UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMTIQUE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du *Diplôme de Master*

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option: Mathématiques Appliquées et Discrètes

Par

Ghania FELLAK

SUJET

Une étude sur les axiomes de linéarité des pré-ordres

Dirigé par : Dr. Lemnaouar ZEDAM

M C (A) – Université de M'sila

Composition du jury:

Président:	Abdelkader	GASMI	MC(A)	Univ. de M'sila
Rapporteur:	Lemnaouar	ZEDAM	MC(A)	Univ. de M'sila
Examinateur:	Nouredine	MIDOUNE	MC(B)	Univ. de M'sila.

Promotion: 2012/2013

Remerciements

Je rends ma profonde gratitude au Allah qui m'a aidé à réaliser ce modeste travail. Je tiens tout particulièrement à exprimer ma profonde gratitude à mes parents pour leur encouragement, leur soutien et pour les sacrifices qu'ils ont enduré, Je tiens à remercier vivement mon promoteur le Professeur Lemnaouar ZEDAM, d'avoir accepté de diriger ce travail et de créer autour de moi un environnement de recherche par ses conseils et son soutien permanent . Je remercie, ainsi toute l'équipe du département de Mathématiques. En fin Je tiens à remercier tous ceux qui m'ont participé de prés ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Table des matières

Introduction

Dans la théorie des ensembles classiques, une relation binaire R sur un ensemble X est un pré-ordre si elle est réflexive et transitive et présenté une généralisation des concept de l'ordre et pré-ordre, en commençant avec un reflexive et transitive, mais ne pas nécessairement antisymétrique, avec cette approche que nous pouvons prouver presque tous les théorémes de base de théorie de pré-ordre.

Le but de ce mémoire est d'étudier quelques propriétés des relations de pré-ordres et les axiomes de linéarité des pré-ordre.

Notre mémoire est réparti en trois chapitres.

Dans le premier chapitre nous donnons quelques définitions des ensembles ordonné et résultats préliminaires de la théorie des ensembles et des relations.

Dans le second chapitre: Nons étudions les ensemble pré-ordonné et des exemples du relation pré-ordre et nous avons traité quelques proprietés.

Dans le troisième chapitre nous étudions les axioms de léniarité d'un ordre, ordres obtenu à partir d'un pré-ordre et les axioms de léniarité d'un pré-ordre .

Enfin, le mémoire se termine par une conclusion générale qui récapitule les travaux présent

Chapitre 1

Généralités sur les ensembles et les ensembles ordonnés

Dans ce chapitre, nous donnons quelques définitions de base concernant les ensembles, les relations et les ensembles ordonnés.

1.1 Ensembles, éléments

On appelle ensemble toute liste ou collection d'objets bien définis, explicitement ou implicitement, on appelle éléments ou membres de l'ensemble les objets appartenant à l'ensemble et on note :

- Si $p \in A$ est un élément de l'ensemble A
- B est partie de A ou sous ensemble de A, et l'on note $B \subset A$ ou $A \supset B$, si $x \in B \Rightarrow x \in A$

On définit un ensemble soit en listant ses éléments, soit en donnant la définition de ses éléments :

- $A = \{1, 2, 3\}$.
- $X = \{x : x \text{ est un entier positif}\}$.

Notation 1.1 • *la négation de $x \in A$ est $x \notin A$.*

- *$\varnothing$ est l'ensemble vide.*
- *E est l'ensemble universel.*

Définition 1.1 *Soient X et Y deux ensembles non vides, le produit de deux ensembles ou* *le produit cartésien $X \times Y$ est défini par:*

$$X \times Y = \{(x, y) \setminus x \in X, y \in Y\}$$

Exemple 1.1 *Soit $X = \{x_1, x_2, x_3\}, Y = \{y_1, y_2\}$. Le produit cartésien $X \times Y$ est:*

$$X \times Y = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_3, y_2)\}.$$

Le produit cartésien $X \times X$ est le suivant:

$$X \times X = \{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_1), (x_2, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_3)\}.$$

1.1.1 Opérations algébriques sur les ensembles

- **L'inclusion**

On dira qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B, ou encore que A est un sous-ensemble ou une partie de B si:

$$\forall x \in X, (x \in A) \Rightarrow (x \in B).$$

On écrit alors $A \subseteq B$

Si les relations suivantes sont satisfaites entre les deux ensembles A et B, $A \subseteq B$ et $A \neq B$, alors B a des éléments qui n'appartiennent pas à A.

Dans ce cas, A est appelé un sous-ensemble propre de B, et cette relation est désignée par: $A \subset B$

- **L'égalité d'ensembles**

Deux ensembles A et B qui contiennent les mêmes éléments sont dits égaux, et on écrit $A = B$

$$A = B \Longleftrightarrow A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A$$

Dans le cas contraire on dit qu'ils sont distincts et on note $A \neq B$

- **La différence**

La différence de B et A noté $B - A$ ou $B \setminus A$ constitué des éléments qui sont en B, mais pas dans A. C'est-à-dire:

$$B - A = \{x/x \in B, x \notin A\}.$$

- **Le complément**

Soit A un sous-ensemble de l'ensemble référentiel X. Alors le complément de A noté $\overline{A}$ (ou A^c), est l'ensemble des éléments qui appartiennent à X mais qui n'appartiennent pas à A.

De façon plus concise nous écrivons:

$$\overline{A} = X - A = \{x \in X \ \ tel\ que\ x \notin A\}.$$

La complémentation est une opération unaire. Le complétent d'ensemble est toujours involutif, C'est -à-dire: $\overline{\overline{A}} = A$.

Le complément d'un ensemble vide est l'ensemble référentiel. ($\overline{\varnothing} = X$).

Le complément de l'ensemble référentiel est l'ensemble vide. ($\overline{X} = \varnothing$).

- **L'intersection**

L'intersection $A \cap B$ se compose des éléments communs aux deux ensembles A et B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in Aetx \in B\}.$$

L'intersection peut être généralisée entre les ensembles dans une famille d'ensembles $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \{x/x \in A_i, \forall \in I\}$ où $\{A_i \mid i \in I\}$ est une famille d'ensembles.

L'intersection entre l'ensemble A et l'ensemble référentiel X égale â A ($A \cap X = A$).

L'intersection de A et de l'ensemble vide $\varnothing$ est l'ensemble vide $A \cap \varnothing = \varnothing$.

L'intersection de A et de son complémentaire est le temps ensemble vide.

$$A \cap \overline{A} = \varnothing.$$

Lorsque deux ensembles A et B n'ont rien en commun, c'est -à-dire $A \cap B = \varnothing$, alors A et B sont dits disjoints.

- **L'union**

L'union des ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B

$$A \cup B = \{x \ / \ x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

L'union pourrait être plusieurs ensembles. Par exemple, la réunion des ensembles de la famille suivante peut être définie comme suit.

$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x/x \in A_i \text{ pour certains } i \in I\}$ où la famille d'ensembles est $\{A_{i|i} \in I\}$. L'union de l'ensemble A et l'ensemble référentiel X est réduite à X

$$A \cup X = X.$$

L'union de l'ensemble A et l'ensemble vide $\varnothing$ est A.

$$A \cup \varnothing = A.$$

L'union de l'ensemble A et son complémentaire est l'ensemble référentiel.

$$A \cup \overline{A} = X.$$

L'union et l'intersection possédent les propriétés suivantes:

Proposition 1.1 *Soit X un ensemble non vide et A, B, $C \in \mathcal{P}(X)$ alors*

i) $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$, (commutativité).
ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, (associativité).
iii) $A \cup A = A$ et $A \cap A = A$, (idemportence).
iv) $A \cup (A \cap B) = A$ et $A \cap (A \cup B) = A$, (absorption).
iiv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, (distributivité).

1.2 Relations binaires

1.2.1 Définitions

Définition 1.2 *Soient X et Y deux ensembles non vides, une relation binaire R entre deux ensembles X et Y est une partie de*

$X \times Y$. Pour $(x, y) \in R \subseteq X \times Y$ on dit que x est en relation avec y et on note cela xRy.

Définition 1.3 *Une relation binaire R sur un ensemble non vide X est une partie de $X \times X$. Dans ce cas, on dit que R est définie sur X.*

Exemple 1.2 *Soient $X = \mathbb{Z}$ et $Y = \mathbb{N}$ et $R = \{(0,0), (-1,1), (1,1), (-2,4), (2,4), ...\}$*

$= \{(x, x^2) \setminus x \in \mathbb{Z}\}$.

1.2.2 Opération algébrique sur les relations

Les relations binaires étant des cas particuliers des ensembles, c'est-à-dire R est un ensemble qui contient des couples ordonnés (x, y) où $x \in X$ et $y \in Y$. Alors toutes les propriétés et les définitions qui concernant les ensembles leur sont applicables ainsi par exemple

- **L'union des relations**

  $T = R \cup S$ est dit l'union de R et S si:

$$(x, y) \in T \text{ ssi } (x, y) \in R \text{ ou } (x, y) \in S.$$

- **L'intersection des relations**

  $T = R \cap S$ est dit l'intersection de R et S si:

$$(x, y) \in T \text{ ssi } (x, y) \in R \text{ et } (x, y) \in S.$$

- **Complément d'une relation**

  Soit R une relation sur $X \times Y$ ce complement de R (noté $\bar{R}$ ou R^c) définit par:

$$\bar{R} = \{(x, y) \in X \times Y \; /(x, y) \notin R\}$$

C'est-à-dire: si $(x, y) \notin R$, alors $(x, y) \in \bar{R}$, $\bar{R}$ est dit le complément de la relation R.

- **Relation inverse**

Soit R une relation de X à Y. Son inverse R^{-1} est definie par:

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \ / \ (x, y) \in R, x \in X, y \in Y\}.$$

- **Composition**

Soit R et S deux relations définies sur X, Y et Z. T est dit la composition de R et S.

$$R \subseteq X \times Y, \ S \subseteq Y \times Z$$

$$T = S \circ R \subseteq X \times Z$$

$$T = \{(x, z) \ /x \in X, \ y \in Y, \ z \in Z, \ (x, y) \in R, \ (y, z) \in S$$

Soit R une relation sur X. La composition de R et R est écrit $R \circ R$ ou R^2. R^n est la composition $n^{iéme}$ de R.

1.2.3 Propriétés des relations

Soit R une relation binaire sur un ensemble X, pour tout $x, y, z \in X$, R est dite:

- **Réflexive** si: xRx. c-à-d chaque élément est en relation avec lui-même.
- **Symétrique** si: $xRy \Longrightarrow yRx$. Si x est en relation avec y, alors y est en relation avec x.
- **Transitive** si: $[xRy$ et $yRz] \Longrightarrow xRz$. Si x est en relation avec y et y en relation avec z, alors x est en relation avec z.
- **Anti-symétrique** si: $[xR\,y$ et $yRx] \Longrightarrow x = y$. Si deux éléments sont en relation l'un avec l'autre, ils sont égaux.

Exemple 1.3 *1) Soient $X = \mathbb{Z}$ et la relation $xRy \Leftrightarrow |x - y| \leq 1$ alors R est réflexive, symétrique, non antisymétrique ($|4 - 3| = 1 \leq 1$, $|3 - 4| = 1 \leq 1$), non transitive ($|1 - 2| = 1 \leq 1$ et $|2 - 3| = 1 \leq 1$ mais $|1 - 3| = 2 > 1$).*

2) Soient $X = \mathbb{N}$ et la relation $xRy \Leftrightarrow x \times y = 0$ et $y \times x = 0 \nRightarrow x = y$ alors R est non réflexive, non antisymétrique, non symétrique et symétrique et non transitive.

1.3 Relations d'ordres

1.3.1 Relation d'ordre

Définition 1.4 *Une relation binaire R sur un ensemble X est dite relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.*

Exemple 1.4 1) *Soit X un ensemble, la relation d'inclusion $(\subseteq)$ sur l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X définit une relation d'ordre.*

2) *Soient $x, y \in \mathbb{N}$, on dit que x divise y et on écrit $x \backslash y$ si et seulement si $\exists\ z \in \mathbb{N}$ tel que $y = x \times z$.*

3) *La relation de divisibilité "$\backslash$" est réflexive, antisymétrique et transitive.*

4) $\leq$, $\geq$, $=$ *sont des relations d'ordre sur $\mathbb{R}$ (et sur $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$).*

Définition 1.5 *Soient X un ensemble et R une relation d'ordre sur X. On dit que (X, R)est un ensemble ordonné.*

Exemple 1.5 $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{C}, \leq)$ *sont des ensembles ordonnés.*

1.3.2 Sous ensemble et extension d'un ensemble ordonné

Définition 1.6 *Soient $(X, \leq)$ un ensemble ordonné et Y une partie de X. La restriction de l'ordre $\leq$ à la partie Y est un ordre, noté $\leq_Y$ et appelé un sous-ordre de $\leq$. On dit alors que $(Y, \leq_Y)$ est un sous-ensemble ordonné de $(X, \leq)$. Si de plus $x \prec y$ dans Y implique $x \prec y$ dans X, on dit que Y est un sous-ensemble ordonné couvrant de X.*

Nous allons dans cette partie considérer les possibilités d'extensions d'un ordre $\leq$ en un ordre $\leq'$.

Définition 1.7 *Soient $\leq$ et $\leq'$ deux ordres sur un même ensemble X. On dit que $\leq'$est une extension de $\leq$ 8 si $\leq \subseteq \leq'$ (en d'autres termes, pour tous x, $y \in X$, $x \leq y$ implique $x \leq' y$). Une extension $\leq'$ de $\leq$ est dite linéaire si $\leq'$ est un ordre total. Lorsque $\leq'$ est une extension (respectivement, extension linéaire) de $\leq$, on dira aussi que l'ensemble ordonné.*

On note par $Ext(\leq)$ l'ensemble des extensions de $\leq$, C'est-à-dire :

$$Ext(\leq) = \{\leq' \ / \ \leq \subseteq \leq'\}.$$

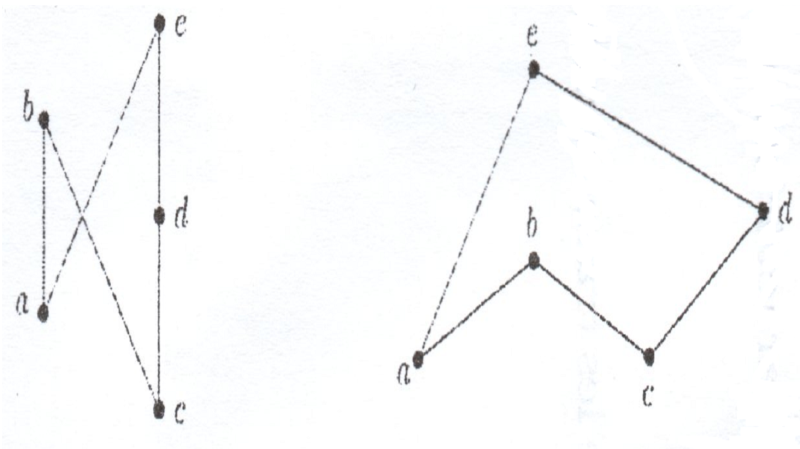
1.3.3 Diagramme de Hasse d'un ensemble ordonné

Définition 1.8 *Les ensembles ordonnés peuvent se représenter par un diagramme de Hasse en appliquant la régle suivante:*

- *Les éléments sont représentés par des sommets.*
- x *et* y *sont joints par une arête si et seulement si:* $x \leq y$ *et* $\nexists z \in X, x \leq z$ *et* $z \leq y$.

Exemple 1.6 *Soit* $X = \{a, b, c, d, e\}$ *et* (X, R) *l'ensemble ordonné où* R *est l'ordre suivant sur* X :

$$R = \{(a,b),(a,e),(c,b),(c,d),(c,e),(d,e),(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e)\}.$$



$Fig.$1. Deux diagrammes de l'ensemble ordonné de l'exemple 1.6

1.3.4 Représentation par des tables

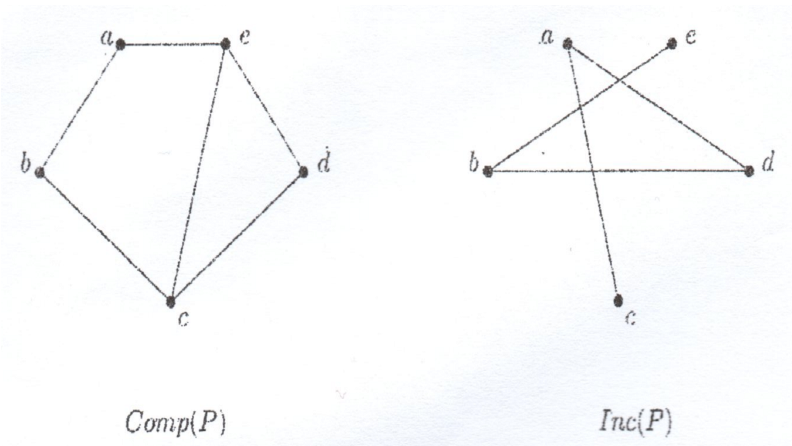
	a	b	c	d	e
a	$\times$	$\times$	0	0	$\times$
b	0	$\times$	0	0	0
c	0	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
d	0	0	0	$\times$	$\times$
e	0	0	0	0	$\times$

	a	b	c	d	e
a	1	1	0	0	1
b	0	1	0	0	0
c	0	1	1	1	1
d	0	0	0	1	1
e	0	0	0	0	1

Notation 1.2 *Dans ce qui suit, on utilise le symbole traditionnel de l'ordre entre les nombres* $\leq$ *(qui se lit inferieur ou égal) pour désigner ou pour noter un ordre quelconque* R.

Définition 1.9 *Soient x, y deux éléments d'un ensemble ordonné $(X, \leq)$. Si $x \leq y$ ou $y \leq x$, on dit que x et y sont comparables. Dans le cas contraire, c'est-à-dire: si $x \nleq y$ et $y \nleq x$, on dit que x et y sont incomparables.*

La figure 2 représente les deux diagrammes de comparabilité et d'incomparabilité de l'ensemble ordonné de l'exemple 1.6.



$Fig.2$. Les diagrammes de comparabilité et d'incomparabilité de l'ensemble ordonné.

1.4 Éléments particuliers d'un ensembles ordonnés

Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné, rappelons certaines notions particulières. Soit A une partie non vide de X.

Majorant: M est un majorant de A si $\forall a \in A$, on a : $a \leq M$. On dit alors que A est une partie majorée de X.

Minorant: m est un minorant de A si $\forall a \in A$, on a : $m \leq a$. A est dite partie minorée de X.

Borne supérieure: s est appelé une borne supérieure de A ($s = supA$) si s est un majorant de A et si pour tout majorant M de A, $s \leq M$. La borne supérieure est communément appelée "Le plus petit des majorants".

Borne inférieure: Un élément $i \in X$ est dit borne inférieure de A si i est un minorant de A et si pour tout minorant m de A, $m \leq i$. La borne inférieure apparaît comme "Le plus grand des minorants".

Elément maximal: Un élément a de A est dit maximal si:

$$\begin{cases} a \in A \\ x \in A \text{ et } a \leq x \end{cases} \Longrightarrow x = a$$

Elément minimal: Un élément b de A est dit minimal si :

$$\begin{cases} b \in A \\ x \in A\text{et } x \leq b \end{cases} \Rightarrow x = b$$

Plus grand élément: On appelle plus grand élément "**Top**" d'un ensemble$X$, un élément noté $1_E \in X$ tel que pour tout élément $x \in E$, on a: $x \leq 1_E$.

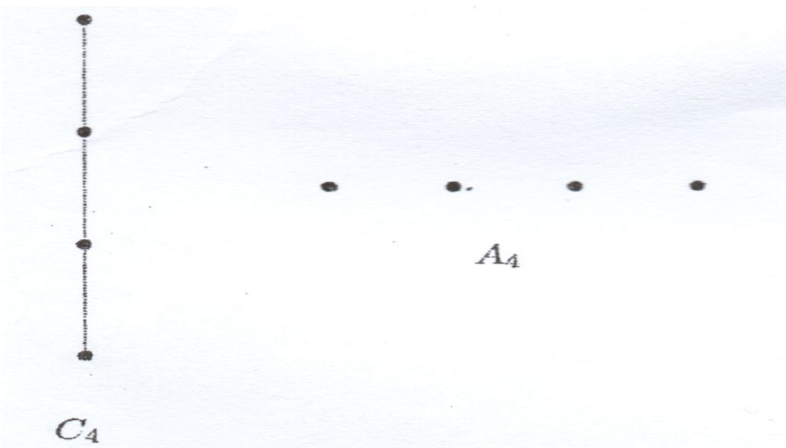
Plus petit élément: On appelle plus petit élément "**Bottom**" d'un ensemble E, un élément noté $0_E \in X$ tel que pour tout élément $x \in X$, on ait $0_E \leq x$.

1.5 Chaîne et antichaîne

Définition 1.10 *On appelle chaîne tout ensemble ordonné dans lequel deux éléments (distincts) sont toujours comparables. Le symbole C_n désignera une chaîne à n éléments. Antichaîne est un ensemble ordonné dans lequel deux éléments quelconques sont toujours incomparables. Le symbole A_n désignera un antichaîne à n éléments.*

Exemple 1.7 *L'ensemble ordonné* $(\mathbb{N}, \leq)$*est une chaine.*

La figure 3 représente les diagrammes de la chaine C_4, et de l'antichaine A_4.



$Fig.$3. Les diagrammes de la chaîne C_4, de l'antichaine A_4

1.6 Ordre total et ordre partiel

Définition 1.11 *Soit R une relation d'ordre sur X. On dit que R est un ordre linéaire (ou total) sur X lorsque deux éléments de X sont toujours comparables pour R, c'est-à-dire*

$$\forall x, y \in X, xRy \text{ ou } yRx.$$

Dans le cas contraire, on parle d'ordre partiel.

Exemple 1.8 *1) Soit $X = \{1, 2, 3\}$, (X, R) l 'ensemble ordonné où R est un ordre total*

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3)\}.$$

2) La relation "$\leq$" définit un ordre total sur $\mathbb{R}$ (et sur $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$...).

3) La relation de divisibilité " $\backslash$ " définit un ordre partiel sur $\mathbb{N}$.

1.7 Ordre strict

Définition 1.12 *Soit R une relation sur un ensemble X.*

- *R est un ordre strict si elle est irréflexive (pour tout $x \in X$, xR^cx) et transitive.*

Un ensemble strictement ordonné est un couple (X, R) où X est un ensemble et R un ordre strict sur X.

- *L'ordre strict R est dit strictement total s'il est tel que $x \neq y$ et xR^cy impliquent yRx.*

On dit alors que (X, R) est un ensemble strictement totalement ordonné.

1.8 Bon ordre, bel ordre, ordre bien fondé

Définition 1.13 *X un ensemble, un bon ordre sur X est une relation d'ordre $\leq$ sur X tel que toute partie non vide de X admet un plus petit element.*

Exemple 1.9 *1) $\mathbb{N}$ est un bon ordre.*

2) $\mathbb{Z}$ n'est pas bon ordre car les entiérs négative n'admet pas un élément minimal.

Remarque 1.1 *Un ensemble bien ordonné est une chaine (un bon ordre est un ordre linéaire).*

Définition 1.14 *Un bel ordre* $\leq$ *sur un ensemble* X *est un ordre partiel sur* X *(ie. Une relation réflexive, antisymétrique et transitive) tel que pour toute suite* $(x_n)_{n\in N}$*, il existe des indices* $i < j$ *tel que* $x_i \leq x_j$*.*

Définition 1.15 *Soit* $(X, \leq)$ *un ensemble ordonné. On dit que* $\leq$ *est bien fondé quand il n'existe pas de suites infinies strictement décroissant d'élément de* X*.*

Exemple 1.10 *1) L'ordre sur* $\mathbb{N}$ *est bien fondé.*

2) L'ordre sur $\mathbb{Z}$ *n'est pas un bien fondé.*

Théorème 1.3 *(caractérisation des ordres bien fondés) Soit* $(X, \leq)$ *un ensemble ordonné. L'ordre* $\leq$ *est bien fondé si et seulement si tout partie non vide* S *de* X *admet au moins un élément minimal.*

Remarque 1.2 *Un bon ordre sur un ensemble* X *est un ordre total bien fondé.*

Définition 1.16 *Soit* $S \subset X$ *(*X *ensemble ordonné) on dit que* S *est un segment initial si:* $(y \in S : x \leq y \Rightarrow x \in S)$*.* X *ensemble ordonné qlq*

$$^{\downarrow}x = \{y \in X \ / \ y \leq x\}$$

$^{\downarrow}x$ *est un segment initial engendré par* x*.*

Exemple 1.11 *Soit* $X = \{a, b, c, d\}$*.*

$$\leq \ = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c), (b, d), (c, d), (a, d)\}.$$

$^{\downarrow}c = \{a, c\}$ est un segment initial.

$^{\downarrow}b = \{a, b\}$ est un segment initial.

$^{\downarrow}d = \{a, c, d\}$ n'est pas segment initial car existe $b \leq d$.

Définition 1.17 *La relation de couverture d'un ensemble ordonné* $(X, \leq)$ *notée* $\prec$ *est définie par* $x \prec y$ *si*

$(x < y$ *et* $x \leq z < y) \Rightarrow x = z$*.On dit alors que* x *est couvert par* y *ou que* y *couvre* x*. On pose* $x^+ = \{t \in X : x \prec t\}$ *et* $x^- = \{t \in X : t \in x\}$*.*

Exemple 1.12 *L'ensemble ordonné* (X, R) *de l'exemple 1.8 a cinq couples de couverture:* $a \prec b$, $a \prec e$, $c \prec b$, $c \prec d$ *et* $d \prec e$.

Donc $\prec\ = \{(a,b),(a,e),(c,b),(c,d),(c,e),(d,e)\}$. *L'ensemble ordonné où* R *est un ordre total.*

Chapitre 2

Généralités sur les ensembles pré-ordonnés

Dans ce chapitre, nous présentons les ensembles pré-ordonnés, sa position par rapport aux ensembles ordonnés et on donnera quelques propriétés pour plus de détails on poura consulter [Leg09],[Lou07],[Obf].

2.1 Relation de Pré-ordre

Définition 2.1 *Soit X un ensemble et $\mathcal{P}$ une relation binaire sur X. On dit que $\mathcal{P}$ est un pré-ordre sur X, si $\mathcal{P}$ est réflexive et transitive.*

- *Si un pré-ordre vérifie en outre la propriété suivante, on dit que $\mathcal{P}$ est une relation d'ordre ou un ordre (anti-symétrique) $\forall x, y \in X, [(x\mathcal{P}y)$ et $(y\mathcal{P}x)] \Rightarrow (x = y)$.*
- *On dit que $\mathcal{P}$ est une relation d'équivalence si c'est une relation de pré-ordre qui vérifie en outre la propriété suivante: (symétrique) $\forall x, y \in X$, $(x\mathcal{P}y) \Longrightarrow (y\mathcal{P}x)$.*

Exemple 2.1 *1)* $(\mathbb{R}./)$ *est un pré-ordre (ie.* $1/2$ *et* $2/1$ *mais* $1 \neq 2)$.

2) $(\mathcal{P}(X), \leq)$ *avec* $A \leq B \Longleftrightarrow \#A \leq \#B$ *n'est pas un ordre, mais est un pré-ordre.*

3) Soit X*=\{ 2,3,4\}* $(X,\mathcal{P})$ *l'ensemble pré-ordonné où* $\mathcal{P}$ *est un pré-ordre*

$$\mathcal{P} = \{(2,2),(3,3),(4,4),(3,2),(2,3),(2,4),(3,4)\}$$

4) $(\mathbb{Z}^*, /)$ *est un pré-ordre (ie.* $1/-1$ *et* $-1/1$ *et mais* $1 \neq -1)$.

2.2 Sous ensemble et extension d'un ensemble pré-ordonné

Définition 2.2 *Soient* $(X, \precsim)$ *un ensemble pré-ordonné et* Y *une partie de* X*. La restriction de pré-ordre* $\precsim$ *à la partie* Y *est un ordre, noté* $\precsim_Y$ *et appelé un sous-pré-ordre de* $\precsim$*. On dit alors que* $(Y, \precsim_Y)$ *est un sous-ensemble pré-ordonné de* $(X, \precsim)$*. Si de plus* $x \prec y$ *dans* Y *implique* $x \prec y$ *dans* X*, on dit que* Y *est un sous-ensemble pré-ordonné couvrant de* X*.*

Nous allons dans cette partie considérer les possibilités d'extensions d'un pré-ordre $\precsim$ en un pré-ordre $\precsim'$.

Définition 2.3 *Soient* $\precsim$ *et* $\precsim'$ *deux pré-ordres sur un même ensemble* X*. On dit que* $\precsim'$ *est une extension de* $\precsim$ *si* $\precsim \subseteq \precsim'$ *(en d'autres termes, pour tous* x*,* $y \in X$*,* $x \precsim y$ *implique* $x \precsim' y$*). Une extension* $\precsim'$ *de* $\precsim$ *est dite linéaire si* $\precsim'$ *est un pré-ordre total. Lorsque* $\precsim'$ *est une extension (respectivement, extension linéaire) de* $\precsim$*, on dira aussi que l'ensemble pré-ordonné. On note par* $Ext(\precsim)$*, l'ensemble des extentions de* $\precsim$*, C'est-à-dire* $Ext(\precsim) = \{\precsim' \ / \precsim \subseteq \precsim'\}$*.*

2.3 Éléments particuliers d'un ensemble pré-ordonné

Les éléments particuliers d'un ensemble pré-ordonné sont les même éléments particuliers d'un ensemble ordonné sauf le minimun et le maximun, la borne supérieure et la borne inférieure car ses éléments ne sont pas uniques dans le cas des ensembles pré-ordonnés (parceque on n'a pas l'antisymétrique).

2.4 Pré-ordre total et pré-ordre partiel

Définition 2.4 *Soit* $\mathcal{P}$ *une relation pré-ordre sur* X*. On dit que* $\mathcal{P}$ *est un pré-ordre linéaire (ou total) sur* X *lorsque deux éléments de* X *sont toujours comparables pour* $\mathcal{P}$*, c'est-à-dire*

$$\forall x, y \in X, x\mathcal{P}y \text{ ou } y\mathcal{P}x.$$

Dans le cas contraire, on parle de pré-ordre partiel.

2.5 Pré-ordre strict

Définition 2.5 *Soit $\mathcal{P}$ une relation sur un ensemble X.*

- *$\mathcal{P}$ est un pré-ordre strict si elle est irréflexive (pour tout $x \in X, x\mathcal{P}^c x$) et transitive.*

Un ensemble strictement pré-ordonné est un couple $(X, \mathcal{P})$ où X est un ensemble et $\mathcal{P}$ un pré-ordre strict sur X.

- *Le pré-ordre strict $\mathcal{P}$ est dit strictement total s'il est tel que $x \neq y$ et $x\mathcal{P}^c y$ impliquent $y\mathcal{P}x$. On dit alors que $(X, \mathcal{P})$ est un ensemble strictement totalement pré-ordonné.*

2.6 Ensembles pré-ordonnés bornés

Définition 2.6 *Soit $(X, \precsim)$ un ensemble pré-ordonné. Un sous-ensemble S de X est dit $\precsim$ borné s'il existe deux éléments x^* et x_* de X tel que $x^* \precsim x \precsim x_*$ pour tout $x \in S$. Si X est lui même $\precsim$ bornés, on dit que $(X, \precsim)$ est un ensemble pré-ordonné borné.*

Remarque 2.1 *Si pour un certain x^* dans X, nous avons $x^* \precsim x$ pour tout $x \in X$, on dit que $(X, \precsim)$ est borné par le haut, et si il ya un x_* dans X avec $x \precsim x_*$ pour tout $x \in X$, on dit que $(X, \precsim)$ est borné par le bas.*

2.7 Pré-ordre inverse ou dual

L'inverse ou le "dual" d'un ensemble pré-ordonné $(X, \precsim)$ est $(X, \succsim)$, ce qui est l'ensemble pré-ordonné obtenu en inversant le classement déclaré par $\succsim$.

C'est-à-dire, $\precsim^{-1} = \{(y, x)/(x, y) \in \precsim\}$.

2.8 Produits des ensembles pré-ordonnés

Définition 2.7 *Le produit de deux ensembles pré-ordonnés $(X, \precsim_x)$ et $(Y, \precsim_y)$ est l'ensemble pré-ordonné $(X \times Y, \precsim)$, Où*

$$(x, y) \precsim (z, w) \text{ ssi } x \precsim_x z \text{ et } y \precsim_y w.$$

2.9 Pré-ordres particuliers

2.9.1 Bel pré-ordre

Définition 2.8 *Tout pré-ordre sur X est un beau pré-ordre si et seulement si toute suite infinie de X est bonne. (i.e: pour toute suite infinie $(X_n)_{n\in N}$ d'éléments de X, il existe deux indices $i < j$ tels que $x_i \leq x_j$. Le couple (x_i, x_j) est dans ce cas appelé bonne paire et toute suite contenant une bonne paire sera appelée bonne suite). À l'inverse, une suite qui n'est pas bonne sera dite mauvaise. On donne le théorème de caractérisation des beaux pré-ordres suivant.*

Théorème 2.1 [Bas09] ***(Caractérisation des beaux pré-ordres)***

Les propositions suivantes sont equivalentes:

(i) $\precsim$ est un bel pré-ordre sur X.

(ii) De toute suite infinie d'éléments de X, on peut extraire une sous-suite croissante.

(iii) X ne contient ni anti-chaine infinie, ni suite infinie strictement décroissante.

Proposition 2.1 *Si X un ensemble fini, alors tout bel pré-ordre est un pré-odre total sur X.*

2.9.2 Pré-ordre bien fondé

Définition 2.9 *Pré-ordre sur X est dit bien fondé s'il n'admet pas de suite infinie strictement décroissante.*

Proposition 2.2 *Un beau pré-ordre est un pré-odre bien fondé tel qu'il n'existe pas de suite infinie d'éléments deux à deux incomparables.*

Proposition 2.3 ***(Bel pré-ordre induit)*** *Soit $\precsim$ est un beau pré-ordre (resp. bel ordre) sur X et $Y \subseteq X$, le pré-ordre (resp. ordre) induit par $\precsim$ sur Y est un beau pré-ordre (resp. bel ordre).*

Proposition 2.4 ***(Ordres et sous-ordres)*** *Soient $\precsim_1$ et $\precsim_2$ sont deux pré-ordres sur X vérifant $\precsim_1 \subset \precsim_2$, i.e. $\forall\ x,\ y \in X,\ x \precsim_1 y \Rightarrow x \precsim_2 y$. Alors on a $\precsim_1$ beau préordre $\Rightarrow \precsim_2$ beau pré-ordre mais la réciproque est fausse.*

Preuve. Toute bonne suite pour $\precsim_1$ est encore bonne pour $\precsim_2$. Toute suite est donc bonne pour $\precsim_2$ qui est donc un beau pré-ordre. Pour la réciproque comme nous le verrons, la relation de mineur est un bel ordre sur les graphes finis mais pas la relation de mineur topologique. ■

Proposition 2.5 *Tout pré-ordre contenant un beau pré-ordre est un pré-ordre bien fondé.*

Remarque 2.2 *Le bon pré-ordre n'existe plus, puisque le plus petit élémenet n'existe pas.*

2.9.3 Relation d'equivalence associe à un pré-ordre

Étant donné un pré-ordre $\precsim$ sur un ensemble X, on définit la relation d'équivalence associée $\sim$ par $x \sim y \Leftrightarrow (x \precsim y \wedge y \precsim x)$,

(ie $\sim = \precsim \cap \precsim^{-1}$).

En effet, $\sim = \precsim \cap \precsim^{-1} = \{(x, y) \in X^2/(x, y) \in \precsim$ et $(x, y) \in \precsim^{-1}\} = \{(x, y) \in X^2/(x, y) \in \precsim$ et $(y, x) \in \precsim\}$.

Donc $\sim$ est symétrique en plus, il est évident que $\sim$ est réflexive et transitive. D'où $\sim$ est une relation d'quivalence.

Remarque 2.3 *Si $\precsim$ est un ordre, alors $\sim$ est l'égalité.*

2.9.4 Pré-ordre lexicographique

Définition 2.10 *Étant donné n ensembles pré-ordonnés $(D_1, \precsim_1)$,....,$(D_n, \precsim_n)$, le pré-ordre lexicographique sur l'ensemble $D_1 \times ... \times D_n$ est défini par: $(a_1, ...a_n) <_{lex} (b_1, ..., b_n) \Leftrightarrow a_1 < b_1$ ou $\exists\ i \geq 1\ \forall j < i,\ a_i \sim_j b_j$ et $a_i < b_i$ où $\sim_j$ est la relation d'équivalence associée au pré-ordre $\precsim_j$ (ie, $\sim_j = \precsim_j \cap \precsim_j^{-1}$).*

Proposition 2.6 $\forall\ i = \{1, ..., n\}$, *si $\precsim_i$ bien fondé alors $\precsim_{lex}$ bien fondé.*

Corolaire 2.7 $\forall\ i = \{1, ..., n\}$, *si $\precsim_i$ bel pré-ordres, alors $\precsim_{lex}$ bel pré-ordre.*

Chapitre 3

Axiomes de linéarité (totalité) des pré-ordres

Dans ce chapitre, nous étudions quelques propriétés des ensembles pré-ordonnés. En particulier, on s'intéreuse à l'étude des axiomes de linéairité des pré-ordres. Ces axiomes généralisent d'une maniére analogue celles des ordres. Pour plus de détails on peut consulter [Bc01], [Bon84], [Clm07], [Mat74], [Sch02] et [Szp30] quelques propriétés des ensembles pré-ordonnés.

Définition 3.1 *Soient $\leq$ et $\leq'$ deux ordres sur un même ensemble X. On dit que $\leq'$ est une extension de $\leq$ si $\leq \subseteq \leq'$ (en d'autres termes, pour tous $x, y \in X$, $x \leq y$ implique $x \leq' y$). Une extension $\leq'$ de $\leq$ est dite linéaire si $\leq'$ est un ordre total.*

Lorsque $\leq'$ est une extension (respectivement, extension linéaire) de $\leq$ on dira aussi que l'ensemble ordonné $(X, \leq')$ est une extension (respectivement, extension linéaire) de l'ensemble ordonné $(X, \leq)$. Ainsi, $\leq$ est maximal s'il n'existe pas un ordre sur le même ensemble X qui le contient.

Exemple 3.1 *Soit $X = \{a, b, c\}$, $\leq = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (a,c)\}$.*

et

$$\leq' = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (a,c), (c,b)\}.$$

Alors $\leq' = \{\leq, (c,b)\}$. Donc $\leq'$ est un extension de $\leq$.

3.1 Axiomes de linéarité (totalité) d'un ordre

Théorème 3.1 [Szp30] ***(Axiome de Maximalité)*** *$\leq$ est un ordre total $\Longleftrightarrow$ $\leq$ est maximal.*

Exemple 3.2 *Soit $X = \{a, b, c\}$.*

$$\leq \ = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,c),(a,c)\}.$$

est un ordre maximal.

Théorème 3.2 [Szp30]. *(**Axiome d'extension linéaire Théoreme de Szpilrajn**). Tout ordre possède au moins une extension linéaire c'est-à-dire: pour tous ordre $\leq$. $\exists$ un ordre linéaire $\leq'$ tel que $\leq \subseteq \leq'$.*

Pour démontrer ce théorème on a besoin du lemme suivant:

Lemme 3.1 *Soit $\leq$ un ordre sur X et a ,$b \in X$ tel que: a et b sont incomparables. Alors il existe un ordre $\leq'$ extension de $\leq$ tq: $(a,b) \in \leq'$ ou $(b,a) \in \leq'$.*

Preuve. Soit $\leq$ un ordre sur X et $a, b \in X$ deux éléments incomparables.

Soit $A = \{x \in X \ /x \leq a\}$ et $B = \{y \in X \ /b \leq y\}$.

On a $A \cap B = \varnothing$ (puisque si $x \in A \cap B$, alors $x \leq a$ et $b \leq x$. Donc pour la transitivité de $\leq$ on obtient $b \leq a$, contradiction). On définit $\leq' = \leq \cup A \times B \subseteq X \times X$.

• $\leq \subseteq \leq'$: donc $\leq'$est une extension de $\leq$.

• On a: $a \in A$ et $b \in B$, ie $(a \leq a)$ et $(b \leq b)$, donc $(a,b) \in A \times B \Rightarrow (a,b) \in\leq'$. Il reste à montrer que $\leq'$est unordre sur X.

1) **Réflexivité:** On a $(x,x) \in\leq$ ie $x \leq x$, alors $(x,x) \in\leq'$ (puisque $\leq' = \leq \cup A \times B$). Donc $\leq'$est réflexive.

2) **Antisymétrique:** Soit $x, y \in X$ tq: $x \leq' y$ et $y \leq' x \Rightarrow x = y$.

On a

$$x \ \leq \ 'y \Rightarrow (x,y) \in\leq ou(x,y) \in A \times B.$$
$$y \ \leq \ 'x \Rightarrow (y,x) \in\leq ou(y,x) \in A \times B.$$

4 cas possibles, sont considérés

1^{ere} **cas**: $x \leq y$ et $y \leq x$ par l'antisymétrie de $\leq$ on trouve $x = y$

$2^{ième}$ **cas**: $x \leq y$ et $(y \leq a$ et $b \leq x)$

• $x \leq y$ et $y \leq a \Rightarrow x \leq a$

• $b \leq x$ et $x \leq a \Rightarrow b \leq a$ (contradiction puisque $(a, b) \notin \leq$) donc ce $2^{ième}$ cas est impossible

$3^{ième}$**cas**: $(x \leq a$ et $b \leq y$) et $y \leq x$.

On a:

• $b \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow b \leq x$ ($\leq$ transitive).

• $b \leq x$ et $x \leq a \Rightarrow b \leq a$ (contradiction) donc ce cas est impossible.

$4^{ième}$ **cas:** $(x \leq a$ et $b \leq y)$ et $(y \leq a$ et $b \leq x)$.

On a: $b \leq x$ et $x \leq a \Rightarrow b \leq a$ (contradiction).

On a: $b \leq y$ et $y \leq a \Rightarrow b \leq a$ (contradiction) donc ce cas est impossible aussi.

En conséquence, le seul cas possible est: $x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$. D'où $\leq'$est antisymétrique.

3) **La transitivité de $\leq'$**:

Soit $x, y, z \in X$ tq: $x \leq' y$ et $y \leq' z \Rightarrow x \leq' z$?

On a: $x \leq' y \Rightarrow x \leq y$ ou $(x \leq a$ et $b \leq y)$

et $y \leq' z \Rightarrow y \leq z$ ou $(y \leq a$ et $b \leq z)$

On obtient 4 cas possibles:

1^{ere} **cas:** $x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z \Rightarrow x \leq' z$

$2^{ième}$ **cas**: $x \leq y$ et $(y \leq a$ et $b \leq z)$

• $x \leq y$ et $y \leq a \Rightarrow x \leq a$

• $x \leq a$ et $b \leq z \Rightarrow x \in A$ et $z \in B \Rightarrow (x, z) \in A \times B \subseteq \leq' \Rightarrow (x, z) \in \leq' \Rightarrow x \leq' z$

$3^{ième}$ **cas:** $(x \leq a$ et $b \leq y)$ et $y \leq z$

- $b \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow b \leq z$

- $x \leq a$ et $b \leq z \Rightarrow x \in A$ et $z \in B \Rightarrow (x, z) \in A \times B \subseteq \leq' \Rightarrow (x, z) \in \leq' \Rightarrow x \leq' z$

$4^{ième}$ **cas:** $(x \leq a$ et $b \leq y)$ et $(y \leq a$ et $b \leq z)$

$b \leq y$ et $y \leq a \Rightarrow b \leq a$ (contradiction). Donc ce cas est impossible.

D'où dans les trois cas $x \leq' y$ et $y \leq' z \Rightarrow x \leq' z$. Alors $\leq'$est transitive.

En conséquence $\leq'$est un ordre.

Remarque : Si on prend $\leq' = \leq \cup B \times A$, on obtient que $\leq'$est une extension de $\leq$ tel que $(b, a) \in \leq'$.

Preuve du Théorème d'extension linéaire.

Soit $\leq$ un ordre sur X, si $\leq$ est linéaire, alors on prend $\leq \subseteq \leq'$qui est une extension linéaire de $\leq$.

Si $\leq$ est non linéaire:

Soit S l'ensemble des ordres qui extend $\leq$ (des extension de $\leq$). D'aprés le lemme precédent $S \neq \varnothing$.

Soit $C \neq \varnothing$ une chaine de S (selon l'ordre inclusion) $C \subset S$ une chaine non vide de S.

On démontre que C posséde un majorant.

Soit $\leq_c = \underset{H \in c}{\cup} H$, on démontre que $\leq_c$ est un ordre.

• En effet:

1) Soit $x \in X$, on a xHx

$\forall\ H \in C$ (ie: $(x, x) \in H$, $\forall\ H \in C$) $\Rightarrow (x, x) \in \underset{H \in C}{\cup} H = \leq_c$. Donc $\leq_c$ est reflexive.

2) Soit $x, y \in X$ tq: $x \leq_c y$ et $y \leq_c x \Rightarrow x = y$

$x \leq_c y \Rightarrow \exists\ H_i \in C$ tq xH_iy

$$(x, y) \in \leq_c = \underset{H \in C}{\cup} H \Rightarrow \exists H_i \in Ctq(x, y) \in H_i$$

$y \leq_c x \Rightarrow \exists\ H_j \in C$ tq yH_jx.

Puisque C est une chaine alors $H_i \subseteq H_j$ ou $H_j \subseteq H_i$.

Donc si $H_i \subseteq H_j$ alors $xH_iy \Rightarrow xH_jy$ et comme yH_jx et H_j est antisymétrique, on obtient $x = y$.

Si $H_j \subseteq H_i$ on obtient un resultat similaire d'où $\leq_c$ est antisymétrique.

3) Soit $x, y, z \in X$ tq: $x \leq_c y$ et $y \leq_c z \Rightarrow x \leq_c y$

$x \leq_c y \Rightarrow \exists\ H \in C$ tq xHy

$y \leq_c z \Rightarrow \exists\ K \in C$ tq yHz

puisque C est une chaine alors: $H \subseteq K$ ou $K \subseteq H$.On suppose $H \subseteq K$ alors $xHy \Rightarrow xKy$ et car yKz et K est transitive donc on trouve xKz.

• ce qui implique: $x \leq_c z$

si on suppose $K \subseteq H$ on obtient un résultat similaire. D'où $\leq_c$ est transitive. En conséquence $\leq_c$ est un ordre.

En plus $\leq \subseteq H$, $\forall H \in C$ alors $\leq \subseteq \leq_c$. Donc $\leq_c \in S$ et $\forall H \in C$, $H \in \leq_c = \underset{H\in C}{\cup} H$.

D'où, $\leq_c$est un majorant de C. D'aprés le lemme de zorn S admet un élément maximal $M \in S$.

(Rappel: lemme de Zorn: Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné. Si toute chaine $C \neq \varnothing$ possède un majorant, alors X admet un élément maximal).

• M est une extension linéaire de $\leq$:

En effet, on a déja vu que M est une extension de $\leq$

Il reste à montrer que M est linéaire.

On suppose que M non linéaire alors:

$\exists\ x, y \in X$ tq $(x, y) \notin M$ et $(y, x) \notin M$ (x et y incomparable selon M).

D'aprés le lemme précédent: $\exists$ une extension M' de M tq $(x, y) \in M'$ ou $(y, x) \in M'$.

On a $\leq \subset M \subseteq M'$.

Donc $M' \in S$ (contradiction puisque M est maximal).

D'où M est linéaire. ■

Exemple 3.3 *Soit* $X = \{a, b, c, d, e\}$,

$$\leq \ = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (a, e), (c, b), (c, d), (c, e), (d, e)\}.$$

On prend les éléments incomparables

$(a, c) \notin \leq$ *on définit* $\leq_1$ *on a:*

$A_1 = \{x \in X\ /x \leq a\} = \{a\}$. $B_1 = \{y \in X\ /c \leq y\} = \{b, c, d, e\}$

$\leq_1 = \leq \cup (A_1 \times B_1) = \leq \cup \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e)\} = \leq \cup \{(a, c), (a, d)\}$

n'est pas linéaire, on définit $\leq_i$ *à partir du couple (b,d).*

$A_2 = \{x \in X\ /\ x \leq_1 b\ \} = \{a, b, c\}$

$B_2 = \{Y \in X\ /\ b \leq_1 y\} = \{d, e\}$

$A_2 \times B_2 = \{(a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}$

$\leq_2 = \leq_1 \cup (A_2 \times B_2) = \leq \cup \{(a, c), (a, d)\} \cup \{(a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}$

$= \leq \cup \{(a, c), (a, d), (b, d), (b, e)\}$ *qui est linéaire. Donc* $\leq_2$ *est une extension linéaire de* $\leq$.

Théorème 3.3 [Spi36] ***(Axiome d'intersection).*** *Tout ordre s'ecrit sous la forme d'intersection de ses extensions linéaires* ($\leq\ = \underset{\leq' \in EL_{\leq}}{\cap} \leq'$ / $EL_{\leq} = \{\leq'$ *est un ordre linéaire* / $\leq \subseteq \leq'\}$).

Preuve. Tout ordre est l'intersection de toutes ses extensions linéaires.

Soit $EL(\leq) = \{\leq' / \leq'$est une extension linéaire de $\leq\}$.

$\leq = \underset{\leq' \in EL(\leq)}{\cap} \leq'$ (c'est-à -dire: $\leq \subseteq \underset{\leq' \in EL(\leq)}{\cap} \leq'$ et $\underset{\leq' \in EL(\leq)}{\cap} \leq' \subseteq \leq$)

1) $\leq \subseteq \underset{\leq' \in EL(\leq)}{\cap} \leq'$. En effet, on a $\leq \subseteq \leq', \forall \leq' \in EL(\leq)$. Alors: $\leq \subseteq \underset{\leq' \in EL(\leq)}{\cap \leq'}$.

2) $\underset{\leq' \in EL(\leq)}{\cap} \leq' \subseteq \leq$. On suppose que $(x,y) \notin \leq$ et $(y,x) \notin \leq$ (c'est-à-dire que x et y incomparable).

D'après le lemme précédent:

$\exists \leq' \in EL(\leq)$ tq: $(x,y) \in \leq'$ $((y,x) \notin \leq')$

$\exists \leq'' \in EL(\leq)$ tq: $(y,x) \in \leq''$ $((x,y) \notin \leq'')$

$(x,y) \notin \leq''$implique que $(x,y) \notin \leq' \cap \leq''$, et $(y,x) \notin \leq'$ implique que $(y,x) \notin \leq' \cap \leq$". Donc $(x,y) \notin \underset{\leq' \in EL(\leq)}{\cap} \leq'$ et

$(y,x) \notin \underset{\leq' \in EL(\leq)}{\cap} \leq'$.

Alors $\underset{\leq' \in EL(\leq)}{\cap} \leq' \subseteq \leq$. (1) et (2) implique que: $\leq = \underset{\leq' \in EL(\leq)}{\cap} \leq'$. ∎

Exemple 3.4 ***Exemple 3.5*** *Soit* $X = \{1,2,3\}$

$$\leq \ = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3)\}.$$

$$\leq' = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3),(3,2)\}.$$

$$\leq'' = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3),,(2,3)\}.$$

Donc: $\leq \ = \ \leq' \cap E \leq''$.

3.2 Ordres obtenus à partir d'un pré-ordre

Une relation binaire $\sim$ sur un ensemble non vide X, est appelée une relation d'équivalence si elle est réflexive et symétrique, transitive pour tout $x \in X$, la classe d'équivalence de x par rapport à $\sim$ est définie comme l'ensemble

$$[x]_\sim = \{w \in X : \ x \sim w\}.$$

L'ensemble de toutes les classes d'équivalence par rapport à $\sim$. Notée $X\ /_{\sim}$. Est appelé ensemble quotient de X par rapport à $\sim$ qui est

$$X\ /_{\sim} = \{[x]_{\sim} :\ x \in X\}.$$

Une relation d'équivalence peut être utilisé pour décomposer un ensemble X sons forme des parties distinctes (les classes d'équivalences forme une partitions de X).

Remarque 3.1 *Pour toute relation d'équivalence $\sim$ sur un ensemble non vide X, l'ensemble quotient $X\ /_{\sim}$ est une partition de X.*

La relation de pré-ordre passe au quotient, et définit une relation d'ordre sur l'ensemble quotient $X/ \sim$ (voir le théorème 3.4 suivent).

Théorème 3.4 *Soit X un ensemble non vide. Alors $\lesssim$ est un pré-ordre sur X si est seulement si la relation $\leq$ définie sur l'ensemble quotion $Y = \{[x]_{\sim}/x \in X\} = X\ /\ \sim$ ou $\sim = \precsim \cap \precsim^{-1}$ et $[x] = \{a \in X\ /a \sim x\} = \{a \in X\ /a \precsim x \wedge x \precsim a\}$ par $[x]_{\sim} \leq [y]_{\sim} \Leftrightarrow x \precsim y$ est une relation d'ordre. En plus $\lesssim$ est total si et seulement si $\leq$ est total .*

Preuve.$[x]_{\sim} \leq [y]_{\sim} \Leftrightarrow x \lesssim y$

$\Rightarrow$) On suppose que $\leq$ est un ordre, la réfléxivité et la transitivité de $\leq$ implique la réflexivité et la transitivité de $\precsim$.

Donc $\precsim$ est un pré-ordre (contre exemple pour l'antisymétrie).

$\Leftarrow$) On suppose que $\precsim$ est un pré-ordre. La réfléxivité et la transitivité de $\leq$ (trivial)

Il reste à démontrer l'antisymétrie:

Soit $[x]_{\sim}$ et $[y]_{\sim} \in Y$ telque: $[x]_{\sim} \leq [y]_{\sim}$ et$[y]_{\sim} \leq [x]_{\sim}$.

$[x]_{\sim} \leq [y]_{\sim} \Rightarrow x \precsim y \Rightarrow x \in [y]_{\sim}$ et

$[y]_{\sim} \leq [x]_{\sim} \Rightarrow y \precsim x \Rightarrow y \in [x]_{\sim}$.

$x \in [y]_{\sim}$ et $x \in [x]_{\sim} \Rightarrow x \in [x]_{\sim} \cap [y]_{\sim}$, aussi $y \in [x]_{\sim} \cap [y]_{\sim}$.

Donc $[x]_{\sim} \cap [y]_{\sim} \neq \varnothing$ (contradiction, car $[x]_{\sim} \cap [y]_{\sim} = \varnothing$)

D'ou $[x]_{\sim} = [y]_{\sim}$. ■

Remarque 3.2 *1) Un choix alternative de Y verifie le théorème précédent:*

$Y = \{C_x/x \in X\ \}$ ou $C_x = \{a \in X\ /a \precsim x\ \}$, $C_x \leq C_y \Leftrightarrow x \precsim y$.

2) Si le pré-ordre $\precsim$ est un ordre, alors $\sim$ est l'égalité et $[x]_{\sim} = \{a \in X\ /a \precsim x$ et $x \precsim a\} = \{a \in X\ /a = x\} = \{x\}$.

3.3 Axiomes de linéarité (totalité) d'un pré-ordre

3.3.1 Axiome de Maximalité

Théorème 3.5 *[**Axiome de Maximalité**] $\precsim$ Est un pré-ordre linéaire $\Longleftrightarrow \precsim$ est maximal*

Preuve. *Soit $\precsim$ un pré-ordre linéaire. D'aprés le théoreme 3.4 l'ordre défini sur l'ensemble quotient $X/\sim$ est linéaire. Donc $\leq$ est maximale (d'aprés l'axiome de maximalilé d'un ordre). D'ou $\precsim$ est maximal.* ■

Exemple 3.6 *Soit $X = \{1, 2, 3\}$*

$$\precsim \; = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3), (1,3), (3,2)\}.$$

est un pré-ordre maximal.

3.3.2 Axiome d'extension linéaire

Théorème 3.6 ***(Théorème de Szpilrajn pour les pré-ordres).*** *Tout pré-ordre possède au moins une extension linéaire, c'est-à-dire: $\forall \precsim$ pré-ordre $\exists \precsim'$ pré-ordre linéaire tel que $\precsim \subseteq \precsim'$.*

Preuve. Soit $\precsim$ un pré-odre sur un ensemble X. Alors $\leq$ défini d'après le théorème 3.4 est un ordre. Par le théorème de

Szpilrajn $\exists \leq'$ une extension linéaire de $\leq$.

On définit $\precsim'$par $x \precsim' y \Leftrightarrow [x]_\sim \leq' [y]_\sim$, qui est un pré-ordre linéaire, et en plus, extension de $\lesssim$. ■

Exemple 3.7 *Soit $X = \{1, 2, 3\}$*

$$\precsim = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (1,3), (2,1)\}.$$

$$\precsim' = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (1,3), (3,2), (2,3)\}.$$

est une extension linéaire de $\precsim$.

3.3.3 Axiome d'intersection

Théorème 3.7 ***(l'intersection).*** *Tout pré-ordre s'écrit sous la forme d'intersection de ses extensions linéaires* ($\precsim = \bigcap\limits_{\precsim \in EL_{\precsim}} \precsim'$ / $EL_{\precsim} = \{\precsim'$ *est un pré-ordre linéarie* / $\precsim \subseteq \precsim'\}$.

Preuve. Soit $\precsim$ un pré-ordre sur un ensemble X. Alors $\leqslant$ définit d'après le théorème 3.4 est un ordre. Par le Théorème d'intersection d'un ordre $\leq = \bigcap\limits_{\leq \in EL_{\leq}} \leq'$. Donc $\precsim = \cap \precsim'$tel que $\precsim'$ est défini par: $x \precsim' y \Leftrightarrow [x]_{\sim} \leq' [y]_{\sim}$. ■

Exemple 3.8 *Soit* $X = \{a, b, c\}$.

$$\precsim \ = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (b, a)\}.$$

$$\precsim' = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (c, b), (b, c), (b, a), (c, a)\}.$$

$$\precsim'' = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (c, b), (b, a), (c, a)\}.$$

Donc: $\precsim \ = \ \precsim' \cap \precsim''$.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons vu les concepts d'ensembles ordonnés et ensembles pré-ordonnés à partir de la présentation de certaines propriétés et des résultats concernant ce genre de relations. Puis, pour un pré-ordre (i.e., relation réflexive et transitive, mais pas nécessairement antisymétrique), Avec cette approche, nous pouvons généraliser aux Axiomes de linéairité (totalité) d'un pré–ordre d'une manière analogue presque tous à savoir études des propriétés des relation pré-ordre d'une part, et d'autre part l'étude d'un ordre partiel obtenne à pertir d'un pré-ordre.les théorèmes de base et les théorèmes de caractérisations des pré-ordre, ce qui démontre la superfluité de L'antisymétrique.

Références

[Bc01]T. Britz, P. Cameron. *Partially ordred sets,* November 2001, www.maths.qmul.ac.uk/~pjc/csgnotes/posets.pdf

[Bon69] R. Bonnet, M. Pouzet, *Extensions et stratications d'ensembles diperses, Comptes Rndus A cad.* Sc. Paris, 268(A)(1969) 1512–1515.

[Bon84] R. Bonnet, M. Pouzet, *Lineair extention of ordered sets, in Ordered Sets,* (I.Rival) ed. Reidel, ASI 83, (1984) 125-170.

[Bou84] A. Bouchat, *Codages et dimentions de relations binaires in Orders:* Description and roles, M. Pouzet and D. Richard Eds., Annals of Discrete Math.,99, (1984), p.387-396.

[Cjo] H.Comon, J-P. Jounnaud. *Les termes en logique et en programmation Version préliminaire,* CNRS et Université de Paris Sud 91405 Orsay, France, 10 décembre 2003, http://www.lri.tr/∼jouannau/biblio-html.

[Clm07] N. Caspard, B. Leclerc, B. Monjardet, *Ensembles ordonnés finis concepts, résultats et usages,* Springer-Verleg, Berlin Heidelberg, 2007.

[Dmi41] B.Dushnik, E.W.Miller, *Partially ordered sets, Amer.* J. of Math., 63(1941) 600-610.

[Dil50] R.P. Dilworth, *A decomposition theorem for partially ordered sets*, Annals of Math., 51 (1950) 161-165.

[Leg09] B. Le Gloannec, *Beaux ordres et graphes.* 21avril 2009, perso.ens-lyon.fr/eric.thierry/Graphes2009/bastien-legloannec.pdf

[Lou07] J. Loup carre , *Réécriture, confluence.* Octobre 2007, www.lsv.ens-cachan.fr/~carre/Agreg_Logique.pdf

[Mat74] A.R.D. Mathias, *The order extension principle: Axiomatic set theory,* (Proc.Sympos. Pure Math., Vol. XIII, Part II, Univ.California, Los Angeles, Calif.,) (1967), 179–183. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1974.

[Riv82] I. RIVAL *Ordered sets, Reidel,* Dordrecht, 1982.

[Sch02] B. SCHRODER, *Ordered sets*, Birkhauser Boston, First edition, 2002.

[Szp30] E. SZPILRAJN, *Sur l'extension de l'ordre partiel*, Fund. Math.,16 (1930), 386-389.

[Eo06]*Ensemble ordonnés_ bon ordre_ bien fondé*,

http://deptinfo.unice.fr/∼beauquie/IT/03IT2006.pdf.

[Obf]*caractérisation des ordres bien fondé*,

http://igm.Univ_mlv.fr/∼nicaud/poly/L2_1.pdf.