UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière Mathématiques**:**

Option : Analyse fonctionnelle

Par

Houria CHERDOUD

Sujet

Propriété de Radon-Nikodym et opérateurs sous linéaires positivement p-sommants

Devant le jury :

Mr. K. Saadi	Prof. Univ de M'sila	Président
Mr. A. Belaada	M.C.B. Univ de M'sila	Encadreur
Mr. M. Belaala	M.C.B. Univ de M'sila	Examinateur
Mr. N. Dechoucha	M.A.A. Univ de M'sila	Examinateur

Promotion : 2018 / 2019

Dédicace

À

Mes très chers parents.

Mes frères Akram, Nassereddine

Mes sœurs Khaoula , samah

Tous mes proches, mes amis et mes collègues.

Je dédie ce travail

Houria CHERDOUD

Remerciements

Nous remercions tout d'abord et avant tout le tout puissant **ALLAH** qui nous a réussi à achever ce travail.

Je tiens à remercier **Mr. Abdelaziz BELAADA** qui a accepté de bon coeur et de bienveillance, de diriger ce travail et de me suivre patiemment dans toutes les étapes de cette étude.

Je lui suis reconnaissante de ses remarques nombreuses, sa

gentillesse et sa patience.

Je remercie aussi tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait, en acceptant de juger ce modeste travail.

Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis.

Table des matières

Notations

μ	Mesure de probabilité réguliére positive sur l'espace compact Ω.
p'	Exposant conjugué de p (i.e., $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$), $p\geq 1$.
L_p	Espace de Lebesgue.
$L_p\left(\mu,Y\right)$	Espace des fonctions mesurables sur Ω telle que $\left\Vert f\right\Vert =\left(\int_{\Omega}\left\Vert f\left(t\right)\right\Vert ^{p}d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.
X^+	$\left\{x\in X : x\geq 0\right\}$.
$x\vee y$	$\sup\left\{x,y\right\}$.
$C(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur l'espace compact Ω à valeurs réelles.
X^*	Le dual topologique de X.
B_X	Boule unité fermée de l'espace normé X.
$L(X,Y)$	Ensemble de tous les opérateurs linéaires de X dans Y.
$\mathcal{B}(X;Y)$	Espace de tous les opérateurs linéaires continus de X dans Y.
$\Pi_p(X,Y)$	Espace des opérateurs linéaires p-sommants de X dans Y.
$\Pi_p^+(X;Y)$	Classe de tous les opérateurs linéaires positivement p-sommants de X dans Y.
$\mathcal{SL}(X,Y)$	Ensemble de tous les opérateurs sous linéaires de X dans Y.
∇T	$\left\{u\in L(X,Y) : u\leq T \text{ (i.e,} \forall x\in X, u(x)\leq T(x))\right\}$.
$\mathcal{SB}(X,Y)$	Ensemble de tous les opérateurs sous linéaires bornés de X dans Y.
$\widetilde{T}$	La linéarisation de l'opérateur T.
$\Pi_{s-p}(X,Y)$	Classe de tous les opérateurs sous linéaires p-sommants de X dans Y.
$\Pi_{s-p}^+(X,Y)$	Classe de tous les opérateurs sous linéaires positivement p-sommants de X dans Y.

Introduction

Les applications sous linéaires ont été un objet mathématique très étudiées au cours de ces dernières années et surtout dans le domaine de la géométrie des espaces de Banach. Les travaux de ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la théorie d'opérateurs non linéaires.

Dans ce travail, on présente un autre concept dans la notion de sommabilité pour les opérateurs sous linéaires, qui sont les opérateurs sous linéaires positivement p-sommants.

La notion d'opérateurs linéaires positivement p-sommants a été introduite et étudiée en 1987 par **O. Blasco** [7, 8]. Nous concentrons notre travail sur le papier intitulé "Positive p-summing operators on L_p-spaces." (American Mathematical Society, 1987).

Dans 2007 **D. Achour, L. Mezrag et A. Tiaiba** ont généralisé les opérateurs sous linéaires dans [4].

Dans ce mémoire, nous étudions la classe d'opérateurs sous linéaires positivement p-sommants et présentons quelques applications de la propriété de Radon-Nikodym dans la classe mentionné ci-dessus. Nous établirons ainsi des résultats analogues du cas linéaire étudié par **O. Blasco** dans [7]. Soit $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur sous linéaire positivement p-sommants, comme le résultat si $X = L_{p'}(\mu)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, et nous utilisons la représentation de $u \in \nabla T$ pour certaines caractérisations d'opérateurs sous linéaires positivement p-sommants, qui sont prouvés ci-dessous par [**A. BELAADA**, *Idéaux d'opérateurs non linéaires et théorémes de factorisation. Thèse de doctorat en science, Université de M'sila (2018)].* Nous en déduisons que chaque T est un opérateur sous linéaire si et seulement si, pour tout $u \in \nabla T$, u est un opérateur positivement p-sommant. Nous prouvons aussi que

$$\Pi^+_{s-p}(L_{p'}(\mu), Y) = \Pi^+_{s-1}(L_{p'}(\mu), Y).$$

A la fin de ce travail, nous appliquons la condition nécessaire que Y a la propriété de Radon-Nikodym.

Ce travail est divisé en trois chapitres comme le suivant :

Dans le premier chapitre, on va donner quelques définitions préliminaires, notations et propriétés générales sur la théorie de mesure et intégration et les espaces L_p. A la fin de ce chapitre, on donne la notion de la propriété de Radon-Nikodym.

Dans le deuxième chapitre, on donne un aperçu général sur les espaces réticulés, les opérateurs sous linéaires et quelques propriétés utiles. En donnant la notion d'opérateurs positivement p-sommants à partir de cas linéaires au cas sous linéaires faites par [7] et [4]. Et on donne quelques résultats fondamentaux de **O. Blasco** en 1987 dans le cas linéaire.

On termine ce travail par le troisième chapitre, en présentant aussi quelques applications de la propriété de Radon-Nikodym dans la classe d'opérateurs sous linéaires positivement p-sommants.

Chapitre 1

Résultats préliminaires et propriété de Radon-Nikodym

Dans ce chapitre, et on première partie on va rappeler quelques définitions et terménologies concernant de la théorie de mesure et intégration, dans seconde partie, nous donnons les définitions et les propriétés fondamontals sur les espaces L_p. On terminera ce chapitre par la propriété de Radon-Nikodym.

1.1 Théorie de mesure et intégration

Dans cette section, nous donnons quelques définitions préliminaires concernant de la théorie de mesure et intégration.

Définition 1.1.1 *[12] Un espace mesuré est un triplé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *constitué de* :
(1) *Un espace* (*ou ensemble*) Ω.
(2) *Une* σ*-algébre* (*ou tribu*) $\mathcal{F}$ *de parties de* Ω.
(3) *Une mesure* μ *sur l'espace mesurable* $(\Omega, \mathcal{F})$.

Dans ce paragraphe, nous donnons la définition de cette notions.

Définition 1.1.2 *[13] Une classe* $\mathcal{F}_0$ *des parties de* Ω *est appelée une algèbre si*:

$$A, B \in \mathcal{F}_0 \Rightarrow A^c, A \cup B \in \mathcal{F}_0$$

donc aussi $A \cap B \in \mathcal{F}_0$.

Remarque 1.1.1 *On remarque que si $\mathcal{F}_0$ est un algèbre non vide, on a $\Omega, \emptyset \in \mathcal{F}_0$.*

Définition 1.1.3 *[11] Une classe $\mathcal{F}$ de parties d'un ensemble Ω est appelée tribu ou σ-algébre si*
(i) Elle contient Ω (i.e. $\Omega \in \mathcal{F}$),
(ii) Elle est stable par passag au complémentaire : pour tout $A \subseteq \Omega, A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{F}$,
(iii) Elle est stable par réunion dénombrable : si $(A_{n)}$ est une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$, alors $\cup_n A_n \in \mathcal{F}$.

Définition 1.1.4 *[12] Soit Ω un espace topologique (i.e.un espace muni d'une famille d'ouverts, par exemple un espace métrique). On appelle σ-algébre (ou tribu) **borélienne** sur Ω la plus petit σ-algébre contenant tous les ouverts de Ω.*

Définition 1.1.5 *[13] On appelle espace mesurable un couple $(\Omega, \mathcal{F})$ formé d'un ensemble Ω, muni d'un σ-algébre $\mathcal{F}$ de parties de cet ensemble.*

Définition 1.1.6 *[12] Une application $\mu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ est appelée une mesure si :*
(a) $\mu(\emptyset) = 0$.
(b) Etant donné $\{A_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$, avec $A_k \cap A_l = \emptyset$, dès que $k \neq l$, alors

$$\mu(\bigcup_1^\infty A_n) = \sum_1^\infty \mu(A_n).$$

*La propriété (ii) est appelée σ-**additivité.** On définit de la même façon une mesure sur une algèbre $\mathcal{F}_0$ de parties de Ω, en rajoutant dans (ii) la condition si $\bigcup_1^\infty A_n \in \mathcal{F}_0$. Une mesure μ est dite **finie** ou **infinie**, suivant que $\mu(\Omega) < \infty$ ou $\mu(\Omega) = +\infty$.*

Définition 1.1.7 *[12] Une mesure μ, définie sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$, sera dite σ-finie si $\exists$ $\{A_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$ telle que :*
(1) $\bigcup_0^\infty A_n = \Omega$,
(2) $\mu(A_n) < \infty$, $\forall$ $n \in \mathbb{N}$.

*Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$. On dira que μ est σ-**finie le long de** $\mathcal{C}$, si (i) et (ii) sont satisfaites avec une suite $\{A_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}$.*

1.2 Les espaces L_p

Deux exposants $p, q \in [1, +\infty]$ seront dits **conjugués** si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$(d'ou soit $p, q \in]1, +\infty[$, soit l'un vaut 1 et l'autre $+\infty$).

Proposition 1.2.1 *[12] Soit $p, q \in]1, +\infty[$ deux exposants conjugués, f et g deux applications mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.*
(a) ***(Inégalité de Hölder)***

$$\int_\Omega fg d\mu \leq (\int_\Omega f^{\,p} d\mu)^{1/p} (\int_\Omega g^q d\mu)^{1/q}.$$

(b) ***(Inégalité de Minkowski)***

$$(\int_\Omega (f+g) d\mu)^{1/p} \leq (\int_\Omega f^{\,p} d\mu)^{1/p} + (\int_\Omega g^p d\mu)^{1/p}.$$

Définition 1.2.1 *Soient Ω et E des espaces mesurables munis de leurs tribus respectives $\mathcal{F}$ et $\mathcal{A}$. Une fonction $f : \Omega \to E$ est dite $(\mathcal{F}, \mathcal{A})$-mesurable si la tribu image réciproque par f de la tribu $\mathcal{A}$ est incluse dans $\mathcal{F}$, c'est-à-dire si :*

$$\forall B \in \mathcal{A}, \ f^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

Définition 1.2.2 *[10] Si $p \in [1, \infty[$, on note $L_p = L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ l'ensemble de toutes les fonctions mesurables sur $(\Omega, \mathcal{F})$, à valeurs réelles, telles que la fonction $|f|^p$ soit μ-intégrable. Si $f \in L_p$, on pose*

$$L_p(\Omega, \mu) = \left\{ f \ : \ \Omega \to \mathbb{C} \ \textit{mesurable t.q.} \ \ \|f\|_p < \infty \right\},$$

$$\|f\|_p = (\int |f|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}}.$$

Et on pose

$$L_\infty(\Omega, \mu) = \{ f \ : \ \Omega \to \mathbb{C} \ \textit{mesurable t.q.} \ \ \|f\|_\infty < \infty \},$$

$$\|f\|_\infty = \inf(a \in \mathbb{R}_+ : |f| \leq a \ \mu\text{-}p.p).$$

Proposition 1.2.2 *[10] Chaque espace L_p est un espace vectoriel.*

Preuve. D'abord , si $f \in L_p$ et $a \in \mathbb{R}$, il est évident que le produit af appartient aussi à L_p. Il nous suffit donc le montrer que si $f, g \in L_p$, alors $f + g \in L_p$.

On vérifie facilement que $(1 + x)^p \leq 2^p(1 + x^p)$ pour tout $x \geq 0$, donc aussi $(x + y)^p \leq 2^p(x^p + y^p)$ si $x, y \geq 0$. Il s'ensuit que $|f + g|^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$: si $f, g \in L_p$, la fonction $|f + g|^p$ est intégrable et $f + g \in L_p$. ■

Rappelons que si F désigne un espace vectoriel, on appelle norme sur F une application $u \longmapsto \|u\|$ de F dans $\mathbb{R}_+$ qui vérifie :

$$\begin{cases} (i)\ \|u\| = 0 & \Leftrightarrow \quad u = 0, \\ (ii)\ a \in \mathbb{R},\ u \in F & \Rightarrow \quad \|au\| = |a|\,\|u\| \ \text{(homogénéité)}, \\ (iii)\ \|u + v\| & \leq \quad \|u\| + \|v\| \ \text{(inégalité triangulaire)}. \end{cases}$$

Remarque 1.2.1 *Le fait que $L_p(\mu)$ est un espace vectoriel est immédiat pour $p = 1$ ou $+\infty$, et résulte de l'inégalité de Minkowski, pour $p \in]1, +\infty[$.*

Théorème 1.2.1 *[13] $\forall\ p \in [1, +\infty]$, l'espace $L_p(\mu)$, muni de la norme $\|.\|_p$, est un espace de Banach muni d'un produit scalaire*

$$< f, g >= \int fgd\mu$$

l'espace $L_2(\mu)$ est un espace de Hilbert.

Définition 1.2.3 *[8] Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace de mesure finie et $1 \leq p < \infty$. Soit Y un espace de Banach, on notera par $L_p(\mu, Y)$ l'espace des fonctions mesurables de $\mathcal{F}$ dans Y telles que*

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega \|f(t)\|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

1.3 Propriété de Radon-Nikodym

Dans cette section, nous donnons la définition de la **propriété de Radon-Nikodym** et son célèbre théorème de Radon-Nikodym et le théorème de représentation de Riesz. A la fin de cette section nous concluons le théorème qui donne une relation entre ces deux théorèmes. Pour plus de détails sur la propriété de Radon-Nikodym nous renvoyons le lecteur aux références [9].

Définition 1.3.1 *Soient $\mathcal{F}$ une partie de $\rho(\Omega)$ et X un espace de Banach, une fonction $F : \mathcal{F} \to X$ est appelée mesure vectorielle additive finie, ou simplement mesure vectorielle, si chaque fois que E_1 et E_2 sont des parties disjointes de $\mathcal{F}$ alors*

$$F(E_1 \cup E_2) = F(E_1) + F(E_2).$$

Si, de plus, $F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F(E_n)$ dans la topologie de la norme de X pour toutes les suites (E_n) de parties disjointes deux à deux de $\mathcal{F}$ tel que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}$ alors F est appelée une mesure vectorielle additive dénombrable ou simplement, F est additive dénombrable.

Définition 1.3.2 *Soit $F : \mathcal{F} \to X$ une mesure vectorielle. La variation de F est la fonction non-négative prolongement et notée par $|F|$ dont la valeur sur un ensemble $E \in \mathcal{F}$ est donnée par*

$$|F|(E) = \sup_{\pi} \sum_{A \in \pi} \|F(A)\|,$$

où le supremum est porté sur toutes les partitions π de E en un nombre fini de parties disjointes de paires de fils de $\mathcal{F}$. Si $|F|(\Omega) < \infty$, alors F sera appelé une mesure de variation bornée.

Définition 1.3.3 *Soit $\mathcal{F} \in \rho(\Omega)$ une tribu de Ω, $F : \mathcal{F} \to X$ une mesure vectorielle et μ une mesure de valeur réelle (finie) non négative sur $\mathcal{F}$. Si $\lim_{\mu(E)\to 0} F(E) = 0$, alors F est appelé μ-continu et cela est signifié par $F << \mu$.*

Théorème 1.3.1 (Théorème de représentation de Riesz) *Si X est un espace de Banach et que $u : L_1(\mu) \to X$ est un opérateur linéaire continu, alors il existe $g \in L_\infty(\mu, X)$ tel que*

$$u(f) = \int_\Omega fg \, d\mu \text{ pour tout } f \in L_1(\mu).$$

Théorème 1.3.2 (Théorème de Radon-Nikodym) *Si $G : \mathcal{F} \to X$ est un mesure vectorielle μ-continue de variation bornée, alors il existe une intégrale de Bochner définie par*

$$G(E) = \int_E g \, d\mu \text{ pour tout } E \in \mathcal{F} \text{ et pour } g \in L_1(\mu, X).$$

Définition 1.3.4 (Propriété de Radon-Nikodym) *Un espace de Banach X a la propriété de Radon-Nikodym par rapport à $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, si pour chaque mesure vectorielle μ-continue $G : \mathcal{F} \to X$ de variation bornée il existe $g \in L_1(\mu,\ X)$ tel que*

$$G(E) = \int_E g\ d\mu \text{ pour tout } E \in \mathcal{F}.$$

Exemple 1.3.1 (i) *L'espace l_1 possède la propriété de Radon-Nikodym.*
(ii) *L'espace $L_1[0,1]$ ne possède pas a la propriété de Radon-Nikodym.*

Remarque 1.3.1 *Un espace de Banach X est dit a la propriété de Radon-Nikodym si X est dit à la propriété de Radon-Nikodym par rapport à tout espace de mesure finie.*

Définition 1.3.5 *Une fonction $f : \Omega \to X$ est dite simple s'il existe $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ et $E_1, E_2, ..., E_n \in \mathcal{F}$ tel que $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathcal{X}_{E_i}$, où*

$$\mathcal{X}_{E_i}(\omega) = \begin{cases} 1, & si\ \omega \in E_i \\ 0, & si\ \omega \notin E_i \end{cases}$$

Définition 1.3.6 *Un opérateur linéaire borné $u : L_1(\mu) \to X$ est Riesz-représentable (ou simplement représentable) s'il existe $g \in L_\infty(\mu,\ X)$ tel que*

$$u\ f = \int_\Omega fg\ d\mu \text{ pour tout } f \in L_1(\mu).$$

Lemme 1.3.1 *Soit $u : L_1(\mu) \to X$ un opérateur linéaire borné. Pour $E \in \mathcal{F}$, on définit $G(E)$ par*

$$G(E) = u(\mathcal{X}_E).$$

Alors u est représentable si et seulment s'il existe $g \in L_1(\mu,\ X)$ tel que

$$G(E) = \int_E g\ d\mu \text{ pour tout } E \in \mathcal{F}.$$

Dans ce cas, la fonction $g \in L_\infty(\mu,\ X)$ et

$$u(f) = \int_\Omega fg\ d\mu \quad \text{pour tout } f \in L_1(\mu).$$

De plus $\|g\|_\infty = \|u\|$.

Preuve. Si u est représentable, alors il existe $g \in L_\infty(\mu,\ X)$ tel que $u(f) = \int\limits_\Omega fg\ d\mu$ pour tout $f \in L_1(\mu)$. Ainsi, si $E \in \mathcal{F}$, alors

$$G(E) = u(\mathcal{X}_E) = \int_E g\ d\mu.$$

Cela prouve la nécessité.

Pour l'inverse, soit $G(E) = u(\mathcal{X}_E) = \int_E g\ d\mu$ pour certains $g \in L_1(\mu,\ X)$ et tout $E \in \mathcal{F}$.

Depuis pour $E \in \mathcal{F}$ on a

$$\|G(E)\| = \|u(\mathcal{X}_E)\| \leq \|u\| \, \|\mathcal{X}_E\|_1 = \|u\| \, \mu(E),$$

il s'ensuit que la variation $|G|$ de G satisfait

$$|G|(E) \leq \|u\| \, \mu(E) \text{ pour tout } E \in \mathcal{F}.$$

Depuis pour chaque $E \in \mathcal{F}$ on a $|G|(E) = \int_E \|g\|\ d\mu$, il s'ensuit immédiatement que $\|g\| \leq \|u\|$ presque partout. Par conséquent $g \in L_\infty(\mu,\ X)$.

Pour prouver que $\|g\|_\infty = \|u\|$, notez que si $f \in L_1(\mu)$, alors

$$\|u(f)\| = \left\| \int\limits_\Omega fg\ d\mu \right\| \leq \int\limits_\Omega |f| \, \|g\|_\infty \, d\mu = \|g\|_\infty \, \|f\|_1.$$

D'où $\|u\| \leq \|g\|_\infty$ et l'égalité $\|u\| = \|g\|_\infty$. ■

Le théorème suivante donne une relation entre le théorème de representation de Riesz et le théorème de Radon-Nikodym.

Théorème 1.3.3 (Propriété de Radon-Nikodym) *[9, Théorème 5] Soit X un espace de Banach et $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace de mesure finie. Alors X a la propriété de Radon-Nikodym par rapport à $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ si et seulment si chaque $u \in \mathcal{B}(L_1(\mu),\ X)$ est représentable.*

Ou d'une autre manière nous concluons le théorème suivante :

Théorème 1.3.4 *Soit $(\Omega,\mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Un espace de Banach X a la propriété de Radon-Nikodym si ν une mesure vectorielle sur $\mathcal{F}$ dans X est absolument continue par rapport à μ et de variation bornée alors il existe $g \in L_1(\mu)$ tel que, pour tout $E \in \mathcal{F}$, $|\nu|(E) = \int_E g(t)\, d\mu$.*

Chapitre 2

Opérateurs sous linéaires positivement p-sommants

Dans ce chapitre, on annoncera quelques notations et propriétés relatives aux espaces réticulés et on donne la notion d'opérateurs positivement p-sommants au cas linéaires et de cas sous linéaires. La premier définition a été introduit par Blasco [7], second concepte a été introduit par Achour , Mezrag et Tiaiba [4], de plus on présente quelques résultas principaux de Blasco en 1987 dans le cas linéaire.

2.1 préliminaires

Nous commençons par cette section rappelons quelques terminologies déjà vues pour l'aisance du lecteur concernant les espaces de Banach réticulés.

Définition 2.1.1 (Espace vectoriel ordonné) *Un espace vectoriel réel X est partiellement ordonné par un ordre partiel noté par $\leq$ est un espace vectoriel ordonné si :*

$$x \leq y \text{ implique } x+z \leq y+z \text{ pour tout } z \in X,$$

$$x \geq 0 \text{ implique } \alpha x \geq 0 \text{ pour tout } \alpha \text{ dans } \mathbb{R}_+.$$

Notation 2.1.1 *Soit X un espace vectoriel ordonné, on note par $X^+ = \{x \in X : x \geq 0\}$. Un élément x de X est positive si $x \in X^+$.*

Définition 2.1.2 *a) Un sous ensemble A de X dit* ***borné*** *pour l'ordre (ou simplement borné) s'il existe un élément y dans X tel que $x \leq y$ pour tout $x \in A$ et y est alors appelé* ***borne supérieure*** *de A.*
b) Si A est borné, alors z est appelé ***la borne supérieure*** *de A ou* ***le supremum*** *de A si z est une borne supérieure de A et $z \leq y$ pour toute borne supérieure y de A.*
c) Un espace vectoriel ordonné X dans lequel toute paire d'éléments a une borne supérieure est appelé ***espace vectoriel réticulé****.*
d) La plus petite borne supérieure d'un ensemble à deux éléments est notée par

$$x \vee y \ \textit{ou} \ \sup\{x, y\}.$$

e) On dira qu'un espace vectoriel est ***complétement réticulé*** *si toute partie non vide et bornée pour l'ordre, admet un supremum.*

Définition 2.1.3 (Espace de Banach réticulé) *Soit X un espace de Banach, on dira que X est Banach réticulé (resp. complètement réticulé) si :*
1) X est réticulé (resp. complètement réticulé).
2) Pour tout $x, y \in X$, on a

$$\begin{cases} (1) \quad \||x|\| & = \quad \|x\| \\ (2) \quad |x| \leq |y| & \Longrightarrow \quad \|x\| \leq \|y\|. \end{cases}$$

On pose $|x| = \sup\{x, -x\}$ (avec $x^+ = \sup\{x, 0\}$ et $x^- = \sup\{0, -x\}$)
$|x| = x^+ + x^-$.

Exemple 2.1.1 *(i) Les espaces $L_p, (1 \leq p \leq \infty)$ sont des espace de Banach complètements réticulés.*
(ii) L'espace $C(\Omega)$ est un espace de Banach réticulé.

Pour n un entier. Soient X un espace de Banach réticulé et $1 \leq p \leq \infty$. On note par $X(l_p^n)$ l'espace des suites $x = (x_1, ..., x_n)$ d'éléments de X telles que

$$\|x\|_{X\left(l_p^n\right)} = \left\| \left(\sum_1^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \right\| si 1 \leq p < \infty$$

et

$$\|x\|_{X(l_\infty^n)} = \left\| \sup_{1\le i\le n} |x_i| \right\| \text{ si } p = \infty.$$

L'espace $X(l_p^n)$ équipé de l'ordre naturel

$$x \le y \Longleftrightarrow x_i \le y_i, \forall i,$$

est un espace de Banach réticulé.

Soit maintenant X un espace de Banach et $1 \le p \le \infty$. On note par $l_p(X)$ (resp. $l_p^n(X)$) l'espace des suites (x_i) dans X muni de la norme

$$\|(x_i)\|_{l_p(X)} = (\sum_1^\infty \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$(resp.\, \|(x_n)\|_{l_p^n(X)} = (\sum_1^n \|x_i\|^p)^{\frac{1}{p}})$$

si p est fini, et on prend le sup si p est infini.

On désigne aussi par $l_p^\omega(X)$ (resp. $l_p^{n\ \omega}(X)$) l'espace des suites (x_i) dans X muni de la norme

$$\|(x_n)\|_{l_p^\omega(X)} = \sup_{\|\xi\|_{X^\star}} (\sum_1^\infty |\langle x_i, \xi\rangle|^p)^{\frac{1}{p}})$$

$$(resp.\, \|(x_n)\|_{l_p^{n\ \omega}(X)} = \sup_{\|\xi\|_{X^\star}} (\sum_1^n |\langle x_i, \xi\rangle|^p)^{\frac{1}{p}}).$$

2.2 Opérateurs linéaires positivement p-sommants

Définition 2.2.1 (Opérateurs linéaires) *Soient X, Y deux espaces de Banach et $u : X \to Y$ une application. Elle est linéaire si*

a) $\forall x, y \in X : u(x+y) = u(x) + u(y)$.

b) $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R} : u(\lambda x) = \lambda u(x)$.

On note $L(X;Y)$ l'ensemble des applications linéaires, on le muni de deux opérations algébriques suivantes

1) $\forall x \in X : (u_1 + u_2)(x) = u_1(x) + u_2(x)$.

2) $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda u)(x) = \lambda u(x)$.

Définition 2.2.2 *Soit $u \in L(X;Y)$. L'application linéaire u est continue (bornée) s'il existe $C > 0$ tel que*

$$\forall x \in X : \|u(x)\| \leq C \|x\| .$$

On note $\mathcal{B}(X,Y) = \{u : X \to Y \text{ linéaires bornés}\}$ l'espace de Banach des applications linéaires continues. On note aussi

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\| .$$

Dans ce qui suit, on donne la définition d'opérateur linéaire p-sommant introduite par [14]

Définition 2.2.3 *Soient X, Y deux espaces de Banach et $u \in \mathcal{B}(X;Y)$. On dira que u est p-sommant pour $p \in \left]0, \infty\right[$, s'il existe un constante $C > 0$, telle que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, ..., x_n \in X$,*

$$(\sum_{i=1}^{n} \|u(x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{x^*}} (\sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|^p)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.2.1}$$

On note

$\Pi_p(X,Y)$ l'espace de Banach d'opérateurs linéaires p-sommants de X dans Y

muni de la norme

$$\pi_p(u) = \inf \{C \text{ vérifiant } (2.2.1)\} .$$

Maintenant, on donne la définition d'opérateur linéaire positivement p-sommant introduite par [7].

Définition 2.2.4 *Soit X un espace de Banach réticulé et Y un espace de Banach. Un opérateur linéaire $u : X \to Y$ est positivement p-sommant pour $1 \leq p \leq \infty$, s'il existe un constante $C > 0$, telle que pour tout $x_1, ..., x_n$ éléments positifs dans X, on a*

$$(\sum_{i=1}^{n} \|u(x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{x^*}} (\sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|^p)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.2.2}$$

On note

$\Pi_p^+(X;Y)$ est la classe de tous les opérateurs linéaires positivement p-sommants de X dans Y

et

$$\pi_p^+(u) = \inf\{C \text{ vérifiant l'inégalité } (2.2.2)\}.$$

Remarque 2.2.1 *[7] Soit X un espace de Banach. Si on utilise la dualité $(l_p)^* = l_{p'}$, on a*

$$\sup_{\xi\in B_{x^*}}\left(\sum_1^n |\langle x_i,\xi\rangle|^p\right)^{\frac{1}{P}} = \sup_{\alpha\in U^+_{l^{p'}}}\left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i |x_i|\right\|_X. \tag{2.2.3}$$

Où $U^+_{l^{p'}} = \left\{\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^n,\ \sum_{i=1}^n \alpha_i^{p'} \leq 1,\ \alpha_i \geq 0\right\}.$

2.2.1 Résultats de Blasco

Dans ce paragraphe, on donne quelques résultats principaux de **Blasco** en 1987, pour plus de détails voir [7].

Proposition 2.2.1 *Soit Y un espace de Banach, on a*
(1) *Si $1 \leq p \leq \infty$, alors*

$$\Pi_p^+(L_1(\mu),Y) = \mathcal{B}(L_1(\mu),Y) \text{ et } \Pi_p^+(C(\Omega),Y) = \Pi_p(C(\Omega),Y).$$

(2) *Si $1 \leq p \leq q \leq \infty$, alors*

$$\Pi_p^+(X;Y) \subset \Pi_q^+(X;Y).$$

Théorème 2.2.1 *Soit Y un espace de Banach, pour tout $1 \leq p \leq \infty$ on a*

$$\Pi_p^+(L_{p'}(\mu);Y) = \Pi_1^+(L_{p'}(\mu);Y).$$

Preuve. Dans ce cas $p = 1$ et $p = \infty$ sont prouvés. Soit $1 < p < \infty$, premièrment, on a $\Pi_1^+(L_{p'}(\mu);Y) \subset \Pi_p^+(L_{p'}(\mu);Y)$ d'après la Proposition 2.2.1 (2). Deuxièment, on suppose que $u \in \Pi_p^+(L_{p'}(\mu);Y)$ et soit $\mathcal{F}$ la tribu sur l'ensemble Ω. Considérons la mesure vectorielle additive finie $G : \mathcal{F} \to X$ définie par $G(E) = u(\mathcal{X}_E)$ pour tout ensemble mesurable E, en si $E \in \mathcal{F}$ et en notant la partition finie de E par π_E deux à deux disjoints. Tout d'abord en prouver que G est dénombrable additive. En effet

$$\begin{aligned} G\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= u\left(\mathcal{X}_{\cup_{i=1}^{n} A_i}\right), \text{ pour tout } (A_i) \text{ à partition de } E. \\ &= u\left(\mathcal{X}_{A_1} + ... + \mathcal{X}_{A_n}\right) \end{aligned}$$

Puisque (A_i) à partition de E; on obtient

$$\begin{aligned} G\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= u\left(\mathcal{X}_{A_1} + ... + \mathcal{X}_{A_n}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} u\left(\mathcal{X}_{A_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} G\left(A_i\right) \end{aligned}$$

Alors G est σ-additivité

On a la variation de la mesure G

$$\begin{aligned} |G|(E) &\overset{\text{déf}}{=} \sup_{\pi_E} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|G(A_i)\|, \ (A_i) \text{ à partition de } E \right\} \\ &= \sup_{\pi_E} \sum_{i=1}^{n} \left\|u\left(\mathcal{X}_{A_i}\right)\right\| \\ &= \sup_{\pi_E} \sum_{i=1}^{n} \left\|u\left(\mu\left(A_i\right)^{\frac{1}{p'}} \mu\left(A_i\right)^{\frac{-1}{p'}} \mathcal{X}_{A_i}\right)\right\| \\ &= \sup_{\pi_E} \sum_{i=1}^{n} \left\|u\left(\mu\left(A_i\right)^{\frac{-1}{p'}} \mathcal{X}_{A_i}\right)\right\| \mu\left(A_i\right)^{\frac{1}{p'}} \end{aligned}$$

d'aprés l'inégalité de Hölder $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$ alors on a

$$\begin{aligned} |G|(E) &\leq \sup_{\pi_E} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\mu\left(A_i\right)^{\frac{1}{p'}}\right)^{p'} \right)^{\frac{1}{P'}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left\|u\left(\mu\left(A_i\right)^{\frac{-1}{p'}} \mathcal{X}_{A_i}\right)\right\|^{p} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{\pi_E} \left(\sum_{i=1}^{n} \mu\left(A_i\right) \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left\|u\left(\mu\left(A_i\right)^{\frac{-1}{p'}} \mathcal{X}_{A_i}\right)\right\|^{p} \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Puisque μ est σ-additive nous abtenons

$$
\begin{aligned}
|G|(E) &\leq \sup_{\pi_E}\left(\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|u\left(\mu(A_i)^{\frac{-1}{p'}}\mathcal{X}_{A_i}\right)\right\|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (\mu(E))^{\frac{1}{p'}}\sup_{\pi_E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left\|u\left(\mu(A_i)^{\frac{-1}{p'}}\mathcal{X}_{A_i}\right)\right\|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \text{ car } \bigcup_{i=1}^{n} A_i = E \\
&\leq (\mu(E))^{\frac{1}{p'}}\pi_p^{+}(T).
\end{aligned}
$$

Il s'ensuitt que $|G|$ est un mesure positive finie qui est absolument continue par rapport à la mesure μ. Par conséquent, la propriété de Radon-Nikodym qu'il existe une fonction $g \geq 0$ dans $L_1(\mu)$ avec $|G|(E) = \int_E g(t)\,d\mu$ pour tous E dans $\mathcal{F}$. et $g \in L_p(\mu)$. Depuis maintenant

$$
\begin{aligned}
\|u(\chi_E)\| &\leq \textstyle\int_E \chi_E g(t)\,d\mu \\
&\leq \textstyle\int_\Omega \chi_E g(t)\,d\mu
\end{aligned}
$$

on obtient que, pout tout $f \in L_{P'}(\mu)$

$$
\|u(f)\| \leq \int_\Omega |f(t)|\,g(t)\,d\mu \tag{4.2}
$$

On a

$$
\begin{aligned}
\|u(f_i)\| &\leq \textstyle\int_\Omega f_i(t)\,g(t)\,d\mu \text{ pour tout } f \in L_{p'}(\mu) \\
\sum_{i=1}^{n}\|T(f_i)\|^p &\leq \sum_{i=1}^{n}\textstyle\int_\Omega f_i(t)^p (g(t))^p\,d\mu \text{ pour tout } f \in L_{p'}(\mu) \\
&\leq \textstyle\int_\Omega (g(t))^p \sum_{i=1}^{n}|f_i(t)|^p\,d\mu \text{ pour tout } f \in L_{p'}(\mu) \\
&\leq \left\|\sum_{i=1}^{n}|f_i(t)|^p\right\|_{p'} \textstyle\int_\Omega (g(t))^p\,d\mu \\
&\leq \|g\|_p \left\|\sum_{i=1}^{n}|f_i(t)|^p\right\|_{p'}
\end{aligned}
$$

Donc $\|g\|_p \leq \pi_p^{+}(T)$

A partire de ce $\|g\|_p = \pi_p^{+}(T)$

De (4.2) il est facil de vérifie que T est dans $\pi_1^{+}(L_{p'}(\mu), Y)$. En effet, Soient $f_1, ..., f_n > 0$ dans $L_{p'}(\mu)$ on a

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\|T(f_i)\| &\leq \sum_{i=1}^{n}\textstyle\int_\Omega f_i(t)\,g(t)\,d\mu \\
&\leq \textstyle\int_\Omega g(t)\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(t)\right)d\mu \\
&\leq \|g\|_p \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i(t)\right\|_{L^{p'}(\mu)}.
\end{aligned}
$$

Alors $\pi_p^+(T) = \pi_1^+(T)$. ■

Théorème 2.2.2 *Soit $1 < p \leq \infty$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(a) L'espace Y a la propriété de Radon-Nikodym.
(b) $\Pi_p^+(L_{p'}(\mu), Y) = L_p(\mu, Y)$.

2.3 Opérateurs sous linéaires

On donne un aperçu général sur les opérateurs sous linéaires et quelques propriétés utiles. Pour plus de détails sur les opérateurs sous linéaires nous renvoyons le lecteur aux références [1, 2, 3, 5].

Définition 2.3.1 *Soit T une application d'un espace vectoriel X dans un espace réticulé Y. On dira que T est sous linéaire si,*
(a) $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \forall x \in X$, $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ (positivement homogène),
(b) $\forall x, y \in X$, $T(x + y) \leq T(x) + T(y)$ (sous-additive).

Remarque 2.3.1 *La somme de deux opérateurs sous linéaires est un opérateur sous linéaire et la multiplication par un nombre positif donne aussi un opérateur sous linéaire.*

Exemple 2.3.1 1) *Toute application linéaire est une application sous linéaire (inverse faut).*
2) *L'application :*

$$\begin{aligned} T \ : \ & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ & x \rightarrow |x| \end{aligned}$$

est sous linéaire car :
i) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ on a $|x + y| \leq |x| + |y|$,
ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$ on a $|\lambda x| = \lambda |x|$.

Notation 2.3.1 *Soit X un espace vectoriel et Y un espace réticulé. On note par*
1) *$\mathcal{SL}(X, Y) = \{$applications sous linéaires $T : X \rightarrow Y\}$.*
2) *On le munit de l'ordre induit par Y*

$$T_1 \leq T_2 \Leftrightarrow T_1(x) \leq T_2(x), \forall x \in X. \tag{2.3.1}$$

3) $\nabla T = \{u \in L(X,Y) : u \leq T \ (i.e, \forall x \in X, u(x) \leq T(x))\}$.

Remarque 2.3.2 *Comme conséquence immédiate on a*

$$u \leq T \Leftrightarrow -T(-x) \leq u(x) \leq T(x), \forall x \in X \tag{2.3.2}$$

car

$$\begin{aligned} u \leq T &\Leftrightarrow u(x) \leq T(x), \forall x \in X, \\ &\Leftrightarrow u(-x) \leq T(-x), \forall x \in X, \\ &\Leftrightarrow -u(x) \leq T(-x), \forall x \in X, \\ &\Leftrightarrow u(x) \leq -T(-x), \forall x \in X. \end{aligned}$$

Définition 2.3.2 *Soit $T \in \mathcal{SL}(X,Y)$.*

On dira que T est symétrique si :

$$\forall x \in X, T(x) = T(-x).$$

Et si X est réticulé, T est croissant si pour tout $x, y \in X^+$:

$$x \leq y \Rightarrow T(x) \leq T(y).$$

Remarque 2.3.3 1) *Soit T un opérateur sous linéaire symétrique entre espaces réticulés X et Y. Alors, $T \geq 0$ au sens de* (2.3.1) *. En effet, soit x dans X*

$$\begin{aligned} 0 &= T(x-x) \\ &\leq T(x) + T(-x) \\ &\leq T(x) + T(x) \\ &\leq 2T(x). \end{aligned}$$

La réciproque est fausse même si T est croissant.

2) *On sait aussi que la symétrie n'entraîne pas la croissance.*

2.3.1 Quelques propriétés

Nous donnerons dans ce paragraphe quelques propriétés que nous aurons besoin pour la suite de notre travail.

Proposition 2.3.1 *Soient X, Y deux espaces vectoriels dont Y réticulé et T dans $\mathcal{SL}(X,Y)$. Alors,*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X, \ \lambda T(x) \leq T(\lambda x).$$

Preuve. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et $x \in X$.
Si $\lambda > 0$ on a

$$\lambda T(x) = T(\lambda x) \leq T(\lambda x),$$

si $\lambda < 0$, on a

$$\lambda T(x) = -(-\lambda T(x)) = -T(-\lambda x)$$

et

$$T(\lambda x - \lambda x) = 0 \leq T(-\lambda x) + T(\lambda x) \Rightarrow -T(-\lambda x) \leq T(\lambda x).$$

Donc, en combinant les deux quantités précédentes on aura

$$\lambda T(x) \leq T(\lambda x).$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Proposition 2.3.2 *Soient X, Y, Z trois espaces vectoriels dont Y, Z réticulés.*
(a) $\forall\ T \in \mathcal{SL}(X,Y)$ et $\forall\ u \in L(Y,Z)$ (positive) $\Rightarrow u \circ T \in \mathcal{SL}(X,Z)$.
(b) $\forall u \in L(X,Y)$ et $\forall\ T \in \mathcal{SL}(Y,Z) \Rightarrow T \circ u \in \mathcal{SL}(X,Z)$.
(c) $\forall\ T \in \mathcal{SL}(X,Y)$ et $\forall\ S \in \mathcal{SL}(X,Z)$ (S croissant) et $S \circ T \in \mathcal{SL}(X,Z)$.

Proposition 2.3.3 *Soient X et Y deux espace vectoriels dont Y réticulé, T un opérateur sous linéaire de X dans Y. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(1) *T continue.*
(2) *T continue en 0.*
(3) *$\exists\ C \geq 0$, tel que $\forall\ x \in X, \|T(x)\| \leq C \|x\|$.*

Dans ce cas, on dit que T est borné et on pose :

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \left\{ \|T(x)\| : \|x\|_{B_X} = 1 \right\}.$$

Lemme 2.3.1 *[5, propostion 2.1] Soit T un opérateur sous linéaire borné entre X espace de Banach et Y espace de Banach réticulé.*

(1) *Pour tout x dans X, on pose*

$$\varphi(x) = \sup \{T(x),\ T(-x)\}.$$

Alors, φ est un opérateur sous linéaire symétrique. De plus,

$$|T| \leq \varphi \text{ et } \|\varphi(x)\| \leq \|T(x)\| + \|T(-x)\|. \tag{2.3.3}$$

(2) $\forall (\alpha_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$, *on a*

$$T(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \, \varphi(x_i).$$

De plus

$$\left\| T(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \, \|\varphi(x)\|.$$

Notation 2.3.2 *On note par $\mathcal{SB}(X,Y) = \{T : X \to Y \text{ sous linéaires bornés}\}$.*

2.3.2 Relations entre les opérateurs linéaires et les opérateurs sous linéaires

Le théorème suivant établit un lien direct entre les opérateurs linéaires et les opérateurs sous linéaires.

Théorème 2.3.1 *[3] Soient X, Y deux espaces de Banach dont Y complétement réticulé et $T : X \to Y$ un opérateur sous linéaire continue. Alors,*

(*a*) $\forall\, x \in X, \|T(x)\| \leq \sup\limits_{u \in \nabla T} \|u(x)\| \leq \|T(x)\| + \|T(-x)\|.$

(*b*) $\|T\| \leq \sup\limits_{u \in \nabla T} \|u\| \leq 2\,\|T\|.$

(*c*) *Pour tout $x \in X$, il y a $u_x \in \nabla T$ telle que*

$$T(x) = u_x(x) \ (i.e.,\ T(x) = \sup_{u \in \nabla T} u(x)).$$

Corollaire 2.3.1 *Comme conséquence immédiate*

(1) *T est continu $\Leftrightarrow \forall\, u \in \nabla T$, u est continu.*

(2) *Aussi si T est symétrique, on aura*

$$\begin{cases} (i)\, \|T(x)\| & = \sup\limits_{u \in \nabla T} \|u(x)\|, \forall x \in X. \\ (ii)\, \|T\| & = \sup\limits_{u \in \nabla T} \|u\|. \end{cases}$$

Nous aurons besoin de la proposition suivante.

Proposition 2.3.4 *Soient X, Y, Z trois espaces de Banach dont Y réticulé, C une constante positive et T un opérateur sous linéaire continu de X dans Y. Soit $v : X \to Z$ un opérateur linéaire injectif tel que*

$$\|T(x)\| \leq C \|v(x)\|.$$

Alors, il existe $\tilde{T} : \overline{v(x)} \to Y$ sous linéaire continu tel que

$$T = \tilde{T} \circ v$$

et

$$\left\|\tilde{T}\right\| \leq C.$$

2.4 Opérateurs sous linéaires p-sommants

Nous allons dans ce paragraphe généraliser la notion d'opérateurs sous linéaires p-sommants introduite par [3].

Définition 2.4.1 *Soient X, Y deux espaces Banach dont Y réticulé et $T \in \mathcal{SB}(X, Y)$. On dira que T est p-sommant pour $1 \leq p \leq \infty$ si,*

$$\begin{cases} \exists C > 0, \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N}, \forall \{x_1, ..., x_n\} \subset X \\ (\sum\limits_1^n \left\|T(x_i)\right\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup\limits_{\xi \in B_{X^*}} (\sum\limits_1^n |\langle x_i, \xi\rangle|^p)^{\frac{1}{p}}. \end{cases}$$

On note par

$$\Pi_{s-p}(X, Y) = \{T : X \to Y \text{ sous linéaires } p\text{-sommants}\}$$

et

$$\pi_{s-p}(T) = \inf\{C, \text{vérifiant la définition 2.4.1}\}.$$

Exemple 2.4.1 *Soit K un espace compact de Hausdorff, soit μ une mesure positive sur K et soit $1 \leq p < \infty$.*
Pour chaque $\varphi \in L_p(\mu)$, on définit l'opérateur de multiplication

$$\begin{array}{rcl} T(\varphi) : C(K) & \to & L_p(\mu) \\ f & \to & |f.\varphi| \end{array}$$

cet opérateur est sous linéaire et p-sommant de plus $\pi_{s-p}(T) = \|\varphi\|_p$.

2.5 Opérateurs sous linéaires positivement p-sommants

La notion d'opérateurs sous linéaires positivement p-sommants a été intoduite par **Achour, Mezrag et Tiaiba** en 2007 [4].

Définition 2.5.1 *Soient X, Y deux Banach réticulés et $T \in \mathcal{SB}(X,Y)$. On dira que T est positivement p-sommmant pour $1 \leq p \leq \infty$ si,*

$$\begin{cases} \exists C > 0, \ \textit{telle que} \ \forall \ n \in \mathbb{N}, \forall \ \{x_1, ..., x_n\} \subset X^+ \\ (\sum_1^n \|T(x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\xi \in B_{X^*}} (\sum_1^n |\langle x_i, \xi \rangle|^p)^{\frac{1}{p}}. \end{cases}$$

Ou bien

$$\|(T(x_i))\|_{l^n_{p(Y)}} \leq C \|(x_i)\|_{l^{n\omega}_{p(Y)}}. \tag{2.5.1}$$

On note par $\Pi^+_{s-p}(X,Y)$ la classe de tous les opérateurs sous linéaires positivement p-sommants de X dans Y,

et

$$\pi^+_{s-p}(T) = \inf \{C, \ \text{vérifiant l'inégalité } (2.5.1)\}.$$

Remarque 2.5.1 *[7] (a) Tout opérateurs sous linéaires p-sommants est une opérateurs sous linéaires positivement p-sommants de plus, on a*

$$\Pi_{s-p}(X,Y) \subset \ \Pi^+_{s-p}(X,Y) \ \textit{et} \ \forall \ T \in \Pi^+_{s-p}(X,Y), \ \pi^+_{s-p}(T) \leq \pi_{s-p}(T).$$

(b) De la dualité (2.2.3), on obtient la définition équivalente à (2.5.1) comme suit :

$$\left(\sum_1^n \|T(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\|_X, \ \sum_{i=1}^n \alpha_i^{p'} \leq 1, \ \alpha_i \geq 0 \right\}. \tag{2.5.2}$$

2.5.1 Propreiété d'idéal

Proposition 2.5.1 *Soient $T \in \Pi_{s-p}^{+}(X,Y)$, $v : E \to X$ linéaire continue positif et $\omega : Y \to F$ linéaire continue positif (E et F deux espaces quelconques où F est réticulé). Alors, $\omega T v$ est positivement p-sommant et*

$$\pi_{s-p}^{+}(\omega T v) \leq \|\omega\| \, \pi_{s-p}^{+}(T) \, \|v\| \, .$$

Preuve. On a l'opérateur $\omega T v$ est sous linéaire d'après la Proposition 2.3.2. Et on a

$$\|\omega T v(x)\| \leq \|\omega\| \, \|T(v(x))\| \, , \forall x \in E.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\{x_{1,\ldots,}x_n\} \in E^{+}$, alors $\left\{v(x_{1),\ldots,}v(x_{n)}\right\} \subset X^{+}$,
donc

$$\begin{aligned}
(\sum_{1}^{n} \|T(v(x_i))\|^{p})^{\frac{1}{p}} &\leq \pi_{s-p}^{+}(T) \sup_{\xi \in B_{X^*}} (\sum_{1}^{n} \left|\left\langle v(x_{i)}, \xi \right\rangle\right|^{p})^{\frac{1}{p}}, \\
&\leq \pi_{s-p}^{+}(T) \sup_{\xi \in B_{X^*}} (\sum_{1}^{n} |\langle x, v^*(\xi)\rangle|^{p})^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

On pose $\eta = \frac{v^*(\xi)}{\|v\|} \in B_{E^*}$, donc

$$(\sum_{1}^{n} \|T(v(x_i))\|^{p})^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{s-p}^{+}(T) \, \|v\| \sup_{\eta \in B_{E^*}} (\sum_{1}^{n} |\langle x_i, \eta\rangle|^{p})^{\frac{1}{p}}$$

d'où

$$(\sum_{1}^{n} \|\omega T v(x_i)\|^{p})^{\frac{1}{p}} \leq \|\omega\| \, \pi_{s-p}^{+}(T) \, \|v\| \sup_{\eta \in B_{E^*}} (\sum_{1}^{n} |\langle x_i, \eta\rangle|^{p})^{\frac{1}{p}}$$

et par conséquent $\omega T v \in \Pi_{s-p}^{+}(E,Z)$ et

$$\pi_{s-p}(\omega T v) \leq \|\omega\| \, \pi_{s-p}(T) \, \|v\| \, .$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Corollaire 2.5.1 *Soit X_0 un sous-lattice de X et $T \in \Pi_{s-p}^{+}(X,Y)$. Alors,*

$$T/X_0 \in \Pi_{s-p}^{+}(X_0,Y) \text{ et } \pi_{s-p}^{+}(T/X_0) \leq \pi_{s-p}^{+}(T).$$

Corollaire 2.5.2 (Injectivité) *Soit $Y_0 \subset Y$ un sous-lattice et $i : Y_0 \to Y$ l'njection canonique, alors*

$$T \in \Pi^+_{s-p}(X, Y_0) \Leftrightarrow iT \in \Pi^+_{s-p}(X, Y).$$

Dans ce cas, on a

$$\pi^+_{s-p}(T) = \pi^+_{s-p}(iT).$$

Proposition 2.5.2 *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et X un espace de Banach réticulé. Soit Y un espace complétment réticulé. Alors, les prpprétés suivantes de la constante C et de l'opérateurs sous linéaire $T : X \to Y$ sont équivalentes.*

(1) *l'opérateur $T \in \Pi^+_{s-p}(X, Y)$ et $\pi^+_{s-p}(T) \leq C$.*

(2) *pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $v : l^n_{p^*} \to X$, tel que $v(e_i) \in X^+$on a*

$$(\sum_1^n \|Tv(e_i)\|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C \|v\| \ \text{ et } \pi^+_{s-p}(Tv) \leq C \|v\|. \tag{2.5.3}$$

Dans ce paragraphe, nous généralisons un résultat de Blasco dans cette classe d'opérateurs.

Théorème 2.5.1 (Théorème d'inclusion) *[15] Soient $T \in \mathcal{SL}(X, Y)$ et $1 \leq p < q \leq \infty$, on a*

$$\Pi^+_{s-p}(X, Y) \subset \ \Pi^+_{s-q}(X, Y) \ \text{ et } \forall\, T \in \Pi^+_{s-p}(X, Y),\ \pi^+_{s-q}(T) \leq \pi^+_{s-p}(T). \tag{2.5.4}$$

Preuve. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\{x, ..., x_n\} \subset X^+$. Si on pose

$$\lambda_i = \|T(x_i)\|^{(\frac{q}{p})-1},$$

on oura

$$\|T(x_i)\|^q = \|T(\lambda_i x_i)\|^p.$$

Si T est p-sommant, on a

$$\begin{aligned}(\sum_1^n \|T(x_i)\|^q)^{\frac{1}{p}} &= (\sum_1^n \|T(\lambda_i x_i)\|^p)^{\frac{1}{p}}, \\ &\leq \pi^+_{s-p}(T) \sup_{\xi \in B_{X^*}} (\sum_1^n \lambda_i^p |\langle x_i, \xi\rangle|^p)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Puisque $p < q$ et d'après l'inégalité de Hölder ($\frac{1}{q/p} + \frac{1}{q/q-p} = 1$), on obtient que

$$\begin{aligned}
(\sum_1^n \|T(x_i)\|^q)^{\frac{1}{p}} &\leq \pi^+_{s-p}(T)(\sum_1^n \lambda_i^{\frac{pq}{q-p}})^{\frac{q-p}{pq}} \sup_{\xi \in B_{X^*}} (\sum_1^n |\langle x_i, \xi\rangle|^q)^{\frac{1}{q}}, \\
&\leq \pi^+_{s-p}(T)(\sum_1^n \|T(x_i)\|^q)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \sup_{\xi \in B_{X^*}} (\sum_1^n |\langle x_i, \xi\rangle|^q)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Ce qui entraîne que

$$(\sum_1^n \|T(x_i)\|^q)^{\frac{1}{p}} \leq \pi^+_{s-p}(T) \sup_{\xi \in B_{X^*}} (\sum_1^n |\langle x_i, \xi\rangle|^q)^{\frac{1}{q}}$$

et par conséquent T est positivement q-sommant et $\pi^+_{s-q}(T) \leq \pi^+_{s-p}(T)$. ■

Proposition 2.5.3 *[6] Soient X, Y deux espaces de Banach réticulés et $T \in \mathcal{SL}(X,Y)$. Si $T \in \Pi^+_{s-p}(X,Y)$ (où Y complètement réticulé), alors*

$$\forall u \in \nabla T,\ u \in \Pi^+_p(X,Y) \text{ et on a } \pi^+_p(u) \leq 2\pi^+_{s-p}(T). \tag{2.5.5}$$

Chapitre 3

Applications du propriété de Radon-Nikodym

Dans ce chapitre, nous avons donné quelques applications de la **propriété de Radon-Nikodym** dans la classe d'opérateurs sous linéaires positivement p-sommants.

3.1 Opérateurs sous-linéaires positivement p-sommants sur l'espace $L_p(\mu)$

Dans cette section nous généralisons quelques résultats fondamentaux de **Blasco** en 1987 dans le cas sous linéaire positivement p-sommant et en donnant brièvement quelques propriétés.

Proposition 3.1.1 *[6] Soit Y un espace de Banach réticulé et pour tout $1 \leq p \leq \infty$, on a*

$$\Pi_{s-p}^{+}(L_1(\mu);Y) = \mathcal{SB}(L_1(\mu);Y).$$

Preuve. Il suffit de montrer que $\Pi_{s-1}^{+}(L_1(\mu);Y) = \mathcal{SB}(L_1(\mu);Y)$.
Premièrment $\Pi_{s-1}^{+}(L_1(\mu);Y) \subset \mathcal{SB}(L_1(\mu);Y)$ évidente.
deuxièment montrons que $\mathcal{SB}(L_1(\mu);Y) \subset \Pi_{s-1}^{+}(L_1(\mu);Y)$.

Soit $T \in \mathcal{SB}(L_1(\mu), Y)$, pour tout $\{f_1, ..., f_n\}$ dans $(L_1(\mu))^+$ par le Théorème 2.3.1 (c), on a

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{n} \|T(f_i)\|) &= (\sum_{i=1}^{n} \|u_{fi}(f_i)\|) \\
&\leq \left(\sup_{u\in\nabla T} \|u\|\right) \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L_1} \\
&\leq 2\|T\| \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i\right\|_{L_1} \\
&\leq 2\|T\| \sup_{\rho\in L_\infty(\mu)} (\sum_{i=1}^{n} |\langle \rho, f_i\rangle| \text{ , où } \|\rho\|_\infty \leq 1.
\end{aligned}$$

D'où T est positivement 1-sommmant et $\pi^+_{1-p}(T) \leq 2\|T\|$, d'après théorème d'inclusion on déduit T est positivement p-sommmant.

par conséquent

$$\Pi^+_{s-p}(L_1(\mu); Y) = SB(L_1(\mu); Y).$$

■

D'après la Proposition 2.2.1 (1) et la Proposition 3.1.1, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 3.1.2 *[6] Soit Y un espace de Banach complètement réticulé et pour tout $1 \leq p \leq \infty$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(1) L'opérateur $T \in \Pi^+_{s-p}(L_1(\mu); Y)$.
(2) Pour tout $u \in \nabla T$, $u \in \Pi^+_p(L_1(\mu); Y)$.

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) : Soit $T \in \Pi^+_{s-p}(L_1(\mu), Y)$ d'après la Proposition 2.5.3, on aura

$$\forall u \in \nabla T, u \in \Pi^+_p(L_1(\mu), Y).$$

(2) $\Rightarrow$ (1) : On suppose que u dans ∇T tele que $u \in \Pi^+_p(L_1(\mu); Y)$.D'après le Théorème 2.3.1 (c) on a, $T \in \Pi^+_{s-p}(L_1(\mu); Y)$. ■

À partir de [6, Remarque 5.5.1] on conclu le résultat suivante

Lemme 3.1.1 *Soit Y un espace de Banach complètement réticulé.*

(a) L'opérateur $T \in \Pi^+_{s-p}(L_1(\mu); Y) \Rightarrow \forall u \in \nabla T$, $u \in \Pi^+_p(L_{p'}(\mu); Y)$ et $\pi^+_p(u) \leq 2$ $\pi^+_{s-p}(T)$.

(b) $\exists\ g_u \geq 0$ *dans* $L_p(\mu)$ *tel que*

$$\|u(\psi)\| \leq \int\limits_{\Omega} |\psi(t)|\, g_u(t) d\mu \text{ où } \psi \in L_{p'}(\mu).$$

(c) on a $\|g_u\|_p = \pi_p^+(u)$*, donc* $\|g_u\|_p \leq 2\pi_{s-p}^+(T)$*. Alors par [6, Lemme 5.5.2] nous obtenons une borne supérieure c'est-à-dire*

$$\sup_{u \in \nabla T} g_u(t) = g(t),\ \ g \in L_p(\mu).$$

Proposition 3.1.3 *Soit* Y *un espace de Banach complètement réticulé,* $T \in \mathcal{SL}(L_{p'}(\mu); Y)$ *et pour tout* $1 \leq p \leq \infty$*. Nous supposons que* $\forall u \in \nabla T,\ u \in \Pi_p^+ (L_{p'}(\mu); Y)$*, alors il existe une fonction* $g_u \in L_p(\mu)$ *telle que*

$$u(f) = \int\limits_{\Omega} f(t) g_u(t) d\mu \text{ pour tout } f \in L_{p'}(\mu).$$

Par conséquent, $\{g_u\}_{u \in \nabla T}$ *est borné par la norme dans* $L_1(\mu)$ *(i.e.,* $\|g_u\| \leq 2\|T\|$*).*

Preuve. Soit $u \in \nabla T,\ u \in \Pi_p^+ (L_{p'}(\mu); Y)$. Par [7], il existe une fonction $g_u \in L_p(\mu)$ telle que

$$u(f) = \int\limits_{\Omega} f(t) g_u(t) d\mu \text{ pour tout } f \in L_{p'}(\mu).$$

Par le Théorème 2.3.1 (c) nous obtenons que

$$\forall u \in \nabla T, u(f) \leq T(f),$$

Par conséquent

$$\|u(f)\| \leq \|T(f)\| + \|T(-f)\| \leq 2\|T\| \|f\|, \tag{3.1.1}$$

et

$$\|u(f)\|_Y = \left\| \int\limits_{\Omega} f(t) g_u(t) d\mu \right\|_Y.$$

Avec le choix que $\psi(t) = 1_{L_{p'}(\mu)}$. Est vrai, ensuite

$$\|u(1)\| = \|\|g_u\|_{L1}\|_Y = \|g_u\|_{L1},$$

par (3.1.1), on a $\|g_u\|_{L_1} \leq 2\|T\|$.

Par conséquent, $\{g_u\}_{u \in \nabla T}$ est borné par la norme dans $L_1(\mu)$.

D'après [6, Lemme 5.5.2], nous obtenons une borne supérieure (c'est-à-dire, $\sup_{u \in \nabla T} g_u(t) = g(t) \in L_1(\mu)$). ■

3.2 Caractérisation des opérateurs sous linéaires positivement p-sommant en utilisant la représentation des applications

Dans cette section, nous donnons quelques caractérisation d'opérateurs sous linéaires positivement p-sommant en utilisant la représentation de $u \in \nabla T$ avec u est un opérateur linéaire positivement p-sommant de $L_{p'}(\mu)$ dans Y.

Nous introduisons maintenant le théoréme de la caractérisation que Y a la propriété de Radon-Nikodym.

Théorème 3.2.1 *[6] Soit $1 < p \leq \infty$. Les propriétés suivantes sont équivalentes* :
(i) L'opérateur $T \in \Pi_{s-p}^{+}(L_{p'}(\mu); Y)$.
(ii) Il existe une fonction $g \geq 0$ dans $L_p(\mu)$ telle que

$$\|T(f)\| \leq \int_{\Omega} |f(t)| \, g(t) \, d\mu \text{ pour tout } f \in L_{p'}(\mu). \tag{3.2.1}$$

$(3i)$ L'opérateur $T \in \Pi_{s-1}^{+}(L_{p'}(\mu), Y)$.

Preuve. $(i) \Rightarrow (ii)$: Soit $T \in \Pi_{s-p}^{+}(L_{p'}(\mu), Y)$ d'après la Proposition 2.5.3, on a

$$\forall u \in \nabla T, \; u \in \Pi_{p}^{+}(L_{p'}(\mu), Y),$$

par la Lemme 3.1.1 (b), on obtient

$$\|u(f)\| \leq \int_{\Omega} |f(t)| \, g_u(t) d\mu \text{ pour tout } f \in L_{p'}(\mu) \text{ et } g_u \geq 0 \text{ dans } L_p(\mu).$$

par le Théorème 2.3.1 (a), on a

$$\|T(f)\| \leq \sup_{u \in \nabla T} \|u(f)\|,$$

par conséquent

$$\|T(f)\| \leq \sup_{u \in \nabla T} \int_{\Omega} |f(t)| \, g_u(t) d\mu,$$

on utilise [6, Lemme 5.5.2], on aurra

$$\|T(f)\| \leq \int_{\Omega} |f(t)| \left(\sup_{u \in \nabla T} g_u(t) \right) d\mu,$$

Par conséquent, il existe une fonction $g \in L_p(\mu)$ et $g \geq 0$ $\left(\text{i,e. } g(t) = \sup_{u \in \nabla T} g_u(t) \right)$, alors

$$\|T(f)\| \leq \int_{\Omega} |f(t)|\, g(t) d\mu, \text{ avec } f \in L_{p'}(\mu) \text{ et } g \in L_p(\mu).$$

$(ii) \Rightarrow (3i)$: On suppose que il existe une fonction $g \geq 0$ dans $L_p(\mu)$ telle que

$$\|T(f)\| \leq \int_{\Omega} |f(t)|\, g(t)\, d\mu \text{ pour tout } f \in L_{p'}(\mu).$$

Donc pour tous $f_1, ..., f_n \geq 0$ dans $L_{p'}(\mu)$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \|T(f_i)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} f_i(t) g(t) d\mu,$$

d'où

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} f_i(t) g(t) d\mu \\ &\leq \int_{\Omega} g(t) \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(t) \right) d\mu, \end{aligned}$$

on utilise l'inégalité de Hölder

$$\sum_{i=1}^{n} \|T(f_i)\| \leq \|g\|_{L_p(\mu)} \left\| \sum_{i=1}^{n} f_i(t) \right\|_{L_{p'}(\mu)},$$

par(2.5.2), on déduit $T \in \Pi_{s-1}^{+}(L_{p'}(\mu), Y)$.

$(3i) \Rightarrow (i)$: Soit $T \in \Pi_{s-1}^{+}(L_{p'}(\mu), Y)$ d'après théorème d'inclusion, on a $T \in \Pi_{s-p}^{+}(L_{p'}(\mu), Y)$.

Ce qui termine la démonstration. ■

Du résultat ci-dessus, on déduit le corollaire suivante :

Corollaire 3.2.1 *[6] Soit* $1 \leq p \leq \infty$. *On a*

$$\Pi_{s-p}^{+}(L_{p'}(\mu); Y) = \Pi_{s-1}^{+}(L_{p'}(\mu); Y). \tag{3.2.2}$$

Preuve. Par (2.5.4), on a

$$\Pi_{s-1}^{+}\left(L_{p'}\left(\mu\right);Y\right) \subset \Pi_{s-p}^{+}\left(L_{p'}\left(\mu\right);Y\right).$$

Du Théorème 3.2.1, on obtient

$$\Pi_{s-p}^{+}\left(L_{p'}\left(\mu\right);Y\right) \subset \Pi_{s-1}^{+}\left(L_{p'}\left(\mu\right);Y\right).$$

■

L'objectif du théorème suivant est de donner d'autres caractérisation d' opérateurs sous linéaires positivement p-sommant en utilisant la propriété de Radon-Nikodym.

Théorème 3.2.2 *[6] Soit $1 < p \leq \infty$. Supposons que Y possède la propriété de Radon-Nikodym. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*
(1) *L'opérateur $T \in \Pi_{s-p}^{+}\left(L_{p'}\left(\mu\right);Y\right)$.*
(2) *Pour tout $u \in \nabla T$, u est représentable par un fonction g_u dans $L_p(\mu, Y)$ telle que*

$$u(f) = \int_{\Omega} f(t) g_u\left(t\right) d\mu \text{ pour tout fonction simple } f \in L_{p'}(\mu).$$

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) : Soit $T \in \Pi_{s-p}^{+}\left(L_{p'}\left(\mu\right),Y\right)$, d'après la Proposition 2.5.3, on a

$$\forall u \in \nabla T,\ u \in \Pi_{p}^{+}\left(L_{p'}\left(\mu\right);Y\right).$$

Alors par le Théorème 2.2.2, on a

$$\Pi_p^{+}(L_{p'}(\mu);Y) = L_p(\mu, Y).$$

par conséquent u est représentable par un fonction g_u dans $L_p(\mu, Y)$. Alors

$$u(f) = \int_{\Omega} f(t) g_u\left(t\right) d\mu, \text{ pour tout fonction simple } f \in L_{p'}(\mu). \tag{3.2.3}$$

(2) $\Rightarrow$ (1) : D'autre part, par (3.2.3), on a

$$\begin{aligned} \|u(f)\| &= \left\| \int_{\Omega} f(t) g_u\left(t\right) d\mu \right\| \\ &\leq \int_{\Omega} |f(t)| \left\|g_u\right\|_{L_p(\mu,Y)} d\mu \\ &\leq \left\|g_u\right\|_{L_p(\mu,Y)} \int_{\Omega} |f(t)|\, d\mu. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\sup_{u\in\nabla T}\|u(f)\|\leq\|g_u\|_{L_p(\mu,Y)}\int\limits_{\Omega}|f(t)|\,d\mu.$$

Par le Théorème 2.3.1 (c), on obtient

$$\|T(f)\|\leq\|g_u\|_{L_p(\mu,Y)}\int\limits_{\Omega}|f(t)|\,d\mu.$$

Donc, pour tout $f_1,...,f_n\geq 0$ dans $L_{p'}(\mu)$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\|T(f_i)\| &\leq \sum_{i=1}^{n}\|g_u\|_{L_p(\mu,Y)}\int\limits_{\Omega}f_i(t)d\mu\\ &\leq \|g_u\|_{L_p(\mu,Y)}\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{n}f_i(t)\right)d\mu\\ &\leq \|g_u\|_{L_p(\mu,Y)}\left\|\sum_{i=1}^{n}f_i(t)\right\|_{L_{p'}(\mu)}.\end{aligned}$$

Par conséquent $T\in\Pi_{s-1}^{+}\left(L_{p'}(\mu),Y\right)$. par (2.5.4), on aura $T\in\Pi_{s-p}^{+}\left(L_{p'}(\mu),Y\right)$. ■

Du résultat ci-dessus, nous concluons le corollaire suivante :

Corollaire 3.2.2 *Soit $1<p\leq\infty$. Supposons que Y possède la propriété de Radon-Nikodym.*

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) *L'opérateur $T\in\Pi_{s-p}^{+}\left(L_{p'}(\mu);Y\right)$.*

(b) *pour tout $u\in\nabla T$, $u\in\Pi_{p}^{+}\left(L_{p'}(\mu);Y\right)$.*

Preuve. $(a)\Rightarrow(b)$: d'après la Proposition 2.5.3

$(b)\Rightarrow(a)$: Soit $u\in\nabla T$, $u\in\Pi_{p}^{+}\left(L_{p'}(\mu);Y\right)$. D'où par le Théorème 2.2.2, on a

$$\Pi_p^+(L_{p'}(\mu);Y)=L_p(\mu,Y).$$

Par conséquent

$$u(f)=\int\limits_{\Omega}f(t)g_u(t)\,d\mu.$$

par le Théorème 3.2.2, on obtient

$$T \in \Pi_{s-p}^{+}\left(L_{p'}\left(\mu\right);Y\right).$$

■

A la fin de cette section en montrant le résultat suivante :

Proposition 3.2.1 *Soit* $1 < p \leq \infty$. *On a* $(i) \Rightarrow (ii)$, *où*

(i) *L'espace* Y *possède la propriété de Radon-Nikodym.*

(ii) *Il existe une fonction positive* g *dans* $L_p(\mu, Y)$ *tel que*

$$T\left(f\right) \leq \int_{\Omega} \left|f(t)\right| g\left(t\right) d\mu \textit{ pour tout } f \in L_{p'}\left(\mu\right).$$

Preuve. On suppose que Y possède la propriété de Radon-Nikodym. Par le Théorème 2.2.2, on a

$$\Pi_p^{+}(L_{p'}(\mu);Y) = L_p(\mu, Y),$$

par conséquent u est représentable par un fonction g_u dans $L_p(\mu, Y)$. i.e.

$$u(f) = \int_{\Omega} f(t) g_u\left(t\right) d\mu.$$

Comme $u(f) \leq \left|u(f)\right|$, donc

$$\begin{aligned} u(f) &\leq \left|\int_{\Omega} f(t) g_u\left(t\right) d\mu\right| \\ &\leq \int_{\Omega} \left|f(t)\right| \left|g_u\left(t\right)\right| d\mu. \end{aligned}$$

Par le Théorème 2.3.1 (c), on obtient

$$T(f) = \sup_{u \in \nabla T} u(f) \leq \sup_{u \in \nabla T} \left|u(f)\right|.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
T(f) &\leq \sup_{u\in\nabla T}\int_{\Omega}|f(t)|\,|g_u(t)|\,d\mu \\
&\leq \int_{\Omega}|f(t)|\sup_{u\in\nabla T}|g_u(t)|\,d\mu, \\
&\leq \int_{\Omega}|f(t)|\,g(t)\,d\mu, \text{ avec } g(t)=\sup_{u\in\nabla T}|g_u(t)| \\
&\leq \int_{\Omega}|f(t)|\,g(t)\,d\mu, \text{ avec } f\in L_{p'}(\mu) \text{ et } g\geq 0 \text{ dans } L_p(\mu,Y).
\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Conclusion

Dans le Théorème 3.2.1 et le Théorème 3.2.2, nous n'avons pas pu donner un représentation, comme le cas linéaire (i.e. représentation de **Blasco** en 1987 "Positive p-summing operators on L_p-spaces.") mais seulement une caractérisation. En d'autres termes, il n'est pas possible au moins de faire une représentation d'un opérateurs sous linéaires positivement p-sommant. De la même manière, si T est écrit dans le cas linéaire comme le suivant

$$T\left(f\right)=\int\limits_{\Omega}f(t)K\left(t\right)d\mu.$$

Cela signifie que T est linéaire.

Bibliographie

[1] **D. Achour**, *Factorisation des opérateurs sous linéaires et géométrie des espaces de Banach. Doctorat en Science 06/07/2005, Université de Batna.*

[2] **D. Achour et L. Mezrag**, *Factorisation des opérateurs sous linéaires par $L_{p\infty}$ et L_{q1}. Ann. Sci. Math. Quebec 26 (2002) 109-121.*

[3] **D. Achour and L. Mezrag**, *Little Grothendieck's theorem for sublinear operators. J. Math. Anal. Appl. 296 (2004), 541-552.*

[4] **D. Achour, L. Mezrag and A. Tiaiba**, *On the strongly p-summing sublinear operators, Taiwanese Journal of Mathematics, 11(4)(2007), 959-973.*

[5] **D. Achour and L. Mezrag**, *Sur les opérateurs sous linéaires p-lattices sommnts, Analele Universitatii Oradea Fasc. Matematica, XIV(2007),237-250.*

[6] **A. BELAADA**, *Idéaux d'opérateurs non linéaires et théorémes de factorisation. Thèse de doctorat en science, Université de M'sila (2018).*

[7] **Blasco, O**, *(1987), Positive p-summing operators on L_p-spaces. Proceedings of the American Mathematical Society, 100(2), 275-280.*

[8] **Blasco, O**, *(1988), Positive p-summing operators, vector measures and tensor products. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society,31(2), 179-184.*

[9] **Diestel & J. J. Uhl**, *(1977). Vector measures (No. 15). American Mathematical Soc.*

[10] **A. LAMBERT, J. JACOD**, *Théorie de la Mesure et Intégration, 2012-13.*

[11] **A. Lambert**, *Théorie de la Mesure et Intégration, 2013-14.*

[12] **É. Pardoux**, *Intégration et Probabilités, 2009.*

[13] **É. Pardoux**, *Intégration et Probabilités, 2015.*

[14] **A. Pietsch**, *Absolut p-summierende in Abbildungen in normierten Räumen. Studia Math. 28 (1967), 333-353.*

[15] **A. Tiaiba**, *Les operateurs sous lineaires L_p sommants version commutative et non commutative, Universite Hadj Lakhdar, Batna (Algerie), 2006.*

الملخص : الهدف من هذا العمل هو دراسة المؤثرات تحت الخطية الموجبة p-جمعية وإعطاء تعميما لبعض خصائص هذه المؤثرات مشابها للحالة الخطية. وفي الأخير قدمنا بعض تطبيقات خاصية Radon-Nikodym في الفئة المذكورة أعلاه.

الكلمات-المفتاحية : المؤثرات تحت الخطية ’ المؤثرات تحت الخطية الموجبة p–جمعية ’ خاصية Radon-Nikodym.

Résumé : Le but de ce travail est d’etudier les opérateurs sous linéaires positivement p-sommants en généralisant certaines propriétés de ces opérateurs comme dans le cas linéaire. Nous avons donné aussi quelques applications de la propriété de Radon-Nikodym dans la classe mentionné ci-dessus.

Mots-clés : Opérateurs sous linéaires , opérateurs sous linéaires positivement p-sommants, propriété de Radon-Nikodym.

Abstract : The aim of this work is to study positive p-summing sublinear operators by generalizing some properties of these operators as in the linear case. We have also given some applications of the Radon-Nikodym property in the class mentioned above.

Key-words : Sublinear operators, positive p-summing sublinear operators, the Radon-Nikodym property.