UNIVERSITÉ DE M'SILA

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES

Département de Mathématiques

Mémoire de Fin D'etude

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées et Discrètes

Par

Chikh Messaouda

Sujet

Sur les Algèbres de Heyting

Soutenu le 24 Juin 2014 devant le Jury composé de :

Douadi Mihoubi	Pr. Université de M'sila	Président
Abdelaziz Amroune	Pr. Université de M'sila	Encadreur
Lahcen Ladjlat	M.A.B Université de M'sila	Examinateur

Promotion: 2013/ 2014

Résumé:

L'algèbre de Heyting est le modèle algébrique de la logique intuitionniste. L'étude des algèbres s'accompagne et détermine notre compréhension de ce que c'est la logique. Certes, c'est une approche de nature sémantique à la logique, mais qui est capable d'intégrer et donner des réponses aux problèmes plus proprement syntaxiques.

Mots clés:

Relation d'ordre, ordre partiel, algèbre de Boole, treillis, treillis distributif, algèbre de Heyting

Abstract:

Heyting algebra is an algebraic model of intuitionistic logic, the study algebra comes and determines our understanding of what is logical. Certes, this is an approach to semantic logic, but is able to integrate and provide answers to more properly syntactic problems

Key words:

Order relation, partial order, Boolean algebra, lattice, distributive lattice, Heyting algebra.

Notations :

Table des matières

Introduction

Au début du $20^{ième}$ siècle un certain nombre des mathématiciens ont remis en cause les fondements de la logique classique en refusant le principe du tiers exclu ($A \vee \rceil A$: soit on a A soit on a non A) qu'est une thèse, ce qui a donné la naissance de la logique intuitionniste d'après Brouwer (approche classique). Ce dernier a fondé l'intuitionnisme comme une position philosophique vis-à-vis des mathématiques. Cela l'a conduit à rejeter certaines formes du raisonnement mathématique traditionnel (tiers exclus).

Elle a été ensuite formalisée, par Arend Heyting (1930) élève de Brouwer. Heyting a généralisé l'idée bien connue de l'algèbre de Boole. Luitzen Brouwer a fondé la philosophie mathématique de l'intuitionnisme; qui croyait que la déclaration ne pouvait être démontrée par une preuve directe. Arend Heyting formalise cette idée dans ses algèbres éponymes.

Comme l'algèbre de Boole l'idée de George Boole le mathématicien anglais est un système algébrique a deux valeurs $\{0, 1\}$ muni de deux structures anneau et treillis, connecteurs logiques $\vee, \wedge, \rceil$ et tables de vérité:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$a \wedge b$

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$a \vee b$

a	$\rceil a$
0	1
1	0

$\rceil a$

Reste à déterminer c'est quoi une algèbre de Heyting ? Quel est sa relation avec l'algèbre de Boole?

C'est pour ça on divise ce projet en trois chapitres compatibles. Dans le premier chapitre on donne des généralités sur les ensembles et les relations qui nous intéressent spécialement les relations d'ordre, ensuite on donne la notion du treillis et de manière spécifique celle treillis distributifs avant d'introduire enfin l'algèbre de Boole.

Le deuxième chapitre a été basé sur l'algèbre de Heyting, treillis de Heyting ou treillis pseudo-complémenté, ensuite les propriétés principales des algèbres de Heyting et on termine ce chapitre avec des exemples d'applications.

Le chapitre trois donne un aperçu sur les systèmes déductifs dans une algèbre implicative positive puis on termine ce chapitre par un théorème de représentation des treillis de Heyting.

Il suffit de prendre le voisinage $\sigma(a)$ de D_1.On a bien $\sigma(a)$est un voisinage de D_1 et $D_2 \notin \sigma(a)$ ■

Proposition 3.2.6 (*Théorème de représentation*)

σ est un monomorphisme de treillis de Heyting de A dans le treillis des ouverts de X

Preuve. Il suffit de montrer que :

$$\sigma(a \rightarrow b) = \sigma(a) \rightarrow \sigma(b) \tag{3.2.8}$$

$\sigma(a) \rightarrow \sigma(b) = Int\,[\sigma(b) \cup C\sigma(a)]$

-$D \in \sigma(a \rightarrow b) \Rightarrow a \rightarrow b \in D$

On a:

$a \in D$ ou $a \notin D \Rightarrow b \in D$ ou $a \notin D \Rightarrow D \in \sigma(b)$ ou $D \notin \sigma(a)$

$\Rightarrow D \in \sigma(a) \cup C\sigma(b) \Rightarrow \sigma(a \rightarrow b) \subseteq \sigma(b) \cup C\sigma(a)$

Comme $\sigma(a \rightarrow b)$ est un ouvert on a:

$$\sigma(a \rightarrow b) \subseteq Int\,(\sigma(b) \cup C\sigma(a)) = \sigma(a) \rightarrow \sigma(b) \tag{3.2.9}$$

$\Rightarrow \sigma(a \rightarrow b) \subseteq \sigma(a) \rightarrow \sigma(b)$. ■

3.3 Conclusion

Entre 1900 et 1930 il y'avait une crise des Mathématiques due aux paradoxes de la théorie des ensembles. Choses qui ont conduit au refus des fondements de la logique classique. Du refus du principe du tiers exclus naisse la logique intuitionniste ou logique constructive.

Dans ce travail on traite le contre parts algébriques de la logique intuitionniste à savoir les algèbres implicative, les algèbres implicatives positives, algèbres de Heyting.

Enfin on 'a donné un théorème de représentation des algèbres de Heyting et ceci après avoir introduit la notion des systèmes déductif dans une algèbre implicative.

Bibliographie

[1] Helina Rasiowa, An algebraic Approach to non Classical Logics, North-Holland publishing Company-1974.

[2] : P. Boutillier (2009). Une classe d'ordres partiels : les treillis.cours de recherche. Ecole normale supérieure , Lyon.

[3] : Steven Givant . Paul Halmos, Introduction to Boolean Algebras, Springer Science+Business Media, LLC 2009.

[4] : L.Dérnière, M. Junker (2009). (Co)dimension et modèle-complètion des variétés d'algèbre (co) Heyting. Angers.

[5] : A. Heyting Les Fondements des Mathématiques Intuitionisme Théorie de la Démonstration, Gauthier Villars 1953.