lambda\|_\infty \leq 1} \|M(\lambda)\| = \|M\|.$$

Comme $M(e_i) = f_i$, $1 \leq i \leq n$, et Y est de cotype q :

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{i=1}^n \|u(f_i)\|^q \right)^{\frac{1}{q}} &\leq C_q(Y) \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) u(f_i) \right\|_Y^2 dP(\omega) \right)^{\frac{1}{2}}, \\
 &= C_q(Y) \left(\int_{\Omega} \left\| u \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) f_i \right) \right\|_Y^2 dP(\omega) \right)^{\frac{1}{2}}, \\
 &\leq \|u\| C_q(Y) \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) f_i \right\|_{\mathcal{C}(K)}^2 dP(\omega) \right)^{\frac{1}{2}}, \\
 &= \|u\| C_q(Y) \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) M(e_i) \right\|_{\mathcal{C}(K)}^2 dP(\omega) \right)^{\frac{1}{2}}, \\
 &= \|u\| C_q(Y) \left(\int_{\Omega} \left\| M \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) e_i \right) \right\|_{\mathcal{C}(K)}^2 dP(\omega) \right)^{\frac{1}{2}}, \\
 &\leq \|u\| C_q(Y) \|M\| \left(\int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) e_i \right\|_{l_{\infty}^n}^2 dP(\omega) \right)^{\frac{1}{2}}, \\
 &= \|u\| C_q(Y) \|M\| = \|u\| C_q(Y) \|(f_i)_{1 \leq i \leq n}\|_{l_1^n \omega(\mathcal{C}(K))}.
 \end{aligned}$$

Donc $u \in \Pi_{q,1}(\mathcal{C}(K); Y)$ et $\pi_{q,1}(u) \leq \|u\| C_q(Y)$. ■

Comme $1 \leq p \leq 2$, alors $L^p(\mu)$ est de cotype 2, on trouve:

Corollaire 3.2.4 (Le petit théorème de Grothendieck) *Soit K un espace compact, soit μ une mesure quelconque, si $1 \leq p \leq 2$; tout opérateur borné de $\mathcal{C}(K)$ dans $L^p(\mu)$ est 2-sommant. i.e.*

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}(K); L^p(\mu)) = \Pi_2(\mathcal{C}(K); L^p(\mu)).$$

De plus $\pi_2(u) \leq k_G \|u\|$, et $k_G = b_4^2 C_2(Y)^2$.

Bibliographie

- [LQ04] D. LI ET H. QUEFFELEC, *Introduction à l'étude des espaces de Banach*, Société Mathématique de France, 2004.
- [DJT95] J. DIESTEL ET H. JARCHOW ET A. TONGE, *Absolutely Summing Operators*, Cambridge University. Press. Cambridge, 1995.
- [WOJ91] P.WOJTASZCZYK, *Banach spaces for Analyste*, Cambridge University. Press, 1991.
- [FAN06] FERNANDO ALBIAC ET NIGEL J. KALTON, *Topics in Banach Space Theory*, Springer, 2006.
- [GP86] GILLES ET PISIER, *Factorization of operators and geometry of Banach space*, American Mathematical Society, 1986.
- [SM87] SHELDON M.ROSS, *Initiation aux probabilités*, Presses polytechniques romandes, 1987.
- [FMD09] D.FREDON ET M.MAURRY-BERTRAND, F.BERTRAND, *Statistiques et Probabilités*, Dunord, Paris, 2009.
- [JL05] JEAN-F LE GALL, *Intégration, Probabilités et Processus Aléatoire*, Magistère MMFAI, Ecole normale supérieure de Paris, 2005.
- [JAM87] G.J.O JAMESON, *Summing and Nuclear Norms in Banach Space Theory*, Cambridge University. Press, 1987.

-
- [MA74] B. MAUREY, *Théorème de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans les espace L^p* , Société Mathématique de France, 1974.
- [KH23] A.Y.KHINTCHINE, *Ueber dyadische brüche*, Math.Z.18(1923), 109-116.
- [WMC81] W. HENGARTNER ET M. LAMBERT, C. REISCHER, *Introduction à l'analyse fonctionnelle*, Les Presses de l'Université du Québec, 1981.
- [RA22] H. RADEMACHER, *Einige Satzeuber Reihen von allgemeinen Orthogonal funktionen*, Math. Ann. 87(1922), 112-138.
- [KA64] J. P. KAHANE, *Sur les sommes vectorielles*, C. R. Acad. Sci. Paris 259 (1964), 2577–2580. (French).
- [HJ74] J. HOFFMANN-JØRGENSEN, *Sums of independent Banach space valued random variables*, Studia Math. 52(1974), 159-186.
- [MP76] B. MAUREY AND G. PISIER, *Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach*, Studia Math.58(1976), 45–90. (French).
- [MA03] B. MAUREY, *Type, cotype and K -convexity*, Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. 2, North-Holland, Amsterdam, 2003, pp. 1299-1332.
- [TALa92] MICHEL TALAGRAND, *Cotype and $(q, 1)$ -summing norm in a Banach space*. Invent. math. 110, 545-556 (1992)
- [TALb92] MICHEL TALAGRAND, *Cotype of operators from $C(K)$* . Invent. math. 107-140 (1992).