REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse fonctionnelle

Thème

Opérateurs linéaires continus entre espaces asymétriques normés

---

Présenté par :
Mr CHEGLOUFA Naceur

Devant le jury composé de :

TALLAB Abdelhamid	MCB,	Université de M'sila	**Président**.
DAHIA Elhadj	MCA,	E. N. S de Bousaada	**Encadreur.**
YAHI Rachid	MCB,	Université de M'sila	**Examinateur.**

Année universitaire 2019/2020

Remerciements

Avant tout, j'adresse mes remerciements en premier lieu, á Dieu tout puissant pour la volonté, le courage et la patience qu'il m'a donné durant toutes ces longues années de d'étude.

Je tiens á remercier sincèrement ***Mr. Dahia Elhadj****, pour avoir accepté de diriger ce mémoire, sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué á alimenter ma réflexion.*

Mes remerciements vont également aux membres du jury qui m'ont fait honneur d'examiner ce travail.

Je désire aussi remercier mes professeurs de l'université de M'sila, qui m'ont fourni les outils nécessaires á la réussite de mes études universitaires.

Il est important pour moi de remercie ma famille qui ont toujours été une source d'encouragements.

Enfin je ne voudrais pas oublier de remercier toute personne qui m'a aidé à réaliser ce travail.

Table des matières

Introduction

L'objectif de notre mémoire est mettez en évidence quelques-uns des résultats de la continuité des opérateurs linéaires entre des espaces asymètriques normés et le cône de ces opérateurs. Comme application on donne les théorèmes fondamentaux dans le cas asymètrique : théorème de l'application ouverte, théorème du graphe fermé et théorème de Banach Steinhaus. Pour les démonstrations on utilisant les espaces de Baire et le lemme de Zabreijko.

Notre travail se divise en trois chapitres. Le chapitre 1 on étudie quelques propriétés topologiques d'un espace asymétrique normé, quelques exemples des asymétriques normes.
Dans le deuxième chapitre, on donne une étude générale sur la continuité.
Le troisième chapitre représente les théorèmes fondamentaux.

Notation :

p	Asymétrique norme (quasi-norme).
p^{-1}	Asymétrique norme conjuguée de p.
p^s	Norme (ou semi-norme) associe de p.
d_p	Quasi-métrique associe de asymétrique norme p.
$B_p(x_0, r)$	Boule ouverte dans l'espace asymétrique normé (X, p).
$B'_p(x_0, r)$	Boule fermée dans l'espace asymétrique normé (X, p) .
B_p	Boule d'unité fermé dans l'espace (X, p).
$\vartheta_p(x_0)$	Ensemble des voisinages de point x_0.
$\mathcal{LC}(X, Y)$	Ensemble de tous les opérateurs linéaires continues de (X, p) à (Y, q).
$\mathcal{LC}^s(X, Y)$	Ensemble de tous les opérateurs linéaires continues de (X, p^s) à (Y, q^s).
X^*	Espace dual de (X, p).
X^{s*}	Espace dual de (X, p^s).
τ_p	Topologie induite par p.

Chapitre 1

Topologie des espaces asymétriques normés

Dans ce chapitre, on donne quelque définitions et généralités sur la topologie des espaces asymétriques normés, avec des exemples. Pour plus d'informations, on peut consulter [6].

1.1 Espaces asymétriques normés

Définition 1.1. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une asymétrique semi-norme sur X est une fonction $p : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que pour tous $x, y \in X$ et $a \in \mathbb{R}_+$

1. $p(ax) = ap(x)$.
2. $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

Du plus si p satisfait la propriété suivante

$$p(x) = p(-x) = 0 \implies x = 0,$$

on dit que p est une asymétrique norme sur X.
Un espace asymétrique normé (X, p) est un espace vectoriel réel X muni d'une asymétrique norme p.

Dans certains cas, si l'asymétrique norme p prend la valeur $+\infty$, on dit que p est une asymétrique norme **prolongée**.

Définition 1.2. Soit (X, p) un espace asymétrique normé

1. L'asymétrique norme p^{-1} conjuguée de p est définie par

$$p^{-1}(x) = p(-x), \quad \text{pour tout } x \in X.$$

2. La norme p^s associe de p est définie sur X par

$$p^s(x) = \max\{p(x), p^{-1}(x)\}, \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Exemple 1.1. *On considère sur $\mathbb{R}$ l'asymétrique norme u définie par*

$$u(x) = x^+ = \max\{x, 0\}.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u^{-1}(x) = \max\{-x, 0\} = x^-$ et $u^s(x) = \max\{x^-, x^+\} = |x|$.
En effet, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+$, on a

1)

$$\begin{aligned} u(x) = u(-x) = 0 \quad &\iff \quad \max\{x, 0\} = \max\{-x, 0\} = 0 \\ &\iff \quad x = 0. \end{aligned}$$

2)

$$u(ax) = \max\{ax, 0\} = a\max\{x, 0\} = au(x).$$

3)

$$\begin{aligned} u(x+y) &= \max\{x+y, 0\} \\ &\leq \max\{x, 0\} + \max\{y, 0\} \\ &= u(x) + u(y). \end{aligned}$$

Remarque 1.1. *Toute asymétrique norme p sur un espace vectoriel réel X induite une quasi-métrique d_p sur X donner par la formule*

$$d_p(x, y) = p(y - x), \quad \textit{pour tous } x, y \in X.$$

Définition 1.3. Soit (X, p) un espace asymétrique normé, $x_0 \in X$ et $r > 0$

1. La boule ouverte de centre x_0 et de rayon r et la boule fermée de centre x_0 et de rayon r sont définies respectivement par

$$B_p(x_0, r) = \{x \in X : p(x - x_0) < r\},$$

et

$$B'_p(x_0, r) = \{x \in X : p(x - x_0) \leq r\}.$$

2. La sphère de centre x_0 et de rayon r et la sphère d'unité de X sont définies respectivement par

$$S_p(x_0, r) = \{x \in X : p(x - x_0) = r\},$$

et

$$S = S_p(0, 1) = \{x \in X : p(x) = 1\}.$$

Convergence d'une suite dans un espace asymétrique normé

Définition 1.4. Soit (X, p) un espace asymétrique normé et soit $(x_n)_n$ une suite dans X, on dit que $(x_n)_n$ est convergente vers x si

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} p(x_n - x) = 0.$$

Dans ce cas on dit que $(x_n)_n$ est p-convergente vers x.

1.2 Les propriétés topologique d'un espace asymétrique normé

1.2.1 Définitions et propriétés

Définition 1.5. (Voisinage d'un point) Soit (X,p) un espace asymétrique normé. On dit que V est un voisinage de $x_0 \in X$, et on écrit $V \in \vartheta_p(x_0)$, s'il existe $r > 0$ tel que $B_p(x_0,r) \subset V$.

Dans ce cas la topologie τ_p généré par p sur X est définie à partir de la famille $\vartheta_p(x_0)$.

Définition 1.6. (Ouvert et fermé) Soit (X,p) un espace asymétrique normé

1. Un sous-ensemble $S \subset X$ est dit ouvert dans (X,p), et on écrit τ_p-ouvert, si pour tout $x_0 \in S$, il existe $r > 0$ tel que $B_p(x_0,r) \subseteq S$.
2. Un sous-ensemble $S \subset X$ est dit fermé si S^c est ouvert.

Proposition 1.1. *Soit (X,p) un espace asymétrique normé et S un sous-espace vectoriel de X. Alors*

$$S \text{ est } \tau_p\text{-fermé} \iff S \text{ est } \tau_{p^{-1}}\text{-fermé}$$

Proposition 1.2. *Soit (X,p) un espace asymétrique normé, $x_0 \in X$ et $r > 0$. Alors la boule ouverte $B_p(x_0,r)$ est τ_p-ouvert et la boule fermée $B'_p(x_0,r)$ est $\tau_{p^{-1}}$-fermé, mais $B'_p(x_0,r)$ n'est pas τ_p-fermé en général. De plus, on a les inclusions*

$$B_{p^s}(x_0,r) \subset B_p(x_0,r) \quad \text{et} \quad B_{p^s}(x_0,r) \subset B_{p^{-1}}(x_0,r), \tag{1.1}$$

avec même inclusions pour les boules fermées.

Démonstration. On montre seulement que $B_p(x_0,r)$ est τ_p-ouvert et $B'_p(x_0,r)$ est $\tau_{p^{-1}}$-fermé. Les inclusions (1.1) sont évidentes.

Soit $x \in B_p(x_0,r)$, on pose $r' = r - p(x-x_0)$, alors, pour $y \in B_p(x,r')$, on a

$$\begin{aligned} p(y-x_0) &\leq p(x-x_0) + p(y-x) \\ &\leq p(x-x_0) + r' \\ &= r, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$B_p(x,r') \subset B_p(x_0,r).$$

Donc la boule $B_p(x_0, r)$ est τ_p-ouvert.

Pour la preuve de $B'_p(x_0, r)$ est $\tau_{p^{-1}}$-fermé, on montre que $\left(B'_p(x_0, r)\right)^c$ est $\tau_{p^{-1}}$-ouvert. Soit $x \in \left(B'_p(x_0, r)\right)^c$, on prend $r' = p(x - x_0) - r$. Alors on a

$$B_{p^{-1}}(x, r') \cap B'_p(x_0, r) = \emptyset,$$

ce qui implique

$$B_{p^{-1}}(x, r') \subset \left(B'_p(x_0, r)\right)^c.$$

En effet, si on suppose qu'il existe $y \in B_{p^{-1}}(x, r') \cap B'_p(x_0, r)$, donc on a

$$p^{-1}(y - x) < r' \quad \text{et} \quad p(y - x_0) \leq r,$$

c'est-à-dire

$$p(x - x_0) \leq p(y - x_0) + p^{-1}(y - x) < r + r' = p(x - x_0).$$

Donc on a une contradiction. ■

Proposition 1.3. *Soit (X, p) un espace asymétrique normé. Alors la topologie τ_{p^s} est plus fine que les topologies τ_p et $\tau_{p^{-1}}$, c'est-à-dire tout sous-ensemble τ_p-ouvert (τ_p-fermé) est τ_{p^s}-ouvert (τ_{p^s}-fermé). Avec même résultats pour la topologie $\tau_{p^{-1}}$.*

Démonstration. Soit S un sous-ensemble τ_p-ouvert de (X, p) et soit $x_0 \in S$, alors il existe $r > 0$ tel que

$$B_{p^s}(x_0, r) \subset B_p(x_0, r) \subset S.$$

Donc S est τ_{p^s}-ouvert.

Maintenant, soit M un sous-ensemble τ_p-fermé de (X, p), alors M^c est τ_p-ouvert, donc M^c est τ_{p^s}-ouvert ce qui implique M est τ_{p^s}-fermé. ■

Lemme 1.1. *[6] Si (X, p) est un espace asymétrique normé, alors l'addition $+ : X \times X \longrightarrow X$ est continu. Aussi, toute application additive entre deux espaces asymétriques normés (X, p), (Y, q) est continue si et seulement si, elle est continue en point 0 (ou en point arbitraire $x_0 \in X$).*

La multiplication n'est pas toujours continue. Donc un espace asymétrique normé n'est pas un espace vectoriel topologique.

Dans le cas d'un espace asymétrique normé, il y a plusieurs notions de complétude.

Définition 1.7. Une suite $(x_n)_n$ dans un espace asymétrique normé (X, p) est dite

1. p-Cauchy à gauche (à droite) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in X$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$p\left(x_n - x\right) < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$$

(respectivement $p\left(x - x_n\right) < \varepsilon$).

2. p-K-Cauchy à gauche (à droite) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, k, \quad n_0 \leq k \leq n \Longrightarrow p\left(x_n - x_k\right) < \varepsilon$$

(respectivement $p\left(x_k - x_n\right) < \varepsilon$).

Définition 1.8. Soit (X, p) un espace asymétrique normé.

1. X est dit p-complet si toute suite p^s-Cauchy dans (X, p) est p-convergente.
2. X est dit p-K-complet à gauche (à droite) si chaque suite p-K-Cauchy à gauche (à droite) dans X est p-convergente.
3. X est dit bicomplet si l'espace normé associé (X, p^s) est complet, c'est-à-dire si toute suite p^s-Cauchy dans (X, p) est p^s-convergente.

Des notions similaires peuvent être définies pour l'asymétrique norme conjuguée p^{-1}.

Remarque 1.2. *Dans un espace asymétrique normé (X, p), on a les équivalences suivantes*

1. $(x_n)_n$ *est* p-K-*Cauchy à gauche (à droite)* $\Longleftrightarrow$ $(-x_n)_n$ *est* p^{-1}-K-*Cauchy à gauche (à droite).*
2. X *est* p-K-*complet à gauche (à droite)* $\Longleftrightarrow$ X *est* p^{-1}-K-*complet à gauche (à droite).*

Définition 1.9. (Espace biBanach) Un espace asymétrique normé (X, p) est dit biBanch s'il est bicomplet, c'est-à-dire (X, p^s) est un espace de Banach.

Exemple 1.2. *L'espace vectoriel $\mathbb{R}$ est un espace biBanch avec l'asymétrique norme u définie par*

$$u(x) = \max\{x, 0\} = x^+, \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Dans ce qui suit nous étudions et détaillons un exemple important donné dans [7].

Proposition 1.4. *Pour $1 \leq p < \infty$, on désigne par ℓ_p l'ensemble des suites de scalaire $x := (x_n)_n \subset \mathbb{R}$ tel que*

$$\ell_p = \left\{ (x_n)_n \subset \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

On sait que $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach tel que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur ℓ_p définie par

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad x = (x_n)_n \in \ell_p.$$

Fixons $p \geq 1$, pour tout $x = (x_n)_n \in \ell_p$, on définit

$$x^+ := (x_n^+)_n \quad \textit{et} \quad \|x\|_{+p} = \|x^+\|_p := \left(\sum_{n=0}^{\infty} (x_n^+)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Alors $\|\cdot\|_{+p}$ est une asymétrique norme sur ℓ_p telle que la norme $\left(\|\cdot\|_{+p}\right)^s$ est équivalente à $\|\cdot\|_p$.

Pour la preuve, nous avons besoin le lemme suivant

Lemme 1.2. *Soient $x = (x_n)_n \in \ell_p$, $y = (y_n)_n \in \ell_p$ et $a \in \mathbb{R}^+$, on a les propriétés suivantes*

1. $x = x^+ - (-x)^+$.
2. $(ax)^+ = ax^+$.
3. $(x_n + y_n)^+ \leq x_n^+ + y_n^+$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.5. *Si $p \geq 1$, alors $\| \cdot \|_{+p}$ est une asymétrique norme sur ℓ_p.*

Démonstration. Soit $x = (x_n)_n \in \ell_p$ telle que

$$\|x\|_{+p} = \| - x\|_{+p} = 0,$$

alors

$$x^+ = (-x)^+,$$

et par (1) du lemme présidant, $x = 0$. Il est claire que $\|\mathbf{0}\|_{+p} = \mathbf{0}$.

Maintenant, soient $x = (x_n)_n \in \ell_p$, $y = (y_n)_n \in \ell_p$ et $a \in \mathbb{R}^+$. Alors, par (2) du lemme présidant, on a

$$\|(ax)\|_{+p} = \|(ax)^+\|_p = a\|x\|_{+p}.$$

Finalement, par (3) du lemme présidant, on obtient

$$\|x+y\|_{+p} = \|(x+y)^+\|_p \leq (\sum_{n=0}^{\infty}(x_n^+ + y_n^+)^p)^{1/p}$$

donc

$$\|x+y\|_{+p} \leq \|x^+ + y^+\|_p \leq \|x^+\|_p + \|y^+\|_p = \|x\|_{+p} + \|y\|_{+p}.$$

■

Corollaire 1.1. *Pour* $p \geq 1$*,* $(\ell_p, \|\cdot\|_{+p})$ *est un espace asymétrique normé.*

Proposition 1.6. *Pour* $p \geq 1$*, on a*

$$(\|x\|_{+p})^s \leq \|x\|_p \leq \|x\|_{+p} + \|-x\|_{+p},$$

pour tout $x \in \ell_p$*.*

Démonstration. Soit $x = (x_n)_n \in \ell_p$. Alors il est immédiate de voir que

$$(\|x\|_{+p})^s = \max\{\|x\|_{+p}, \|-x\|_{+p}\} \leq \|x\|_p.$$

Enfin, par (1) du Lemme 1.2, on obtient

$$\|x\|_p = \|x^+ - (-x)^+\|_p \leq \|x^+\|_p + \|(-x)^+\|_p = \|x\|_{+p} + \|-x\|_{+p}.$$

■

Corollaire 1.2. *Si* $p \geq 1$*, on a*

$$(\|\cdot\|_{+p})^s \leq \|\cdot\|_p \leq 2(\|\cdot\|_{+p})^s.$$

Donc $(\|\cdot\|_{+p})^s$ *et* $\|\cdot\|_p$ *sont des normes équivalentes.*

Corollaire 1.3. *Pour* $p \geq 1$*,* $(\ell_p, \|\cdot\|_{+p})$ *est un espace biBanch.*

Chapitre 2

Continuité des opérateurs linéaires entre espaces asymétriques normés

Dans ce chapitre, on donne une étude de la continuité des opérateurs linéaires entre les espaces asymétriques normés. En particulier, on donnera aussi quelques propriétés de l'espace de tous les opérateurs linéaires continus, ensuite, nous présentons le théorème de Hahn Banach dans le cas des espaces asymétriques normés.

2.1 Espaces des opérateurs linéaires continus

Soit (X, p) et (Y, q) deux espaces asymétriques normés, on pose

$$\mathcal{LC}(X,Y) = \{f : (X,p) \longrightarrow (Y,q), f \text{ est linéaire et continue}\},$$

et

$$\mathcal{LC}^s(X,Y) = \{f : (X,p^s) \longrightarrow (Y,q^s), f \text{ est linéaire et continue}\}.$$

Si on remplace (Y, q) par $(\mathbb{R}, u)$, avec u est l'asymétrique norme définie dans l'Exemple 1.1, alors $\mathcal{LC}(X,Y)$ et $\mathcal{LC}^s(X,Y)$ seront notés respectivement par X^* et X^{s*}.

Un cône est un sous-ensemble Z d'un espace vectoriel X tel que pour tous $w, z \in Z$ et $\lambda \geq 0$

$$w + z \in Z \quad \text{et} \quad \lambda z \in Z$$

Un cône est aussi appelé un espace semi-linéaire.

2.1.1 Opérateurs linéaires continus entre espaces asymétriques normés

Définition 2.1. Soit $T : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$ un opérateur linéaire entre deux espaces asymétriques normés. On dit que T est continu s'il est continu par rapport à la topologie τ_p sur X et par rapport à la topologie τ_q sur Y.

Définition 2.2. L'opérateur linéaire $T : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$ est dit borné s'il existe une constante $M \geq 0$ telle que

$$q(T(x)) \leq Mp(x).$$

Dans le théorème suivant on a un critère très simple, et très utile, de la continuité comme le cas des espaces normés.

Théorème 2.1. *Soit (X, p) et (Y, q) deux espaces asymétriques normés et soit $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire. Alors T est continu si et seulement s'il est borné.*

Démonstration. Supposons que T est borné. Soit x dans X. On montre que, pour tout $r > 0$, on a

$$T\left(B'_p(x, \frac{r}{M})\right) \subset B'_q(T(x), r).$$

Maintenant, nous avons

$$B'_q(T(x), r) = \{y \in Y : q(y - T(x)) \leq r\},$$

et

$$T\left(B'_p\left(x, \frac{r}{M}\right)\right) = \left\{T(z) : z \in X,\ p(z - x) \leq \frac{r}{M}\right\}.$$

Si $y = T(z) \in T\left(B'_p\left(x, \frac{r}{M}\right)\right)$, on a

$$q\left(y - T(x)\right) = q\left(T(z) - T(x)\right) = q\left(T(z - x)\right) \leq Mp(z - x) \leq M\frac{r}{M} = r.$$

Ce qui montre que $y \in B'_q(T(x), r)$.

Inversement, supposons que T est continu (donc continu en 0), alors il existe $r > 0$ tel que

$$T\left(B'_p(0, r)\right) \subset B'_q(0, 1).$$

On a $q\left(T(x)\right) \leq 1$ pour tout $x \in X$ avec $p(x) \leq r$.

Si $p(x) \neq 0$, on pose

$$z = r\frac{x}{p(x)} \in X.$$

On a $p(z) = r$, alors

$$q\left(T(z)\right) \leq 1. \tag{2.1}$$

Cela signifier que $q\left(T(x)\right) \leq r^{-1}p\left(x\right)$.

Si $p(x) = 0$, alors $p(nx) = np(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après l'inégalité (2.1), on a

$$q\left(T(x)\right) = \frac{1}{n}q\left(T(nx)\right) \leq \frac{1}{n},\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,$$

en passant à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$, en trouve $q\left(T(x)\right) = 0$. Ce qui montre que T est borné avec la constante $M = r^{-1}$. ■

Proposition 2.1. *Soient (X,p), (Y,q) deux espaces asymétriques normés. Pour tout $T \in \mathcal{LC}\left(X,Y\right)$, on pose*

$$p_q^*(T) = \sup_{x\in X, p(x)\neq 0} \frac{q(T(x))}{p(x)},$$

alors

$$q(T(x)) \leq p_q^*(T)p(x), \quad \textit{pour tout } x \in X.$$

$p_q^*(T)$ est donc la plus petite constante M apparaissant dans la Définition 2.2, c'est-à-dire

$$p_q^*(T) = \inf\left\{M \geq 0 : q(T(x)) \leq Mp(x),\ \forall x \in X\right\}.$$

On a donc $p_q^*(T) < \infty$.

Corollaire 2.1. *Pour tout $T \in \mathcal{LC}\left(X,Y\right)$, on a*

$$p_q^*(T) = \sup_{p(x)\leq 1} q(T(x)) = \sup_{p(x)=1} q(T(x)).$$

Démonstration. Posons $S_1 = \sup_{p(x)\leq 1} q(T(x))$ et $S_2 = \sup_{p(x)=1} q(T(x))$. On a bien sûr

$$S_2 \leq S_1,$$

et aussi

$$S_1 \leq p_q^*(T),$$

puisque $q(T(x)) \leq p_q^*(T)$ et $p(x) \leq 1$, par définition de $p_q^*(T)$.
Il reste à voir que $p_q^*(T) \leq S_2$, on a

$$p_q^*(T) = \sup_{x\in X, p(x)\neq 0} \frac{q(T(x))}{p(x)} = \sup_{x\in X, p(x)\neq 0} q(T(\frac{x}{p(x)})) \leq S_2,$$

car $x/p(x)$ de asymétrique norme 1. ■

Proposition 2.2. *Soient (X,p), (Y,q) deux espaces asymétriques normés. Alors toute application continue de (X,p) dans (Y,q) est aussi continue de (X,p^-1) dans (Y,q^-1).*
De plus on a $\mathcal{LC}\left(X,Y\right) \subseteq \mathcal{LC}^s\left(X,Y\right)$.

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{LC}(X,Y)$. Alors T est vérifiée que

$$q(T(x)) \leq p_q^*(T)p(x), \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Ainsi

$$q^{-1}(T(x)) = q(-T(x)) = q(T(-x)) \leq p_q^*(T)p(-x) = p_q^*(T)p^{-1}(x),$$

donc T est continue de (X, p^-1) dans (Y, q^-1) .

D'autre part, pour tout $x \in X$,

$$q^s(T(x)) = \max\{q(T(x)), q(-T(x))\} \leq p_q^*(T)p^s(x), \tag{2.2}$$

par conséquent T est continue de (X, p^s) dans (Y, q^s) , d'où $\mathcal{LC}(X,Y) \subseteq \mathcal{LC}^s(X,Y)$. ■

Notons que en général $\mathcal{LC}(X,Y)$ n'est pas nécessairement un sous-espace vectoriel de $\mathcal{LC}^s(X,Y)$, comme nous le voyons dans les deux exemples suivants

Exemples 2.1. *1. Soit $(C_0[0,1], p)$ l'espace asymétrique semi-normé défini par*

$$C_0[0,1] = \left\{f \in C[0,1] : \textstyle\int_0^1 f(t)dt = 0\right\} \quad \textit{et} \quad p(f) = \max f([0,1]).$$

Soient $(\mathbb{R}, u)$ l'espace biBanach défini dans l'Exemple 1.2 et l'application linéaire $\varphi : (C_0[0,1], p) \longrightarrow (\mathbb{R}, u)$ définie par

$$\varphi(f) = f(1), \quad \textit{pour tout } f \in C_0[0,1].$$

Alors φ est continue mais $-\varphi$ n'est pas continue. En effet, pour tout $f \in C_0[0,1]$,

$$\varphi(f) = f(1) \leq \max f([0,1]) = p(f),$$

d'où φ est borné. Maintenant, prenons la suite $(f_n)_n \subset C_0[0,1]$ définie par

$$f_n(t) = 1 - nt, \quad \textit{pour tout } t \in [0,1].$$

Il s'ensuit que

$$p(f_n) = 1 \quad \textit{et} \quad -\varphi(f_n) = -f_n(1) = 1 - n,$$

alors $-\varphi$ est n'est pas borné sur la boule unité de $(C_0[0,1], p)$, donc il n'est pas continue.

2. L'application identique $id_{\mathbb{R}}$ de $(\mathbb{R}, u)$ dans lui même est continue mais $-id_{\mathbb{R}}$ n'est pas continue. En effet, pour tout $x < 0$, on a $u(-id_{\mathbb{R}}(x)) = -x$, alors

$$\begin{aligned} u_u^*(-id_{\mathbb{R}}) &= \sup\{u(-x) : x \in \mathbb{R}, u(x) \leq 1\} \\ &= \sup\{-x : x \in \mathbb{R}, x \leq 1\} = \infty. \end{aligned}$$

Corollaire 2.2. *$\mathcal{LC}(X, Y)$ est un cône dans $\mathcal{LC}^s(X, Y)$, c'est-à-dire, pour tous $T, S \in \mathcal{LC}(X, Y)$ et tout $\lambda \geq 0$ on a $\lambda T \in \mathcal{LC}(X, Y)$ et $S + T \in \mathcal{LC}(X, Y)$.*

2.1.2 Asymétrique norme sur $\mathcal{LC}(X, Y)$

Soient (X, p), (Y, q) deux espaces asymétriques normés. Pour tout $f \in \mathcal{LC}^s(X, Y)$, on pose

$$(p^s)_q^*(f) = \sup\{q^s(f(x)) : x \in X, p^s(x) \leq 1\},$$

cette expression définit une norme sur $\mathcal{LC}^s(X, Y)$.
De plus si (Y, q^s) est un espace Banach, alors $(\mathcal{LC}^s(X, Y), (p^s)_q^*)$ est un espace de Banach.

Proposition 2.3. *Soient (X, p), (Y, q) deux espaces asymétriques normés. On a les propriétés suivantes*

1. *p_q^* est une asymétrique norme prolongée sur $\mathcal{LC}^s(X, Y)$ et $(p^s)_q^* \leq (p_q^*)^s$.*
2. *La restriction de p_q^* est une asymétrique norme sur $\mathcal{LC}(X, Y)$.*

Démonstration. 1) Il est claire que $p_q^*(0) = 0$.
Soit $f \in \mathcal{LC}^s(X, Y)$

$$p_q^*(f) = p_q^*(-f) = 0,$$

alors

$$q(f(x)) = q(-f(x)) = 0,$$

pour tout x vérifié $p(x) \leq 1$, on obtient $f(x) = 0$.
Maintenant, si $x \in X$ vérifié $p(x) > 1$, on a

$$\frac{1}{p(x)} f(x) = f\left(\frac{x}{p(x)}\right) = 0.$$

Par conséquent $f(x) = 0$, pour tout $x \in X$.

Il est facile de voir que, pour f, $g \in \mathcal{LC}^s(X, Y)$ et $r \in \mathbb{R}^+$, on a

$$p_q^*(rf) = rp_q^*(f) \quad \text{et} \quad p_q^*(f + g) \leq p_q^*(f) + p_q^*(g).$$

Donc p_q^* est une asymétrique norme prolongée sur $\mathcal{LC}^s(X, Y)$.

Ensuite, on montre que $(p^s)_q^* \leq (p_q^*)^s$ sur $\mathcal{LC}^s(X, Y)$. Soit $f \in \mathcal{LC}^s(X, Y)$ et soit $\varepsilon > 0$, il existe $x \in X$ tels que $p^s(x) \leq 1$ et $(p^s)_q^* \leq q^s(f(x)) + \varepsilon$. Supposons que $p^s(x) = p(x)$. Alors, on deux cas

cas 1 : Si $q^s(f(x)) = q(f(x))$, on obtient

$$(p^s)_q^* \leq q(f(x)) + \varepsilon \leq p_q^*(f) + \varepsilon.$$

cas 2 : Si $q^s(f(x)) = q(-f(x))$, donc

$$(p^s)_q^* \leq q(-f(x)) + \varepsilon \leq p_q^*(-f) + \varepsilon.$$

Par conséquent $(p^s)_q^* \leq (p_q^*)^s(f) + \varepsilon$, d'où $(p^s)_q^* \leq (p_q^*)^s$ sur $\mathcal{LC}^s(X, Y)$.

2) Il suffit de montrer que, pour tout $f \in \mathcal{LC}(X, Y)$, $p_q^*(f) < \infty$. Mais c'est claire, car par le Théorème 2.1, pour chaque $f \in \mathcal{LC}(X, Y)$, il existe $M > 0$ tel que $q(f(x)) \leq Mp(x)$, pour tout $x \in X$. D'où $p_q^*(f) < M$. ■

Proposition 2.4. *Soient (X, p), (Y, q) deux espaces asymétriques normés, alors $\mathcal{LC}(X, Y)$ est un sous-ensemble fermé de $(\mathcal{LC}^s(X, Y), (p_q^*)^s)$.*

Démonstration. Soient $f \in \mathcal{LC}^s(X, Y)$ et $(f_n)_n$ une suite dans $\mathcal{LC}(X, Y)$ qui converge vers f dans $(\mathcal{LC}^s(X, Y), (p_q^*)^s)$. On choisit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$(p_q^*)^s(f - f_{n_0}) \leq 1,$$

alors

$$p_q^*(f - f_{n_0}) \leq 1.$$

Puisque $f_{n_0} \in \mathcal{LC}(X, Y)$, il existe $M > 0$ tel que $q(f_{n_0}(x)) \leq Mp(x)$, pour tout $x \in X$.

Soit $x \in X$. Si $p(x) \neq 0$, alors

$$q\left(\frac{f(x) - f_{n_0}(x)}{p(x)}\right) = q\left((f - f_{n_0})(\frac{x}{p(x)})\right) \leq p_q^*(f - f_{n_0}),$$

c'est à dire

$$q((f - f_{n_0})(x)) \leq p_q^*(f - f_{n_0})p(x) \leq p(x).$$

D'autre part, on a

$$q(f(x)) = q(f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x)) \leq q(f_{n_0}(x)) + q((f - f_{n_0})(x)),$$

alors

$$q(f(x)) \leq q(f_{n_0}(x)) + p(x) \leq (M + 1)p(x).$$

Si $p(x) = 0$, pour chaque $\varepsilon > 0$, on choisit n_ε tel que $p_q^*(f - f_{n_\varepsilon}) \leq \varepsilon$. Comme $q(f_{n_\varepsilon}(x)) = 0$, on obtient

$$q(f(x)) = q(f(x)) - q(f_{n_\varepsilon}(x)) \leq q((f - f_{n_\varepsilon})(x)) \leq p_q^*(f - f_{n_\varepsilon}) \leq \varepsilon,$$

donc $q(f(x)) = 0$. Nous avons montré que $f \in \mathcal{LC}(X, Y)$, par conséquent $\mathcal{LC}(X, Y)$ est un sous-ensemble fermé dans $(\mathcal{LC}^s(X, Y), (p_q^*)^s)$. ■

Théorème 2.2. *Soient (X, p), (Y, q) deux espaces asymétriques normés. Si (Y, q) est un espace bi-Banch, alors $(\mathcal{LC}^s(X, Y), p_q^*)$ est un espace biBanch et donc $(\mathcal{LC}(X, Y), p_q^*)$ est un cône biBanach.*

Démonstration. Soit $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $(\mathcal{LC}^s(X, Y)$,$(p_q^*)^s)$. Alors, pour chaque $x \in X$, $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy dans (Y, q^s). Ainsi, on peut construire une application $f : X \longrightarrow Y$ telle que, pour chaque $x \in X$, $f(x)$ est limite de point de la suite $(f_n(x))_n$ dans l'espace de Banach (Y, q^s).

En même temps, par (1) de la Proposition 2.3, on a $(p^s)_q^* \leq (p_q^*)^s$, alors $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $(\mathcal{LC}^s(X, Y), (p^s)_q^*)$ et comme cet espace est un espace de Banach, donc $(f_n)_n$ converge vers $g \in \mathcal{LC}^s(X, Y)$, d'où $(f_n(x))_n$ converge vers $g(x)$ dans (Y, q^s), pour tout $x \in X$. Par conséquent $g = f$.

Ensuite, on montrer que $(f_n)_n$ converge vers f dans $(\mathcal{LC}^s(X, Y), (p_q^*)^s)$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$(p_q^*)^s(f_n - f_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n, m \geq n_0.$$

Prenons $x \in X$ tel que $p(x) \leq 1$. Il existe $m \geq n_0$ tel que $q^s(f(x) - f_m(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\begin{array}{rcl} q^s((f - f_n)(x)) & = & q^s(f(x) - f_n(x)) \\ & \leq & q^s(f(x) - f_m(x)) + q^s(f_m(x) - f_n(x)) \\ & \leq & \dfrac{\varepsilon}{2} + (p_q^*)^s(f_n - f_m) \leq \varepsilon. \end{array}$$

D'autre part, on a

$$(p_q^*)^s(f - f_n) \leq \sup \{q^s((f - f_n)(x)) : p(x) \leq 1\},$$

on déduit que, pour tout $n \geq n_0$, $(p_q^*)^s(f - f_n) \leq \varepsilon$, alors $(\mathcal{LC}^s(X, Y), (p_q^*)^s)$ est un espace de Banch, et par conséquent $(\mathcal{LC}^s(X, Y), p_q^*)$ est un espace biBanch.

En fin, par la Proposition 2.4, $\mathcal{LC}(X, Y)$ est un sous-ensemble fermé de $(\mathcal{LC}^s(X, Y), (p_q^*)^s)$, d'où $(\mathcal{LC}(X, Y), p_q^*)$ est un cône biBanch. ■

Proposition 2.5. *Soient* $(X, \|.\|)$, $(Y, \|.\|)$ *deux espaces normés. Pour* $x \in X$ *et* $y \in Y$, *on pose* $p(x) = \|x^+\|$ *et* $q(y) = \|y^+\|$. *Alors*

1. $\mathcal{LC}^s(X, Y) = \{f : (X, \|.\|) \longrightarrow (Y, \|.\|), f$ *est linéaire et continue*$\}$.
2. *Si* $f \in \mathcal{LC}^s(X, Y)$, *alors*
$$\frac{\|f\|}{2} \leq (p^s)_q^*(f) \leq 2\|f\|.$$
3. $X^{s*} = \{f : (X, \|.\|) \longrightarrow (R, |.|), f$ *est linéaire et continue*$\}$.
4. *Si* $f \in X^{s*}$, *alors*
$$\|f\| \leq (p^s)_u^*(f) \leq 2\|f\|,$$

avec $\|f\| = \{\|f(x)\| : \|x\| \leq 1\}$.

Démonstration. 1) Soit $x \in X$. Il est évident de voir que $p^s(x) = \max\{\|x^+\|, \|(-x)^+\|\} \leq \|x\|$. Par (1) du Lemme 1.2, on a

$$\begin{array}{rcl} \|x\| & \leq & \|x^+\| + \|(-x)^+\| \\ & = & p(x) + p(-x) \\ & \leq & 2p^s(x), \end{array}$$

d'où $\frac{\|x\|}{2} \leq p^s(x)$. Donc p^s et $\|.\|$ sont deux normes équivalentes.

2) Soit $f \in \mathcal{LC}^s(X,Y)$. Si $\|x\| \leq 1$, alors $p^s(x) \leq 1$ et $q^s(f(x)) \leq (p^s)^*_q(f)$.

Maintenant, on a

$$\begin{aligned} \|f(x)\| &= \|f(x)^+ - (-f(x))^+\| \\ &\leq \|f(x)^+\| + \|(-f(x))^+\| \\ &= q(f(x)) + q(-f(x)) \\ &\leq 2q^s(f(x)), \end{aligned}$$

d'où $\|f(x)\| \leq 2(p^s)^*_q(f)$, par conséquent $\|f\| \leq 2(p^s)^*_q(f)$.

D'autre part, si $p^s(x) \leq 1$, alors $\frac{\|x\|}{2} \leq 1$. Donc $\|f(x)\| \leq 2\,\|f\|$.

Puisque

$$f(x)^+ \leq |f(x)| \text{ et } (-f(x))^+ \leq |f(x)|\,,$$

alors

$$\left\|f(x)^+\right\| \leq \|f(x)\| \text{ et } \left\|(-f(x))^+\right\| \leq \|f(x)\|\,,$$

d'où

$$q^s(f(x)) \leq \|f(x)\| \leq 2\,\|f\|\,,$$

c'est-à-dire $(p^s)^*_q(f) \leq 2\,\|f\|$.

L'énoncé (3) est une conséquence direct de (1).

4) Soit $f \in X^{s*}$. D'après (2), on a $(p^s)^*_u(f) \leq 2\,\|f\|$. Maintenant, si $\|x\| \leq 1$, on a $p^s(x) \leq 1$, alors

$$|f(x)| \leq (p^s)^*_u(f),$$

d'où $\|f\| \leq (p^s)^*_u(f)$. ■

Définition 2.3. (**Espace normé réticulé**) Un espace vectoriel réel X est partiellement ordonné par une relation d'ordre notée $\leq$ est un espace vectoriel ordonné si

1. $x \leq y$ implique $x + z \leq y + z$, pour tout $z \in X$.
2. $x \geq 0$ implique $\alpha x \geq 0$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Un espace vectoriel ordonné X dans lequel toute paire d'éléments a une borne supérieur est appelé espace vectoriel réticulé.

X est réticulé et $\|x\| \leq \|y\|$ quand $|x| \leq |y|$ ($|x| = \sup\{x, y\}$), on dira que X est un Banach réticulé si X est complet. Notons que ceci implique pour tout $x \in X$ les éléments x et $|x|$ ont la même norme. Pour plus de détails voir [11] et [4].

Théorème 2.3. *Soient $(X, \|.\|)$, $(Y, \|.\|)$ deux espaces normés réticulés. Pour $x \in X$ et $y \in Y$, on pose $p(x) = \|x^+\|$ et $q(y) = \|y^+\|$. Alors $f \in \mathcal{LC}(X,Y)$ si et seulement si $f \in \mathcal{LC}^s(X,Y)$ et $f \geq 0$. De plus*

$$p_q^*(f) \leq \|f\| \leq 2p_q^*(f), \quad \textit{pour tout } f \in \mathcal{LC}(X,Y).$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{LC}(X,Y)$. Il existe $M > 0$ tel que $q(f(x)) \leq Mp(x)$ pour tout $x \in X$. Alors, si $x \geq 0$, on a

$$p(-x) = 0,$$

et

$$q(f(-x)) \leq Mp(-x) = 0,$$

donc

$$q(f(-x)) = 0,$$

ce qui implique que $f(-x) \leq 0$, c'est-à-dire $f(x) \geq 0$. Il est claire que $f \in \mathcal{LC}^s(X,Y)$, car $\mathcal{LC}(X,Y) \subseteq \mathcal{LC}^s(X,Y)$.

Inversement, on suppose que $f \in \mathcal{LC}^s(X,Y)$ et $f \geq 0$. Puisque $x \leq x^+$, on a $0 \leq x^+ - x$, et comme f est positive, alors

$$0 \leq f(x^+ - x) \Longrightarrow f(x) \leq f(x^+),$$

ce qui implique

$$f(x)^+ \leq f(x^+)^+ = f(x^+),$$

Donc, il existe $M > 0$ tel que

$$\left\|f(x)^+\right\| \leq \left\|f(x^+)\right\| \leq M\left\|x^+\right\|,$$

i.e., $f : (X,p) \longrightarrow (Y,q)$ est continu.

Soit $f \in \mathcal{LC}(X,Y)$. D'après l'inégalité (2.2), on a $q^s(f(x)) \leq p_q^*(f)p^s(x)$, c'est-à-dire $(p^s)_q^*(f) \leq p_q^*(f)$ et par (2) de la Proposition 2.5 on obtient

$$\|f\| \leq 2(p^s)_q^*(f) \leq 2p_q^*(f).$$

D'autre part, puisque $f \geq 0$, on a $f(x)^+ \leq f(x^+)$, alors

$$q(f(x)) = \left\|f(x)^+\right\| \leq \left\|f(x^+)\right\| \leq \|f\| \left\|x^+\right\| = \|f\| \, p(x),$$

ce qui implique $\|f\| \geq p_q^*(f)$. ■

Lemme 2.1. *[5] Soit T un opérateur linéaire positif sur un espace de Banach réticulé, alors il est continu.*

Corollaire 2.3. *Soient $(X, \|.\|)$, $(Y, \|.\|)$ deux espaces de Banach réticulés. Pour $x \in X$ et $y \in Y$, on pose $p(x) = \|x^+\|$ et $q(y) = \|y^+\|$. Soit f une application linéaire de X dans Y, alors f est continue si et seulement si $f \geq 0$.*

Le résultat suivant peut être obtenu comme corollaire du théorème ci-dessus

Corollaire 2.4. *Soient $(X, \|.\|)$ un espace normé réticulé et $p(x) = \|x^+\|$. Alors X^* est un cône positif dans X^{s*} et $p_u^*(f) = \|f\|$ pour tout $f \in X^*$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\|f\| \leq p_u^*(f)$.

Soit $f \in X^*$, alors $f \in X^{s*}$, c'est-à-dire $|f(x)| \leq (p^s)_u^*(f)p^s(x)$ pour tout $x \in X$. Puisque $(p^s)_q^*(f) \leq p_q^*(f)$, on obtient

$$|f(x)| \leq p_u^*(f)p^s(x),$$

et comme $p^s(x) \leq \|x\|$ pour tout $x \in X$,

$$|f(x)| \leq p_u^*(f) \, \|x\| \, ,$$

ce qui implique que $\|f\| \leq p_u^*(f)$. ■

Remarque 2.1. *La topologie induit par p_q^* est plus fine à la topologie induit par $(p^s)_q^*$. Effectivement ces topologies ne sont pas coïncide en général.*

Nous montrons que ces deux topologies ne sont pas coïncide en général. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f_n(x) = -x/n$, pour tout $x \in X$. Alors f_n est un opérateur linéaire continu par rapport la norme Euclidienne. De plus $f_n \longrightarrow 0$ par rapport à la norme usuel de convergence uniforme, car sup $\{|-x/n| : |x| \leq 1\} = 1/n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais on a sup $\{|-x/n| : u(x) \leq 1\} = +\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Dualité des espaces asymétriques normés

Pour tout espace asymétrique normé (X, p), on a

$$X^{s*} = \{f : (X, p^s) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|) : f \text{ est linéaire et continue}\},$$

et

$$X^{*} = \{f : (X, p) \longrightarrow (\mathbb{R}, u) : f \text{ est linéaire et continue}\}.$$

Alors X^{s*} est un espace vectoriel, mais par les Exemples 2.1, X^* n'est pas un espace vectoriel, mais il est un cône dans X^{s*}.

Pour tout $f \in X^{s*}$, on pose

$$(p^s)^*_u(f) = \sup\{|f(x)| : p^s(x) \leq 1\} \quad \text{et} \quad p^*_u(f) = \sup\{u(f(x)) : p(x) \leq 1\}.$$

Par la Proposition 2.4, X^* est un sous-ensemble fermé de X^{s*}.

Dans ce qui suit $(p^s)^*_u$ et p^*_u seront simplement noté respectivement par p^{s*} et p^* . Notons que (X^{s*}, p^*) est un espace biBanach et que le cône (X^*, p^*) est aussi biBanach (voir le Théorème 2.2).

Définition 2.4. Soit (X, p) un espace asymétrique normé, alors le couple (X^*, p^*) est appelé l'espace dual de (X, p). Notons que

$$p^*(f) = \sup\{f(x) : p(x) \leq 1\}, \quad \text{pour tout } f \in X^{s*}.$$

On note par B_{X^*} la boule d'unité de l'espace dual (X^*, p^*),i.e., $B_{X^*} = \{f \in X^* : p^*(f) \leq 1\}$.

Proposition 2.6. *Soit (X, p) un espace asymétrique normé, alors*

$$B_{X^*} = \{f \in X^{s*} : p^*(f) \leq 1\} \text{ et } X^* = \{f \in X^{s*} : p^*(f) < \infty\}.$$

Démonstration. Soit $f \in B_{X^*}$. Alors $p^*(f) \leq 1$ et $f \in X^{s*}$, car $X^* \subseteq X^{s*}$. Maintenant, soit $f \in X^{s*}$ telle que $p^*(f) \leq 1$. Montrons que $f(x) \leq p(x)$, pour tout $x \in X$.
En effet, fixons $x \in X$. On distingue deux cas
Si $p(x) > 0$, on obtient

$$\frac{1}{p(x)} f(x) = f(\frac{x}{p(x)}) \leq p^*(f) \leq 1,$$

d'oú $f(x) \leq p(x)$.
Si $p(x) = 0$, on suppose que $f(x) > 0$ et on choisit $r > 0$ tel que $rf(x) > 1$. On pose $y = rx$, alors $p(y) = 0$, comme $p^*(f) \leq 1$, ce qui implique que $f(y) \leq 1$, mais $f(y) = rf(x) > 1$, donc on a une contradiction.
D'oú $f(x) \leq 0$. Par le Théorème 2.1, $f \in X^*$, donc $f \in B_{X*}$.

Ensuite, soit $f \in X^{s*}$ tel que $p^*(f) < \infty$. Prenons la fonction $g = \frac{f}{p^*(f)}$ dans X^{s*} et $p^*(g) = 1$, donc $g \in B_{X^*}$. En fin, nous concluons que $f \in X^*$. ■

Théorème 2.4. ***(Théorème de Hahn Banach)*** *Soient X un espace vectoriel réel et $q : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction semi-linéaire. Soit A un sous-espace vectoriel de X et $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction linéaire majorée par q $(\forall x \in A, g(x) \leq q(x))$, alors il existe une fonction linéaire $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$* ***prolongeant*** *$g$ et majorée par q $(\forall x \in X, f(x) \leq q(x))$.*

Nous présentons maintenant le théorème de Hahn-Banach dans le cas asymétrique.

Théorème 2.5. *Soit (X, p) un espace asymétrique semi-normé. Soit A un sous-espace de X et $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction linéaire continue, alors il existe une fonction linéaire continue $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$f|_A = g \text{ et } p^*(f) = p^*(g).$$

Démonstration. On considère la fonction semi-linéaire q définie par

$$q(x) = p^*(g)p(x), \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Puisque g est une fonction linéaire continue, alors $g(x) \leq p^*(g)p(x) = q(x)$, pour tout $x \in A$. Par le théorème de Hahn Banach (Théorème 2.4), il existe une fonction linéaire $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ prolongeant g et $f(x) \leq q(x),$ pour tout $x \in X$. Alors

$$f(x) \leq p^*(g)p(x), \text{ pour tout } x \in X,$$

donc f est continue sur X. De plus

$$p^*(f) \leq p^*(g) = \sup \{g(x) : x \in A, p(x) \leq 1\} \leq p^*(f),$$

d'ou $p^*(f) = p^*(g)$. ■

Lemme 2.2. *Soit (X, p) un espace asymétrique normé, alors, pour chaque $x_0 \in X$, il existe $f_0 \in B_{X^*}$ telle que $f_0(x_0) = p(x_0)$.*

Démonstration. Si $p(x_0) = 0$, alors il suffit de prendre $f_0 \equiv 0$.
Supposons que $p(x_0) > 0$. On considère le sous-espace fermé engendré par x_0, $Vect\{x_0\}$.
Soit $g : Vect\{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(\alpha x_0) = \alpha p(x_0), \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si $\alpha \geq 0$, alors

$$g(\alpha x_0) = \alpha p(x_0) = p(\alpha x_0),$$

sinon

$$g(\alpha x_0) = \alpha p(x_0) \leq 0 \leq p(\alpha x_0),$$

de sort que la fonction linéaire g est dominée par p sur $Vect\{x_0\}$ ($g(\alpha x_0) \leq p(\alpha x_0)$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$). Par le Théorème 2.5, il existe une fonction linéaire $f_0 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ prolongeant g telle que

$$p^*(f_0) = \sup \{g(x) : x \in Vect\{x_0\}, p(x) \leq 1\},$$

d'oú $f_0(x_0) = g(x_0) = p(x_0)$, par conséquent $p^*(f_0) \leq 1$. ■

Théorème 2.6. *Soit (X, p) un espace asymétrique normé. Alors, pour tout $x \in X$, on a*

$$p(x) = \sup \{f(x) : f \in B_{X^*}\}.$$

Démonstration. Fixons $x \in X$.
Si $p(x) = 0$, alors $f(x) \leq 0$ pour tout $f \in B_{X^*}$, on obtient

$$0 = \sup \{f(x) : f \in B_{X^*}\} = p(x).$$

Si $p(x) > 0$, par définition $f(x) \leq p(x)$ pour tout $f \in B_{X^*}$, alors

$$\sup \{f(x) : f \in B_{X^*}\} \leq p(x).$$

D'autre part, par le Lemme 2.2, il existe $f_0 \in B_{X^*}$ telle que $f_0(x) = p(x)$, d'oú $p(x) \leq \sup \{f(x) : f \in B_{X^*}\}$.
Finalement, $p(x) = \sup \{f(x) : f \in B_{X^*}\}$. ■

Chapitre 3

Théorèmes fondamentaux

Comme application de la continuité des opérateurs linéaires entre des espaces asymétriques normés, dans ce chapitre on donne les théorèmes fondamentaux dans le cas asymétrique : théorème de l'application ouverte, théorème du graphe fermé et théorème de Banach Steinhaus.

Pour les démonstrations on utilisant les espaces de Baire et le lemme de Zabreijko.

3.1 Espaces de Baire

Définition 3.1. Un sous-ensemble S d'un espace asymétrique normé (X, p) est appelé

1. (p, p^{-1})-partout dense dans X si $int_p(cl_{p^{-1}}(S)) = \emptyset$.
2. de la première (p, p^{-1})-catégorie si S peut s'écrire comme une union dénombrable des ensembles (p, p^{-1})-partout dense.
3. de la deuxième (p, p^{-1})-catégorie si il n'est pas de la première (p, p^{-1})-catégorie.

Définition 3.2. Soit (X, p) un espace asymétrique normé. On dit que X est un espace de (p, p^{-1})-Baire si chaque sous-ensemble τ_p-ouvert non vide de X est de la deuxième (p, p^{-1})-catégorie.

Le théorème suivant donne quelques caractérisations utiles des espaces de (p, p^{-1})-Baire.

Théorème 3.1. *[10] Pour un espace asymétrique normé (X, p), les propriétés suivants sont équivalents*

1. *X est un espace de (p, p^{-1})-Baire.*
2. *Pour chaque famille $G_n, n \in \mathbb{N}$, des sous-ensembles $\tau_{p^{-1}}$-ouverts τ_p-denses dans X, leur intersection $\cap_{n=1}^{\infty} G_n$ est τ_p-dense en X.*
3. *Pour tout famille $F_n, n \in \mathbb{N}$, des sous-ensembles $\tau_{p^{-1}}$-fermés tels que $int_p(\cup_{n=1}^{\infty} F_n) \neq \emptyset$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $int_p(F_{n_0}) \neq \emptyset$.*

Proposition 3.1. *Soit (X, p) un espace asymétrique normé. Si X est de la deuxième (p, p^{-1})-catégorie, alors il est un espace de (p, p^{-1})-Baire.*

3.2 Lemme de Zabreijko

Soit (X, p) un espace asymétrique normé. La notation $x = p\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ signifie que la série est p-convergente vers x, c'est-à-dire $\lim_{n \longrightarrow \infty} p(\sum_{k=1}^{n} x_k - x) = 0$.

On note que

$$x = p^{-1}\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} x_n \Longrightarrow p(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} p(x_n).$$

En effet, on a

$$p(x) \leq p(x - \sum_{k=1}^{n} x_k) + \sum_{k=1}^{n} p(x_k),$$

implique

$$p(x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} p(x_k).$$

Remarque 3.1. *Soient $(X, p), (Y, q)$ deux espaces asymétriques normés et $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire continu. Alors, pour chaque série p-convergente $x = \sum_n x_n$ dans X, la série $\sum_n T(x_n)$ est q-convergente dans Y et $T(x) = \sum_n T(x_n)$. En effet, par la continuité il existe $M > 0$ tel que*

$$q(\sum_n T(x_n) - T(x)) = q(T(\sum_n x_n - x)) \leq Mp(\sum_n x_n - x) \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Définition 3.3. Soit (X, p) un espace asymétrique normé. Une fonction semi-linéaire positive $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée p-δ-sous-additive si pour chaque série p-convergente $\sum_n x_n$ dans X, on a

$$x = p\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} x_n \Longrightarrow \varphi(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n).$$

Proposition 3.2. ***(Lemme de Zabrejko)*** *Supposons que l'espace asymétrique normé (X, p) est de la deuxième (p, p^{-1})-catégorie de Baire. Si la fonction semi-linéaire $\varphi : X \longrightarrow [0; \infty)$ est p^{-1}-δ-sous-additive, alors il existe $\beta > 0$ tel que*

$$\varphi(x) \leq \beta p(x),$$

pour tout $x \in X$.

La preuve sera basée sur le lemme suivant

Lemme 3.1. *Soit A un sous-ensemble d'un espace asymétrique normé (X, p). Si $B_p \subseteq cl_{p^{-1}}(A)$, alors, pour chaque $x \in B_p$, il existe une suite $(x_n)_n$ dans A telle que*

$$x = p^{-1}\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n-1}}.$$

Démonstration. Nous utilisons la preuve par induction. Soit $x \in B_p$. Par hypothèse, il existe $x_1 \in A$ tel que

$$p(x - x_1) \leq \frac{1}{2}.$$

Supposons que nous ayons trouvé $x_1, ..., x_n$ dans B_p tels que

$$p\left(x - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^{k-1}}\right) \leq \frac{1}{2^n},$$

alors $2^n(x - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^{k-1}}) \in B_p$, donc il existe $x_{n+1} \in A$ tel que

$$p\left(2^n\left(x - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^{k-1}}\right) - x_{n+1}\right) \leq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow p(x - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x_k}{2^{k-1}}) \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Ce qui terminé la preuve. ■

Démonstration de la Proposition 3.2. Soit $E_n = \{x \in X, \varphi(x) \leq n\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $X = \cup_n E_n$, et comme l'espace X est de la deuxième (p, p^{-1})-catégorie de Baire, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que

$$int_p(cl_{p^{-1}}(E_j)) \neq \emptyset.$$

Donc, il existe $x_0 \in X$ et $r > 0$ tels que

$$x_0 + rB_p \subset cl_{p^{-1}}(E_j) \Longleftrightarrow B_p \subset \frac{1}{r}(-x_0 + cl_{p^{-1}}(E_j)) = cl_{p^{-1}}(\frac{1}{r}(-x_0 + E_j)).$$

Soit $x \in B_p$, par le Lemme 3.1, il existe une suite $(x_n)_n$ dans E_j telle que

$$x = p^{-1}\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-x_0 + x_n}{2^{n-1}r},$$

ce qui implique que

$$\varphi(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(-x_0 + x_n)}{2^{n-1}r}.$$

Par la définition de l'ensemble E_j,

$$\varphi(-x_0 + x_n) \leq \varphi(-x_0) + \varphi(x_n) \leq \varphi(-x_0) + j,$$

ce qui donne

$$\varphi(x) \leq \frac{2(j + \varphi(-x_0))}{r}.$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout $x \in B_p$, on a

$$\varphi(x) \leq \frac{2(j + \varphi(-x_0))}{r} p(x),$$

pour tout $x \in X$. ■

3.3 Théorème de l'application ouverte

La version suivante du théorème d'application ouverte a été prouvée par Alegre [1].

Théorème 3.2. ***(Théorème de l'application ouverte)*** *Soient (X, p), (Y, q) deux espaces asymétriques normés. Supposons que (X, p) est p-K-complet à droite et Y est de Hausdorff et de la deuxième (q, q^{-1})-catégorie de Baire. Si $T : X \longrightarrow Y$ est une application linéaire continue surjective, alors pour chaque sous-ensemble τ_p-ouvert G de X, $T(G)$ est τ_q-ouvert dans Y.*

Nous utilisons le lemme de Zabrejko pour prouver la version suivante du théorème d'application ouverte.

Théorème 3.3. *Soient (X, p), (Y, q) deux espaces asymétriques normés. Supposons que (X, p) est p-K-complet à droite et Y est de la deuxième (q, q^{-1})-catégorie de Baire. Si $T : X \longrightarrow Y$ est une application linéaire continue surjective, alors pour chaque sous-ensemble τ_p-ouvert G de X, $T(G)$ est τ_q-ouvert dans Y.*

Démonstration. On définit $\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$\varphi(y) = \inf \{p(x) : x \in X, T(x) = y\}, \quad \text{pour tout } y \in Y,$$

et montrons que φ est q^{-1}-δ-sous-additive.

Soit $y = q^{-1}$-$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ et $\varepsilon > 0$. Sans compromettre les généralités, nous pouvons supposer que $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(y_n) < \infty$. Par la définition de la fonction φ, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in X$ tel que

$$T(x_n) = y_n \text{ et } p(x_n) \leq \varphi(y_n) + \frac{\varepsilon}{2^n},$$

ce qui implique

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(x_n) \leq \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(y_n) < \infty. \tag{3.1}$$

Alors la suite de la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $n \in \mathbb{N}$ est p^{-1}-K-Cauchy à droite, car $p(S_{n+k} - S_n) \leq \sum_{i=1}^{k} p(x_{n+i})$. Par hypothèse et (2) de la Remarque 1.2, il existe $x \in X$ tel que $x = p^{-1}\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Par la linéarité et la continuité de T

$$T(x) = q^{-1}\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} T(x_n) = q^{-1}\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y. \tag{3.2}$$

D'après (3.1) et (3.2), on obtient

$$\varphi(y) \leq p(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} p(x_n) \leq \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(y_n),$$

c' est à dire

$$\varphi(y) \leq \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(y_n).$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, cela implique

$$\varphi(y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(y_n),$$

par la Proposition 3.2, il existe $\beta > 0$ tel que

$$\varphi(y) \leq \beta q(y),$$

pour tout $y \in Y$.

Si on prend $\gamma := (1+\beta)^{-1}$, on obtient l'implication suivant

$$q(y) < \gamma \Longrightarrow \varphi(y) < 1,$$

ce qui donne

$$B_q(0,\gamma) \subset T(B_p(0,1)). \tag{3.3}$$

En effet, si $q(y) < \gamma$, alors $\varphi(y) < 1$. Par la définition de φ, il existe $x \in X$ avec $T(x) = y$ tel que $p(x) < 1$, donc $y \in T(B_p(0,1))$.

Finalement, montrons que (3.3) implique que l'application T est ouverte. Soient G un sous-ensemble τ_p-ouvert de X et $y_0 \in T(G)$. Si $x_0 \in G$ avec $T(x_0) = y_0$, alors, prenons $r > 0$ tel que $B_p(x_0, r) \subset G$, on trouve

$$B_q(y_0, r\gamma) = y_0 + rB_q(0, \gamma) \subset T(x_0) + rT(B_p(0, 1)) = T(x_0 + rB_p(0, 1)) \subset T(G),$$

ce qui termine la preuve. ■

Comme une conséquence du théorème de l'application ouverte on a le résultat suivant

Corollaire 3.1. *Soient (X, p), (Y, q) deux espaces asymétriques normés. Supposons que (X, p) est p-K-complet à droite et Y est de la deuxième (q, q^{-1})-catégorie de Baire. Alors l'inverse de toute application linéaire continue bijective $T : X \longrightarrow Y$ est continue.*

3.4 Théorème du graphe fermé

Comme dans le cas des espaces de Banach, le théorème du graphe fermé est un résultat immédiat du théorème de l'application ouverte, Mabula et Cobzaş dans [10] donnent une preuve en utilisant le Lemme de Zabrejko.

Définition 3.4. Le graphe G_T d'une application $T : X \longrightarrow Y$ est le sous-espace de $X \times Y$ donné par $G_T = \{(x, y) \in X \times Y : y = T(x)\}$.

Pour deux espaces asymétriques normés (X, p) et (Y, q), considérons $X \times Y$ muni de la asymétrique norme

$$r(x) = p(x) + q(y), \qquad \text{pour tout } (x, y) \in X \times Y. \tag{3.4}$$

La preuve des résultats de la proposition suivante est similaire à celle du cas des espaces normés.

Proposition 3.3. *Soient (X, p), (Y, q) deux espaces asymétriques normés .*

1. *La asymétrique norme définie par (3.4) génère la topologie du produit $\tau_p \times \tau_q$ sur $X \times Y$.*
2. *Si (X, p) et (Y, q) sont K-complet à droite (à gauche), alors $(X \times Y, r)$ est K-complet à droite (à gauche).*

Théorème 3.4. ***(Théorème du graphe fermé)*** *Soient (X,p), (Y,q) deux espaces asymétriques normés. Supposons que (X,p) est p-K-complet à droite et de la deuxième (p,p^{-1})-catégorie de Baire et (Y,q) est q-K-complet à droite. Si $T : X \longrightarrow Y$ est un opérateur linéaire de graphe fermé dans $\tau_p \times \tau_q$, alors T est continu.*

Démonstration. Dans la preuve, nous utiliserons (2) de la Remarque1.2.

Nous montrons d'abord que la fonction $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\varphi(x) = q(T(x)), \quad \text{pour tout } x \in X,$$

est p^{-1}-δ-sous-additive.

Soit $x = p^{-1}\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Supposons que $\sum_{n=1}^{\infty} q(T(x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n) < \infty$. Alors, la suite $\eta_n = \sum_{k=1}^{n} T(x_k)$ est q^{-1}-K-Cauchy à droite, donc il existe $y \in Y$ tel que $\eta_n \xrightarrow{q^{-1}} y$.
Posons $\xi_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, alors $\eta_n = T(\xi_n)$, et nous avons la situation suivante

$$\xi_n \xrightarrow{p^{-1}} x, \eta_n \xrightarrow{q^{-1}} y \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall (\xi_n, \eta_n) \in G_T. \tag{3.5}$$

Puisque la fermeture de G_T dans $(X,p) \times (Y,q)$ implique sa fermeture dans $(X,p^{-1}) \times (Y,q^{-1})$, alors, par les conditions (3.5), on obtient

$$(x,y) \in G_T \Longleftrightarrow y = T(x),$$

il s'ensuite que $T(x) = q^{-1}\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} T(x_n)$, donc

$$\varphi(x) = q(T(x)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} q(T(x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n).$$

Nous avons montré que φ est p^{-1}-δ-sous-additive. Par la Proposition 3.2, il existe $\beta > 0$ tel que, pour tout $x \in X$

$$\varphi(x) \leq \beta p(x) \Longleftrightarrow q(T(x)) \leq \beta p(x),$$

ce qui implique la continuité de T. ■

La démonstration suivant basée sur le théorème de l'application ouverte.

La projection $P : G_T \longrightarrow X$ définie par

$$P(x, T(x)) = x, \quad \text{pour tout } x \in X,$$

est continue et bijective. Par le Corollaire 3.1, on a $P^{-1} : X \longrightarrow G_T$ est continue, alors il existe $M > 0$ tel que

$$r(P^{-1}(x)) \leq Mp(x),$$

ce qui équivaut à

$$p(x) + q(T(x)) \leq Mp(x).$$

Par conséquent

$$q(T(x)) \leq (M-1)p(x),$$

pour tout $x \in X$, d'où T est continu. ■

3.5 Théorème de Banach Steinhaus

Théorème 3.5. ***(Théorème de Banach-Steinhaus)*** *Soient (X, p), (Y, q) deux espaces asymétriques normés. Supposons (X, p) est de la deuxième (p, p^{-1})-catégorie de Baire. Soit $T_i : X \longrightarrow Y$ des opérateurs linéaires continus ($i \in I$, ensemble d'indices quelconque) tels que*

$$C_x = \sup_{i \in I} q(T_i(x)) < \infty, \quad x \in X.$$

Alors

$$C = \sup_{i \in I} \sup_{x \in B_p} T_i(x) < \infty.$$

En d'autres termes, s'il existe, pour chaque $x \in X$ un nombre positif $C_x < \infty$ tel que

$$q(T_i(x)) \leq C_x p(x), \quad \forall i \in I,$$

alors il existe un nombre positif $C < \infty$ tel que

$$q(T_i(x)) \leq Cp(x), \quad \forall x \in X, \forall i \in I.$$

Démonstration.

Soit la fonction $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\varphi(x) = \sup_{i \in I} q(T_i(x)), \quad \text{pour tuot } x \in X.$$

Montrons d'abord que φ est $p^{-1} - \delta$-sous-additive.

En effet, si $x = p^{-1}$- $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, alors, pour chaque $i \in I$, la continuité de $T_i : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$ implique la continuité de $T_i : (X, p^{-1}) \longrightarrow (Y, q^{-1})$, donc $T_i(x) = q^{-1}$- $\sum_{n=1}^{\infty} T_i(x_n)$ et

$$q(T_i(x)) = q(\sum_{n=1}^{\infty} T_i(x_n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} q(T_i(x_n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n).$$

Par conséquent

$$\varphi(x) = \sup_{i \in I} q(T_i(x)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n).$$

Par la Proposition 3.2, il existe $\beta > 0$ tel que

$$\varphi(x) \leq \beta p(x),$$

pour tout $x \in X$. Ce qui donne

$$\varphi(x) \leq \beta, \quad \forall x \in B_p,$$

d'où

$$\sup_{i \in I} \sup_{x \in B_p} q(T_i(x)) = \sup_{x \in B_p} \sup_{i \in I} q(T_i(x)) \leq \beta.$$

■

Bibliographie

[1] C. Alegre, *Continuous operators on asymmetric normed spaces*, Acta Math. Hung. 122(4) (2009) 357-372.

[2] C. Alegre, J. Ferrer and V. Gregori, *On the Hahn-Banach theorem in certain linear quasi-uniform structures*, Acta Math. Hungar. 82 (1999) 315-320.

[3] C. Alegre, J. Ferrer, V. Gregori, *On pairwise Baire bitopological spaces*, Publ. Math. (Debr.) 55(1-2) (1999), 3-15.

[4] D. Aliprantis Charalambos and O. Burkinshaw, *Positive operators*, Academic Press INC (1985).

[5] A. Aliprantis and K. Border, *Infinite Dimensional Analysis*, Springer (New York,2006).

[6] Ş. Cobzaş, *Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces*, Springer Basel Heidelberg New York Dordrecht London, 2013.

[7] L.M. García Raffi, *Asymmetric Norms and the Dual complexity spaces*. Ph.D.thesis, Universidad politécnica de Valencia, Valencia (Spain), 2003.

[8] L.M.García-Raffi and Romaguera Sánchez Pérez, *The dual space of an asymmetric normed linear space*, Quaest.Math. 26 (2003), no.1, 83-96.

[9] L.M.García-Raffi, S. Romaguera and E. A. Sánchez Pérez, *The bicompletion of an asymmetric normed linear space*. ActaMath.Hungar. 97 (2002) 183-191.

[10] M.D. Mabula and Ş.Cobzaş, *Zabrejko's lemma and the fundamental principles of functional analysis in the asymmetric case*. Topology and its Applications. 184 (2015) 1-15

[11] P. Meyer-Nieberg, *Banach lattices*. Universitext, Springer-Verlag, Berlin 1991.

[12] P.P. Zabrejko, *A theorem for semiadditive functionals*, Funct. Anal. Appl. 3 (1969) 70-72 (translation from Funkt. Anal. Priloz. 3 (1) (1969) 86-88.

ملخص : في هذا العمل قمنا بدراسة الإستمرارية على الفضاءات تحت التناظرية الناظمية، حيث أدرجنا مفاهيم و نتائج أساسية لهذه الفضاءات وإبراز أهم خصائص مجموعة كل المؤثرات الخطية المستمرة. ثم قدمنا بعض مفاهيم والنتائج الثنوية على الفضاءات تحت التناظرية الناظمية .

في نهاية هذا العمل، قدمنا بعض النظريات الأساسية حول التحليل الدالي في حالة تحت التناظرية.

الكلمات المفتاحية: فضاء تحت تناظري ناظمي، مؤثر خطي مستمر، مخروط، فضاء بباناخ، نظرية باناخ ستاين هاوس، نظرية تطبيق مفتوح، نظرية رسم بياني مغلق، فئة باير.

Résumé : Dans ce travail, nous avons étudié la continué sur les espaces asymétriques normés, nous avons inclus des définitions et des résultats de base, et de mettre en évidence les caractéristiques les plus importantes de l'ensemble de tous les opérateurs linéaires continus. Ensuite, nous donnons quelques concepts et résultats pour la dualité des espaces asymétriques normés.

Finalement, nous avons présenté des certaines théorèmes fondamentaux de l'analyse fonctionnelle dans le cas asymétrique.

Mots-Clés : Espace asymétrique normé, cône, opérateur linéaire continue, espace biBanach, théorème de Banach Steinhaus, théorème de l'application ouverte, théorème de graphe fermé, catégorie de Baire.