

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DE M'SILA MOHAMED BOUDIAF

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

présenté pour l'obtention du diplôme de Master

**Domaine:** Mathématique et Informatique

**Filière:** Mathématique

**Spécialité:** Mathématique Appliquées

**Par**

AIDJOULI HADJER

**THÈME**

<b>RESOLUTION DES EQUATIONS INTEGRALES</b>
<b>NON LINEAIRES TYPE VOLTERRA</b>

Dirigé par:

promotion:2016/2017

# *Remerciements*

## **Au nom du Dieu Clément et Miséricordieux**

Avant tout, je remercie **DIEU** le Tout Puissant de m'avoir donné le courage, la volonté, la patience et la santé durant toutes ces années de recherche et que grâce à Lui ce travail de a pu être réaliser.**Je Lui dois tout.**

Je tiens à exprimer ma profonde grantitude envers (Ma encadreur; Maitraisse **Amina KHIRANI** )qui a accepté d'encadrer ce travail. Je la remercie aussi pour sa guidance, ses conseils et pour m'avoir écouté et encouragé durant la préparation de cette mémoire. Merci aussi pour toutes les relecteurs, suggestions et commentaires qui m'ont permis d'améliorer la qualité de cette mémoire de Master.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail. **M. NADIR** et **B. GAGUE**

Je ne saurais oublier dans mes remerciements tous ceux qui m'ont apporté leur contribution et leur aide de près ou de loï et de ce fait m'ont permis d'achever ce travail.

Finalement, je voudrais, maintenant, une place toute particulièrement à mes parents. Je profite de cette occasion pour leur exprimer mon attachement très profonde reconnaissance.

# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>1</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>2</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 GENERALITES SUR LES EQUATIONS INTEGRALES</b>	<b>3</b>
1.1 Analyse fonctionnelle des équations intégrales . . . . .	3
1.1.1 Opérateurs compacts . . . . .	4
1.1.2 Opérateurs intégrales linéaires . . . . .	4
1.1.3 Opérateurs adjoints . . . . .	5
1.1.4 Classification des équation intégrales . . . . .	5
1.1.5 Liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations in- tégrales de Volterra . . . . .	11
1.2 Analyse numérique des équations intégrales: . . . . .	13
1.2.1 Intégration numérique . . . . .	13
1.3 Méthode des approximations successives : . . . . .	16
<b>2 RESOLUTION DES EQUATIONS INTEGRALES LINEAIRES DE VOLTERRA</b>	<b>19</b>
2.1 Existence et unicité de la solution de l'équation de Volterra . . . . .	19
2.1.1 La théorie de Riesz et l'alternative de Fredholm . . . . .	19
2.2 Résolution analytique des équations intégrales linéaires de Volterra . . . . .	22

2.2.1	La méthode de transformation de Laplace . . . . .	22
2.3	Résolution numérique des équations intégrales linéaires de Volterra . . . . .	23
2.3.1	Méthode des Trapèze . . . . .	24
2.3.2	Méthode adaptative . . . . .	25
2.3.3	Méthode adaptative modifiée . . . . .	26
2.4	Implémentations numériques et comparaisons . . . . .	26
2.4.1	Exemple 1 . . . . .	26
2.4.2	Exemple 2 . . . . .	29
<b>3</b>	<b>RESOLUTION DES EQUATIONS INTEGRALES NON LINEAIRES DE</b>	
	<b>VOLTERRA</b>	<b>32</b>
3.1	Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale non linéaire de Volterra	32
3.1.1	Théorèmes de point fixe . . . . .	32
3.2	Résolution analytique des EINLVs . . . . .	34
3.2.1	Méthode des approximations successives . . . . .	34
3.3	Résolution numérique des EINLVs . . . . .	36
3.3.1	Méthode des Trapèze . . . . .	36
3.3.2	Méthode adaptative: . . . . .	37
3.3.3	Méthode Adaptative modifier . . . . .	39
3.4	Implémentations numériques et comparaisons . . . . .	39
3.4.1	Exemple 01 . . . . .	39
3.4.2	Exemple 02 . . . . .	42
3.4.3	Exemple 03 . . . . .	44
	<b>Conclusion générale</b>	<b>46</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>47</b>

# Notations

$C([a; b])$	L'espace des fonctions continue sur l'intervalle $[a; b]$
$[a; b]$	Intervalle réel
$\varphi$	Fonction inconnue
$\varphi^*$	Solution approximée
$A$	Opérateur linéaire
$A^*$	Opérateur adjoint
$H$	Espace de Hilbert
$X$	Espace normé
$I$	Opérateur d'identité
$K(x; y)$	Noyau de l'intégrale
$T$	Opérateur linéaire compact
$T$	Opérateur Linéaire ou $T = I - A$ :
EILV	Equations Intégrales Linéaire de Volterra
EINLV	Equations Intégrales Non Linéaire de Volterra

## Liste des figures

Figure 1.1	14
Figure 1.2	16
Figure 2.2	28
Figure 2.3	28
Figure 2.4	30
Figure 2.5	30
Figure 3.1	41
Figure 3.2	41
Figure 3.3	43
Figure 3.4	43
Figure 3.5	45
Figure 3.6	45

## Liste des tableaux

Tableau 1	27
Tableau 2	29
Tableau 3	40
Tableau 4	42
Tableau 5	44

# INTRODUCTION

Les équations intégrales jouent un rôle très important dans l'analyse fonctionnelle, ainsi que dans la résolution des problèmes de la physique.

J Fourier (1768–1830) est le premier mathématicien qui a découvert ce genre d'équations dû au fait qu'il a obtenu la formule de la transformation de Fourier. Il est clair qu'on peut interpréter la formule d'inversion en tant que fournir l'opérateur inverse de l'opérateur d'intégrale de Fourier [1]

Les principaux fondateurs de la théorie d'équations intégrales sont Vito Volterra (1860, 1940), et Ivar Fredholm (1866 – 1927), ainsi que David Hilbert (1862 – 1943) et Erhard Schmidt (b.1876). Volterra était le premier à avoir identifier l'importance de la théorie et pour la considérer systématiquement, mais la contribution de Fredholm a permis le franchissement (*environ*1900), (plutôt qu'évitant), de la difficulté liée à la disparition du «déterminante des coefficients. » néanmoins, la priorité de Volterra généralement aurait été reconnue si son premier papier sur le sujet (1896) avait été présenté différemment.

Mais Volterra au lieu de déduire ses résultats par les mêmes méthodes qu'il a employées pour leur découverte (qui étaient identiques à ceux utilisées plus tard tellement avec succès par Fredholm) a simplement édité une vérification de sa solution [2].

Dans ce mémoire on va traiter les équations intégrales linéaires et non linéaires de Volterra, où on va démontrer l'existence et l'unicité de la solution de ces équations et on va chercher une solution approchée par la méthode des Trapéze et les méthodes adaptative (base sur Trapéze) ,Notre travaille est une continuite de **Beni,Neta** [19] qui ont traité les équation de volterra sous la formule  $(\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)\varphi(x, t, \varphi(t), \varphi'(t))dt)$  , on a generalise le travaille ou on a travaillé avec les aquations de volterra sous la formule de **Uryson** (le cas non linéaire)



On a commencé dans le premier chapitre par une classification entre les équations intégrales linéaires et non-linéaires, comme on a donné des exemples sur ces équations . Ainsi on donne quelques définition sur les base de l'analyse numérique et on présente la méthode des approximations successives.

Le deuxième chapitre consiste à la résolution analytique et numérique des équations intégrales linéaires de Volterra de deuxième espèce tel que le noyau est continu, et comparaison l'erreur entre les méthodes .

Le dernier chapitre on va démontrer l'existence et l'unicité de la solution des équations intégrales non linéaires de Volterra. Avec une résolution analytique et numérique à ces équations et leur comparaison avec la solution exacte.

# Chapitre 1

## GENERALITES SUR LES EQUATIONS INTEGRALES

Dans ce chapitre, on donne la base sur la théorie des équations intégrales et leur classification, Ainsi on donne quelques définitions sur la base de l'analyse numérique (Intégration numérique, méthode des Trapezes....etc.).

### 1.1 Analyse fonctionnelle des équations intégrales

**Définition 1.1.1** On appelle équation intégrale une équation fonctionnelle où la fonction inconnue figure sous le signe d'intégration  $\int$ .

C'est en générale l'équation par rapport à l'inconnue  $\varphi$  de la forme :

$$\int_E K(x, t, \varphi(t)) dt = \lambda \varphi(x) + f(x), \quad x \in E \quad (1.1)$$

où  $E$  est un espace mesuré,  $f(x)$  une fonction mesurable donnée sur  $E$ ,  $\lambda$  un scalaire donné qui peut être réel ou complexe, et  $K(x, t, \varphi(t))$  une fonction mesurable sur  $E^3$  appelée noyau de l'équation intégrale.

Avec toutes ces données, notre problème est de chercher la fonction  $\varphi$  qui satisfait l'équation (1.1).

**Définition 1.1.2** On dit qu'une équation intégrale est singulière si l'une ou les deux limites d'intégration sont infinies, ou bien le noyau devient infini au voisinage des limites de l'intégration.

### 1.1.1 Opérateurs compacts

**Définition 1.1.3 (Compacité)** Soit  $U$  un ensemble d'un espace normé  $X$ ,  $U$  est dit compact si de tout recouvrement de  $U$  par des ouverts de  $U$  on peut extraire un sous-recouvrement fini i.e.

$$\forall V_j, j \in J \text{ (ouverts) tels que } U \subset \bigcup_{j \in J} V_j, \exists V_{j(k)}, j(k) = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{tel que } U \subset \bigcup_{k=1}^n V_{j(k)}$$

**Définition 1.1.4 (Opérateur compact)** Soit  $A$  un opérateur linéaire d'un espace normé  $E$  dans un espace normé  $F$ , on dit que  $A$  est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné  $G$  dans  $E$  à un ensemble relativement compact  $A(G)$  dans  $F$ . Autrement dit, la fermeture  $\overline{A(G)}$  est compact.

**Théorème 1.1.1** Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.

**Théorème 1.1.2** Une combinaison linéaire  $A = \alpha A_1 + \beta A_2$  des opérateurs compacts est un opérateur compact.

### 1.1.2 Opérateurs intégrales linéaires

**Définition 1.1.5** Soit  $K : C[a, b] \times C[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, l'opérateur intégral linéaire  $A$  sur  $C[a, b]$  est défini par:

$$\begin{aligned} A : \varphi \in C[a, b] &\longrightarrow A\varphi \in C[a, b] \\ (A\varphi)(x) &= \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

où la fonction  $K(x, t)$  s'appelle noyau de l'opérateur intégrale  $A$ .

**Théorème 1.1.3** L'opérateur intégral  $A$  de  $C(G)$  dans  $C(G)$  à noyau continu est un opérateur compact.

### 1.1.3 Opérateurs adjoints

**Définition 1.1.6** Soit  $A$  un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert  $H_1$  à valeurs dans un espace de Hilbert  $H_2$ , l'opérateur linéaire noté  $A^*$  défini de  $H_2$  dans  $H_1$  est dit opérateur adjoint de  $A$  si l'on a pour tout  $\varphi \in H_1$  et  $\psi \in H_2$

$$\langle A\varphi, \psi \rangle_{H_2} = \langle \varphi, A^*\psi \rangle_{H_1}.$$

**Proposition 1.1.1** Soit  $A$  un opérateur intégrale défini à partir d'un noyau  $K$  continu sur  $[a, b] \times [a, b]$  par la formule suivante:

$$\forall x \in [a, b], \quad A\varphi(x) = \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt.$$

Alors, l'opérateur  $A$  admet un unique opérateur adjoint  $A^*$  pour le produit scalaire usuel de  $L^2$ , défini par:

$$\forall x \in [a, b], \quad A^*\psi(x) = \int_a^b K(t, x) \psi(t) dt.$$

**Corollaire 1.1.1** Soit  $A$  l'opérateur intégral de noyau  $K$ , et  $A^*$  l'opérateur intégral de noyau  $K^*$ , avec

$$K^*(t, x) = K(x, t)$$

**Théorème 1.1.4** Soit  $A$  un opérateur linéaire compact, défini sur un espace de Hilbert  $H_1$  dans un espace de Hilbert  $H_2$  alors, l'opérateur adjoint  $A^*$  défini de  $H_2$  dans  $H_1$  est aussi un opérateur linéaire compact.

### 1.1.4 Classification des équations intégrales

La classification des équations intégrales est centrée sur trois caractéristiques de base décrivent leur structure globale, il est utile de les citer avant d'entrer dans les détails.

i) Le type (espèce) d'une équation se rapporte à la localisation de la fonction inconnue. Pour les équations de première espèce, la fonction inconnue apparaît uniquement à l'intérieur du signe intégral. Cependant pour les équations de seconde espèce, la fonction inconnue apparaît également à l'extérieur du signe intégral.

ii) La description historique Fredholm et Volterra concerne les bornes d'intégration. Dans une équation de Fredholm, les bornes d'intégrations sont fixées, dans l'équation de Volterra les bornes d'intégration sont indéfinies.

iii) L'adjectif singulière est parfois employée d'une part, quand l'intégration est impropre, d'autre part si l'une des bornes d'intégration ou les deux sont infinies ou si l'intégrand est non borné sur l'intervalle donné, évidemment, une équation intégrale peut être singulière dans les deux sens.

## Equations intégrales linéaires

### a-Equation intégrale de Fredholm

On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm tel que les deux limites d'intégration sont constantes une équation, à une inconnue  $\varphi(x)$  de la forme:

$$h(x) \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt, \quad (1.3)$$

où  $f(x), K(x, t)$  sont des fonctions connues et  $\lambda$  est un paramètre non nul, réel ou complexe.

La fonction  $h(x)$  détermine le type de l'équation intégrale.

1. Si  $h(x) = 0$ , l'équation (1.2) s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = 0. \quad (1.4)$$

et s'appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce.

2. Si  $h(x) = c = \text{constante} \neq 0$ , l'équation (1.2) s'écrit

$$c \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt. \quad (1.5)$$

et s'appelle équation intégrale de Fredholm de second espèce.

3. Si  $h(x) \neq 0$ , donc la formule (1.2) est appelée équation intégrale de Fredholm de troisième espèce.

**Remarque 1.1.1** 1. Si  $f(x) = 0$ , l'équation (1.2) est dite homogène.

2. Si  $f(x) \neq 0$ , l'équation (1.2) est dite non homogène.

### **b-Equation intégrale de Volterra**

On appelle équation intégrale linéaire de Volterra telle que l'un des deux limites d'intégration est variable, une équation de la forme

$$h(x) \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt. \quad (1.6)$$

1. On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce, si  $h(x) = 0$ , donc l'équation (3.5) s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt = 0. \quad (1.7)$$

2. On appelle équation intégrale de Volterra de seconde espèce, si  $h(x) = c = \text{constante} \neq 0$ , donc l'équation (1.5) s'écrit

$$c \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt. \quad (1.8)$$

3. Si  $h(x) \neq 0$ , donc la formule (1.6) est appelée équation intégrale de Volterra de troisième espèce.

**Remarque 1.1.2** 1. Si  $f(x) = 0$ , donc l'équation (1.5) est dite homogène.

2. Si  $f(x) \neq 0$ , donc l'équation (1.5) est dite non homogène.

**Remarque 1.1.3** L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau  $K$  vérifie la condition

$$K(x, t) = 0, \text{ pour } x < t.$$

### **c-Equation intégrale d'Abel**

On appelle équation intégrale linéaire d'Abel une équation de la forme

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha} dt = f(x).$$

où  $\alpha$  est une constante,  $0 < \alpha < 1$ .

## Equations intégrales non-linéaires

### a-Equation intégrale de Fredholm

L'équation intégrale non linéaire de Fredholm de première espèce prendre la forme

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt = 0. \quad (1.9)$$

est appelée équation intégrale de Fredholm de second espèce, de la forme

$$c \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt. \quad (1.10)$$

où  $c = \text{constante} \neq 0$ ,

et troisième espèce, de la forme

$$h(x) \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt. \quad (1.11)$$

### b-Equation intégrale de Volterra

L'équation intégrale non linéaire de Volterra de première espèce prendre la forme

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt = 0. \quad (1.12)$$

est appelée équation intégrale de Volterra de second espèce, de la forme

$$c \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt. \quad (1.13)$$

où  $c = \text{constante} \neq 0$ ,

et troisième espèce, de la forme

$$h(x) \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt. \quad (1.14)$$

**Remarque 1.1.4** 1. Si  $f(x) = 0$ , donc l'équation est dite homogène.

2. Si  $f(x) \neq 0$ , donc l'équation est dite non homogène.

### c-Equation intégrale d'Abel

On appelle équation intégrale d'Abel une équation de la forme

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1} g(\varphi(t)) dt. \quad (1.15)$$

où  $-\infty < x$ ,  $0 < \alpha < 1$  et  $g : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$  tel que  $g(0) = 0$  et  $g(x) > 0$  pour tout  $x > 0$ .

Pour plus d'informations voir [4]

#### **d-Equations intégrales de Uryson et de Hammerstein**

1. On appelle équation intégrale de Uryson une équation de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{\Omega} K(x, t, \varphi(t)) dt, \quad t \in \Omega \quad (1.16)$$

où  $K$  et  $f$  sont des fonction arbitraires.

ou

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{\Omega} K(x, t) F(\varphi(t)) dt, \quad t \in \Omega$$

tel que  $F$  est une fonction non linéaire.

2. On appelle équation intégrale de Hammerstein une équation de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{\Omega} K(x, t) g(t, \varphi(t)) dt, \quad t \in \Omega \quad (1.17)$$

Pour plus d'informations voir [5]

**Remarque 1.1.5** *L'équation de Hammerstein est un cas particulière de l'équation de Uryson.*

#### **Equations intégrales mixtes**

##### **a-Equation intégrale de Fredholm-Volterra**

On appelle équation de Fredholm-Volterra une équation de la forme

$$h(x) \varphi(x, t) + \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y, t) dy + \lambda \int_0^t F(t, s) \varphi(x, s) ds = f(x, t), \quad t \in [0, T], \quad T < \infty. \quad (1.18)$$

La fonction  $h$  détermine le type de l'équation intégrale.

##### **b-Equation intégrale de Volterra-Fredholm**

On appelle équation de Volterra-Fredholm une équation de la forme

$$h(x) \varphi(x, t) + \int_0^t \int_a^b K(x, t) F(t, s) \varphi(y, s) dy ds = f(x, t), \quad t \in [0, T], \quad T < \infty. \quad (1.19)$$



### Equations intégrales singulières

On dit qu'une équation intégrale est singulière si l'une ou les deux limites d'intégration sont infinies, ou bien le noyau devient infini au voisinage des limites de l'intégration.

**Définition 1.1.7** *Considérons l'équation intégrale suivante*

$$\varphi(x) = f(x) + \int_T M(x, t) K(x, t) \varphi(t) dt. \quad (1.20)$$

On dit que (3.20) est singulière si  $M(x, t)$  admet une singularité ou le domaine  $T$  n'est pas bornée.

### Singularité de type Volterra et Fredholm

On considère l'équation intégrale de deuxième espèce de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x M(x, t) K(x, t) \varphi(t) dt, \quad a \leq x < \infty. \quad (1.21)$$

où  $K(x, t)$  est faiblement singulier, en générale  $K(x, t)$  donnons par

$$K(x, t) = \begin{cases} |x - t|^{-\alpha}, & 0 < \alpha < 1 \\ \log |x - t| \end{cases}$$

Alors

- i) L'équation (1.21) est de Volterra.
- ii) Si  $x = b$ , l'équation (1.21) est de Fredholm.
- iii) Le cas où  $K(x, t) = |x - t|^{-\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$  s'appelle singularité algébriques.
- iv) Le cas où  $K(x, t) = \log |x - t|$ , s'appelle singularité logarithmiques.

**Définition 1.1.8 (Equation intégrale de Carleman)** *On appelle équation intégrale de Carleman une équation de la forme*

$$a(x) \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t - x} dt + \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{b(t)}{t - x} \varphi(t) dt = f(x). \quad (1.22)$$

où  $a, b$  et  $\varphi$  sont des fonctions continues.

Pour plus des informations voir [6]

### Singularité de type de Cauchy

Soit  $D$  un domaine bornée et convexe dans un plan complexe, alors l'intégrale de Cauchy donné par la formule

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt = f(x), \quad t \in \mathbb{C}. \quad (1.23)$$

**Définition 1.1.9** On appelle équation intégrale de Cauchy une équation de la forme

$$a(x) \varphi(x) + b(x) \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt + \int_{\Gamma} K(x, t) \varphi(t) dt = f(x). \quad (1.24)$$

telle que  $\Gamma = \partial D$ .

### 1.1.5 Liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra

Réduction d'une équation différentielle à une équation intégrale. Parfois il y a intérêt à réduire la résolution d'une équation différentielle à la résolution d'une équation intégrale.

La résolution de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) y = F(x)$$

à coefficient continus  $a_i(x)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) avec les conditions initiales

$$y(0) = C_0, y'(0) = C_1, \dots, y^{n-1}(0) = C_{n-1}$$

peut être ramenée à la résolution d'une équation intégrale de Volterra de seconde espèce

Illustrons notre affirmation sur l'exemple de l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x) y = F(x)$$

$$y(0) = C_0, y'(0) = C_1$$

Posons

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(x)$$

D'où, vu les conditions initiales, on obtient successivement

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)dt + C_1, y = \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + C_1x + C_0$$

Nous avons utilisé la formule :

$$\underbrace{\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \dots \int_{x_0}^x}_{n-1 \text{ fois}} f(x)dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-z)^{n-1} f(z)dz$$

Compte tenu de mettons l'équation différentielle sous la forme :

$$\varphi(x) + \int_0^x a_1(x)\varphi(t)dt + C_1a_1(x) + \int_0^x a_2(x)(x-t)\varphi(t)dt + C_1xa_2(x) + C_0a_2(x) = F(x)$$

ou

$$\varphi(x) + \int_0^x [a_1(x) + a_2(x)(x-t)]\varphi(t)dt = F(x) - C_1a_1(x) - C_1xa_2(x) - C_0a_2(x)$$

Posant

$$k(x, t) = -[a_1(x) + a_2(x)(x-t)] \quad , f(x) = F(x) - C_1a_1(x) - C_1xa_2(x) - C_0a_2(x).$$

nous ramenons l'équation à la forme suivante:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x k(x, t)\varphi(t)dt$$

i.e. nous obtenons une équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

**Exemple 1.1.1** Soit l'équation différentielle :

$$y'' + xy' + y = 0$$

et aux conditions initiales :

$$y(0) = 1; y'(0) = 0$$

Posons

$$y'' = \varphi(x).$$

Alors

$$y' = \int_0^x \varphi(t)dt + y'(0) \implies y = \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + 1$$

Portons dans l'équation différentielle donnée, il vient

$$\varphi(x) + \int_0^x \varphi(t)dt + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + 1 = 0$$

ou

$$\varphi(x) = -1 - \int_0^x (2x-t)\varphi(t)dt$$

Le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y(0) = y_0 \end{array} \right\}$$

qui peut être converti à l'équation intégrale non linéaire

$$y = y_0 + \int_0^x f(t, y)dt$$

## 1.2 Analyse numérique des équations intégrales:

### 1.2.1 Intégration numérique

Soit  $f : x \in [a, b] \longrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$  une fonction continue donnée sur un intervalle  $[a; b]$ .

Nous désirons approcher numériquement la quantité

$$\int_a^b f(x)dx$$

pour ce faire, nous commençons par partitionner l'intervalle  $[a; b]$  en petits intervalles  $[x_i; x_{i+1}] ; i = 0, 1, \dots, N-1$  tels que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b \quad (1.24)$$

Soit  $h = x_{i+1} - x_i$  ; le réel positif caractérisant la finesse de la partition. Il est clair que lorsque  $N$  augmente, nous pouvons placer les points  $x_i$  de sorte à ce que  $h$  soit petit.

Nous posons

$$h = \frac{b-a}{N} \text{ et } x_i = a + ih \text{ avec } i = 0, 1, \dots, N$$

Etant donné la partition (1.25), il est naturel d'écrire

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

### Méthode des Trapèzes

**Principe:** On remplace la courbe représentative de  $f$ , sur chaque segment de la subdivision, par le segment qui joint  $(x_i, f(x_i))$  à  $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ . Cela revient donc à interpoler la fonction  $f$  sur le segment

$[x_i; x_{i+1}]$  par le polynôme de Lagrange de degré 1 aux points  $x_i$  et  $x_{i+1}$

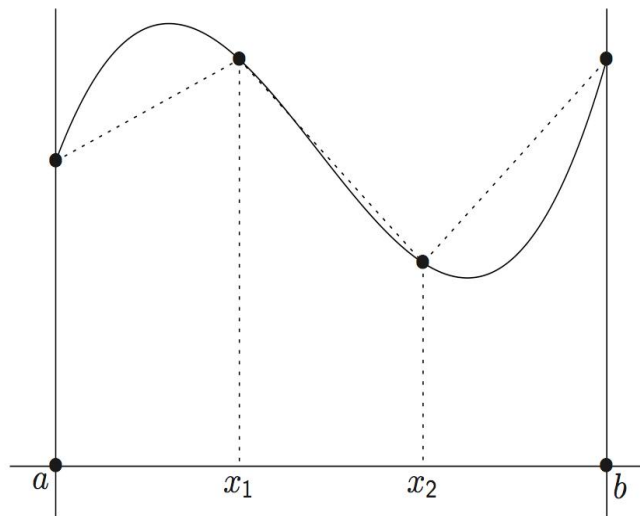


Figure 1.1.méthode de Trapèze

### Méthodes Adaptatives

#### Définition 1.2.1 [20]

la formule adaptative utilise des sous-intervalles d'intégration de tailles non uniformes la même précision qu'avec la formule composite, mais avec moins de noeuds de quadrature et par conséquent moins d'évaluations de  $f$ .

Pour mettre en oeuvre cette méthode et atteindre une tolérance fixée on doit trouver un estimateur d'erreur et un procédé automatique pour modifier le pas d'intégration  $H$ . Commençons par analyser ce procédé qui est indépendant de la formule de quadrature considérée.

A la première étape de l'algorithme adaptative, on calcule une approximation  $I_s(f)$  de  $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ . On pose  $H = b - a$  et on essaie d'estimer l'erreur de quadrature. Si cette erreur est inférieure à la tolérance fixée, on arrête sinon le pas  $H$  est réduit de moitié jusqu'à ce que l'intégrale  $\int_a^{a+H} f(x)dx$  soit calculée avec la précision voulue. Quand l'opération réussie, on considère l'intervalle  $]a + H, b[$  et on répète le procédé, en choisissant comme premier pas la longueur  $b - (a + H)$  de l'intervalle.

Définissons les notations suivantes :

1. (a)  $A$  : l'intervalle d'intégration actif, **i.e.** l'intervalle où l'intégrale est en train d'être calculée ;
- (b)  $S$  : l'intervalle d'intégration déjà examiné, pour lequel l'erreur est inférieure à la tolérance fixée ;
- (c)  $N$  : l'intervalle d'intégration qu'il reste à examiner.

Au début de la procédure, on a  $A = [a, b]$ ,  $N = \emptyset$  et  $S = \emptyset$ . La situation à une étape quelconque de l'algorithme est décrite sur la **Figure 1.2**. Notons  $J_S(f)$  la valeur approchée de  $\int_a^\alpha f(x)dx$  déjà calculée (avec  $J_S(f)$  à l'initialisation) ; si l'algorithme s'achève avec succès,  $J_S(f)$  contient l'approximation voulue de  $I(f)$ . Notons aussi  $J_{(\alpha, \beta)}(f)$  l'intégrale approchée de  $f$  sur l'intervalle actif  $[\alpha, \beta]$ . Cet intervalle est dessiné en blanc sur la **Figure 1.2**. Une étape type de l'algorithme adaptative d'intégration se déroule ainsi :

1. si l'erreur estimée est inférieure à la tolérance fixée, alors :
  - (a) i.  $J_S(f)$  est "augmenté" de  $J_{(\alpha, \beta)}(f)$ , c'est-à-dire  $J_S(f) \leftarrow J_S(f) + J_{(\alpha, \beta)}(f)$ ;
  - ii. On pose  $S \leftarrow S \cup A$ ,  $A = N$ ,  $N = \emptyset$  (branche **(I)** de la **Figure 1.2**),  $\alpha \leftarrow \beta$  et  $\beta \leftarrow b$ ;
2. si l'erreur estimée est plus grand que la tolérance fixée, alors :
  - (a) i.  $A$  est réduit de moitié et le nouvel intervalle actif devient  $A = [\alpha, \alpha']$  avec  $\alpha' = (\alpha + \beta)/2$  (branche **(II)** de la **Figure 1.2**) ;
  - ii. on pose  $N \leftarrow N \cup [\alpha', \beta]$ ,  $\beta \leftarrow \alpha'$ ;
  - iii. une nouvelle estimation de l'erreur est calculée.

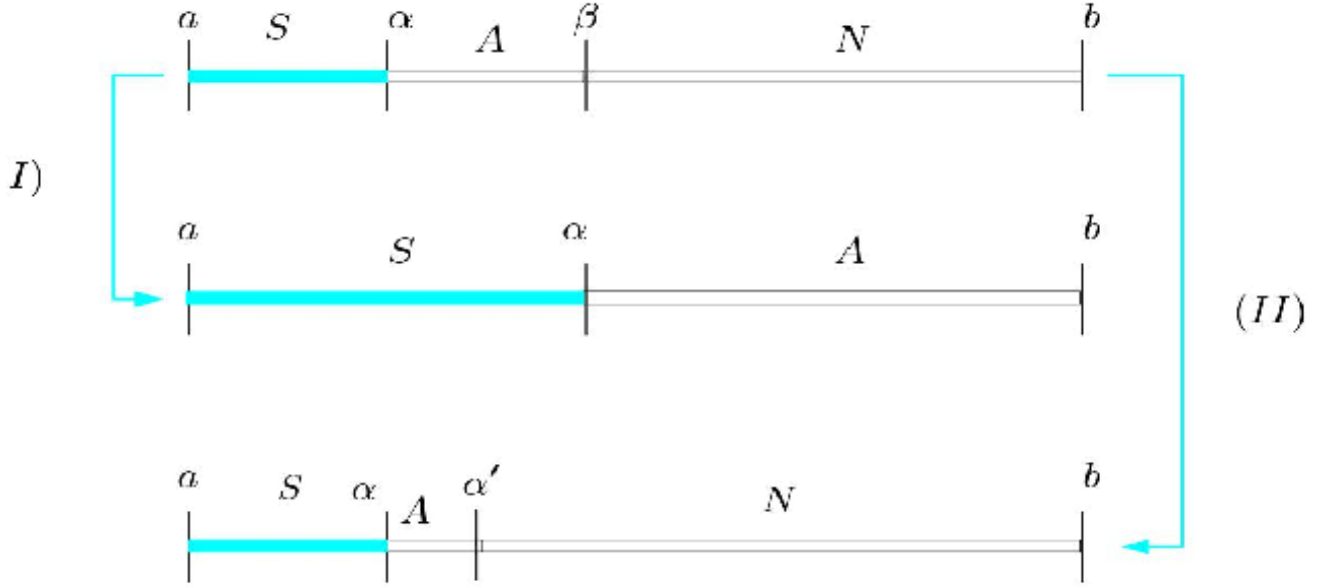


Figure 1.2. Une étape type de l'algorithme adaptatif : distribution et mise à jour des intervalles d'intégration

### 1.3 Méthode des approximations successives :

La méthode des approximations successives est l'une des méthodes les plus usuelles pour la résolution de l'équation

$$\varphi - A(\varphi) = f \quad (1.25)$$

Son principe est le suivant : on donne un élément quelconque  $\varphi_0 \in C([a, b])$  appelé approximation initiale et on construit à partir de cet élément la suite  $(\varphi_n)$  des solutions approchées :

$$\varphi_{n+1} = A(\varphi_n) + f \quad (1.26)$$

Si l'on obtient une suite convergente dont la limite est la solution de l'équation considérée, on dit que le processus des approximations successives pour l'équation (1.25), d'élément initial  $\varphi_0$  est convergent (vers la solution de l'équation (1.25)). Vu que l'opérateur intégral  $A$  est linéaire continu, le seul fait de la convergence de la suite  $(\varphi_n)$  implique que  $\varphi^* =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n$  est solution de l'équation (1.25). Pour s'en assurer il suffit de passer à la limite pour  $n \rightarrow \infty$  dans (1.26)

La convergence d'approximations successives pour l'équation (1.25) est aussi rattachée à celle de la série

$$I + A + \dots + A^n + \dots \quad (1.27)$$

On a le théorème suivant [7]

**Théorème 1.3.1** *Si la série (1.27) est convergente, le processus des approximations successives pour l'équation (1.25) converge vers l'unique solution  $\varphi^*$  de l'équation (1.25) quelque soit l'approximation initial  $\varphi_0$ .*

De plus

$$\|\varphi^* - \varphi_n\| \leq \|(I - A)^{-1}\| \|A\| \|\varphi_1 - \varphi_0\| \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.28)$$

En particulier, si l'on se place dans les conditions du théorème de Banach, cette majoration (de la vitesse de convergence) peut être remplacée par

$$\|\varphi^* - \varphi_n\| \leq \frac{q^n}{1 - q} \|\varphi_1 - \varphi_0\| \quad (1.29)$$

**Preuve.** En applique successivement la formule (1.26) on trouve

$$\varphi_n = f + A(f) + \dots + A^{n-1}(f) + A^n(\varphi_0) \quad (1.30)$$

D'où il suit que si la série (1.27) est convergente, alors il existe

$$\varphi^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \sum_{i=1}^{\infty} A^i(f) = (I - A)^{-1}(f) \quad (1.31)$$

Puisque  $A^n(\varphi_0) \rightarrow 0$ . La première partie du théorème est démontrée, puisque  $\varphi^*$  est manifestement solution de l'équation (1.25)

Pour obtenir la majoration (1.28), substituant  $\varphi^*$  à  $\varphi_0$  dans (1.30). Alors il est clair de la formule (1.26) que  $\varphi_n = \varphi^* (n = 1, 2, \dots)$ . Donc nous sommes conduits à la relation

$$\varphi^* = f + A(f) + \dots + A^{n-1}(f) + A^n(\varphi^*)$$

Si l'on soustrait l'égalité (1.30) dans cette relation et l'on passe aux normes on obtient



$$\|\varphi^* - \varphi_n\| \leq \|A^n\| \|\varphi^* - \varphi_0\| \quad (1.32)$$

Posons  $\tilde{\varphi} = \varphi^* - \varphi_0$ . Vu que  $\varphi^*$  est solution de l'équation (1.25) et par suite  $\varphi^* - A(\varphi^*) = f$

On aura

$$\begin{aligned} (I - A)(\tilde{\varphi}) &= \tilde{\varphi} - A(\tilde{\varphi}) \\ &= \varphi^* - A(\varphi^*) - \varphi_0 + A(\varphi_0) \\ &= f + A(\varphi_0) - \varphi_0 \\ &= \varphi_1 - \varphi_0 \end{aligned}$$

D'où

$$\tilde{\varphi} = (I - A)^{-1}(\varphi_1 - \varphi_0)$$

En utilisant ceci dans (1.32) on obtient la majoration annoncée. ■

# Chapitre 2

## RESOLUTION DES EQUATIONS INTEGRALES LINEAIRES DE VOLTERRA

Ce chapitre est consacré aux équations intégrales linéaires de Volterra de deuxième espèce tel que le noyau est continu, ou on va rappeler la théorie de Riez et l'alternative de Fredholm a fin de démontrer l'existence et l'unicité de la solution de ces équations, puis on résoud ces équations numériquement par des différentes méthodes (Trapéze, Trapéze adaptatée , Trapéze adaptatée m).

### 2.1 Existence et unicité de la solution de l'équation de Volterra

#### 2.1.1 La théorie de Riesz et l'alternative de Fredholm

Dans ce paragraphe on désigne par  $A$  l'opérateur linéaire compact dans un espace normé  $E$  dans lui même.

Nous présentons la théorie de base pour une équation  $\varphi - A\varphi = f$ , on défnie l'opérateur

$$T = I - A$$

où  $I$  l'opérateur identité.

**Théorème 2.1.1 (Premier Théorème de Riesz)** *L'espace nul de l'opérateur  $T$ , i.e. le noyau de l'opérateur  $T$ , définie par*

$$\ker(T) = \{\varphi \in E; T\varphi = (I - A)\varphi = 0\},$$

*est un sous-espace de dimension finie.*

**Théorème 2.1.2 (Deuxième Théorème de Riesz)** *L'espace image de l'opérateur  $T$ , i.e. l'image de l'opérateur  $T$ , définie par*

$$\operatorname{Im} T = T(E) = \{\psi; \exists \varphi \in E, T\varphi = \psi\},$$

*est un sous-espace linéaire fermé et de co-dimension finie*

**Théorème 2.1.3 (Troisième Théorème de Riesz)** *Il existe un unique  $r \in \mathbb{N}$  appelé nombre de Riesz de l'opérateur  $T$  tel que:*

$$\begin{aligned} \{0\} &= \ker(T^0) \subset \ker(T^1) \subset \dots \subset \ker(T^r) = \ker(T^{r+1}) = \dots \\ E &= \operatorname{Im}(T^0) \supset \operatorname{Im}(T^1) \supset \dots \supset \operatorname{Im}(T^r) = \operatorname{Im}(T^{r+1}) = \dots \end{aligned}$$

*Et on a la somme directe  $E = \ker(T^r) \oplus \operatorname{Im}(T^r)$*

**Théorème 2.1.4 (Alternative de Fredholm)** *On considère les équations intégrales homogènes duales, l'une de l'autre, issues d'un noyau  $K : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , qui sont donc définies par :*

$$\varphi \in [a, b] \text{ tel que } \varphi(x) - \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = 0$$

$$\text{trouver } \psi \in [a, b] \text{ tel que } \psi(x) - \int_a^b K(t, x) \psi(t) dt = 0 \quad (2.2)$$

*On considère pour  $f \in C[a, b]$  et  $g \in C[a, b]$  les équations intégrales avec seconds membres*

$$\text{trouver } \varphi \in [a, b] \text{ tel que } \varphi(x) - \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (2.3)$$

$$\text{trouver } \psi \in [a, b] \text{ tel que } \psi(x) - \int_a^b K(t, x) \psi(t) dt = g(x) \quad (2.4)$$

*Alors on a l'alternative :*

- Ou bien les équations (2.1) et (2.2) n'ont que les solutions triviales  $\varphi \equiv 0$  et  $\psi \equiv 0$ , et dans ces cas les équations (2.3) et (2.4) admettent une unique solution  $\varphi \in [a, b]$  et  $\psi \in [a, b]$  pour chaque  $f \in C[a, b]$  et  $g \in C[a, b]$ .

- Ou bien les équations (2.1) et (2.2) ont le même nombre fini  $m$  de solutions linéairement indépendantes, et dans ce cas, les équations (2.3) et (2.4) sont résolubles si et seulement si pour toute solution  $\varphi$  de (2.1) et toute solution  $\psi$  de (2.2) on a

$$\int_a^b f(x) \psi(x) dx = \int_a^b g(x) \varphi(x) dx = 0$$

Dans ces conditions, la solution générale de (2.3) s'écrit sous la forme :

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i$$

où  $\tilde{\varphi}$  est une solution particulière de (2.3) et les  $(\varphi_i)_{0 \leq i \leq m}$  forme une famille libre de solution de (2.1).

**Définition 2.1.1** (Résolvante d'une équation intégrale)

On appelle résolvante de l'équation intégrale, toute fonction  $R(x; t; \lambda)$  donnée par

$$R(x; t; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n k_{n+1}(x, t)$$

où les  $k_n$  sont les noyaux itérés définis par la relation de récurrence suivante

$$k_1(x, t) = k(x, t), \quad k_n(x, t) = \int_t^x k(x, s) k_{n-1}(s, t) ds$$

La résolvante  $R(x; t; \lambda)$  vérifie l'équation suivante

$$R(x; t; \lambda) = k(x, t) + \lambda \int_t^x k(x, s) R(s; t; \lambda) ds$$

**Théorème 2.1.5** (voir [21])

On considère l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt \quad (2.5)$$

Soit  $K(x; t)$  est une fonction continue pour  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq t \leq x$ , et  $f(x)$  est continue lorsque  $0 \leq x \leq a$ .

L'équation (2.5) admet une solution unique et continue donnée par la formule

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x; t; \lambda) f(t) dt$$

## 2.2 Résolution analytique des équations intégrales linéaires de Volterra

### 2.2.1 La méthode de transformation de Laplace

soit l'équations intégrales Volterra de type de convolution suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x - t) \varphi(t) dt \quad (2.6)$$

où le noyau  $K(x - t)$  est de type convolution, peut très facilement être résolu en utilisant la méthode de transformation de Laplace [23]. Pour commencer le processus de solution, nous définissons d'abord le Transformation de Laplace de  $\varphi(x)$

$$L\{\varphi(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} \varphi(x) dx.$$

En utilisant la transformée de Laplace de l'intégrale de convolution, nous avons

$$L\left\{\int_0^x k(x - t) \varphi(t) dt\right\} = L\{k(x)\} L\{\varphi(x)\}$$

Ainsi, en prenant la transformée de Laplace de l'équation (2.6), on obtient

$$L\{\varphi(x)\} = L\{f(x)\} + \lambda L\{k(x)\} L\{\varphi(x)\}$$

et la solution de  $L\{\varphi(x)\}$  est donnée par

$$L\{\varphi(x)\} = \frac{L\{f(x)\}}{1 - \lambda L\{k(x)\}}$$

et inversant cette transformation, nous obtenons

$$\varphi(x) = \int_0^x \psi(x - t) f(t) dt \quad (2.7)$$

où il est supposé que  $L^{-1} \left\{ \frac{1}{1-\lambda L\{k(x)\}} \right\} = \psi(x)$  L'expression (2.7) est la solution de l'équation intégrale Volterra de second type de type convolution.

**Exemple 2.2.1** *Résoudre l'équation intégrale de Volterra en utilisant la méthode de transformation de Laplace*

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t) dt \quad (2.8)$$

Notez que le noyau  $K(x-t) = 1, \lambda = 1$ . Prenant la transformation de Laplace des deux côtés (2.8) donne

$$L\{\varphi(x)\} = L\{1\} + L\{1 * \varphi(x)\}$$

alors

$$U(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}U(s)$$

donc

$$U(s) = \frac{1}{s-1} \quad (2.9)$$

En prenant la transformée inverse de Laplace des deux côtés de (2.9), la solution exacte est donnée par

$$\varphi(x) = \exp(x)$$

## 2.3 Résolution numérique des équations intégrales linéaires de Volterra

Notre objectif est de trouver une solution approchée à la solution exacte de l'équation de Volterra en utilisant la méthode des Trapèze et la méthode adaptative (base sur la méthode des Trapeze).

Dans tout les parties on prend  $\lambda = 1$ .

### 2.3.1 Méthode des Trapèze

Tout d'abord, on commence par la discrétisation de l'intervalle  $[a, b]$  en sous intervalles  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = \overline{0; N}$ , c'est à dire nous choisissons des points  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  (des Neuds) tel que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_j < x_n = b$$

supposons que ce système est équidistant, i.e.  $x_j = a + jh$  avec  $j = 0, 1, \dots, n$ , où  $h$  est le pas de la discrétisation.

Calculons la solution en ces nœuds, donc l'équation de Volterra devient

$$\varphi(x_j) = f(x_j) + \int_0^{x_j} k(x_j, t)\varphi(t)dt$$

la méthode des Trapèze, nous amène à une seconde discrétisation par rapport à la variable d'intégration  $t$ :

On pose  $t = (x_i)_{0 \leq i \leq j}$ , il vient

$$\varphi(x_j) = f(x_j) + \sum_{i=0}^{j-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x_j, t)\varphi(t)dt$$

alors

$$\varphi(x_j) = f(x_j) + \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{j-1} [k(x_j, t_{i+1})\varphi(t_{i+1}) + k(x_j, t_i)\varphi(t_i)]$$

donc

$$\varphi(x_j) = f(x_j) + \frac{h}{2}k(x_j, t_0)\varphi(t_0) + \frac{h}{2}k(x_j, t_j)\varphi(t_j) + h \sum_{i=1}^{j-1} k(x_j, t_i)\varphi(t_i)$$

On notons  $\varphi_j = \varphi(x_j)$ ,  $f_j = f(x_j)$  et  $k_{ji} = k(x_j, t_i)$  alors la formule précédente devient :

$$\varphi_j = f_j + \frac{h}{2}k_{j0}\varphi_0 + \frac{h}{2}k_{jj}\varphi_j + h \sum_{i=1}^{j-1} k_{ji}\varphi_i$$

donc on a, en général

$$\left(1 - \frac{h}{2}k_{jj}\right) \varphi_j = f_j + \frac{h}{2}k_{j0}\varphi_0 + h \sum_{i=1}^{j-1} k_{ji}\varphi_i$$

pour  $j = 0$  on a

$$\varphi_0 = f_0$$

### 2.3.2 Méthode adaptative

L'intérêt de cette méthode est de diminuer l'erreur de précision, dans le but d'obtenir une solution plus fine

dans chaque étape  $j$ , qui correspond à une solution  $\varphi_j$ , on applique la même subdivision que la méthode de Trapèze sur l'intervalle  $[x_0, x_{j-1}]$  sauf sur le dernier sous intervalle (i.e.  $[x_{j-1}, x_j]$ ), il intervient un nouveau noeud intermédiaire  $x_{j-\frac{1}{2}}$ , en fait cette méthode applique un raffinement plus fin sur la méthode des Trapèze.

soit

$$\varphi_j = f_j + \sum_{i=0}^{j-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x_j, t) \varphi(t) dt + \int_{x_{j-1}}^{x_{j-\frac{1}{2}}} k(x_j, t) \varphi(t) dt + \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_j} k(x_j, t) \varphi(t) dt$$

utilisons la méthode de Trapèze

$$\begin{aligned} \varphi_j &= f_j + \sum_{i=0}^{j-2} \frac{1}{2} (k_{ji+1} \varphi_{i+1} + k_{ji} \varphi_i) h + \frac{1}{2} (k_{jj-\frac{1}{2}} \varphi_{j-\frac{1}{2}} + k_{jj-1} \varphi_{j-1}) \frac{h}{2} + \frac{1}{2} (k_{jj} \varphi_j + k_{jj-\frac{1}{2}} \varphi_{j-\frac{1}{2}}) \frac{h}{2} \\ &= f_j + \sum_{i=0}^{j-2} \frac{h}{2} k_{ji} \varphi_i + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{h}{2} k_{ji} \varphi_i + \frac{1}{2} (k_{jj-1} \varphi_{j-1} + 2k_{jj-\frac{1}{2}} \varphi_{j-\frac{1}{2}} + k_{jj} \varphi_j) \frac{h}{2} \end{aligned}$$

donc

$$\varphi_j \left(1 - \frac{h}{4} k_{jj}\right) = f_j + \frac{h}{2} k_{j0} \varphi_0 + h \left( \sum_{i=1}^{j-2} k_{ji} \varphi_i + \frac{3}{4} h k_{jj-1} \varphi_{j-1} + \frac{h}{2} k_{jj-\frac{1}{2}} \varphi_{j-\frac{1}{2}} \right) \quad (2.10)$$

le problème à la valeur de  $\varphi_{j-\frac{1}{2}}$ , de même manière on détermine la valeur de  $\varphi_{j-\frac{1}{2}}$

$$\varphi_{j-\frac{1}{2}} = f_{j-\frac{1}{2}} + \sum_{i=0}^{j-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x_{j-\frac{1}{2}}, t) \varphi(t) dt + \int_{x_{j-1}}^{x_{j-\frac{1}{2}}} k(x_{j-\frac{1}{2}}, t) \varphi(t) dt$$

utilisons la méthode de Trapèze deuxième fois, Alors on a

$$\begin{aligned} \varphi_{j-\frac{1}{2}} &= f_{j-\frac{1}{2}} + \sum_{i=0}^{j-2} \frac{1}{2} (k_{j-\frac{1}{2}i+1} \varphi_{i+1} + k_{j-\frac{1}{2}i} \varphi_i) h + \frac{1}{2} (k_{j-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}} \varphi_{j-\frac{1}{2}} + k_{j-\frac{1}{2}j-1} \varphi_{j-1}) \frac{h}{2} \\ &= f_{j-\frac{1}{2}} + \sum_{i=0}^{j-2} \frac{h}{2} k_{j-\frac{1}{2}i} \varphi_i + \sum_{i=1}^{j-2} \frac{h}{2} k_{j-\frac{1}{2}i} \varphi_{i+1} + \frac{h}{4} (k_{j-\frac{1}{2}j-1} \varphi_{j-1} + 2k_{j-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}} \varphi_{j-\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

alors

$$\varphi_{j-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{h}{4} k_{j-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}\right) = f_{j-\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} k_{j-\frac{1}{2}0} \varphi_0 + \sum_{i=1}^{j-2} h k_{j-\frac{1}{2}i} \varphi_i + \frac{3}{4} k_{j-\frac{1}{2}j-1} \varphi_{j-1} \quad (2.11)$$

En remplaçant (2.11) dans (2.10), on obtient la valeur de  $\varphi_j$ .



### 2.3.3 Méthode adaptative modifiée

L'intérêt de cette méthode est de diminuer l'erreur de précision, dans le but d'obtenir une solution plus fine dans chaque étape  $j$ , qui correspond à une solution  $\varphi_j$ , on applique la même subdivision que la méthode de Trapèze sur l'intervalle  $[x_0, x_{j-1}]$  sauf sur le dernier sous-intervalle (i.e.  $[x_{j-1}, x_j]$ ). On subdivise l'intervalle  $[x_{j-1}, x_j]$  en  $m$  sous-intervalles équidistants, on fait cette méthode appliquer un raffinement plus fin sur la méthode des Trapèzes.

$$\begin{aligned} \int_0^x k(x_j, t) \varphi(t) dt &= \int_{x_0}^{x_j} k(x_j, t) \varphi(t) dt \\ &= \int_{x_0}^{x_{j-1}} k(x_j, t) \varphi(t) dt + \int_{x_{j-1}}^{x_j} k(x_j, t) \varphi(t) dt \end{aligned}$$

utilisons la méthode des Trapèzes

$$\begin{aligned} &= \frac{h}{2} \left( k_{j-1}(x_j) \varphi_{j-1} + k_0(x_j) \varphi_0 + 2 \sum_{i=0}^{j-2} k_i(x_j) \varphi_i \right) \\ &\quad + \frac{h}{2(m+1)} \left( k_j(x_j) \varphi_j + k_{j-1}(x_j) \varphi_{j-1} + 2 \sum_{i=0}^m k_{j-1+\frac{ih}{m+1}}(x_j) \varphi_{j-1+\frac{ih}{m+1}} \right) \end{aligned}$$

On simplifie la formule, on obtient :

$$= \frac{h}{2} \left[ k_{j,0} \varphi_0 + \frac{m+2}{m+1} k_{j,j-1} \varphi_{j-1} + 2 \sum_{i=0}^{j-2} k_{j,i} \varphi_i + \frac{1}{m+1} \left( k_{j,j} \varphi_j + 2 \sum_{i=0}^m k_{j,j-1+\frac{ih}{m+1}} \varphi_{j-1+\frac{ih}{m+1}} \right) \right]$$

donc on a, en général

$$\varphi_j = f_j + \frac{h}{2} \left[ k_{j,0} \varphi_0 + \frac{m+2}{m+1} k_{j,j-1} \varphi_{j-1} + 2 \sum_{i=0}^{j-2} k_{j,i} \varphi_i + \frac{1}{m+1} \left( k_{j,j} \varphi_j + 2 \sum_{i=0}^m k_{j,j-1+\frac{ih}{m+1}} \varphi_{j-1+\frac{ih}{m+1}} \right) \right]$$

pour  $j = 0$  on a

$$\varphi_0 = f_0$$

## 2.4 Implémentations numériques et comparaisons

### 2.4.1 Exemple 1

Soit l'équation intégrale

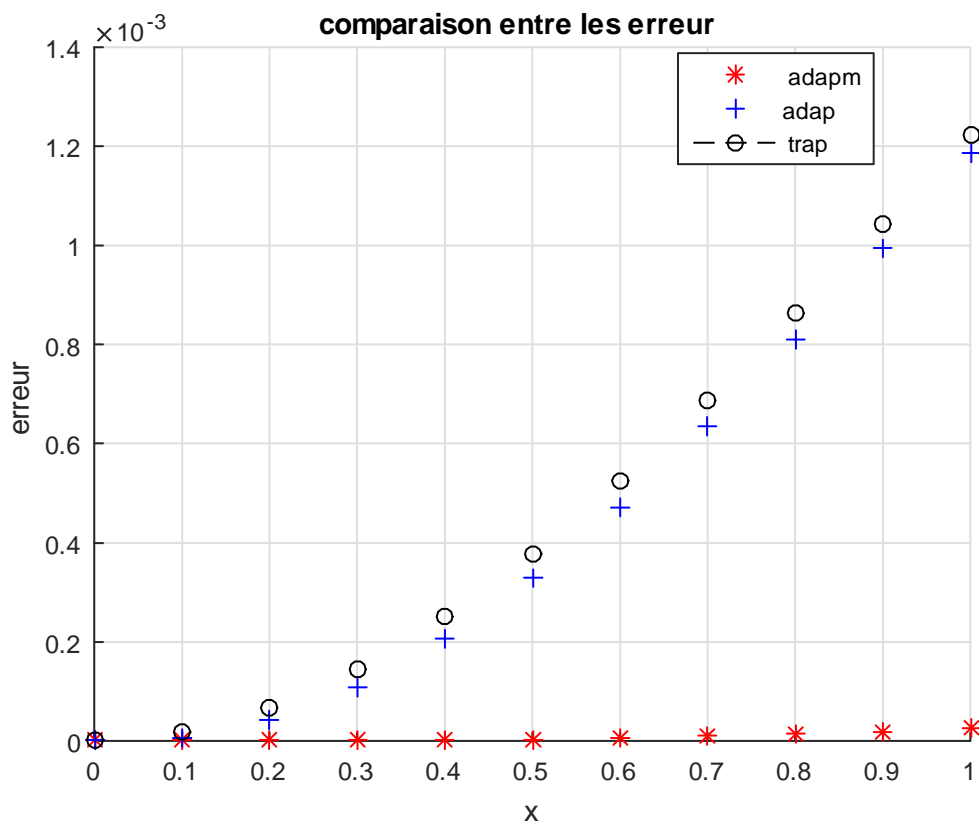
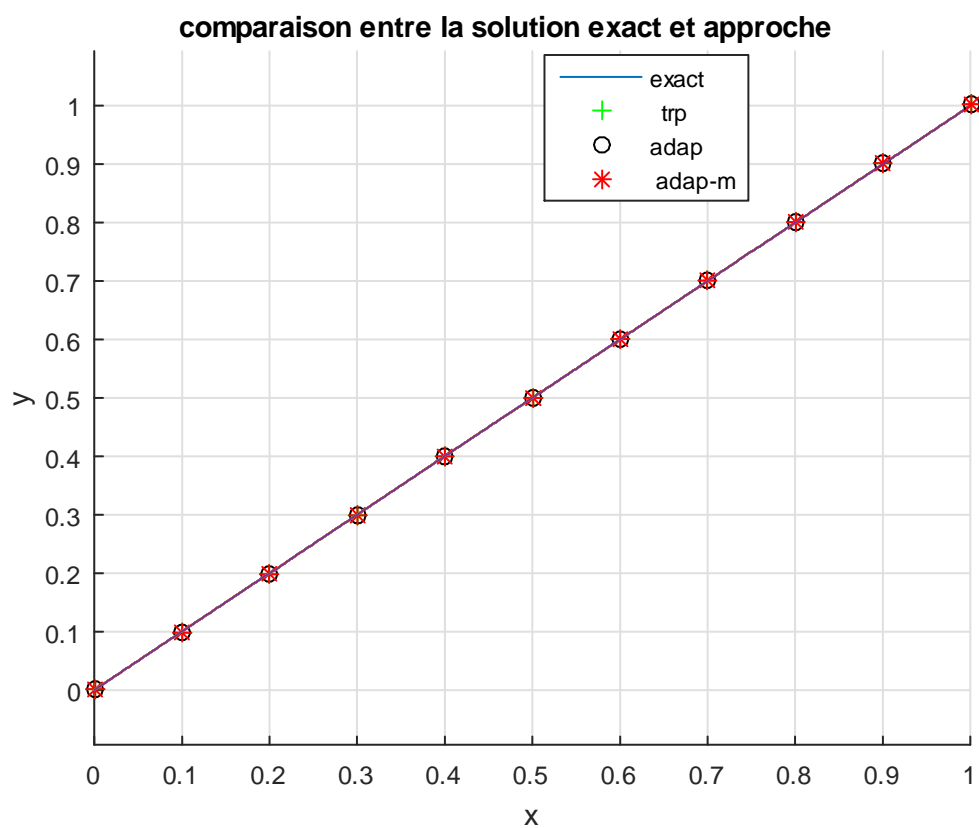
$$\varphi(x) - \int_0^x \sin(x) \sin(t) \varphi(t) dt = \sin(x)(x \cos(x) - \sin(x)) + x$$

avec la solution exacte est donnée par

$$\varphi(x) = x$$

x	exact	err(trap)	err(adap)	err(adap-m)	(2.4.1)
0	0	0	0	0	
0.1	1.0000e-01	1.6597e-05	4.1475e-06	4.8867e-09	
0.2	2.0000e-01	6.5527e-05	4.1187e-05	1.1365e-07	
0.3	3.0000e-01	1.4447e-04	1.0952e-04	5.2046e-07	
0.4	4.0000e-01	2.5015e-04	2.0646e-04	1.4189e-06	
0.5	5.0000e-01	3.7875e-04	3.2864e-04	3.0016e-06	
0.6	6.0000e-01	5.2625e-04	4.7240e-04	5.4600e-06	
0.7	7.0000e-01	6.8859e-04	6.3393e-04	8.9838e-06	
0.8	8.0000e-01	8.6173e-04	8.0935e-04	1.3761e-05	
0.9	9.0000e-01	1.0416e-03	9.9473e-04	1.9978e-05	
1	1.0000e+00	1.2239e-03	1.1859e-03	2.7817e-05	

Tableau 1



### 2.4.2 Exemple 2

soit l'équation intégrale

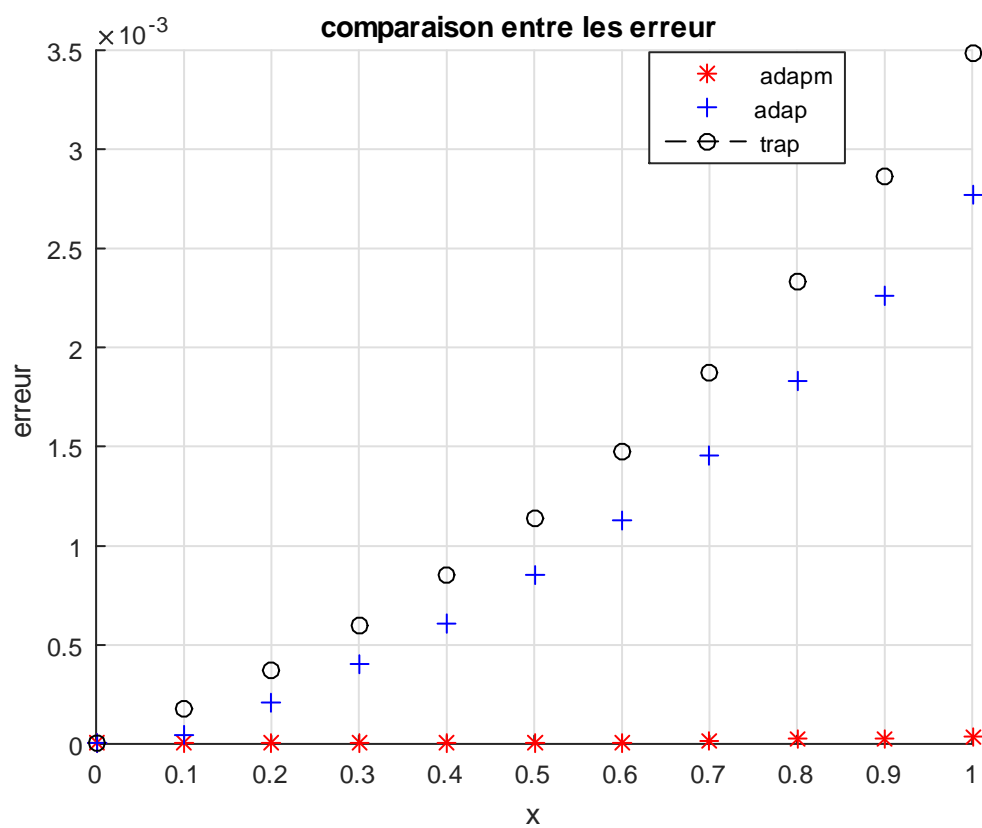
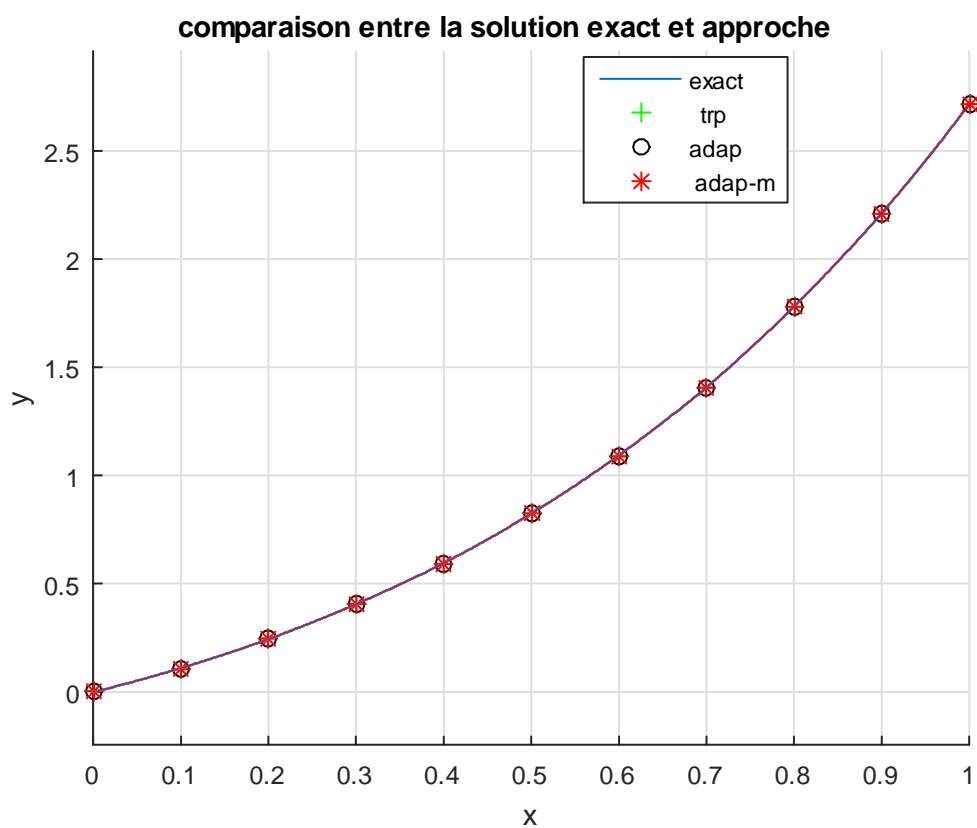
$$\varphi(x) - \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt = (-x-2) + 2\exp(x)$$

avec la solution exacte est donnée par

$$\varphi(x) = x \exp(x)$$

x	exact	trap(err)	adap(err)	adap-m(err)	(2.4.2)
0	0	0	0	0	
0.1	1.1052e-01	1.7526e-04	4.3900e-05	4.1012e-07	
0.2	2.4428e-01	3.7162e-04	2.1128e-04	7.8793e-07	
0.3	4.0496e-01	5.9410e-04	3.9849e-04	6.7523e-08	
0.4	5.9673e-01	8.4841e-04	6.1052e-04	1.7725e-06	
0.5	8.2436e-01	1.1411e-03	8.5277e-04	4.7541e-06	
0.6	1.0933e+00	1.4795e-03	1.1314e-03	8.8996e-06	
0.7	1.4096e+00	1.8722e-03	1.4533e-03	1.4232e-05	
0.8	1.7804e+00	2.3290e-03	1.8267e-03	2.0775e-05	
0.9	2.2136e+00	2.8611e-03	2.2607e-03	2.8552e-05	
1	2.7183e+00	3.4812e-03	2.7659e-03	3.7587e-05	

Tableau 2





# Chapitre 3

## RESOLUTION DES EQUATIONS INTEGRALES NON LINEAIRES DE VOLTERRA

Dans ce chapitre on va étudier les équation intégrales non linéaires de volterra on va démontrer l'existence et l'unicité de la solution de ces équations . en appliquant le théoreme du point fixe de Banach puis on va les résoudre numériquement par les méthodes, la méthode des Trapéze et une méthode adaptative basée sur la règle des Trapèzes et une méthode adaptative modifiée a fin de comparer entre les méthodes .

### 3.1 Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale non linéaire de Volterra

#### 3.1.1 Théorèmes de point fixe

En analyse, les théorèmes de point fixe sont un résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction  $f$  admet sous certaines conditions un point fixe. Ces théorèmes se révèlent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles et des équations intégrales..

Le théorème du point fixe de Banach donne un critère général dans les espaces métriques complets pour assurer que le procédé d'itération d'une fonction tend vers un point fixe.

**Définition 3.1.1** Soient  $(X; d)$  ;  $(Y; \delta)$  deux espaces métriques, on appelle une fonction lipschitzienne toute fonction  $F$  satisfait

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in X : \delta(F(x), F(y)) \leq M d(x, y)$$

On appelle le plus petit  $M$  satisfait cette condition la constante de Lipschitz et on le note  $L(F)$ .

Si  $L(F) < 1$ ;  $F$  est dite contractante avec la constante de contraction  $L(F)$

**Théorème 3.1.1 (Théorème du point fixe de Banach)** Soit  $T$  une contraction dans un espace de Banach  $X$ . Alors  $T$  admet un unique point fixe

**Théorème 3.1.2** Soit  $K : [0; F] \times [0; F] \longrightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue et lipschitzienne :

$$|k(t, s, x) - k(t, s, y)| \leq L |x - y| \quad \text{pour tout : } (s, t) \in [0; F] \times [0; F] \text{ et } x, y \in \mathbb{R}$$

alors pour tout  $f \in C[0; T]$  l'équation

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^t k(t, s, \varphi(s)) ds \quad (0 \leq t \leq F)$$

admet une solution unique  $\varphi \in C[0; T]$ : De plus pour tout  $\varphi_0 \in C[0; T]$  la suite des fonctions définie par

$$\varphi_{n+1}(t) = f(t) + \int_0^t k(t, s, \varphi_n(s)) ds \quad (0 \leq t \leq F)$$

converge uniformément dans  $C[0, F]$  vers une solution unique.

**Preuve.** Soit  $E$  est l'espace de Banach de  $C([0, F])$  muni de la norme

$$|g| = \max_{0 \leq t \leq F} |g(t)| \exp(-Lt)$$

Cette norme est équivalente à la norme sup , En effet

$$\exp(-Lt) \|x\| \leq |x| \leq \|x\|$$



de plus elle est complète.

On définit  $T : E \longrightarrow E$  par

$$T\varphi(t) = f(t) + \int_0^t k(t, s, \varphi(s))ds$$

A fin de prouver que l'équation admet une solution, il faut montrer que l'opérateur  $T$  admet un point fixe. En effet  $T$  est contractante:

$$\begin{aligned} |T\varphi_1 - T\varphi_2| &\leq \max_{0 \leq t \leq F} \int_0^t |k(t, s, \varphi_1(s)) - k(t, s, \varphi_2(s))| ds \exp(-Lt) \\ &\leq L \max_{0 \leq t \leq F} \int_0^t |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| ds \exp(-Lt) \\ &= L \max_{0 \leq t \leq F} \int_0^t \exp(-Ls) \exp(Ls) |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| ds \exp(-Lt) \\ &\leq L \max_{0 \leq t \leq F} |\varphi_1 - \varphi_2| \exp(-Lt) \int_0^t \exp(Ls) ds \\ &= L \max_{0 \leq t \leq F} |\varphi_1 - \varphi_2| \exp(-Lt) \frac{\exp(Lt) - 1}{L} \\ &\leq (1 - \exp(-Lt)) |\varphi_1 - \varphi_2| \end{aligned}$$

puisque

$$(1 - \exp(-Lt)) < 1$$

alors  $F$  est contractante, d'après le principe de Banach  $F$  admet un point fixe unique de plus la suite  $\{\varphi_n\}$  définie ci-dessus converge uniformément vers le point fixe  $\varphi$  pour la norme  $\|x\|$  ainsi que pour la norme  $\sup \|x\|$ . ■

## 3.2 Résolution analytique des EINLVs

### 3.2.1 Méthode des approximations successives

La méthode des approximations successives peut, a priori, être appliquée tous les problèmes non linéaires.

On considère l'équation intégrale non linéaire de Volterra

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k(x, t, \varphi(t))dt \quad (3.2)$$

La méthode des approximations successives introduit la Relation réccurente

$$\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t, \varphi_n(t)) dt, \quad n \geq 1 \quad (3.3)$$

Nous commençons toujours par une estimation initiale pour  $\varphi_0(x)$ , la plupart du temps nous sélectionnons 0, 1, x pour  $\varphi_0(x)$ , et en utilisant (3.3), plusieurs approximations successives  $\varphi_k$ ,  $k \geq 1$

sera déterminé comme

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) \varphi_0(t) dt \\ \varphi_2(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) \varphi_1(t) dt \\ \varphi_3(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) \varphi_2(t) dt \\ &\vdots \\ \varphi_{n+1}(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) \varphi_n(t) dt \end{aligned}$$

par conséquent

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n+1}(x)$$

**Exemple 3.2.1** Utilisez la méthode des approximations successives pour résoudre l'équation intégrale non linéaire de Volterra

$$\varphi(x) = \exp(x) + \frac{1}{3}x(1 - \exp(3x)) + \int_0^x x \varphi^3(t) dt$$

on a

$$\varphi_0(x) = 1$$

Nous utilisons la méthode des approximations successives

$$\varphi_{n+1}(x) = \exp(x) + \frac{1}{3}x(1 - \exp(3x)) + \int_0^x x \varphi_n^3(t) dt$$

alors

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(x) &= \exp(x) + \frac{1}{3}x(1 - \exp(3x)) + \int_0^x x\varphi_0^3(t)dt \\
 &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{35}{24}x^4 - \frac{67}{60}x^5 + \dots \\
 \varphi_2(x) &= \exp(x) + \frac{1}{3}x(1 - \exp(3x)) + \int_0^x x\varphi_1^3(t)dt \\
 &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{67}{60}x^5 + \dots \\
 \varphi_3(x) &= \exp(x) + \frac{1}{3}x(1 - \exp(3x)) + \int_0^x x\varphi_2^3(t)dt \\
 &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \dots
 \end{aligned}$$

la solution  $\varphi(x)$  est

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n+1}(x) = \exp(x)$$

### 3.3 Résolution numérique des EINLVs

Dans cette partie, on va résoudre les **EINLVs** numériquement, c'est-à-dire trouver une solution approchée à la solution exacte de cette équation.

#### 3.3.1 Méthode des Trapèze

Pour le faire, on a toujours besoin de discrétiser l'intervalle  $[a, b]$  en sous intervalles  $[x_i; x_{i+1}]$ ,  $i = \overline{0; N}$  équidistants, **i.e** :

$$x_j = a + (j - 1)h \quad j = 1, 2, \dots, n + 1$$

Rappelons que l'équation non linéaire de Volterra s'écrit comme suit :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t, \varphi(t))dt$$

On prend dans cette partie  $\lambda = 1$

Maintenant, on applique la méthode des approximations successives sur cette équation :

$$\varphi_{l+1}(x) = f(x) + \int_a^x k(x, t, \varphi_l(t))dt \quad \text{tel que } l = 1, 2, \dots, m$$

Notons qu'on va calculer la solution approchée en tous les nœuds  $x_j$  ;  $j = 1, 2, \dots, n + 1$ , donc on écrit l'équation comme suit :

$$\varphi_{l+1}(x_j) = f(x_j) + \int_a^{x_j} k(x_j, t, \varphi_l(t)) dt \quad \text{tel que } l = 1, 2, \dots, n + 1$$

Approchons numériquement l'intégrale en utilisant la méthode du trapèze

$$\varphi_{l+1}(x_{j+1}) = f(x_{j+1}) + \sum_{i=1}^{j-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x_j, t, \varphi_l(t)) dt$$

$$\varphi_{l+1}(x_{j+1}) = f(x_{j+1}) + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{j-1} [k(x_{j+1}, t_{i+1}, \varphi_l(t_{i+1})) + k(x_{j+1}, t_i, \varphi_l(t_i))]$$

On simplifie la formule, on obtient :

$$\varphi_{l+1j+1} = f_{j+1} + \frac{h}{2} k_{j+11l} + \frac{h}{2} k_{j+1j+1l} + h \sum_{i=2}^{j-1} k_{j+1il}$$

Il est clair qu'on peut calculer la solution à partir de cet algorithme, mais à condition qu'on donne une valeur initiale, on prend

$$\varphi_0(x) = f(x)$$

### 3.3.2 Méthode adaptative:

Comme dans la méthode des Trapèze, Le problème à de trouver la fonction  $\varphi$  (la solution)

Considérons l'EIVNL de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t, \varphi(t)) dt$$

Alors

$$\varphi_j = f_j + \sum_{i=0}^{j-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x_j, t, \varphi(t)) dt + \int_{x_{j-1}}^{x_{j-\frac{1}{2}}} k(x_j, t, \varphi(t)) dt + \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_j} k(x_j, t, \varphi(t)) dt$$

Maintenant, on applique la méthode des approximations successives sur cette équation :

$$\varphi_{l+1j} = f_j + \sum_{i=0}^{j-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x_j, t, \varphi_l(t)) dt + \int_{x_{j-1}}^{x_{j-\frac{1}{2}}} k(x_j, t, \varphi_l(t)) dt + \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_j} k(x_j, t, \varphi_l(t)) dt$$

utilisons la méthode de Trapèze

$$\begin{aligned}
 \varphi_{l+1}(x_j) &= f(x_j) + \sum_{i=0}^{j-2} \frac{h}{2} (k(x_j, t_{i+1}, \varphi_l(t_{i+1})) + k(x_j, t_i, \varphi_l(t_i))) + \frac{h}{4} \left( k(x_j, t_{j-\frac{1}{2}}, \varphi_l(t_{j-\frac{1}{2}})) \right) \\
 &\quad + \frac{h}{4} \left( k(x_j, t_{j-1}, \varphi_l(t_{j-1})) + k(x_j, t_j, \varphi_l(t_j)) + k(x_j, t_{j-\frac{1}{2}}, \varphi_l(t_{j-\frac{1}{2}})) \right) \\
 &= f(x_j) + \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{j-2} k(x_j, t_{i+1}, \varphi_l(t_{i+1})) + \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{j-2} k(x_j, t_i, \varphi_l(t_i)) + \frac{h}{4} \left( 2k(x_j, t_{j-\frac{1}{2}}, \varphi_l(t_{j-\frac{1}{2}})) \right) \\
 &\quad + \frac{h}{4} (k(x_j, t_{j-1}, \varphi_l(t_{j-1})) + k(x_j, t_j, \varphi_l(t_j)))
 \end{aligned}$$

On notons  $\varphi_{l+1j} = \varphi_{l+1}(x_j)$ ,  $f_j = f(x_j)$  et  $k_{ji+1l} = k(x_j, t_{i+1}, \varphi_l(t_{i+1}))$

donc

$$\varphi_{l+1j} = f_j + \frac{h}{2} k_{j0l} + h \left( \sum_{i=1}^{j-2} k_{ji+1l} + \frac{3}{4} k_{jj-1l} + \frac{1}{2} k_{jj-\frac{1}{2}l} + k_{jjl} \right) \quad (3.4)$$

le problème à la valeur de  $\varphi_{j-\frac{1}{2}}$ , de même manière on détermine la valeur de  $\varphi_{j-\frac{1}{2}}$

$$\varphi_{lj-\frac{1}{2}} = f_{j-\frac{1}{2}} + \sum_{i=0}^{j-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x_{j-\frac{1}{2}}, t, \varphi_{l-1}(t)) dt + \int_{x_{j-1}}^{x_{j-\frac{1}{2}}} k(x_{j-\frac{1}{2}}, t, \varphi_{l-1}(t)) dt$$

utilisons la méthode de Trapèze deuxième fois, Alors on a

$$\begin{aligned}
 \varphi_{lj-\frac{1}{2}} &= f_{j-\frac{1}{2}} + \sum_{i=0}^{j-2} \frac{1}{2} \left( k_{j-\frac{1}{2}i+1l-1} + k_{j-\frac{1}{2}il-1} \right) h + \frac{1}{2} \left( k_{j-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}l-1} + k_{j-\frac{1}{2}j-1l-1} \right) \frac{h}{2} \\
 &= f_{j-\frac{1}{2}} + \sum_{i=0}^{j-2} \frac{h}{2} k_{j-\frac{1}{2}il-1} + \sum_{i=1}^{j-2} \frac{h}{2} k_{j-\frac{1}{2}il-1} + \frac{h}{4} \left( k_{j-\frac{1}{2}j-1l-1} + k_{j-\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}l-1} \right)
 \end{aligned}$$

alors

$$\varphi_{lj-\frac{1}{2}} = f_{j-\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} k_{j-\frac{1}{2}0l-1} + \sum_{i=1}^{j-2} h k_{j-\frac{1}{2}il-1} + \frac{3}{4} k_{j-\frac{1}{2}j-1l-1} + \frac{h}{4} k_{jj-\frac{1}{2}l-1} \quad (3.5)$$

En remplaçant (3.4) dans (3.5), on obtient la valeur de  $\varphi_j$ .

Il est clair qu'on peut calculer la solution à partir de cet algorithme, mais à condition qu'on donne une valeur initiale, on prend

$$\varphi_0(x) = f(x)$$

### 3.3.3 Méthode Adaptative modifier

L'intérêt de cette méthode est de diminuer l'erreur de précision, dans le but d'obtenir une solution plus fine

dans chaque étape  $j$ , qui correspond à une solution  $\varphi_j$ , on applique la même subdivision que la méthode de Trapèze sur l'intervalle  $[x_0, x_{j-1}]$  sauf sur le dernier sous intervalle (i.e.  $[x_{j-1}, x_j]$ ). On subdivise l'intervalle  $[x_{j-1}, x_j]$  en  $m$  sous-intervalles équidistants, en fait cette méthode applique un raffinement plus fin sur la méthode des Trapèze.

Considérons l'EIVNL de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t, \varphi(t)) dt$$

alors

$$\varphi_j = f_j + \int_{x_0}^{x_{j-1}} k(x_j, t, \varphi(t)) dt + \int_{x_{j-1}}^{x_j} k(x_j, t, \varphi(t)) dt$$

Maintenant, on applique la méthode des approximations successives sur cette équation :

$$\varphi_{l+1j} = f_j + \int_{x_0}^{x_{j-1}} k(x_j, t, \varphi_l(t)) dt + \int_{x_{j-1}}^{x_j} k(x_j, t, \varphi_l(t)) dt$$

utilisons la méthode de Trapèze

$$\begin{aligned} \varphi_{l+1j} = & f_j + \frac{h}{2} \left[ k(x_j, t_{j-1}, \varphi_l(t_{j-1})) + k(x_j, t_0, \varphi_l(t_0)) + 2 \sum_{i=0}^{j-2} k(x_j, t_i, \varphi_l(t_i)) \right] \\ & + \frac{h}{2(m+1)} \left[ k(x_j, t_{j-1}, \varphi_l(t_{j-1})) + k(x_j, t_j, \varphi_l(t_j)) + 2 \sum_{i=0}^m k(x, t_{j-1+\frac{ih}{m+1}}, \varphi_l(t_{j-1+\frac{ih}{m+1}})) \right] \end{aligned}$$

Il est clair qu'on peut calculer la solution à partir de cet algorithme, mais à condition qu'on donne une valeur initiale, on prend

$$\varphi_0(x) = f(x)$$

## 3.4 Implémentations numériques et comparaisons

### 3.4.1 Exemple 01

Soit l'équation intégrale

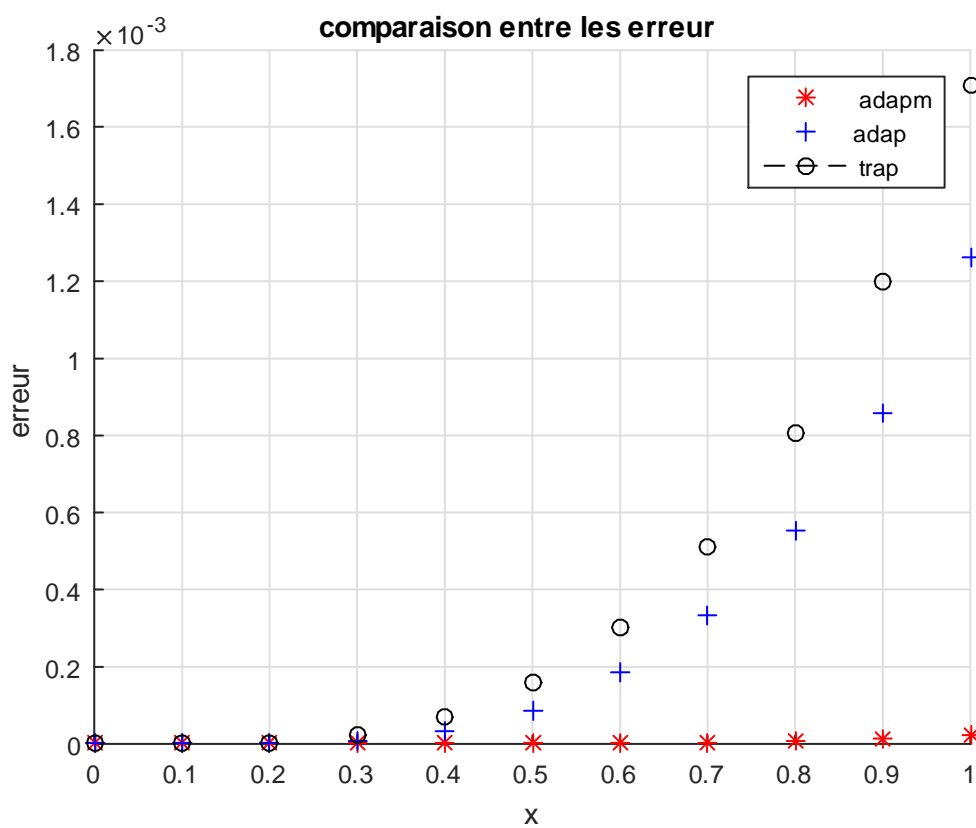
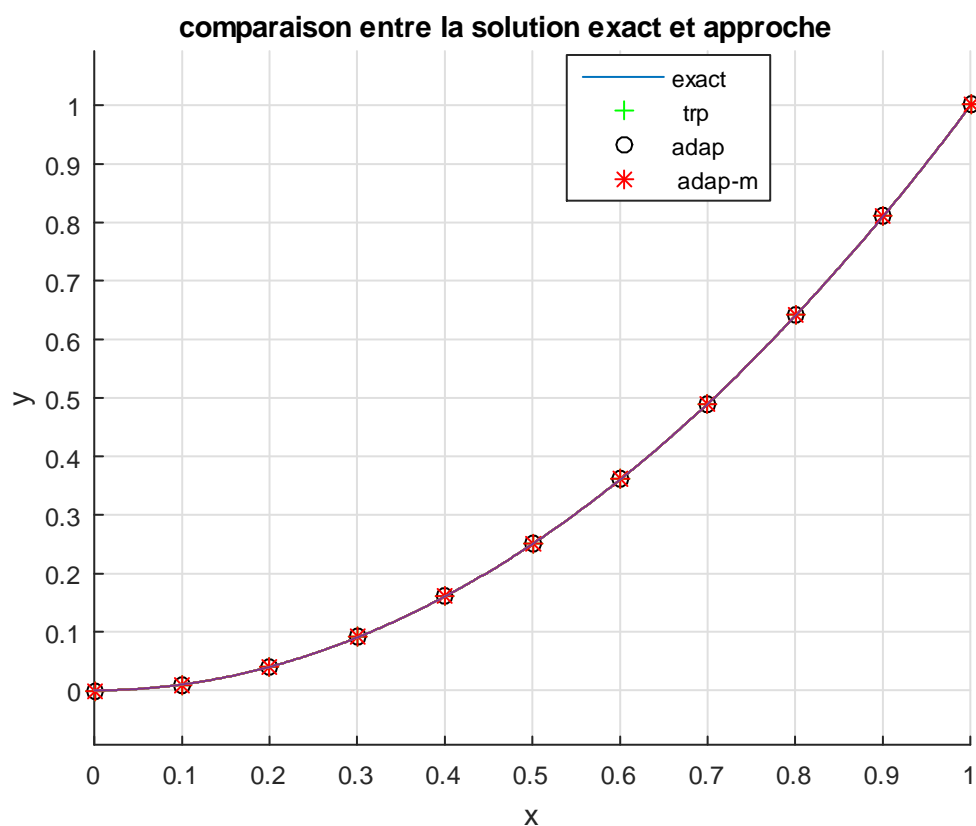
$$\varphi(x) - \int_0^x t \exp(-x) \varphi(t)^2 dt = x^2 - \frac{1}{6} x^6 \exp(-x)$$

avec la solution exacte est donnée par

$$\varphi(x) = x^2$$

x	exact	trapez(err)	adap(err)	adap-m(err)	(3.4.1)
0	0	0	0	0	
0.1	1.0000e-02	3.0164e-07	8.9545e-08	5.9766e-11	
0.2	4.0000e-02	5.1887e-06	1.5313e-06	1.9653e-09	
0.3	9.0000e-02	2.4502e-05	9.7047e-06	1.8625e-08	
0.4	1.6000e-01	7.1006e-05	3.4496e-05	1.0035e-07	
0.5	2.5000e-01	1.5853e-04	8.8169e-05	3.8283e-07	
0.6	3.6000e-01	3.0103e-04	1.8391e-04	1.1558e-06	
0.7	4.9000e-01	5.1245e-04	3.3523e-04	2.9497e-06	
0.8	6.4000e-01	8.0694e-04	5.5590e-04	6.6387e-06	
0.9	8.1000e-01	1.1995e-03	8.6037e-04	1.3557e-05	
1	1.0000e+00	1.7070e-03	1.2644e-03	2.5626e-05	

Tableau 3





### 3.4.2 Exemple 02

Soit l'équation intégrale

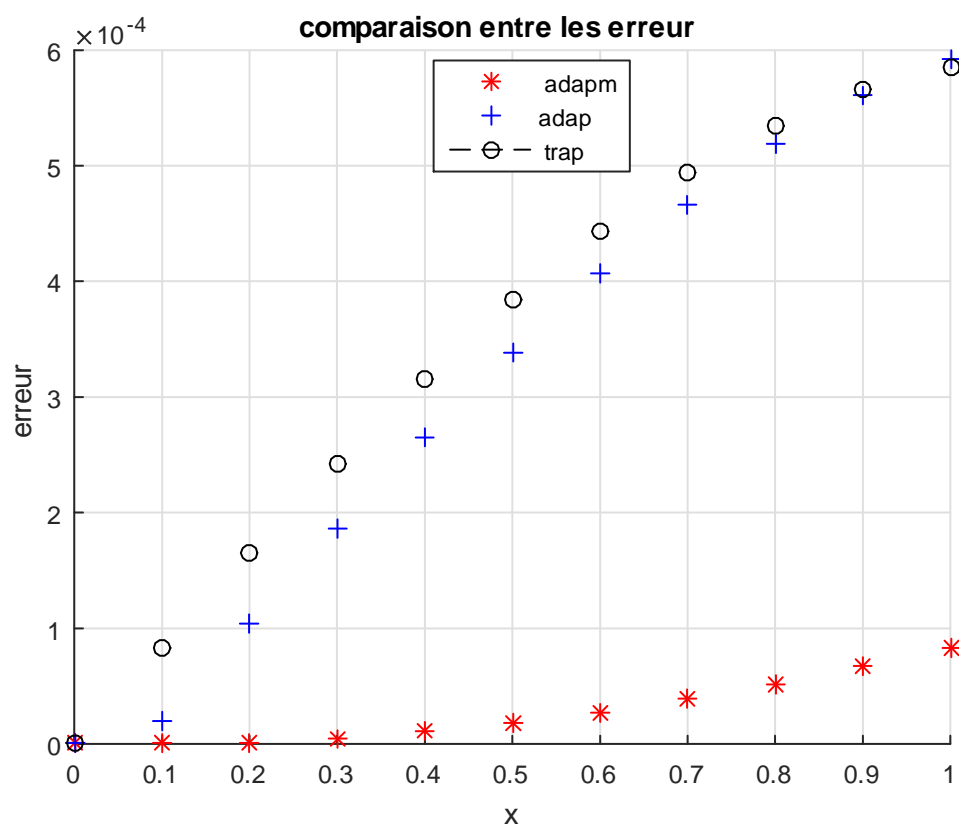
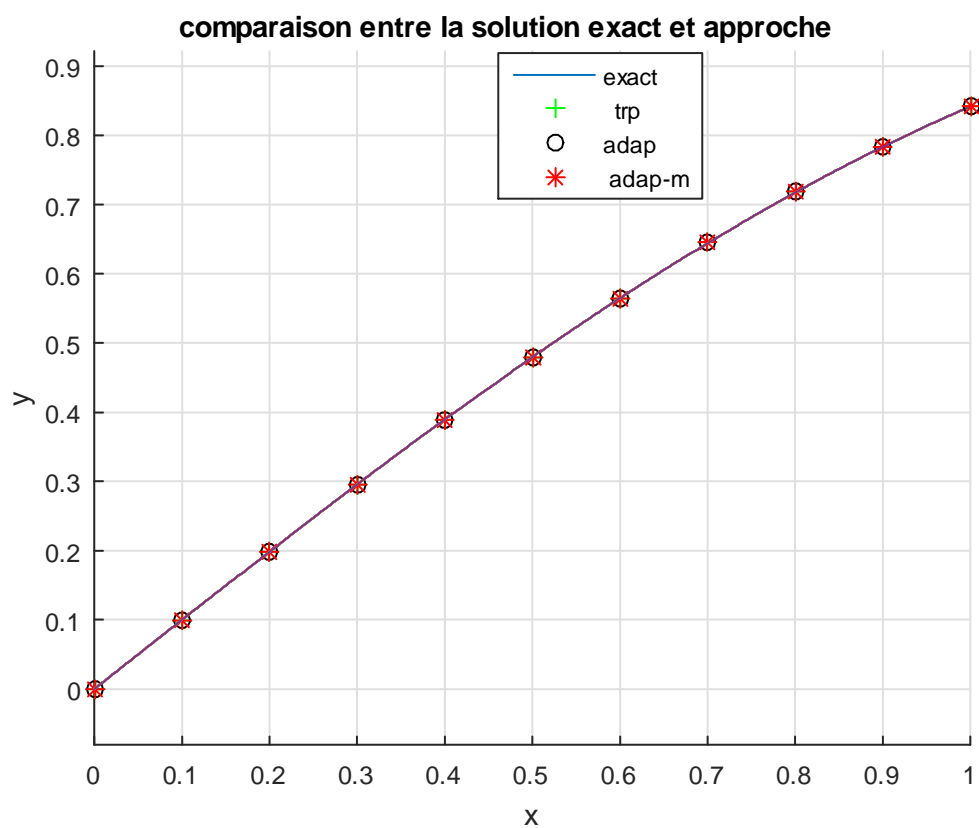
$$\varphi(x) - \int_0^x \frac{1}{2} \varphi(t)^2 dt = \sin(x) + \frac{1}{8} \sin(2x) - \frac{1}{4} x$$

avec la solution exacte est donnée par

$$\varphi(x) = \sin(x)$$

x	exact	trapez(err)	adapt(err)	adap-m(err)	(3.4.2)
0	0	0	0	0	
0.1	9.9833e-02	8.3250e-05	2.0776e-05	1.4617e-07	
0.2	1.9867e-01	1.6484e-04	3.9500e-04	1.7038e-06	
0.3	2.9552e-01	2.4313e-04	1.7834e-04	5.2048e-06	
0.4	3.8942e-01	3.1656e-04	2.5429e-04	1.0647e-05	
0.5	4.7943e-01	3.8368e-04	3.2787e-04	1.8028e-05	
0.6	5.6464e-01	4.4315e-04	3.9514e-04	2.7343e-05	
0.7	6.4422e-01	4.9385e-04	4.5478e-04	3.8589e-05	
0.8	7.1736e-01	5.3485e-04	5.0563e-04	5.1760e-05	
0.9	7.8333e-01	5.6547e-04	5.4675e-04	6.6850e-05	
1	8.4147e-01	5.8534e-04	5.7748e-04	8.3852e-05	

Tableau 4



### 3.4.3 Exemple 03

Soit l'équation intégrale

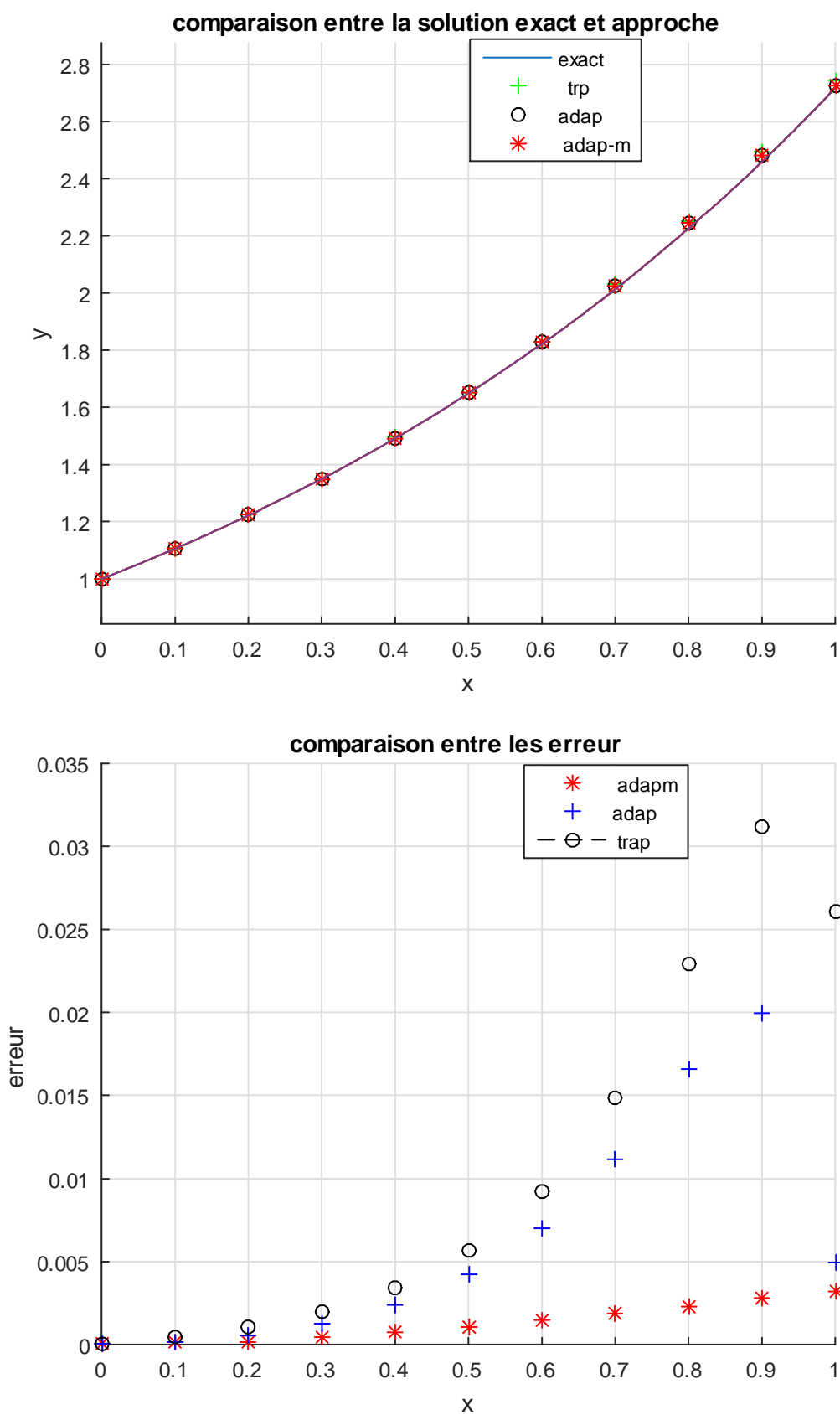
$$\varphi(x) - \int_0^x \varphi(t)^2 dt = \exp(x) - \frac{1}{2} \exp(2x) - 1$$

avec la solution exacte est donnée par

$$\varphi(x) = \exp(x)$$

x	exact	trapez(err)	adaptative(err)	adap-m(err)	(3.4.3)
0	1.0000e+00	0	0	0	
0.1	1.1052e+00	4.1459e-04	1.0278e-04	1.3897e-04	
0.2	1.2214e+00	1.0376e-03	5.8861e-04	1.4592e-04	
0.3	1.3499e+00	1.9822e-03	1.3154e-03	4.4762e-04	
0.4	1.4918e+00	3.4334e-03	2.4387e-03	7.7080e-04	
0.5	1.6487e+00	5.6986e-03	4.1938e-03	1.1169e-03	
0.6	1.8221e+00	9.2751e-03	6.9454e-03	1.4876e-03	
0.7	2.0138e+00	1.4862e-02	1.1126e-02	1.8845e-03	
0.8	2.2255e+00	2.2908e-02	1.6625e-02	2.3094e-03	
0.9	2.4596e+00	3.1172e-02	1.9987e-02	2.7645e-03	
1	2.7183e+00	2.6046e-02	4.9890e-03	3.2517e-03	

Tableau 5



# Conclusion générale

Notre but principal, dans ce mémoire on a étudié les équations intégrales linéaires et non linéaires de Volterra

On a commencé par une introduction sur les équations intégrales

Après, on a traité les équations intégrales linéaires de Volterra analytiquement et numériquement.

Enfin, on a présenté la théorie du point fixe et puis nous l'avons appliquée sur les équations intégrales non linéaires de Volterra, pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution de cette équation. et on a traité les équations intégrales non linéaires de Volterra analytiquement et numériquement.

Nous ne pouvons pas dire que les méthodes adaptative c'est mieux que la méthode des Trapèze à travers plusieurs exemples seulement . mais il doit faire des études théorique et c'est ce que nous voulons faire dans notre future recherches

.

# Bibliographie

- [1] Corduneanu, C. Integral Equations and applications. Cambridge University Press, Cambridge 1997.
- [2] F.G TRICOMI, Integral equations. University press, Combridge, 1957.
- [3] Kern M. Problèmes Inverses, Ecole supérieure d'ingénieurs Léonard de Vinci, 2003
- [4] W. Mydlarczyk and W. Okrasinski, Positive solutions to a nonlinear Abel-type integral equation on the whole line, Computers and Mathematics with Applications 41 (2001) 835-842.
- [5] G. Emmanuele, An existence theorem for Hammerstein integral equations, Portugaliae Mathematica, Vol. 51 Fasc. 4, 1994.
- [6] M. Terbeche, Constantin, Sacaliuc and Galina, Vornicescu, Solution of some singular integral equation, Bull. Sci. math. 126 (2002) 379-387.
- [7] L. Kantorovitch et G. Akilov. Analyse fonctionnelle, T1 & T2. Edition Mir, 1981.
- [8] NADIR, M. Cours sur les équations intégrales, université de M'sila 2008.
- [9] Hongchang Tian. Spectral methods for Volterra integral equations, Harbin Institute of technology, Harbin, PR China. Thesis. 1995.
- [10] Joshua H Gordis and Beni Neta. An adaptive method for the numerical solution of Volterra integral equations, article code ME / GO, CH 93943, USA.

- [11] A. Karoui, On the Existence of Continuous Solutions of Nonlinear Integral Equations, University of Carthage, Department of Mathematics, Faculty of Sciences of Bizerte, Jarzouna 7021, Tunisia. Appl.18(2005) 299-305.
- [12] Hochstadt H. Integral Equation, New York, 1973.
- [13] B. Gagli, Résolution des équations intégrales par les méthodes adaptatives, Mémoire de magister université de M'sila 2006.
- [14] M. Guesba, Sur quelques équations intégrales non linéaires, Mémoire de magister université de M'sila 2012.
- [15] A. Rahmoune, Sur la résolution numérique des équations intégrales en utilisant des fonctions spéciales, Thèse de docteur en sciences université de M'sila 2011.
- [16] A. Rahmoune, Résolution Numérique des Equations Intégrales, Mémoire de magister université de M'sila 2002.
- [17] A. Khirani, Résolution des équations intégrales non linéaire type Volterra, Mémoire de magister université de M'sila 2011.
- [18] S. Guechi, Méthodes Computationnelles pour la Résolution des équations Intégrales Non Linéaires, Thèse de doctorat en science université de M'sila 2017.
- [19] Joshua H. Gordis and Beni, Neta.: An adaptive method for the numerical solution of Volterra integrals equations, Naval Postgraduate School, Monterey, CA 93943 <http://www.math.nps.navy.mil/bneta>.
- [20] Alfio Quarteroni · Fausto Saleri · Paola Gervasio, Calcul Scientifique Cours, exercices corrigés et illustrations en MATLAB et Octave © Springer-Verlag Italia 2008 p 124-125
- [21] Krasnov M, Kissélev A, Makarenko G. Equations intégrales, problèmes et exercices, Editions Mir, Moscou, 1977.
- [22] A.M. Wazwaz, Linear and nonlinear integral equations methods and applications, Saint Xavier University Chicago, IL 60655, USA.

- [23] Adomian, G. Solving Frontier Problem: The Decomposition Method, Kluwer:Dordrecht, 1994.