Table des matières

Notations

$L(E;F)$	Espace des applications linéaires.
$\mathcal{L}(E;F)$	Espace des applications linéaires continues.
E^*	Espace dual de E.
i	Injection canonique.
$\sigma(E,E^*)$	Topologie faible définie sur E.
$\sigma(E^*,E)$	Topologie $*$-faible définie sur E^*.
e	Elément neutre ou distingué, on prend 0 si X est normé.
$\mathcal{M}_0$	Ensemble des espaces métriques complets pointés.
$\mathbb{K}$	Corps des scalaires ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
$Lip(X,E)$	Espace de toutes les fonctions lipschitziennes bornées de$X$ dans E.
$Lip_0(X,E)$	Espace de toutes les applications lipschitziennes de X dans E nulles au point e.
$X^\#$	Espace des formes lipschitziennes sur X.
$\tilde{X}$	Ensemble définis par $\{(x,y)\in X^2 : x\neq y\}$.
$\mathcal{F}(X)$	Espace de Lipschitz libre
$\ell_\infty(X)$	Espace des fonctions borneés de X dans $\mathbb{R}$.
B_X	Boule unité fermé de l'espace X.
$\mathcal{K}(E;F)$	Espace de tous les opérateurs linéaires compacts de E dans F.
$\mathcal{W}(E;F)$	Espace de tous les opérateurs linéaires faiblement compacts de E dans F.
T^*	Adjoint de l'opérateur linéaire.
$T^\#$	Adjoint de l'opérateur lipschitzien.

Introduction

En 2009 J. D. Farmer et W. B. Johnson [12] ont introduit la version lipchitzienne des opérateurs p-sommants, ils ont prouvé la première propriété de la base. Depuis lors, beaucoup d'auteurs introduiraient les versions lipchitziennes de quelques idéaux linéaires (voir, par exemple [5], [4] [20], [1]). Les opérateurs lipchitziens p-intégrale, p-nucléaire ont été introduit par Chen et Zheng dans [5] (voir aussi [12] pour les opéerateurs lipchitziens p-intégrale). La version lipchitzienne des opérateurs fortement p-sommant a été introduit par Yahi, Achour et Rueda dans [20]. Les opérateurs lipchitziens compact et faiblement compact considèrent comme la version lipchitzienne des opérateurs linéaires compacts et faiblement compacts ils sont introduit par A. Jiménez-Vargas, J.M. Sepulcre, Moisés Villegas-Vallecillos dans [13].

Dans ce travail nous avons détaillé l'article d' A. Jiménez-Vargas, J.M. Sepulcre, Moisés Villegas-Vallecillos [13] on a étudié les opérateurs lipchitziens compacts et faiblement compacts d'un espace métrique pointé dans un espace de Banach.

Le mémoire est divisé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions concernant les espaces métriques, les fonctions lipchitziennes, les espaces de Lipchitz et l'espace Lipchitz libre.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté les idéaux des opérateurs linéaires compacts est faiblement compacts, telle que le théorème de Schauder et Gantmacher sont présenté.

Le troisième chapitre, consacré d'étude nouveau classes des idéaux lipchitziens introduit par A. Jiménez-Vargas, J.M. Sepulcre, Moisés Villegas-Vallecillos dans [13] en 2014 qui s'appelé les opérateurs lipshitziens compacts et faiblement compacts.

Chapitre 1

Préliminaire

1.1 Applications linéaires bornées

Soient E, F deux espaces normés et $u : E \longrightarrow F$ une application. Elle est linéaire si

1) $\forall x, y \in E : u(x+y) = u(x) + u(y)$.

2) $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K} : u(\lambda x) = \lambda u(x)$.

On note $L(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires, on le muni de deux opérations algébriques suivantes

1) $\forall x \in E : (u_{1+}u_2)(x) = u_1(x) + u_2(x)$.

2) $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K} : (\lambda u)(x) = \lambda u(x)$.

Définition 1.1.1 *Soit $u \in L(E,F)$. L'application linéaire u est continue s'il existe $C \geq 0$ telle que*

$$\forall x \in E : \|u(x)\| \leq C\|x\|.$$

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues.
On définit l'application $\|.\|$ de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathbb{R}_+$ en posant

$$\|u\| = \|u\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\|.$$

On a aussi

$$\forall x \in E : \|u(x)\| \leq \|u\|\|x\|.$$

On a le résultat suivant sur l'espace des applications linéaires continues.

Théorème 1.1.1 *l'application* $\|.\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ *définit une norme sur* $\mathcal{L}(E,F)$. *Si* F *est un espace de Banach alors* $\mathcal{L}(E,F)$ *est aussi un espace de Banach.*

Définition 1.1.2 ***(Dual topologique)*** *Soit* E *un espace véctoriel normé . On appelle dual topologiqe, et on note* E^*, *l'espace de Banach des formes linéaires continues sur* E, *i.e.*

$$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K}).$$

Il est muni de la norme des opérateurs

$$\|x^*\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |x^*(x)| = \sup_{\|x\|=1} |x^*(x)|.$$

1.2 Topologie faible et $*$-faible

Définition 1.2.1 *Soient* (E, Γ) *un espace vectoriel topologique et* E^* *son dual topologique. On suppose que* E^* *sépare les points de* E.

1. *La* ***topologie faible*** *ou la* w-***topologique*** *sur* E *est la topologie* $\sigma(E, E^*)$ *sur* E. *Autrement dit, la topologie faible sur* E *est la topologie la moins fine sur* E *rendant continue toutes les applications* $f \in E^*$.

2. *La* ***topologie*** $*$-***faible*** *ou la* w^*-***topologique*** *sur* E^* *est la topologie* $\sigma(E^*, E)$ *sur* E^*. *Autrement dit, la topologie* $*$-*faible sur* E^* *est la topologie la moins fine sur* E^* *rendant continue toutes les formes linéaires* $J(x) : E^* \longrightarrow \mathbb{K}$, *lorsque* x *parcourt* E, *ou* $J(x)(f) = f(x)$, *pour tout* $f \in E^*$.

Définition 1.2.2 ***(Espaces réflexifs)*** *Soit* E *un espace de Banach. L'espace* E *est appelé réflexif si l'isométrie canonique*

$$\begin{array}{cccl} i & E & \longrightarrow & E^{**} \\ & x & \longmapsto & i(x) = \tilde{x} \text{ où } \tilde{x}(\varphi) = \varphi(x), \forall \varphi \in E^*, \end{array}$$

est surjective.

Exemple 1.2.1 *Les espaces de dimension finie et l'espaces* $L_p(\mu)$, $(1 < p < \infty)$ *sont réflexive.*

1.3 Espaces métriques

Un espace métrique est le donée d'un ensemble dont les éléments sont considérés comme des points et d'une application qui permet de mesurer si deux points sont proches ou éloignés.

Définition 1.3.1 *Soit X un ensemble non vide. On dit que d est une distance sur X si et seulement si d est une application de X^2 dans $\mathbb{R}^+$ telle que pour tout $(x, y, z) \in X^3$, on a*

$$\begin{array}{ll} (i)\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y & (\textit{Séparation}), \\ (ii)\ d(x,y) = d(y,x) & (\textit{Symétrie}), \\ (iii)\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) & (\textit{Inégalité triangulaire}). \end{array}$$

Soit (X, d_X, e) est un espaces métrique pointé (i.e., e un élément neutre ou distingué, on prend 0 si X est normé). On note par

$$\mathcal{M}_0 = \{\textit{espaces métriques complets pointés}\}.$$

La seconde inégalité triangulaire est vérifié (i.e., $\forall x, y, z \in X : |d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$).

Exemple 1.3.1 *(Somme de distances)*
Soient $d_1, ..., d_n$ des distances sur un ensemble X et $\alpha_1, ..., \alpha_n$ des réels positifs ou nules et non tous nules. Si x, $y \in X$. On démontre que d est une distance sur X, telle que

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \alpha_1 d_1(x,y) + ... + \alpha_n d_n(x,y) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i(x,y), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{array}{lll} 1)\ d(x,y) = 0 & \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i(x,y) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \forall i \in \{1, ..., n\}\ \alpha_i d_i(x,y) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \exists i_0 \in \{1, ..., n\}\ d_{i_0}(x,y) = 0, \alpha_{i_0} > 0 \\ & \Leftrightarrow & x = y. \\ 2)\ d(x,y) & \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i(x,y) \\ & \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i(y,x) \\ & \Leftrightarrow & d(y,x). \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 3)\ d(x,y) & = & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i(x,y) \\ & \leq & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (d_i(x,z) + d_i(z,y)) \\ & \leq & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i(x,z) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_i(z,y) \\ & \leq & d(x,z) + d(z,y). \end{array}$$

1.4 Les applications lipschitziennes

Le morphisme natural entre les espaces métriques est l'application lipschitzenne comme les opérateurs linéaires dans les espaces normés.

Définition 1.4.1 *Soient* $(X, d_X), (Y, d_Y)$ *deux espaces métriques, une application* $f : X \longrightarrow Y$ *est dite lipschitzienne, s'il existe* $C \geq 0$ *telle que*

$$\forall x, y \in X : d_Y(f(x), f(y)) \leq C d_X(x,y) \tag{1.1}$$

On note

$$\begin{array}{rcl} Lip(f) & = & \sup\limits_{x \neq y} \dfrac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x,y)}. \\ & = & \inf\{C : \textit{vérifiant l'inégalité } (1.1)\}. \end{array}$$

Soit (X, e_X, d_X) *et* (Y, e_Y, d_Y) *deux espaces métriques pointés on dira que* f *préserve le point distingué si* $f(e_X) = e_Y$.

Proposition 1.4.1 *Soit* (X, e, d) *un espace métrique pointé, alors l'application définie comme suit*

$$\begin{array}{rccl} f_z : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f_z(x) = d(x,z) - d(e,z), \end{array}$$

est une application lipschitzienne et $Lip(f_z) = 1$

Preuve. D'après la seconde inégalité triangulaire, pour tout $x, y, z \in X$, on a

$$|f_z(x) - f_z(y)| = |d(x,z) - d(e,z) - d(y,z) + d(e,z)| \leq d(x,y).$$

Alors f_z est une fonction non expanssive $(i.e., Lip(f_z) \leq 1)$.

Pour l'inégalité inverse, on a

$$
\begin{aligned}
Lip\left(f_z\right) &= \sup_{x\neq y}\frac{\left|f_z\left(x\right)-f_z\left(y\right)\right|}{d\left(x,y\right)} \\
&\geq \frac{\left|f_z\left(z\right)-f_z\left(y\right)\right|}{d\left(z,y\right)} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

On obtient finalement que $Lip\left(f_z\right)=1.$ ■

Proposition 1.4.2 *Soit X un espace métrique et soient f, g des fonctions lipschitzienne de X dans $\mathbb{R}$. Alors*
(a) $Lip\left(\lambda f\right)=\left|\lambda\right|Lip\left(f\right)$ pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$.
(b) $Lip\left(f+g\right)\leq Lip\left(f\right)+Lip\left(g\right)$.

Preuve. (a) Si λ est dans $\mathbb{R}$, pour (x,y) dans X^2

$$
\begin{aligned}
Lip\left(\lambda f\right) &= \sup_{x\neq y}\frac{\left|\lambda f\left(x\right)-\lambda f\left(y\right)\right|}{d_X\left(x,y\right)} \\
&= \sup_{x\neq y}\frac{\left|\lambda\right|\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|}{d_X\left(x,y\right)} \\
&= \left|\lambda\right|Lip\left(f\right).
\end{aligned}
$$

Donc λf est fonction lipschitzienne et $Lip\left(\lambda f\right)=\left|\lambda\right|Lip\left(f\right)$.
(b) Soient f et g des fonctions lipschitzienne de X dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x,y\in X$, on a

$$
\begin{aligned}
\left|\left(f+g\right)\left(x\right)-\left(f+g\right)\left(y\right)\right| &\leq \left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|+\left|g\left(x\right)-g\left(y\right)\right| \\
&\leq (Lip\left(x\right)+Lip\left(y\right))d_X\left(x,y\right).
\end{aligned}
$$

Donc $f+g$ est fonction lipschitzienne et

$$Lip\left(f+g\right)\leq Lip\left(f\right)+Lip\left(g\right).$$

■

Proposition 1.4.3 *Soient X,Y et Z trois espaces métriques, $f:X\longrightarrow Y$ et $g:Y\longrightarrow Z$ deux applications lipschitziennes, alors $g\circ f:X\longrightarrow Z$ est lipschitzienne et*

$$Lip\left(g\circ f\right)\leq Lip\left(g\right)Lip\left(f\right).$$

Preuve. Si f est lipschitzienne de X dans Y et g est lipschitzienne de Y dans Z, alors

$$\begin{aligned} d_Z\left(g \circ f\left(x\right), g \circ f\left(y\right)\right) &\leq Lip\left(g\right) d_Y\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right). \\ &\leq Lip\left(g\right) Lip\left(f\right) d_X\left(x, y\right). \end{aligned}$$

Alors $g \circ f$ est lipschitzienne et

$$Lip\left(g \circ f\right) \leq Lip\left(g\right) Lip\left(f\right).$$

Ce qui termine la démonstration. ■

1.5 Espace de Lipschitz

Nous donnerons dans cette section quelques propriétés utiles concernant l'espace de tous les fonctions lipschitziennes définit d'un espace métrique dans un espace de Banach.

1.5.1 L'espace $Lip\left(X\right)$

Définition 1.5.1 *Soit X un espace métrique et E un espace de Banach. On note par $Lip(X, E)$ l'espace de toutes les fonctions lipschitziennes bornées de X dans E*

$$Lip\left(X, E\right) = \left\{\textit{fonctions lipschitziennes bornées } f : X \longrightarrow E\right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{Lip(X,E)} = \max\left\{\|f\|_\infty,\ Lip\left(f\right)\right\}. \tag{1.2}$$

Si $E = \mathbb{R}$ alors $Lip(X, \mathbb{R}) = Lip\left(X\right)$.

$Lip\left(X\right)$ est un espace de Banach pour la norme (1.2)*, pour tout espace métrique X.*

1.5.2 L'espace $Lip_0(X)$

Soit (X, d_X, e) un espace métrique pointé. Pour tout espace de Banach E, nous désignons par $Lip_0(X, E)$ l'espace de toutes les applications lipschitziennes $f : X \longrightarrow E$ nulles au point e

$$Lip_0(X, E) = \left\{f : X \longrightarrow E \text{ lipschitzienne telle que } f(e) = 0\right\}.$$

On le munit de la norme
$$Lip\,(f) = \sup_{x \neq y} \frac{\|f\,(x) - f\,(y)\|}{d_X\,(x, y)}.$$
Si $E = \mathbb{R}$ alors $Lip_0(X, \mathbb{R}) = Lip_0\,(X)$.

On l'appelle dual de Lipschitz et on le note par $X^{\#}$, l'espace de Banach des formes lipschitzenne sur X, i.e.,
$$X^{\#} = Lip_0\,(X, \mathbb{R}) = Lip_0\,(X)\,,$$
muni de la norme
$$Lip\left(x^{\#}\right) = \sup_{x \neq y} \frac{\left|x^{\#}\,(x) - x^{\#}\,(y)\right|}{d_X\,(x, y)}.$$
$Lip_0\,(X)$ est un espace de Banach, pour tout espace métrique X pointé.

1.6 Espaces Lipschitz-libres

Dans cet section on va présenter le prédual de $Lip_0(X)$, c'est à dire il existe un espace de Banach Z, telle que $Lip_0(X)$ est isométriquement isomorphe à Z^*.

Définition 1.6.1 *Soit X un espace métrique pointé. L'espace Lipschitz-libre sur X, noté $\mathcal{F}\,(X)$, est le sous-espace de $Lip_0(X)^*$suivant:*
$$\mathcal{F}\,(X) = \overline{vect}\,\{\delta_x;\ x \in X\}\,,$$
telle que l'application $\delta_X : X \longrightarrow \mathcal{F}\,(X)$ définie par $\delta_X\,(x) = \delta_x$, pour $x \in X$, tel que:
$$\begin{array}{llll} \delta_x : & X^{\#} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & f & \longmapsto & \delta_x\,(f) := f\,(x)\,. \end{array}$$

On pose $\|\mu\|_{\mathcal{F}(X)} = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\,d\,(x_i, x_i')\right\}$, le infimum est portée sur touts les réprésentation de μ sous la forme
$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\delta_{x_i} - \delta_{x_i'}).$$

On note que l'espace Lipschitz-libre introduit par Godefroy et Kalton en 2003 voir [14] bien que cet espace a eté présenté a la premiere fois par Arens-Eells on 1956 [2] voir aussi le livre de Weaver [19] pour plus d'informations.

Soit $(x,y) \in X^2$, telle que $x \neq y$. On conséderons l'application suivant :

$$\begin{array}{rccl} \delta_{(x,y)}: & X^{\#} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & f & \longmapsto & \delta_{(x,y)}(f) := \frac{(\delta_x - \delta_y)(f)}{d(x,y)} = \frac{f(x)-f(y)}{d(x,y)}, \end{array}$$

est s'appelé l'évaluation fontionelle lipschitzinne.

Notation 1.6.1 *On note par $\tilde{X}$ le sous ensemble de X^2 définie par $\tilde{X} = \{(x,y) \in X^2 : x \neq y\}$. Pour démontrer la proposition suivante on a besoin les définitions suivants.*

Soit E un espace véctoriel.

Définition 1.6.2 ***(Partie convexe)*** *Une partie C de E est convexe si elle est non vide et si, pour tous $x,\ y \in C$ et $\lambda \in [0,1]$, on a $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$. Bien sur, tout sous-espace vectoriel de E est convexe et toute intersection non vide de parties convexes de E est convexe.*

Définition 1.6.3 ***(L'enveloppe convexe)*** *L'enveloppe convexe d'une partie non vide A de E est l'intersection de toutes les parties convexes de E contenant A; c'est la plus petite partie convexe de E contenant A, elle est notée $co(A)$ et on a*

$$co\,(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i : n \in \mathbb{N},\ x_i \in A,\ \theta_i > 0,\ \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1 \right\}.$$

Définition 1.6.4 ***(Absolument convexe)*** *Une partie A de E est absolument convexe si elle est non vide et si, pour tous $x, y \in A$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ tels que $|\lambda_1| + |\lambda_2| \leq 1$, on a $\lambda_1 x + \lambda_2 y \in A$. Une telle partie contient donc toujours l'élément 0.*

Définition 1.6.5 *L'enveloppe absolument convexe d'une partie non vide A de E comme ´étant l'intersection de toutes les parties absolument convexes de E qui contiennent A; elle est notée $\Gamma(A)$. On vérifie aisément que*

$$\Gamma\,(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N},\ x_i \in A,\ \lambda_i \in \mathbb{K},\ \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq 1 \right\}.$$

Proposition 1.6.1 *Soit X un espace métrique pointé*
(i) Les espaces $X^{\#}, \mathcal{F}\,(X)^*$ sont isométriquement isomorphique. C'est-à-dire $X^{\#} \cong \mathcal{F}\,(X)^*$.
(ii) La boule unité fermée de $\mathcal{F}(X)$ est l'enveloppe absolument convexe fermée de l'ensemble $\delta_{\tilde{X}}(\tilde{X})$ dans $(X^{\#})^*$. C'est-à-dire $B_{\mathcal{F}(X)} = \overline{\Gamma}\left(\delta_{\tilde{X}}(\tilde{X})\right)$.

Preuve. (i) On définit l'application suivant

$$\begin{array}{rccl} S: & \mathcal{F}(X)^* & \longrightarrow & Lip_0(X) \\ & \varphi & \longmapsto & S(\varphi)\,;\ (S(\varphi)(x) = \varphi(\delta_x - \delta_0)\,. \end{array}$$

Pour tout x, $x' \in X$. On a

$$\begin{aligned} |S(\varphi)(x) - S(\varphi)(x')| &= |\varphi(\delta_x - \delta_0) - \varphi(\delta_{x'} - \delta_0)| \\ &= |\varphi(\delta_x - \delta_{x'})| \\ &\leq \|\varphi\|\, d(x, x'). \end{aligned}$$

Ainsi $S(\varphi)(0) = \varphi(0)$, alors $S(\varphi) \in Lip_0(X)$. Nous concluons que S est une application linéaire et $\|S\| \leq 1$.

Maintenant on définit l'application suivant

$$\begin{array}{rccl} R: & Lip_0(X) & \longrightarrow & \mathcal{F}(X)^* \\ & f & \longmapsto & R(f)\,, \end{array}$$

telle que $R(f)(\mu) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(f(x_i) - f(x_i')\right)$, pour $f \in Lip_0(X)$ et $\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\boldsymbol{\delta}_{x_i} - \boldsymbol{\delta}_{x_i'})$.

On a

$$\begin{aligned} |R(f)(\mu)| &= \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(f(x_i) - f(x_i')\right)\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\, |f(x_i) - f(x_i')| \\ &\leq Lip(f) \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\, d(x_i, x_i'), \end{aligned}$$

le infimum est portée sur touts les réprésentation de μ on trouve $R(f) \in \mathcal{F}(X)^*$ et $\|R(f)\| \leq Lip(f)$. Alors nous concluons que R est une application linéaire non expanssive à partir de $Lip_0(X)$ à $\mathcal{F}(X)^*$.

Enfin, un simple calcul indique que $R \circ S = id_{\mathcal{F}(X)^*}$ et $S \circ R = id_{X^\#}$. Donc $X^\# \cong \mathcal{F}(X)^*$.

Pour la démonstration (ii) voir [13]. ■

Proposition 1.6.2 (a) *Soit (X, d) un espace métrique pointé. L'application $\delta_X : X \longrightarrow \mathcal{F}(X)$ est l'injection isométrique non linéaire de X dans $\mathcal{F}(X)$.*

(b) *Soit $T : X \longrightarrow E$ une application lipshitzienne telle que $T(e) = 0$. Alors il existe une* *unique application linéaire* $T_L : \mathcal{F}(X) \longrightarrow E$ *telle que* $T = T_L \circ \delta_X$ *et* $\|T_L\| = Lip(T)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & & \\ \delta_X \uparrow & \overset{T_L}{\searrow} & \\ X & \xrightarrow{T} & E \end{array}$$

(c) *Soient* X *et* Y *deux espaces métriques pointés et* $T : X \longrightarrow Y$ *une application lipschitzienne vérifant* $f(0_X) = 0_Y$. *Alors il existe une unique application linéaire*
$\hat{T} : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y)$ *vérifiant* $Lip(T) = \left\|\hat{T}\right\|$ *et* $\delta_Y \circ T = \hat{T} \circ \delta_X$.
Autrement dit, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \delta_X \downarrow & & \downarrow \delta_Y \\ \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\hat{T}} & \mathcal{F}(Y) \end{array}$$

Preuve. (a) Pour tout x, $x' \in X$, et pour tout $f \in Lip_0(X)$ on a

$$\begin{aligned} \|\delta_X(x) - \delta_X(x')\|_{\mathcal{F}(X)} &= \|\delta_x - \delta_{x'}\|_{\mathcal{F}(X)} \\ &= \sup_{\varphi \in B_{\mathcal{F}(X)^*}} |\langle \delta_x - \delta_{x'}, \varphi \rangle| \\ &= \sup_{R(g) \in B_{\mathcal{F}(X)^*}} |\langle \delta_x - \delta_{x'}, R(g) \rangle|, \;\; R(g) = \varphi \\ &= \sup_{g \in B_{X^\#}} |\langle \delta_x - \delta_{x'}, g \rangle| \\ &\leq \sup_{g \in B_{X^\#}} |g(x) - g(x')| \\ &\leq \sup_{g \in B_{X^\#}} Lip(g)\, d(x, x') \\ &\leq d(x, x'), \end{aligned}$$

ce que implique $\|\delta_X(x) - \delta_X(x')\|_{\mathcal{F}(X)} \leq d(x, x')$. Donc δ_X est lipshitzienne et $Lip(\delta_X) \leq 1$.
Pour l'inégalité inverse, pour tout $x, x' \in X$ on a

$$\begin{aligned} \|\delta_X(x) - \delta_X(x')\|_{\mathcal{F}(X)} &= \|\delta_x - \delta_{x'}\|_{\mathcal{F}(X)} \\ &= \sup_{f \in B_{X^\#}} |\langle\ \delta_x - \delta_{x'}, f\ \rangle| \\ &\geq |\langle\ \delta_x - \delta_{x'}, f_x\ \rangle| \\ &= |f_x(x) - f_x(x')| \;\; \text{(voir la Proposition (1.4.1))} \\ &= d(x, x'). \end{aligned}$$

On obtient finalement que

$$\begin{aligned} \left\| \delta_X(x) - \delta_X(x') \right\|_{\mathcal{F}(X)} &= \left\| \delta_x - \delta_{x'} \right\|_{\mathcal{F}(X)} \\ &= d(x, x'), \end{aligned}$$

et $Lip(\delta_X) = 1$.

Pour la démonstration (b) voir [19, Theorem 2.2.4].

Pour la démonstration (c) voir [15, Lemma 3.1]. ■

Chapitre 2

Ideal linéaire des opérateurs compacts et faiblement compacts

2.1 Opérateurs linéaires compacts

Dans cette section nous donnons quelques définitions, proprítés et notations qui concernent les opérateurs linéaires compacts.

Définition 2.1.1 *Soit (X,d) un espace métrique et soit $K \subset (X,d)$. K est compact si toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de K contient une sous-suite convergente vers $x \in K$.*

Définition 2.1.2 *Soit E un espace métrique complet. Une partie A de E est relativement compact si $\overline{A}$ est compact.*

Proposition 2.1.1 *Soit E un espace métrique complet. Une partie A de E est relativement compact si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, A peut être recouverte par un nombre fini de boules de rayon $\leq \varepsilon$.*

Proposition 2.1.2 *Tout fermé dans un compact est compact.*

Définition 2.1.3 *Soient E, F deux espace de Banach. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est compact (faiblement compact) si le sous ensemble $T(B_E)$ est relativement compact (resp. relativement faiblement compact) dans F. La collection de tous les opérateurs linéaires compacts (faiblement compacts) de E dans F sera notée $\mathcal{K}(E,F)$ (resp.$\mathcal{W}(E,F)$).*

Théorème 2.1.1 *[11] Soient E, F deux espaces de Banach et soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*
(i) L'opérateur T est faiblement compact.
(ii) Il existe un espace de Banach réflexif G, un opérateur linéaire bornée $S \in \mathcal{L}(G,F)$ et un opérateur linéaire bornée $g \in \mathcal{L}(E,G)$, tel que $T = S \circ g$.

Proposition 2.1.3 *L'ensemble $\mathcal{K}(E,F)$ des opérateurs compacts $T : E \longrightarrow F$ est un sous-espace véctoriel fermé de $\mathcal{L}(E,F)$.*

Preuve. L'ensemble $\mathcal{K}(E,F)$ c'est un sous-espace vectoriel car si $T, S \in \mathcal{K}(E,F)$ on a

$$\overline{(S+T)(B_E)} \subseteq \overline{S(B_E)} + \overline{T(B_E)},$$

et que cette somme est compacte (image du produit de deux compacts par l'application continue $(x,y) \longmapsto x+y$).
Soit $T_n \in \mathcal{K}(E,F)$ tels que

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Nous allons voir que $T(B_E)$ est relativement compact. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \geq 1$ tel que

$$\|T_N - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Pour tout $x \in B_E$, on a donc

$$\|T_N(x) - T(x)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

On peut écrire

$$T_N(B_E) \subseteq \bigcup_{j=1}^{J} B\left(x_j, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Alors

$$T(B_E) \subseteq \bigcup_{j=1}^{J} B(x_j, \varepsilon).$$

Ceci termine la preuve de la proposition. ■

2.2 Le proplème dual (l'adjoint)

Soient E, F deux espaces véctoriels normés. Pour un opérateur linéaire borné $T \in \mathcal{L}(E, F)$, on définit l'opérateur suivant $T^* : F^* \longrightarrow E^*$ par

$$\langle T(x), y^* \rangle = \langle x, T^*(y^*) \rangle, \quad \forall x \in E,\ y^* \in F^*.$$

L'opérateur T^* s'appelle l'adjoint de T.

Proposition 2.2.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ alors T^* linéaire et $\|T\| = \|T^*\|$.*

Preuve. Soient $y_1^*, y_2^* \in F^*$, et $\alpha \in \mathbb{K}$ on a

$$\begin{aligned}
\langle x, T^*(\alpha y_1^* + y_2^*) \rangle &= \langle T(x), \alpha y_1^* + y_2^* \rangle \\
&= \alpha \langle T(x), y_1^* \rangle + \langle T(x), y_2^* \rangle \\
&= \langle x, \alpha T^*(y_1^*) \rangle + \langle x, T^*(y_2^*) \rangle \\
&= \langle x, \alpha T^*(y_1^*) + T^*(y_2^*) \rangle.
\end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in E$ on a

$$T^*(\alpha y_1^* + y_2^*) = \alpha T^*(y_1^*) + T^*(y_2^*).$$

Ce qui implique que T^* est linéaire.
Il est aussi borné puisque

$$\begin{aligned}
|y^*(T(x))| &\leq \|y^*\|_{F^*} \|T(x)\|_F \\
&\leq \|y^*\|_{F^*} \|T\| \|x\|_E,
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
\|T^*(y^*)\|_{E^*} &= \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|T^*(y^*)(x)|}{\|x\|} \\
&\leq \|y^*\|_{F^*} \|T\|,
\end{aligned}$$

ce qui implique que $T^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ et $\|T^*\| \leq \|T\|$. Pour montrer l'inégalité inverse, nous prouvons que

$$\|T(x)\|_F \leq \|T^*\| \|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

L'opérateur l'adjoint implique que

$$\begin{aligned} |y^*(T(x))| &\leq \|T^*(y^*)\|_{E^*} \|x\|_E \\ &\leq \|y^*\|_{F^*} \|T^*\| \|x\|_E , \end{aligned}$$

et

$$\sup_{\|y^*\|\neq 0} \frac{|y^*(T(x))|}{\|y^*\|_{F^*}} \leq \|T^*\| \|x\|_E , \quad \forall x \in E.$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Théorème 2.2.1 ***(Théorème de Schauder).*** *Soit $T \in \mathcal{K}(E,F)$. Alors nous avons l'équivalence suivante*

(1) *L'opérateur T est dans $\mathcal{K}(E,F)$.*

(2) *L'opérateur adjoint T^* est dans $\mathcal{K}(F^*,E^*)$.*

Théorème 2.2.2 ***(Théorème d'Ascoli).*** *Soit X un espace métrique et compact, et $\mathcal{A} \subseteq C(X)$. Alors $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $C(X)$ si et seulement si $\mathcal{A}$ est bornée et est équicontinue.*

Preuve du Théorème de Schauder.

Rappelons que $\mathcal{A}$ équicontinue signifie que

$$(\forall x \in X)(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0) : d(x,y) \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon, \ \forall f \in \mathcal{A}.$$

Notons que comme X est compact, il ya en fait équicontinuité uniforme

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in X) : d(x,y) \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon, \ \forall f \in \mathcal{A}.$$

$(1) \Longrightarrow (2)$. Supposons T compact. On veut montrer que $T^*(B_{F^*})$ est relativement compacte, c'est-à-dire que si $\|\varphi_n\|_{F^*} \leq 1$, on peut extraire de $(T^*\varphi_n)_{n\geq 1}$ une sous-suite convergente. Prenons $X = \overline{T(B_E)}$; c'est un espace métrique compact. Posons

$$\begin{aligned} f_n : \quad X &\longrightarrow \mathbb{K} \\ y &\longmapsto f_n(y) = \langle \varphi_n, y \rangle_{F^*,F.} \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{A} = \{f_n;\ n \geq 1\}$ est bornée

$$\|f\|_\infty = \sup_{y\in X} |\langle \varphi_n, y\rangle| = \sup_{x\in B_E} |\langle \varphi_n, Tx\rangle| \leq \|T\|,$$

et est équicontinue: $|f_n(y) - f_n(y')| \leq \|y - y'\|$ pour tout $n \geq 1$.

Gràce au Théorème d'Ascoli, on peut extraire de $\mathcal{A}$ une suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ convergente $\|f_{n_k} - f\|_{C(X)} \underset{k\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$.
Alors, pour tout $x \in B_E$

$$\langle T^*\varphi_{n_k}, x\rangle = \langle \varphi_{n_k}, Tx\rangle = f_{n_k}(Tx) \underset{k\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} f(Tx).$$

Pour tout $x \in E$, $\psi(x) = \lim\limits_{k\longrightarrow\infty} \langle T^*\varphi_{n_k}, x\rangle$ existe donc $\psi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ est linéaire et $\psi_{\backslash B_E} = f \circ T$. Comme

$$\|\psi(x)\| = \lim_{k\longrightarrow\infty} \left\|T^*\varphi_{n_k}(x)\right\| \leq \|T^*\| \left\|\varphi_{n_k}\right\| \|x\| \leq \|T\| \|x\|,$$

ψ est continue. Donc $\psi \in E^*$. De plus

$$\left\|T^*\varphi_{n_k} - \psi\right\|_E = \sup_{\|x\|\leq 1} \left|\langle T^*\varphi_{n_k} - \psi, x\rangle\right| = \|f_{n_k} - f\|_\infty \underset{k\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$(2) \Longrightarrow (1)$. Si T^* est compact, alors, d'après ce que l'on vient de montrer, $T^{**} : E^{**} \longrightarrow F^{**}$ est compact, c'est-à-dire que $\overline{T^{**}(B_{E^{**}})}$ est compact. Mais, puisque $(T^{**})_{\backslash E} = T$

$$\overline{T(B_E)} \subseteq \overline{T^{**}(B_E)} \subseteq \overline{T^{**}(B_{E^{**}})},$$

est donc aussi compact. Donc T est compact. ■

Théorème 2.2.3 *Soit $T \in \mathcal{W}(E, F)$. Alors nous avons l'équivalence suivante*
(a) L'opérateur T est dans $\mathcal{W}(E, F)$.
(b) L'opérateur adjoint T^* est dans $\mathcal{W}(F^*, E^*)$.

2.3 Idéal des opérateurs linéaire

Définition 2.3.1 ***(Opérateur de rang fini).*** *Soit E, F deux espace de Banach et $T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. On dit que T est de rang fini si dim $T(E) < \infty$.*

L'espace des opérateurs linéaire de rang fini sera noté $\mathcal{L}_f(E, F)$.

Proposition 2.3.1 *[16, Page 25] Soient E et F deux espaces normes, $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est de rang fini si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$, tels que*

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) b_i,$$

où $\varphi_i \in E^*$ et $b_i \in F$, $i = 1,..,n$.

Définition 2.3.2 ***(Opérateur linéaire approximable)***
Soit E, F deux espaces de Banach. Un opérateur linéaire $T \in L(E,F)$ est dit approximable si elle est la limite de la norme $\|.\|$ d'une suites des opérateurs linéaire de rang finis de E dans F.

Corollaire 2.3.1 *D'aprés le Corollaire (2.3.2) tout operateur approximable est compact*

Définition 2.3.3 ***(Idéal linéaire)*** *Un idéal d'opérateur linéaire $\mathcal{I}$ est un classe d'opérateurs tels que pour tout E et F Banach, on a*
(1) $\mathcal{I}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$
(2) $\mathcal{L}_f(E,F) \subset \mathcal{I}(E,F)$
(3) ***Propriétés d'ideal:*** *si $T \in \mathcal{I}(E,F)$, $u \in \mathcal{L}(X,E)$ et $v \in \mathcal{L}(F,Y)$*
alors $v \circ T \circ u \in \mathcal{I}(X,Y)$.
De plus, si $\|.\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ satisfait
(i) $(\mathcal{I}(E,F), \|.\|_{\mathcal{I}})$ est un espace normé (Banach).
(ii) $\left\| \; id_{\mathbb{K}} : \quad \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K};\ \lambda \longmapsto id_{\mathbb{K}}(\lambda) = \lambda \; \right\|_{\mathcal{I}} = 1.$
(iii) $\|v \circ T \circ u\|_{\mathcal{I}} \leq \|v\| \|T\|_{\mathcal{I}} \|u\|$.
Alors $(\mathcal{I}(E,F), \|.\|_{\mathcal{I}})$ s'appelle idéal de Banach des opérateurs linéaires.

Proposition 2.3.2 *$\mathcal{L}_f$ est un idéal des opérateurs linéaire.*

Preuve. 1) $\mathcal{L}_f(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.
(a) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $T \in \mathcal{L}_f(E,F)$. On montre que $\lambda T \in \mathcal{L}_f(E,F)$, alors

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) b_i.$$

Où $\varphi_i \in E^*$ et $b_i \in F$, on a

$$\begin{aligned}
\lambda T(x) &= (\lambda T)(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda\varphi_i(x)\, b_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\lambda\varphi_i)(x) b_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x)\, b_i.
\end{aligned}$$

Comme $(\lambda\varphi_i) = \psi_i \in E^*$.

Donc $\lambda T \in \mathcal{L}_f(E,F)$.

(b) Soient T, $S \in \mathcal{L}_f(E,F)$. On montre que $T + S \in \mathcal{L}_f(E,F)$, alors

$$\begin{cases}
\exists n \in \mathbb{N} : T(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\, a_i \text{ où } \varphi_i \in E^* \text{ et } a_i \in F \\
\exists m \in \mathbb{N} : S(x) = \sum_{i=1}^{m} \phi_i(x)\, b_i \text{ où } \phi_i \in E^* \text{ et } b_i \in F
\end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned}
(T+S)(x) &= T(x) + S(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\, a_i + \sum_{i=1}^{m} \phi_i(x)\, b_i \\
&= \sum_{i=1}^{n+m} \psi_i(x)\, y_i = \sum_{i=1}^{K} \psi_i(x)\, y_i, \text{ où } K = n+m.
\end{aligned}$$

Donc $T + S \in \mathcal{L}_f(E,F)$.

D'aprés (a) et (b), $\mathcal{L}_f(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.

2) $\mathcal{L}_f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}_f \subseteq \mathcal{L}_f$ (par définition).

3) Il suffit de montrer la propriété d'idéal. Soient $T \in \mathcal{L}_f(E,F)$, $u \in \mathcal{L}(X,E)$, $v \in \mathcal{L}(F,Y)$.

On montre que $v \circ T \circ u \in \mathcal{L}_f(X,Y)$. Comme $T \in \mathcal{L}_f(E,F)$, alors

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\, b_i.$$

Soient $n \in \mathbb{N}$, $b_1, ..., b_n \in F$, $\varphi_1, ..., \varphi_n \in E^*$. Pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned}
(v \circ T \circ u)(x) &= v \circ (T(u(x)) \\
&= v \circ (\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(u(x))b_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(u(x))v(b_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i \circ u)(x)\, v(b_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x)\, d_i,
\end{aligned}$$

tels que $\psi_i = \varphi_i \circ u \in E^*$ et $v(b_i) = d_i \in F$.

Ce qui entraine $v \circ T \circ u \in \mathcal{L}_f(E,F)$.

D'aprés (1), (2) et (3) $\mathcal{L}_f(E,F)$ est un idéal linéaire. ■

Corollaire 2.3.2 *Soit (T_n) une suite d'opérateurs continues de rangs finis de E dans F et soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$ tels que $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \longrightarrow 0$. Alors $T \in \mathcal{K}(E,F)$.*

Proposition 2.3.3 *Les ensembles des opérateurs linéaires compacts $\mathcal{K}(E,F)$ et faiblement compacts $\mathcal{W}(E,F)$ Sont des idéaux linéaires.*

Preuve. 1) On démontre que $\mathcal{K}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$.

(a) Soit T_1 et $T_2 \in \mathcal{K}(E,F)$. On montre que $T_1 + T_2 \in \mathcal{K}(E,F)$, alors

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1\text{compact} \Longrightarrow \overline{T_1(B_E)}\text{compact} \\ T_2\text{compact} \Longrightarrow \overline{T_2(B_E)}\text{compact} \end{array} \right. \Longrightarrow \overline{T_1(B_E) + T_2(B_E)} \subset \overline{T_1(B_E)} + \overline{T_2(B_E)}.$$

Ce qui implique que $T_1 + T_2$ est compact.

(b) $\lambda T \in \mathcal{K}(E,F)$ est triviale pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $T \in \mathcal{K}(E,F)$.

2) Tout opérateur de rang fini est compact puisque pour tout $\varepsilon > 0$, $T(B_E)$ peut être recouvert pour un nombre fini de boules $B(y_j, \varepsilon)$ dans F.

3) Supposons que T est compact. Alors $v\left(\overline{T(B_E)}\right)$ est compact, donc fermé, et contient $(v \circ T)(B_E)$ d'où

$$\overline{(v \circ T)(B_E)} \subset v\left(\overline{T(B_E)}\right).$$

Dautre part

$$v\left(\overline{T(B_E)}\right) \subset \overline{(v \circ T)(B_E)},$$

d'où

$$\overline{(v \circ T)(B_E)} = v\left(\overline{T(B_E)}\right),$$

est compact.

Supposons maintenant que u est borné et T compact. Comme u est borné, il existe $r > 0$, tel que $u(B_E) \subset rB_F$. Donc

$$\overline{(T \circ u)(B_E)} \subset r\overline{T(B_E)},$$

est compact.

Finalement, d'aprés $(1), (2)$ et (3), $\mathcal{K}(E, F)$ est un idéal linéaire.

On utilisant le meme preuve pour démontre que $\mathcal{W}(E, F)$ est un idéal linéaire de E à F. ■

Définition 2.3.4 *Le dual d'un opérateur idéal $\mathcal{I}$ est défini comme suit : pour les espaces de Banach E et F*

$$\mathcal{I}^{dual}(E, F) = \{u \in \mathcal{L}(E, F) : u^* \in \mathcal{I}(F^*, E^*)\},$$

où $u^* : F^* \longrightarrow E^*$ est l'adjoint de u. Il est bien connue que $\mathcal{I}^{dual}$ est un idéal de l'opérateur. Nous écrivons $\|u\|_{\mathcal{I}^{dual}} = \|u^*\|_{\mathcal{I}}$.

D'aprés les Theorémes (2.2.1), (2.2.3), on ait

Corollaire 2.3.3 $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{dual}$ *et* $\mathcal{W} = \mathcal{W}^{dual}$.

Chapitre 3

Ideal des opérateurs lipschitziens compacts et faiblement compacts

3.1 Compacité pour les opérateurs lipschitziens

Soient X un espace métrique pointé et E un espace de Banach, et soit l'application $T : X \longrightarrow E$. L'ensemble $\left\{ \frac{T(x)-T(y)}{d(x,y)} : x, y \in X,\ x \neq y \right\}$ est appelé image lipschitzienne de T.

Elle est clair que l'application $T : X \longrightarrow E$ est lipschitzienne si son image lipschitzienne est borné dans E, en effet si $\left\{ \frac{T(x)-T(y)}{d(x,y)} : x, y \in X,\ x \neq y \right\}$ est borné alors il existe une constante $C \geq 0$ tels que

$$\left\| \frac{T(x) - T(y)}{d(x, y)} \right\| \leq C, \text{ pour tout } x, y \in X.$$

Ce qui implique que $\|T(x) - T(y)\| \leq Cd(x, y)$. C'est-à-dire T est lipschitzienne.

Définition 3.1.1 *Soient X un espace métrique pointé et E un espace de Banach. On dit que un opérateur $T \in Lip_0(X, E)$ est Lipschitz compact (resp. Lipschitz faiblement compact) si son image lipschitzienne est relativement compact (resp. relativement faiblement compact) dans E.*
On note par $Lip_{0K}(X, E)$ et $Lip_{0W}(X, E)$ les ensembles des opérateurs lipschitziens compact et faiblement compact entre X et E, respectivement. On a

$$Lip_{0K}(X, E) \subset Lip_{0W}(X, E) \subset Lip_0(X, E).$$

Notons que $Lip_{0K}(X, E)$ et $Lip_{0W}(X, E)$ sont des sous-espaces véctorieles de $Lip_0(X, E)$.

Pour la démonstration de la proposition ci dessus, on a besoin le lemme suivante.

Lemme 3.1.1 *Soit* $T \in Lip_0(X, E)$. *On consédère sur* $\tilde{X} = \{(x, y) \in X^2 : x \neq y\}$ *l'application suivant*

$$\begin{array}{rccl} \delta_{\tilde{X}} : & \tilde{X} & \longrightarrow & \left(X^{\#}\right)^* \\ & (x, y) & \longmapsto & \delta_{\tilde{X}}(x, y) := \delta_{(x,y)} \text{ (voir Notation (1.6.1)).} \end{array}$$

Alors

$$T_L\left(\delta_{\tilde{X}}\left(\tilde{X}\right)\right) \subset T_L\left(\overline{\Gamma}\left(\delta_{\tilde{X}}\left(\tilde{X}\right)\right)\right) \subset \overline{\Gamma}\left(T_L\left(\delta_{\tilde{X}}\left(\tilde{X}\right)\right)\right).$$

Preuve. On démontre que $T_L\left(\delta_{\tilde{X}}\left(\tilde{X}\right)\right) \subset T_L\left(\overline{\Gamma}\left(\delta_{\tilde{X}}\left(\tilde{X}\right)\right)\right)$. On a

$$\delta_{\tilde{X}}\left(\tilde{X}\right) \subset \overline{\Gamma}\left(\delta_{\tilde{X}}\left(\tilde{X}\right)\right) \text{ (par définition).}$$

D'ou

$$T_L\left(\delta_{\tilde{X}}\left(\tilde{X}\right)\right) \subset T_L\left(\overline{\Gamma}\left(\delta_{\tilde{X}}\left(\tilde{X}\right)\right)\right).$$

Pour la dexiéme inclusion on prend $z_1 \in T_L\left(\overline{\Gamma}\left(\delta_{\tilde{X}}\left(\tilde{X}\right)\right)\right) \Rightarrow \exists z_2 \in \overline{\Gamma}\left(\delta_{\tilde{X}}\left(\tilde{X}\right)\right)$, telle que $z_1 = T_L(z_2)$, ce que implique il existe $b_n \in \Gamma(\delta_{\tilde{X}}\left(\tilde{X}\right))$ telle que, $z_2 = \lim_n b_n$, et $b_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} \delta_{(x_i^{(n)}, y_i^{(n)})}$ d'ou

$$\begin{aligned} z_1 &= T_L(z_2), \\ &= T_L\left(\lim_n b_n\right), \\ &= T_L\left(\lim_n \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} \delta_{(x_i^{(n)}, y_i^{(n)})}\right), \\ &= \lim_n \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} T_L\left(\delta_{(x_i^{(n)}, y_i^{(n)})}\right). \end{aligned}$$

D'ou $z_1 \in \overline{\Gamma}\left(T_L\left(\delta_{\tilde{X}}\left(\tilde{X}\right)\right)\right)$. On obtient finalement que

$$T_L\left(\delta_{\tilde{X}}\left(\tilde{X}\right)\right) \subset T_L\left(\overline{\Gamma}\left(\delta_{\tilde{X}}\left(\tilde{X}\right)\right)\right) \subset \overline{\Gamma}\left(T_L\left(\delta_{\tilde{X}}\left(\tilde{X}\right)\right)\right).$$

Ceci termine la preuve. ■

Proposition 3.1.1 *Soient* X *un espace métrique pointé et* E *un espace de Banach et soit* $T \in Lip_0(X, E)$. *Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) T *est lipschitz compact.*

(ii) T_L *est compact.*

Preuve. On a

$$\begin{aligned} T_L\left(\delta_{\tilde{X}}\left(\tilde{X}\right)\right) &= \left\{T_L\left(\delta_{\tilde{X}}(x,y)\right);\ x,y\in X,\ x\neq y\right\} \\ &= \left\{T_L\left(\frac{\delta_x-\delta_y}{d(x,y)}\right);\ x,y\in X,\ x\neq y\right\} \text{ (voir Notation (1.6.1))} \\ &= \left\{\frac{T_L\circ\delta_x - T_L\circ\delta_y}{d(x,y)};\ x,y\in X,\ x\neq y\right\} \\ &= \left\{\frac{T(x)-T(y)}{d(x,y)};\ x,y\in X,\ x\neq y\right\}. \end{aligned}$$

D'aprés le Lemme (3.1.1) et la Proposition (1.6.1(ii)), on a

$$T_L\left(\delta_{\tilde{X}}\left(\tilde{X}\right)\right)\subset T_L\left(B_{\mathcal{F}(X)}\right)\subset\overline{\Gamma}\left(T_L\left(\delta_{\tilde{X}}\left(\tilde{X}\right)\right)\right).$$

C'est-à-dire

$$\overline{\left\{\frac{T(x)-T(y)}{d(x,y)};\ x,y\in X,\ x\neq y\right\}}\subset\overline{T_L\left(B_{\mathcal{F}(X)}\right)}\subset\overline{\Gamma}\left(\left\{\frac{T(x)-T(y)}{d(x,y)};\ x,y\in X,\ x\neq y\right\}\right).$$

$(ii)\Rightarrow(i)$ On suppose que T_L est compact donc $\overline{T_L\left(B_{\mathcal{F}(X)}\right)}$ est compact, alors

$$\overline{\left\{\frac{T(x)-T(y)}{d(x,y)};\ x,y\in X,\ x\neq y\right\}},$$

est compact (voir la Proposition (2.1.2)), ce que implique T est Lipshitz compact.

$(i)\Rightarrow(ii)$ On suppose que T est Lipschitz compact donc

$$\overline{\left\{\frac{T(x)-T(y)}{d(x,y)};\ x,y\in X,\ x\neq y\right\}},$$

est relativement compact, et par conséquence

$$\overline{\Gamma}\left\{\frac{T(x)-T(y)}{d(x,y)};\ x,y\in X,\ x\neq y\right\},$$

est compact (Si A est relativement compact $\Rightarrow\overline{\Gamma}(A)$ est compact). On a aussi

$$\overline{T_L\left(B_{\mathcal{F}(X)}\right)}\subset\overline{\Gamma}\left\{\frac{T(x)-T(y)}{d(x,y)};\ x,y\in X,\ x\neq y\right\}.$$

D'ou la Proposition (2.1.2)) assuré que $\overline{T_L\left(B_{\mathcal{F}(X)}\right)}$ est compact $\Rightarrow T_L$ est compact.

On obtient finalement que $(i)\Leftrightarrow(ii)$. ■

Proposition 3.1.2 *Soient X un espace métrique pointé et E un espace de Banach et soit $T \in Lip_0(X, E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*
(i) L'opérateur T est lipschitzien faiblement compact.
(ii) L'opérateur T_L est faiblement compact.
(iii) Il existe un espace de Banach réflexif F, un opérateur linéaire bornée $S \in \mathcal{L}(F, E)$ et un opérateur lipschitzien $g \in Lip_0(X, F)$, tel que $T = S \circ g$.

Preuve. La preuve de la Proposition (3.1.1) est valable pour montrer l'équivalence entre (i) et (ii). Si (ii) est vraie, en appliquant le Théorème de Davis-Figiel-Johnson-Pelczynski [10], il existe un espace de Banach réflexif F et deux opérateurs linéaire $S \in \mathcal{L}(F, E)$ et $R \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(X), F)$ tel que $T_L = S \circ R$. Soit $g = R \circ \delta_X$, Clairement, $g \in Lip_0(X, F)$, et $T = T_L \circ \delta_X = S \circ R \circ \delta_X = S \circ g$, ce qui prouve (iii). Enfin, (iii) implique (ii) est trivial. ■

Nous montrons maintenant la propriété idéal pour ces nouvelles catégories d'opérateurs lipschitziens.

Proposition 3.1.3 *Soient X et Y deux espaces métriques pointé, et soient E et F deux espaces de Banach. Soit $h \in Lip_0(Y, X)$ et $S \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $T \in Lip_{0K}(X, E)$, alors $S \circ T \circ h \in Lip_{0K}(Y, F)$.*

Preuve. Par ([15, Lemma 3.1]), il existe un unique opérateur linéaire $\hat{h} : \mathcal{F}(Y) \longrightarrow \mathcal{F}(X)$ vérifiant $\hat{h} \circ \delta_Y = \delta_X \circ h$

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{h} & X & \xrightarrow{T} & E & \xrightarrow{S} & F. \\ \delta_Y \downarrow & & \delta_X \downarrow & \nearrow T_L & & & \\ \mathcal{F}(Y) & \xrightarrow{\hat{h}} & \mathcal{F}(X) & & & & \end{array}$$

L'application, $S \circ T \circ h \in Lip_0(Y, F)$. En effet, on a $\|S \circ T \circ h(x) - S \circ T \circ h(y)\| \leq \|S\| \, Lip(T) \, Lip(h) \, d(x, y)$ et $(S \circ T \circ h)(0) = 0$. Alors, par la Proposition (1.6.2 (b)), il existe une unique application $(S \circ T \circ h)_L$ telle que $S \circ T \circ h = (S \circ T \circ h)_L \circ \delta_Y$. C'est-à-dire, on a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{S \circ T \circ h} & F \\ \delta_Y \downarrow & \nearrow (S \circ T \circ h)_L & \\ \mathcal{F}(X) & & \end{array}$$

On a $S \circ T_L \circ \hat{h} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}(Y), F)$ alors $(S \circ T \circ h)_L = S \circ T_L \circ \hat{h} \in \mathcal{K}(\mathcal{F}(Y), F)$, en appliquant la Proposition (3.1.1) on obtient $S \circ T \circ h \in Lip_{0K}(Y, F)$. ■

Proposition 3.1.4 *Soit X et Y deux espaces métriques pointé et soit E et F deux espaces de Banach. Soit $h \in Lip_0(Y, X)$ et $S \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $T \in Lip_{0W}(X, E)$, alors $S \circ T \circ h \in Lip_{0W}(Y, F)$.*

Preuve. La preuve de la Proposition (3.1.3) est valable pour montrer la Proposition (3.1.4), mais nous préférons une nouvelle approche. Si $T \in Lip_{0W}(X, E)$, alors T admet un factorisation sous la forme

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "h"] & X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "R"'] & E \arrow[r, "S"] & F \\ & F \arrow[ur, "g"'] & & \end{tikzcd}$$

avec $g \in \mathcal{L}(F, E)$ et $R \in Lip_0(X, F)$, F un espace de Banach réflexive. On a $S \circ T \circ h = S \circ g \circ R \circ h$. Par la Proposition (3.1.2), on obtient $S \circ T \circ h \in Lip_{0W}(Y, F)$. ■

3.2 Idéal des opérateurs lipschitziens

3.2.1 Les opérateurs lipschitziens de rang finie

Définition 3.2.1 *Soient X un espace métrique pointé et E un espace de Banach. Un opérateur lipschitzien $T \in Lip_0(X, E)$ est de Lipschitz de rang finie si le sous espace vectoriel vect $\left\{ \frac{T(x)-T(y)}{d(x,y)};\ x, y \in X,\ x \neq y \right\} \subset E$ a de dimension finie.*

Remarque 3.2.1 *Soient E un espace vectoreil est soit X une sous ensemble de E un opérateur $T : X \longrightarrow E$ (n'est pas nécessairement linéaire) est de rang finie si le sous espace vectoriel vect$\{T(x),\ x \in X\} \subset E$ a de dimension finie.*

Proposition 3.2.1 *Soient X un espace métrique pointé et E un espace de Banach et soit $T \in Lip_0(X, E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) L'opérateur T est lipschitzien est de rang finie.

(ii) L'opérateur T est de rang finie.

(iii) La linéarisation $T_L \in L(\mathcal{F}(X), E)$ est de rang finie.

Proposition 3.2.2 *Soient X un espace métrique pointé et E un espace de Banach et soit $T \in Lip_0(X,E)$. Si T est de rang finie alors T admet une représentation de la forme $T = \sum_{i=1}^{n} v_i g_i$; $v_i \in E$, $g_i \in X^{\#}$.*

Preuve. Soit $T = \sum_{i=1}^{n} v_i g_i$; $v_i \in E$, $g_i \in X^{\#}$. Pour tout $x \in X$, on a

$$\begin{aligned} T(x) &= T_{L\circ}\delta_X(x) \\ &= T_L \circ \delta_x \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\, v_i \circ \delta_x;\ \ \varphi_i \in \mathcal{F}(X)^*,\ \ v_i \in E \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\delta_x)\, v_i \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} R(g_i)(\delta_x)\, v_i \text{ telle que } R(g_i) = \varphi_i \text{ voir la Proposition } (1.6.1\ \ (ii)) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} g_i(x)\, v_i. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de la proposition. ■

Définition 3.2.2 ***(Opérateur Lipschitz approximable)*** *Soit X un espace métrique pointé et E un espace de Banach. Un opérateur lipschitzien $f \in Lip_0(X,E)$ est dit Lipschitz approximable si elle est la limite de la norme Lip d'une suites des opérateurs lipschitziens de rang finis de X dans E.*

Il est clair que tout opérateur Lipschitz approximable de X à E est Lipschitz compact en appliquant les Propositions (1.6.2 (b)), (3.1.1) et (3.2.1).

3.2.2 La version Lipschitzienne du Théorème de Schauder

Soient X un espace métrique pointé et Y un espace de Banach. Sawashima [17] a défini l'adjoint lipschitzien $T^{\#} : Lip_0(Y) \longrightarrow Lip_0(X)$ d'une application lipschitzienne $T \in Lip_0(X,Y)$ par la formule

$$\begin{array}{rccc} T^{\#}: & Lip_0(Y) & \longrightarrow & Lip_0(X) \\ & g & \longmapsto & T^{\#}(g) = g \circ T \end{array}$$

L'opérateur $T^{\#}$est linéaire continue et $\left\|T^{\#}\right\| = Lip(T)$. La restriction de $T^{\#}$ sur E^* définit un opérateur linéaire continue appelé l'opérateur transposé lipschitzien de T et noté ici par T^t on a aussi $\|T^t\| = Lip(T)$.

Proposition 3.2.3 *Soient X un espace métrique pointé et E un espace de Banach et soit $T \in Lip_0(X,E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*
(i) T est lipschitzien faiblement compact.
(ii) T^t est faiblement compacte de E^* dans $X^{\#}$.

Preuve. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Soit l'isomorphe isomtrie S comme indiqué dans la démonstration du Proposition (1.6.1).

$$S: \quad \mathcal{F}(X)^* \quad \longrightarrow \quad Lip_0(X).$$

D'ou

$$\begin{aligned} T \in Lip_{0W}(X,E) \quad &\Leftrightarrow \quad T_L \in \mathcal{W}(\mathcal{F}(X), E) \\ &\Leftrightarrow \quad (T_L)^* \in \mathcal{W}(E^*, \mathcal{F}(X)^*) \\ &\Leftrightarrow \quad S \circ (T_L)^* \in \mathcal{W}\left(E^*, X^{\#}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad T^t \in \mathcal{W}\left(E^*, X^{\#}\right), \end{aligned}$$

en appliquant la Proposition (3.1.2), la Théoreme de Gantmacher (voir la Proposition (2.2.3)), le fait que l'espace des opérateurs linéaires faiblement compacts est un Banach d'opérateur idéal linéaire injective et l'égalité $T^t = S \circ (T_L)^*$ comme indiqué dans la démonstration du Proposition (1.6.1). ■

Nous formulons maintenant une version Lipschitz du théorème de Schauder sur la compacité de l'adjoint d'un opérateur linéaire compact.

Proposition 3.2.4 *Soient X un espace métrique pointé et E un espace de Banach et soit $T \in Lip_0(X,E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*
(i) T est lipschitz compact.
(ii) T^t est compact de E^* dans $X^{\#}$.

Preuve. D'après la Proposition (3.1.1), le théorème de Schauder et le fait que l'espace de compact opérateurs linéaires entre les espaces de Banach est un Banach d'opérateurs idéal linéaire injective, on en déduit que

$$\begin{aligned} T \in Lip_{0K}(X,E) \quad &\Leftrightarrow \quad T_L \in \mathcal{K}(\mathcal{F}(X), E) \\ &\Leftrightarrow \quad (T_L)^* \in \mathcal{K}(E^*, \mathcal{F}(X)^*) \\ &\Leftrightarrow \quad S \circ (T_L)^* \in \mathcal{K}\left(E^*, X^{\#}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad T^t \in \mathcal{K}\left(E^*, X^{\#}\right), \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de la proposition. ■

3.2.3 L'idéal des opérateurs lipschitzien

Le but de cette section est présenter le concept de Lipschitz opérateur idéal qui introduire par [1] .

Définition 3.2.3 ***(Idéal Lipschitz)*** *Un idéal d'opérateur lipschitzien* $\mathcal{I}_{Lip}$ *est un sous classe de* Lip_0 *tels que pour tout espace métrique pointé* X *et tout espace de Banach* E*, les composants* $\mathcal{I}_{Lip}(X,E) := Lip_0(X,E) \cap \mathcal{I}_{Lip}$*, satisfait*
(i) $\mathcal{I}_{Lip}(X,E)$ *est un sous espace vectoriel de* $Lip_0(X,E)$
(ii) $vg \in \mathcal{I}_{Lip}(X,E)$ *pour* $v \in E$ *et* $g \in X^{\#}$
(iii) ***Propriété d'idéal:*** *si* $S \in Lip_0(Y,X)$*,* $T \in \mathcal{I}_{Lip}(X,E)$ *et* $w \in \mathcal{L}(E,F)$
alors $w \circ T \circ S \in \mathcal{I}_{Lip}(Y,F)$*.*
De plus, si $\|.\|_{\mathcal{I}_{Lip}} : \mathcal{I}_{Lip} \longrightarrow [0,+\infty[$ *satisfait*
(i′) $(\mathcal{I}_{Lip}(X,E), \|.\|_{\mathcal{I}_{Lip}})$ *est un espace normé (Banach) et* $Lip(T) \leq \|T\|_{\mathcal{I}_{Lip}}$ *pour tout* $T \in \mathcal{I}_{Lip}(X,E)$
(ii′) $\|id_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ id_{\mathbb{K}}(\lambda) = \lambda\|_{\mathcal{I}_{Lip}} = 1$
(iii′) $\|w \circ T \circ S\|_{\mathcal{I}_{Lip}} \leq Lip(S)\,\|T\|_{\mathcal{I}_{Lip}}\,\|w\|$.
Alors, $(\mathcal{I}_{Lip}(X,E), \|.\|_{\mathcal{I}_{Lip}})$ *s'appelle idéal de Banach des opérateurs lipshitziens.*

Les auteurs dans leurs article [1, section 3], ils donnent deux manières pour créer un idéal d'opérateur lipschitzien.

3.2.4 Méthode de Composition

Définition 3.2.4 *Soit* T *un idéal des opérateurs linéaires, un opérateur lipshitzien* $T \in Lip_0(X,E)$ *appartient à l'opérateur composition d'idéal lipschitzien* $\mathcal{I} \circ Lip_0$ *notée* $T \in I \circ Lip_0(X,E)$*, s'il y a un espace de Banach* F*, un opérateur lipschitzien* $S \in Lip_0(X,F)$ *et un opérateur linéaire* $u \in \mathcal{I}(F,E)$*, telle que* $T = u \circ S$*. Si* $(\mathcal{I}, \|.\|_{\mathcal{I}})$ *est un opérateur idéal normé nous écrivons* $\|T\|_{\mathcal{I}\circ Lip_0} = \inf \|u\|_{\mathcal{I}}\, Lip(S)$*.*

Proposition 3.2.5 *Soit* $\mathcal{I}$ *un idéal d'opérateur linéaire, pour* $T \in Lip_0(X,E)$*. Les assertions suivantes sont équivalentes*
(1) $T \in \mathcal{I} \circ Lip_0(X,E)$*.*

(2) $T_L \in \mathcal{I}(\mathcal{F}(X), E)$.
Si $(\mathcal{I}, \|.\|_{\mathcal{I}})$ *est un opérateur idéal normé, on a* $\|T\|_{\mathcal{I}\circ Lip_0} = \|T_L\|_{\mathcal{I}}$.

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) Supposons que $T \in \mathcal{I} \circ Lip_0(X, E)$. Ensuite, il existe un espace de Banach F, un opérateur lipschitzien $S \in Lip_0(X, F)$ et un opérateur linéaire $u \in \mathcal{I}(F, E)$ de telle sorte que $T = u \circ S$. Depuis $T_L = u \circ S_L$ la propriété idéale garantit que $T_L \in \mathcal{I}(\mathcal{F}(X), E)$. Si $(\mathcal{I}, \|.\|_{\mathcal{I}})$ est normé alors

$$\|T_L\|_{\mathcal{I}} = \|u \circ S_L\|_{\mathcal{I}} \leq \|u\|_{\mathcal{I}} \|S_L\| = \|u\|_{\mathcal{I}} Lip(S).$$

Prendre le infimum sur tous ces factorisations nous obtenons $\|T_L\|_{\mathcal{I}} \leq \|T\|_{\mathcal{I}\circ Lip_0}$.
(2) $\Rightarrow$ (1) Considérons la factorisation de T donnée par $T = T_L \circ \delta_X$. Depuis δ_X est Lipschitz et$T_L \in \mathcal{I}(\mathcal{F}(X), E)$, puis $T \in \mathcal{I} \circ Lip_0(X, E)$ et, si $(\mathcal{I}, \|.\|_{\mathcal{I}})$ est normés nous avoir

$$\|T\|_{\mathcal{I}\circ Lip_0} = \|T_L \circ \delta_X\|_{\mathcal{I}\circ Lip_0} \leq \|T_L\|_{\mathcal{I}} Lip(\delta_X) = \|T_L\|_{\mathcal{I}}.$$

Ceci termine la preuve de la proposition. ■

Corollaire 3.2.1 *Soient X un espace métrique pointé et E un espace de Banach. On a*

- $Lip_{0\mathcal{K}}(X, E) = \mathcal{K} \circ Lip_0(X, E)$ isométriquement.
- $Lip_{0\mathcal{W}}(X, E) = \mathcal{W} \circ Lip_0(X, E)$ isométriquement.

Proposition 3.2.6 *Si $\mathcal{I}$ est un (normé, fermé, Banach, injective) opérateur idéal alors, $\mathcal{I} \circ Lip_0$ est un (respectivement normé, fermé, Banach, injective) Lipschitz opérateur idéal.*

Corollaire 3.2.2 *Soitent X un espace métrique pointé et E un espace de Banach. Les espaces $Lip_{0K}(X, E)$ et $Lip_{0W}(X, E)$, sont des espace de Banach d'idéal Lipschitzien injective, avec la norme $Lip(.)$.*

3.2.5 Méthode de dualité

Définition 3.2.5 *Le Lipschitz dual d'un opérateur d'idéal $\mathcal{I}$ est défini par*

$$\mathcal{I}^{Lip_0-dual}(X, E) = \left\{T \in Lip_0(X, E) : T^t \in \mathcal{I}(E^*, X^{\#})\right\}.$$

Théorème 3.2.1 *[1, Théorém 3.9] Soit $\mathcal{I}$ un idéal d'opérateur linéaire Alors,*

$$\mathcal{I}^{Lip_0-dual} = \mathcal{I}^{dual} \circ Lip_0.$$

Corollaire 3.2.3 *Un opérateur lipschitzien est compact (faiblement compact) si, et seulement si, sa transposée est compact (faiblement compact).*

Preuve. Nous obtenons les résultats directement à partir de la Corollaire (3.2.1) la Proposition (2.3.3) et la Théorème (3.2.1). En effet, ils donnent les égalités

$Lip_{0\mathcal{K}} = \mathcal{K} \circ Lip_0 = \mathcal{K}^{dual} \circ Lip_0 = \mathcal{K}^{Lip_0-dual}$ et $Lip_{0\mathcal{W}} = \mathcal{W} \circ Lip_0 = \mathcal{W}^{dual} \circ Lip_0 = \mathcal{W}^{Lip_0-dual}$.

Ceci termine la preuve. ■

Nous finisson cet mémoire par donons quelque exmples des opérateurs lipschitziens compact est faiblement compact

3.3 Exemples

3.3.1 Opérateur lipschitzien fortement p-intégrale

Soient X un espace métrique pointé, E un espace de Banach et $1 \leq p < \infty$. Les opérateur lipschitzien fortement p-intégrale a été introduite par A. Jiménez-Vargas, J.M. Sepulcre et Moisés Villegas-Vallecillos dans [13] (voir aussi [5] mais pas le méme definition). un opérateur $T \in Lip_0(X, E)$ est appelé un opérateur lipschitzien fortement p-intégrale s'il existe un espace de mesure finie (Ω, Σ, μ), un opérateur linéaire borné $A \in \mathcal{L}(L_P(\mu), E^{**})$, un opérateur lipschitzien $b \in Lip_0(X, L_\infty(\mu))$ tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} L_\infty(\mu) & \xrightarrow{I_{\infty,p}} & L_p(\mu) \\ b \uparrow & & \downarrow A \\ X \xrightarrow{T} E & \xrightarrow{J_E} & E^{**} \end{array}$$

où $I_{\infty,P} : L_\infty(\mu) \to L_P(\mu)$ est l'opérateur d'inclusion.

Proposition 3.3.1 *Soient X un espace métrique pointé, E un espace de Banach et $1 \leq p < \infty$. Chaque opérateur lipschitzien fortement p-intégrale de X dans E est lipschitzien faiblement compact.*

Preuve. Soit $T : X \to E$ un lipschitzien fortement p-intégrale, donc on la factorisatione suivante

$$\begin{array}{lll} X \xrightarrow{T} E & \xrightarrow{J_E} & E^{**} \\ \downarrow I_{\infty,p} \circ b & \nearrow A & \\ L_p(\mu) & & \end{array}$$

Si $p > 1$, alors $L_p(\mu)$ est réflexive, d'où par la Proposition 3.1.2 $J_E \circ F$ est lipschitzien faiblement compact, et ainsi est également T par la Corollaire (3.2.2).

Pour le cas $p = 1$, soient $q > 1$ et l'opérateur $I_{\infty,1} : L_\infty(\mu) \to L_1(\mu)$. Donc on a la factorisatione suivante

$$\begin{array}{lll} X \xrightarrow{T} E & \xrightarrow{J_E} & E^{**} \\ \downarrow I_{\infty,q} \circ b & \nearrow I_{\infty,1 \circ A} & \\ L_q(\mu), & & \end{array}$$

où $I_{q,1}$ et $I_{\infty,q}$ sont les injections canoniques. L'espace $L_q(\mu)$ est réflexive, d'où par la Proposition (3.1.2) $J_E \circ F$ est lipschitzien faiblement compact, et ainsi est également T par la Corollaire (3.2.2). ■

3.3.2 Opérateur lipschitzien fortement p-nucléair

Soit $1 \leq p < \infty$. Les opérateur lipschitzien fortement p-nucléair a été introduite par D. Chen et B. Zheng dans [5]. Soient X un espace métrique pointé, E un espace de Banach et $1 \leq p < \infty$. Un opérateur $T \in Lip_0(X, E)$ est appelé lipschitzien fortement p-nucléair s'il existe, un opérateur linéaire borné $A \in \mathcal{L}(\ell_p, E)$, un opérateur lipschitzien $b \in Lip_0(X, \ell_\infty)$ et un opérateur diagonal $M_\lambda \in \mathcal{L}(\ell_\infty, \ell_p)$, tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & E \\ b \downarrow & & \uparrow A \\ \ell_\infty & \xrightarrow{M_\lambda} & \ell_p \end{array}$$

Proposition 3.3.2 *Soient X un espace métrique pointé, E un espace de Banach et $1 \leq p < \infty$. Chaque opérateur lipschitzien fortement p-nucléair de X dans E est lipschitzien faiblement compact.*

Preuve. Soit $T : X \to E$ un opérateur lipschitzien fortement p-nucléair. Donc on a la factorisation suivante

$$T = AM_\lambda b : X \xrightarrow{b} \ell_\infty \xrightarrow{M_\lambda} \ell_p \xrightarrow{A} E.$$

Soit b_L le linéaristion de b. Donc l'opérateur T_L admet la factorization suivante

$$T_L = AM_\lambda b_L : X \xrightarrow{b_L} \ell_\infty \xrightarrow{M_\lambda} \ell_p \xrightarrow{A} E.$$

Ce qui implique que T_L est p-nucléair et par [5, Corallaire 2.2.5] T_L est faiblement compact. Alors T est Lipschitz faiblement compact. ∎

Proposition 3.3.3 *[13, Proposition 2.7] Soient X un espace métrique pointé, E un espace de Banach et $1 \leq p < \infty$. Chaque opérateur lipschitzien fortement p-nucléair de X dans E est Lipschitz compact.*

3.3.3 Opérateur lipschitzien fortement p-sommant

La version lipschitzien d'opérateurs fortement p-sommants $(1 < p \leq \infty)$ a été introduite par R. Yahi, D. Achour and P. Rueda [20]. Il sont appelés alors opérateurs lipschitzien fortement p-sommants. Soit $1 < p \leq \infty$. Un opérateur lipschitzien $T \in Lip_0(X, E)$ est appelé lipschitzien fortement p-sommant, s'il existe, un espace de Banach F, et un opérateur $S \in D_P(F, E)$ (i.e., $S^* \in \Pi_p(E^{*\cdot}, F^*)$) tels que

$$|\langle y^*, T(x) - T(x')| \leq d(x, x') \|S^*(y^*)\|. \tag{3.1}$$

Pour tout $x, x' \in X; y^* \in E^*$. On note par $D^L_{st,p}(X, E)$ l'ensemble des opérateurs lipschitz fortement p-sommant, entre X et E . Pour tout $T \in D^L_{st,p}(X, E)$ on pose $d^L_{st,p}(T) = \inf d_p(S)$. tels que S vérifie linégalité (3.1).

Proposition 3.3.4 *Soient X un espace métrique pointé, E un espace de Banach et $1 < p \leq \infty$, tout opérateur fortement lipschitzien p-sommant entre X et E est Lipschitz faiblement compact.*

Preuve. Dans [20, Théoréme 4.1], on ait

$$T \in D^L_{st,p}(X, E) \Leftrightarrow T^t \in \Pi_q(E^*, X^\#).$$

Comme tout opérateur q-sommant est faiblement compact (voir [9]) alors d'aprés la Proposition (3.2.3), tout opérateur fortement lipschitzien p-sommant entre X et E est Lipschitz faiblement compact. ■

Conclusion

A la fin de ce travail, nous avons donné la forme lipchitzienne des opérateurs compacts et faiblement compacts définis entre un espace métrique pointé et un espace de Banach, en présentant les théorèmes de Schauder et Gantmacher dans ce sens.

Dans le cadre de théorème de Schauder nous obtenons le problème suivant.

Problème.

Est ce que si $T \in Lip_0(X; E)$ est compact si et seulement si $T^{\#}$ est compact ?

Bibliographie

[1] D. Achour, P. Rueda, E. A. Sánchez-Pérez and R. Yahi, Lipschitz operator ideals and the approximation property. J. Math. Anal. Appl. 436 (2016), 217–236.

[2] R. F. Arens and J. Eels, *On embedding uniform and topological spaces*, Pacific J. Math **6** (1956), 397-403.

[3] Ş. Cobzaş. *Adjoints of Lipschitz mappings*, Studia Univ. "Babeş–Bolyai", Mathematica, **XLVIII** (1), (2003), 49-54.

[4] D. Chen and B. Zheng. *Remarks on Lipschitz p-summing operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **139** (8), (2011), 2891-2898.

[5] D. Chen, B. Zheng. Lipschitz p-integral operators and Lipschitz p-nuclear operators, Nonlinear Anal. 75 (13) (2012), 5270–5282.

[6] G. Carlier. Analyse fonctionnelle, ENS, 2008.

[7] S. Cobzas. Compactness in spaces of Lipschitz functions, Rev. Anal. Numér. Théor.Approx., 30(2001), 9-14.

[8] J. Dixmier. *Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs"* Bull. Soc. Math. France, **81** (1953), 9-39.

[9] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge. *Absolutely summing operators"* Cambridge Studies in Advanced mathematics **43** Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[10] W. J. Davis, T. Figiel, W. B. Johnson and A. Pelczynski. Factoring weakly compact operators, J. Funct. Anal.17 (1974), 311–327.

[11] T. Fiegiel and N. Tomczack-Jaegermann. *Projections onto hilbertian subspaces of Banach spaces*, Israel J. Math. **33** (1979), 155-171.

[12] J. D. Farmer and W.B. Johnson. *Lipschitz p-summing operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (9) (2009), 2989-2995.

[13] A. Jiménez-Vargas, J. M. Sepulcre, Moisés Villegas-Vallecillos, Lipschitz compact operators, J. Math. Anal. Appl. 415 (2) (2014) 889-901.

[14] N. J. Kalton and G. Godefroy. *Lipschitz-free Banach spaces*, Studia Math. **159** (2003), 121-141.

[15] N. J. Kalton. *Spaces of Lipschitz and Hölder functions ant their applications*, Collect. Math. **55**(2) (2004), 171-217.

[16] A. Pietsch, Operator Ideals, Deutsch. Verlag Wiss, Berlin, 1978; North-Holland, Amsterdam-London-New York-Tokyo, pp. 247-259.

[17] I. Sawashima. *Methods of Lipschitz duals*, in Lecture Notes Ec. Math. Sust, **419**, Springer Verlag (1975), 247-259.

[18] S. Shirali and H. L. Vasudeva. Metric spaces, Springer-Verlag London Li-mited (2006).

[19] N. Weaver. *Lipschitz Algebras*, World Scientific, Singapore 1999.

[20] R. Yahi, D. Achour and P. Rueda. Absolutely summing Lipschitz conjugates. Mediterranean J. Math. 10.1007/s00009-015-0623-2.