

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE**  
**SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA**

FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE  
N°: INST12/2019



DOMAINE: SCIENCES ET TECHNOLOGIE  
FILIERE: ELECTRONIQUE  
OPTION: INSTRUMENTATION

**Mémoire présenté pour l'obtention**  
**Du diplôme de Master Académique**

**Par:** DADDA Abdelhammid  
YAHIAOUI Seif-el-islam

**Intitulé**

**ETUDE ET SIMULATION DE LA BANDE INTERDITE PHONONIQUE**  
**DANS LE CAS D'UNE STRUCTURE**  
**BIDIMENSIONNELLE À RÉSEAU TRIANGULAIRE**

**Soutenu devant le jury composé de:**

<b>Pr. KHADEROUCH</b> djamal	Université M'sila	Président
<b>Dr. KAHLOUCHE</b> Ahmed	Université M'sila	Encadreur
<b>Pr. HOCINI</b> Abdesselem	Université M'sila	Examineur

**Année Universitaire: 2018 /2019**

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE**  
**SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA**

FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE  
N°: 2019/INST ..../..



DOMAINE: SCIENCES ET TECHNOLOGIE  
FILIERE: ELECTRONIQUE  
OPTION: INSTRUMENTATION

**Mémoire présenté pour l'obtention**  
**Du diplôme de Master Académique**

**Par:** DADDA Abdelhammid  
YAHIAOUI Seif-el-islam

**Intitulé**

**ETUDE ET SIMULATION DE LA BANDE INTERDITE PHONONIQUE**  
**DANS LE CAS D'UNE STRUCTURE**  
**BIDIMENSIONNELLE À RÉSEAU TRIANGULAIRE**

**Soutenu devant le jury composé de:**

<b>Pr.</b>	Université M'sila	Président
<b>Dr. KAHLOUCHE Ahmed</b>	Université M'sila	Encadreur
<b>Pr.</b>	Université M'sila	Examineur

**Année Universitaire: 2018 /2019**

سورة التوبة

## *Dédicace*

*Tout d'abord, je veux rendre grâce à Dieu,  
le Clément et le Très Miséricordieux pour  
son amour éternel. C'est ainsi que je dédie ce  
mémoire à :*

*Ma mère pour sa tendresse et mon père  
pour sa patience et encouragement et ma  
grand-mère. mes très chers frères et mes  
chères sœurs et toute la famille. tous ceux  
que j'aime et toutes mes amies.*

## **REMERCIEMENTS**

*Au terme de ce travail, nous adressons nos remerciements les plus sincères à notre encadreur Dr : **Ahmed KAHLOUCHE**, pour nous avoir permis de bénéficier de son grand savoir dans la matière, pour sa disponibilité, sa pédagogie, ses compétences, sa modestie et son aide précieuse tout ou long de ce projet même pendant les moments les plus difficiles. Vraiment merci pour une qualité d'encadrement si sérieuse et si consistante ...*

*J'exprime mes profonds remerciements à monsieur le président de jury d'avoir accepté de présider le jury de ce travail. Je remercie également tous les membres de jury, qui m'ont fait l'honneur d'être membres à ce jury.*

*Je remercie tous les enseignants de département d'électronique et les personnels administratifs et techniques, qui ont contribué de près ou de loin à notre formation durant ces cinq années.*

*Je tiens à remercier tout particulièrement ceux qui sont très chers: nos parents, nos amis, nos frères...*

## **Résumé**

Les cristaux phononiques sont des structures artificielles périodiques formés d'au moins de deux matériaux élastiques différents. Ces cristaux présentent en effet sous certaines conditions des bandes de fréquences pour lesquelles la propagation des ondes élastiques ou acoustiques est interdite, dans certaines directions et gammes de fréquences. Ce travail est une contribution consacrée à l'étude de la propagation d'ondes acoustiques dans un cristal phononique 2D à réseau triangulaire. Cependant, avant de réaliser de véritables fonctions pour contrôler la propagation des ondes acoustiques, il faut effectuer une étude topologique et paramétrique sur la cellule élémentaire en vue de déterminer les différents paramètres ayant une influence significative sur la bande phononique.

**Mots clés :** Cristal phononique 2D, bande interdite, ondes élastiques et Méthode PWE.

---



---

## SOMMAIRE

LISTE DES FIGURES.....	V
LISTE DES TABLEAUX.....	VII

### INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GÉNÉRALE.....	1
----------------------------	---

### CHAPITRE I

#### GENERALITES SUR LES CRISTAUX PHONONIQUES

#### BIDIMENSIONNELS

INTRODUCTION.....	5
1.1. LES CRISTAUX PHONONIQUE.....	5
I.1.1. DEFINITION.....	5
I.1.2 HISTORIQUE ET CONCEPT.....	6
I.1.3. COMPARAISON ENTRE CRISTAUX PHONOIQUES ET PHOTONIQUES.....	9
I.2 DIFFERENTS TYPES DES CRISTAUX PHONONIQUES.....	11
I.2.1 STRUCTURES PERIODIQUE UNIDIMENSIONNELLE.....	12
I.2.2 STRUCTURES PERIODIQUE UNIDIMENSIONNELLE.....	12
I.2.3 STRUCTURES PERIODIQUE UNIDIMENSIONNELLE.....	13
I.3. DIFFERENTS TYPES DES RESEAUX CRISTAUX PHONONIQUES.....	13
I.3.1. RESEAU CARRE.....	14
I.3.2. RESEAU TRIANGULAIRE.....	15
I.3.3. RESEAU HEXAGONAL.....	15
I.4 RESEAU DIRECT ET RESEAU RECIPROQUE.....	16
I.4.1. RESEAU DIRECT.....	16

I.4.2. RESEAU RECIPROQUE.....	17
I.4.3. ZONE DE BRIOULLIN.....	18
I.4.4. DIAGRAMME DE BANDE.....	19
I.5 CREATION DES DEFAUT DANS LES CRISTAUX PHONONIQUE(2D).....	20
I.5.1. DEFAUTS PONCTUELS.....	20
I.5.1. DEFAUT LINEAIRES.....	21
CONCLUSION.....	21

## **CHAPITRE II**

### METHODES D'E CALCUL DE LA BANDE INTERDITE PHONONIQUE

INTRODUCTION.....	23
II.1. EQUATION DE PROPAGATION DES ONDES ELASTIQUES .....	23
II.1.1. ONDES LONGITUDINALES ET ONDES TRANSVERSALES.....	23
II.1.2. CONSTANTES ELASTIQUES DU NIOBATE DE LITHIUM.....	25
II.1.3. EQUATION DE PROPAGATION DES ONDES ELASTIQUES.....	25
II.2. METHODES NUMERIQUES DE SIMULATION .....	27
II.2.1. METHODE DE DECOMPOSITION EN ONDES PLANES.....	27
II.2.1.1. PRINCIPE DE DECOMPOSITION EN ONDES PLANES.....	27
II.2.1.2. FORMULATION DES CONDITIONS AUX	
LIMITES LIBRES.....	31
II.2.1.3. AVANTAGES ET INCONVENIENTS DE LA METHODE.....	32
II.2.2. METHODE DES DIFFERENCES FINIES DANS LE DOMAINE TEMPOREL (FDTD).....	33

II.2.2.1. PRINCIPE DE LA METHODE FDTD.....	34
II.2.2.2. APPLICATION DE FDTD POUR LE CALCUL DES BANDES.....	34
II.2.2.3. CALCUL DU COEFFICIENT DE REFLEXION ET DE TRANSMISSION.....	35
II.2.2.4. CONDITIONS AUX LIMITES PML (PERFECTLY MATCHED LAYER).....	36
II.2.2.5. AVANTAGES ET LIMITATIONS DE LA METHODE FDTD .....	36
II.2.3. METHODE DES ELEMENTS FINIS.....	37
II.2.4. METHODE DE DIFFUSION MULTIPLE.....	38
CONCLUSION .....	38

### **CHAPITRE III**

#### RESULTAS DE SIMULATION ET DISCUSSION

INTRODUCTION.....	40
III.1. CAS D'UN CRISTAL PHONONIQUE-2D A BASE DE $\text{SiO}_2/\text{LiNbO}_3$ .....	40
III.1.1. EFFET DES PARAMETRES GEOMETRIQUES .....	41
A. INFLUENCE DE LA PERIODE DU RESEAU.....	42
B. INFLUENCE DU RAYON DES INCLUSIONS .....	44
C. INFLUENCE DE LA FRACTION DE REMPLISSAGE .....	46
III.1.2. EFFET DES PARAMETRES PHYSIQUES .....	46
A. INFLUENCE DE LA VITESSE DE PROPAGATION .....	46
C. INFLUENCE DE LA MASSE VOLUMIQUE.....	48

---

III.2. CAS D'UN CRISTAL PHONONIQUE-2D A BASE DE $\text{LiNbO}_3/\text{SiO}_2$ .....	49
III.2.1. EFFET DES PARAMETRES GEOMETRIQUES .....	50
A. INFLUENCE DE LA PERIODE DU RESEAU .....	50
B. INFLUENCE DU RAYON DES INCLUSIONS .....	52
C. INFLUENCE DU RAPPORT (R/A) .....	53
III.2.2. EFFET DES PARAMETRES PHYSIQUES .....	54
A. INFLUENCE DE LA VITESSE DE PROPAGATION .....	54
C. INFLUENCE DE LA MASSE VOLUMIQUE.....	55
CONCLUSION .....	56
CONCLUSION GENERALE .....	57
BIBLIOGRAPHIE .....	59

Liste des figures

CHAPITRE I

**Figure I.1 :** Structure de bandes pour un cristal phononique consistant en un arrangement de tiges d'aluminium dans une matrice de nickel. D'après [13].....7

**Figure I.2 :** Sculpture minimaliste de l'artiste Eusebio Sempere, qui a servi de support à la première démonstration expérimentale de bandes interdites pour les ondes élastiques [18 ]...8

**Figure I. 3 :** Représentation schématique de cristaux photoniques ou phononiques : (a)unidimensionnel (1D), (b) bidimensionnels (2D) et (c) tridimensionnels (3D).....12

**Figure I.4 :** Représentation schématique d'un cristal phononique Unidimensionnel constitué de deux matériaux A et B[21]. .....12

**Figure I.5 :** Représentation schématique des Principaux réseaux dans Le cas d'un cristal Phononique à deux dimensions [21].....13

**Figure I.6 :** Exemples de structure BIP 3D: la yablonovite.[22].....13

**Figure I.7 :** Représentation schématique d'un cristal phononique 2D : Réseau carré ou réseau triangulaire ..... 14

**Figure I.8 :** Représentation : a) d'un réseau carré, b) son réseau réciproque, c) de sa zone de Brillouin .....15

**Figure I.9 :** Représentation : a) d'un réseau triangulaire, (b) de son réseau réciproque,(c) et de sa zone de Brillouin .....15

**Figure I.10:** Représentation schématique : a) d'un réseau hexagonal, b) de son réseau réciproque, c) et de sa zone de Brillouin.....16

**Figure I.11.** Cristal phononique a deux dimensions constitue D'un ensemble de cylindres dispose de réseau carré .....16

**Figure I.12 :** Vecteur de base et maille élémentaire de Wing-Seits (zone grisee)dans le réseau direct. ....17

**Figure I.13 :** Représentation d'un réseau carré dans l'espace réel et l'espace réciproque avec la première zone de Brillouin associée. ....19

**Figure I.14 :** diagramme de bandes d'un cristal phononique constitués de trous D'airs percés dans une membrane AlN/SiO<sub>2</sub>, avec un remplissage de 60 % [24]. .....19

### CHAPITRE II

**Figure II-1 :** Représentation schématique d'une onde transverse et longitudinale .....24

**Figure II.2:** (a) Cristal phononique tridimensionnel constitué de deux matériaux isotropes : A (en marron transparent) et B (en bleu). (b) La cellule unité de périodicité de la structure phononique. ....28

**Figure II.3 :** Exemple de spectre de transmission dans un cristal phononique bidimensionnel pour un vecteur d'onde fixé [3]. ....35

**Figure II.4:** Schéma d'un cristal phononique fini à deux dimensions pour le calcul des courbes de coefficients de transmission .....36

### CHAPITRE III

**Figure III.1:** Cristal phononique bidimensionnels constitué d'inclusions de SiO<sub>2</sub> plongées dans la matrice de LiNbO<sub>3</sub> disposés en réseau périodique triangulaire. ....40

**Figure III.2:** Diagramme de bandes dans le cas d'un cristal phononique bidimensionnels à réseau triangulaire SiO<sub>2</sub>/LiNbO<sub>3</sub> .....41

**Figure III.3:** Diagramme de bandes dans le cas d'un cristal phononique 2D : (a) Pour a= 12.00 mm, (b) Pour a=5.70 mm. ....42

**Figure III.4:** Variations des propriétés des bandes phononiques en fonction de la période du réseau « a » .....43

**Figure III.5:** Diagramme de bandes dans le cas d'un cristal phononique 2D : (a) Pour r= 1.00 mm, (b) Pour r= 2.00 mm .....44

**Figure III.6:** Variations des propriétés des bandes phononiques en fonction du rayon « r » des inclusions de surface circulaire .....45

**Figure III.7:** Variations de la largeur de la bande phononique ouverte en fonction du facteur de remplissage. ....46

**Figure III.8:** Diagramme de bandes dans le cas d'un cristal phononique 2D (a) Pour  $V_L = 3540$  m/s (b) Pour  $V_L = 5540$  m/s .....47

## Liste des figures

---

<b>Figure III.9 :</b> Variations des propriétés des bandes phononiques en fonction de la vitesse de propagation longitudinale .....	47
<b>Figure III.10:</b> Diagramme de bandes dans le cas d'un cristal phononique 2D : (a) Pour $\Delta = 2000 \text{ Kg/m}^3$ (b) Pour $\Delta = 400 \text{ Kg/m}^3$ .....	48
<b>Figure III.11 :</b> Variations des propriétés des bandes phononiques en fonction de la densité de la matrice .....	49
<b>Figure III.12 :</b> Cristal phononique bidimensionnels constitué d'inclusions $\text{LiNbO}_3$ plongées dans la matrice de $\text{SiO}_2$ disposés en réseau périodique triangulaire.....	49
<b>Figure III.13:</b> Diagramme de bandes dans le cas d'un cristal phononique bidimensionnels à réseau triangulaire $\text{LiNbO}_3/\text{SiO}_2$ .....	50
<b>Figure III.14:</b> Diagramme de bandes dans le cas d'un cristal phononique 2D : (a) Pour $a= 6.5 \text{ mm}$ (b) Pour $a= 5 \text{ mm}$ .....	51
<b>Figure III.15:</b> Variations des propriétés des bandes phononiques en fonction de la période du réseau « a » .....	51
<b>Figure III.16:</b> Diagramme de bandes dans le cas d'un cristal phononique 2D : (a) Pour $r= 1.3 \text{ mm}$ (b) Pour $r= 2.3 \text{ mm}$ .....	52
<b>Figure III.17:</b> Variations des propriétés des bandes phononiques en fonction du rayon des inclusions « r ».....	53
<b>Figure III.18:</b> Variations de la largeur de la bande en fonction du rapport $(r/a)$ .....	53
<b>Figure III.19:</b> Diagramme de bandes dans le cas d'un cristal phononique 2D : (a) Pour $V_{Lb}= 6840 \text{ m/s}$ (b) Pour $V_{Lb}= 5840 \text{ m/s}$ .....	54
<b>Figure III.20 :</b> Variations des propriétés des bandes phononiques en fonction de la vitesse de propagation dans le $\text{SiO}_2$ .....	55
<b>Figure III.21:</b> Diagramme de bandes dans le cas d'un cristal phononique 2D : (a) Pour $\Delta = 1000 \text{ Kg/m}^3$ (b) Pour $\Delta = 2600 \text{ Kg/m}^3$ .....	55
<b>Figure III.22:</b> Variations des propriétés des bandes phononiques en fonction de la densité de la matrice .....	56

## Liste des tableaux

### CHAPITER I : GENERALITES SUR LES CRISTAUX PHONONIQUES BIDIMENSIONNELS

**Tableau I.1 :** Propriétés clés pour l'étude des structures de bandes dans les matériaux  
tridimensionnels isotropes .....10

### CHAPITER II : METHODES DE CALCUL DE LA BANDE INTERDITE PHONONIQUE

**Tableau 2.1:** Notation de Voigt .....26

### CHAPITER III : RESULTATS DE SIMILATIONS ET DISCUSSIONS

**Tableau III.1 :** Constantes élastiques des matériaux utilisés.....41

**Tableau III.2:** Influence de la période du réseau « a » sur les propriétés  
des bandes phononiques ouvertes .....43

**Tableau III.3:** Influence du rayon des inclusions «r» sur les propriétés  
des bandes phononiques ouvertes.....45

---

## **INTRODUCTION GENERALE**

---

## INTRODUCTION GENERALE

Les cristaux phononiques ont suscité un intérêt croissant ces dernières années le double intérêt, fondamental et technologique, a aussi bien attiré théoriciens que les expérimentateurs [1]. La conception de matériaux, possédant des propriétés que l'on ne rencontre pas dans la nature ainsi que la compréhension des phénomènes entrant en jeu, représentent un challenge intéressant. Les développements réalisés dans le domaine des cristaux photoniques avec des ondes optiques ont permis de les transposer aux cristaux phononiques avec des ondes acoustiques. Plus récemment le développement des méta-matériaux optiques a permis l'émergence des méta-matériaux acoustiques [2]. Les études théoriques et expérimentales de la propagation des ondes élastiques et/ou acoustiques dans des matériaux composites constitués par des inclusions à réseaux périodiques à une, deux ou trois dimensions insérées dans une matrice ont été concernées principalement en termes de leur relation de dispersion.

Le travail présenté dans ce mémoire de master s'inscrit dans le cadre d'une contribution à l'étude théorique liée à la propagation d'ondes élastiques/acoustique dans les cristaux phononiques bidimensionnels (2D) notamment à réseaux triangulaire. Ces dernières structures sont constituées d'un réseau périodique de cylindres infinis plongées dans une matrice. Ce travail, porte sur le développement et l'application de quelques méthodes analytiques et numériques de simulations utilisées pour la résolution des équations de propagation d'ondes élastiques/acoustiques dans les cristaux phononiques bidimensionnels (2D), en l'occurrence la méthode de développement en ondes planes (PWE) et la méthode des différences finies dans le domaine temporel (FDTD). Le manuscrit présenté dans ce mémoire a été structuré en trois chapitres.

Le premier chapitre comporte des définitions des notions de cristaux phononiques en particulier les cristaux phononiques bidimensionnels. Dans ce chapitre, nous présentons en premier lieu un bref historique sur ces nouvelles structures. Puis, nous présentons les fondements théoriques et le principe de base de ces matériaux. Ensuite, nous terminerons avec une comparaison entre les cristaux phononiques, électroniques et photoniques.

Quant au troisième chapitre, il est entièrement dédié à l'étude de l'influence des paramètres physiques et géométriques sur les conditions d'ouverture des bandes phononiques.

D'autres part, nous avons simulé l'influence des paramètres tels que le rayon des inclusions, la période du réseau, le facteur de remplissage, la vitesse de propagation et la masse volumique sur les propriétés des bandes interdites ouvertes dans deux structures; la première est un cristal phononique 2D à réseau triangulaire à base de SiO<sub>2</sub>/LiNbO<sub>3</sub>. Alors que, la seconde est un cristal phononique 2D à réseau triangulaire formé par LiNbO<sub>3</sub>/SiO<sub>2</sub>. Enfin, le travail présente une conclusion générale et certaines perspectives offertes par notre approche dans ce domaine. Le lecteur trouvera également en annexe certains points discutés en détails.

## **CHAPITRE I**

---

# **GENERALITES SUR LES CRISTAUX PHONONIQUES BIDIMENSIONNELS**

---

## INTRODUCTION

Durant ces vingt dernières années, la propagation des ondes acoustiques/élastiques dans de nouvelles structures artificielles élastiquement périodiques, appelés cristaux phononiques (CP), a suscité un intérêt croissant et des progrès importants. Ceci de par la "nouvelle physique" liée à la présence plutôt de trois modes propagatifs acoustiques au lieu de deux dans les cristaux photoniques, et compte tenu des multiples applications potentielles auxquelles ils peuvent donner lieu. Les cristaux photoniques sont des milieux "composites», constitués d'un arrangement périodique de matériaux ayant des propriétés élastiques et/ou des densités différentes. Les nombreuses études menées sur les CP se sont soldées par la mise en évidence de plusieurs de leurs propriétés acoustiques remarquables. Ces dernières résultent de leur caractère dispersif particulier aux ondes acoustiques/élastiques, qui dépend fortement du choix des matériaux constituant le cristal ainsi que son "design" et sa conception, c'est-à-dire l'agencement et l'espace ment entre ses éléments constitutifs. La principale propriété de ces milieux périodiques, qui a tant attiré les chercheurs, est la possibilité d'existence d'intervalles de fréquences où le cristal photonique se comporte comme une barrière pour les ondes acoustiques/élastiques.

Ces intervalles de fréquence sont appelés bandes interdites phononiques, par analogie avec les bandes interdites des électrons dans les semi-conducteurs, ou encore celles des cristaux photoniques [3].

## I.1. LES CRISTAUX PHONONIQUE

### I.1.1. DEFINITION

Les cristaux phononiques sont des matériaux composites macroscopiques présentant une périodicité spatiale dans une ou plusieurs directions de l'espace. En tant que tels, ils sont capables de bloquer la propagation acoustique dans certaines directions et gammes de fréquences, par le biais de réflexions de Bragg où par le phénomène de résonance locale des éléments mis en réseau. On parle alors de bande de fréquences interdites, que l'on abrège le plus souvent en "bande interdite" [4].

Ce nom a été choisi par analogie avec les cristaux photoniques, des structures similaires mais agissant sur la lumière. Du point de vue quantique, un phonon est une

vibration élastique élémentaire d'un morceau de matière, tout comme le photon est une particule élémentaire de lumière [5].

L'idée du cristal phononique est de fabriquer un matériau artificiel structuré périodiquement, par exemple par assemblage d'au moins deux matériaux différents. Intuitivement, plus les propriétés acoustiques des matériaux mis en jeu sont contrastées, plus les phénomènes d'interférence d'onde sont importants [6].

### **I.1.2. HISTORIQUE ET CONCEPT**

En acoustique, l'intérêt pour les structures périodiques s'est manifesté à partir des années 1970 pour des raisons aussi fondamentales qu'appliquées. On peut citer par exemple les travaux de L. P. Solie [7] sur les filtres à ondes de surface, ceux de J. D. Achenbach [8] concernant le calcul des relations de dispersion de matériaux possédant des inclusions sphériques périodiques ou encore ceux de V. Narayanamurti [9] relatifs à des filtre phononiques utilisant des super réseaux en arséniure de gallium (AsGa).

Le renouveau du domaine, au début des années 1990, fait suite à l'intérêt manifesté par la communauté des opticiens pour des matériaux composites constitués d'arrangements périodiques de diffuseurs diélectriques, autrement appelés cristaux photoniques.

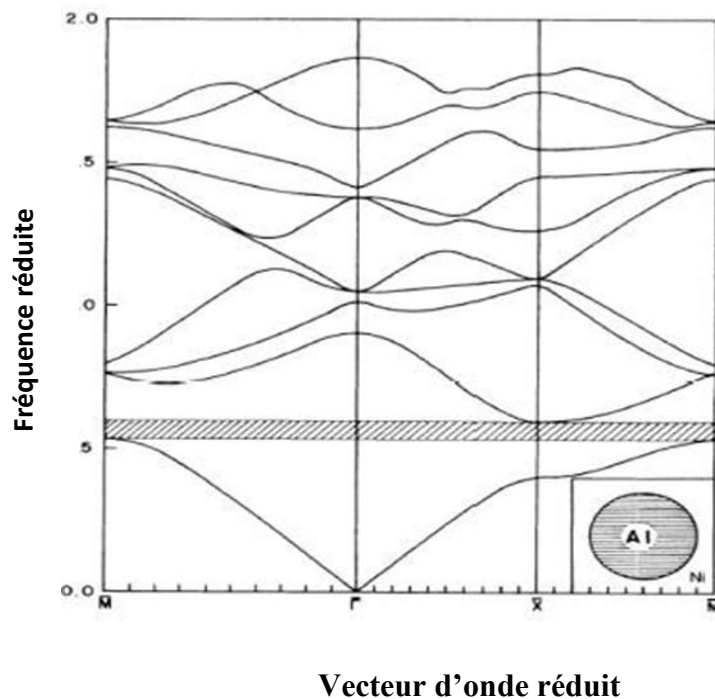
Les cristaux photoniques sont des matériaux hétérogènes dont l'indice de réfraction varie périodiquement dans les différentes directions de l'espace. Ces composites peuvent présenter des bandes interdites pour les ondes électromagnétiques et constituent à l'heure actuelle une nouvelle classe de matériaux pour l'optoélectronique et l'optique en général [10].

Initialement, les cristaux photoniques ont été conçus dans l'objectif d'interdire la désexcitation radiative d'un atome en empêchant la propagation des photons qu'il est susceptible d'émettre. En effet, l'émission spontanée des atomes est assujettie à la présence de modes électromagnétiques d'énergie égale à celle de la transition électronique. Piéger l'atome dans un milieu présentant une bande interdite photonique couvrant l'énergie de la transition devait alors garantir l'absence de désexcitation. Cette idée fut introduite par Eli Yablonovitch [11], ouvrant ainsi la voie aux premières réalisations expérimentales de cristaux photoniques [12]. Ces dispositifs laissent entrevoir la possibilité de réaliser des composants optiques très efficaces.

Le concept de cristal phononique, c'est-à-dire de matériau composite périodique bi- ou tridimensionnel permettant l'ouverture de bandes interdites pour les ondes élastiques, a été

introduit de façon quasiment simultanée par Kushwaha et al.[13] d'une part, et Economou et Sigalas [14] d'autre part en 1993. Pour ces auteurs, si la seule mise en évidence des propriétés liées à la périodicité du matériau présente un intérêt certain d'un point de vue purement fondamental, les possibilités d'applications des cristaux phononiques justifient plus encore leur étude : structures anti-vibratoires ou encore transducteurs figurent parmi les premiers systèmes évoqués.

D'autres applications évidentes sont rapidement envisagées : systèmes d'isolation phonique [15,16] structures parasismiques [17], filtrage et traitement du signal acoustique, etc. Les travaux théoriques présentés dans l'article fondateur de Kushwaha [13] traitent un exemple simple de réseau périodique bidimensionnel dont le diagramme de bandes est illustré sur la figure I.1 : des cylindres d'aluminium dans une matrice de nickel.



**Figure I.1 :** Structure de bandes pour un cristal phononique consistant en un arrangement de tiges d'aluminium dans une matrice de nickel. D'après [13].

Comme souvent, ce sont des papiers théoriques qui ouvrent un nouveau sujet, et il fallut attendre près de deux ans (et la publication de 9 articles) pour que paraisse une première communication présentant des travaux expérimentaux similaires dans le domaine de l'acoustique audible. Des mesures ont été réalisées sur une structure objectivement non

prévue pour cela, puisqu'il s'agit d'une sculpture minimaliste de l'artiste Eusebio Sempere exposée dans les jardins de la Juan March Foundation à Madrid (figure I.2). Cette sculpture, constituée de cylindres d'acier de 2,9 cm de diamètre répartis selon un réseau carré simple de pas 10 cm, présente des atténuations marquées à 1,7 et 2,4 kHz, reliées à la diffraction sur les plans cristallographiques. Une étude théorique postérieure [18] montre qu'il ne s'agit pas de bandes interdites totales, mais plutôt de pseudo-gaps, car l'atténuation introduite par la structure dépend de la direction du vecteur d'onde incident.



**Figure I.2 :** Sculpture minimaliste de l'artiste Eusebio Sempere, qui a servi de support à la première démonstration expérimentale de bandes interdites pour les ondes élastiques [18].

L'avantage des cristaux phononiques sur leurs homologues optiques apparaît tout d'abord à la fabrication : la structuration a eu lieu à des échelles macroscopiques, en rapport avec la longueur d'onde atténuée, donc aisément contrôlable. Ensuite, du point de vue de la mesure, les acousticiens ont à leur disposition l'amplitude et la phase grâce aux transducteurs piézoélectriques, tandis que les détecteurs optiques sont intrinsèquement limités à la mesure de l'intensité du champ. Enfin, nous verrons que les paramètres mis en jeu dans l'apparition de bandes interdites sont beaucoup plus riches en acoustique qu'en optique.

Toutes ces raisons expliquent l'engouement passé et actuel pour les cristaux phononiques: la physique est souvent comparable à celle des cristaux photoniques, mais la facilité de

réalisation est évidente et les mesures sont réalisées avec du matériel souple d'utilisation. Les cristaux phononiques sont donc particulièrement adaptés à la modélisation et la compréhension des phénomènes physiques sous-jacents. Le développement des applications envisagées jusqu'ici (création d'environnement dépourvu de vibrations, filtrage acoustique ainsi que l'optimisation des réseaux de transducteurs) reste en effet à un stade peu avancé.

D'autres types de cristaux permettent d'atténuer efficacement des fréquences dont les longueurs d'ondes sont de deux ordres de grandeur supérieures au pas de la structure ( $a$ ) : ce sont les cristaux phononiques munis d'unités localement résonantes [19, 20, 2]. Ce concept repose sur la présence de diffuseurs résonants au sein d'une structure.

périodique : la réponse linéaire d'un tel diffuseur s'établit en , ce qui permet au matériau de présenter des constantes élastiques effectives négatives dans certaines gammes de fréquences. En cela, le principe de fonctionnement de ces structures est extrêmement proche des phénomènes physiques qui gouvernent l'atténuation à la traversée d'un nuage de bulles résonantes. De tels cristaux ont été construits par l'équipe de Liu, en utilisant comme diffuseurs des billes métalliques denses enrobées d'un matériau mou, noyées dans une matrice en résine époxy. Ceux-ci ouvrent d'intéressantes perspectives en termes de filtrage dans le domaine de l'audio puisqu'ils permettent de s'affranchir de la condition  $\lambda \approx a$  : les fréquences atténuées par le prototype se situent en effet autour de 400 Hz et 1,3 kHz pour un réseau cubique de période 1,55 cm.

### I.1.3. COMPARAISON ENTRE CRISTAUX PHONONIQUES ET PHOTONIQUES

Les cristaux phononiques tels qu'ils sont définies auparavant, sont des structures périodiques. Cependant, il ya de fortes analogies entre la propagation des électrons dans les cristaux ordinaires et les ondes électromagnétiques et élastiques dans les cristaux photoniques et phononiques respectivement.

Les propriétés fondamentales régissant la propagation des ondes électroniques, électromagnétiques et élastiques dans les structures périodiques tridimensionnelles isotropes sont résumées dans le tableau I.1 [4].

Propriétés	Cristal électronique	Cristal photonique	Cristal phononique
<b>Matériaux</b>	Cristallin (naturel ou obtenu par croissance)	Composé de deux matériaux diélectriques.	Composé de deux matériaux élastiques.
<b>Paramètres</b>	Constantes universelles nombres atomiques	Constantes diélectriques des constituants.	Densités, vitesse du son dans les constituants
<b>Constantes de maille</b>	1-5Å (microscopique)	0.1µm-1cm (mésoscopiques ou macroscopiques)	Mésoscopique ou macroscopiques
<b>Ondes</b>	De Broglie (électron) $\psi$	Electromagnétiques ou lumineuses (photon)E.B	Vibration ou sonores (phonon) u
<b>Polarisation</b>	Spin (haut et bas)	Transversale : $\nabla \cdot D = 0$ $\nabla \cdot E \neq 0$	Trans.Longit : $\nabla \cdot u \neq 0$ $\nabla * u \neq 0$
<b>Equation différentielle</b>	$\psi \nabla^2 \psi =$ $i\hbar (\partial\psi/\partial t)$	$\nabla^2 E - \nabla(\nabla E) = \left( \frac{\epsilon(r)}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \right)$	$\left( \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \right) = 1/\rho \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \right] \right)$
<b>Bandes interdite</b>	Augmente avec le potentiel dans le cristal ;pas d'état électronique possible.	Augmente avec $ \epsilon_a - \epsilon_b $ ; pas de photons, pas de lumière.	Augmente avec $ \rho_a - \rho_b $ ; pas de vibration, pas de son
<b>Particules libres</b>	$W = \hbar^2 K^2 / 2m$ (électron)	$W = c/\sqrt{\epsilon} K$ (photons)	$W = c_{tI} K$ (phonons)
<b>Gamme spectrale</b>	Ondes radio, micro-ondes, optiques, rayons X	Micro-ondes, optique	$W \leq q\text{ GHz}$

Tableau I.1 Propriétés clés pour l'étude des structures de bandes dans les matériaux tridimensionnels isotropes.

Bien que la structure de bandes phononiques d'un cristal à gap phononique est analogue à la structure de bande d'un cristal à gap photonique, celle-ci est aussi analogue à la structure de bande électronique d'un semi-conducteur. Le concept de bandes interdites développé initialement dans le cadre de la théorie électronique des solides peut être étendu à d'autres types d'ondes se propageant dans les matériaux composites.

La propagation des ondes électromagnétiques et/ou élastiques acoustiques dans les matériaux composites a fait l'objet d'une attention particulière. Ces derniers en l'occurrence les cristaux photoniques et phononiques respectivement, existent naturellement, ou sont fabriqués artificiellement. Ils montrent une grande variété d'intérêt de propriétés physiques, à la fois sur le plan de la recherche fondamentale et celui de la recherche appliquée.

Les cristaux phononiques ont des propriétés qui concordent avec celles des cristaux photoniques, toute fois il existe une certaine nuance entre eux.

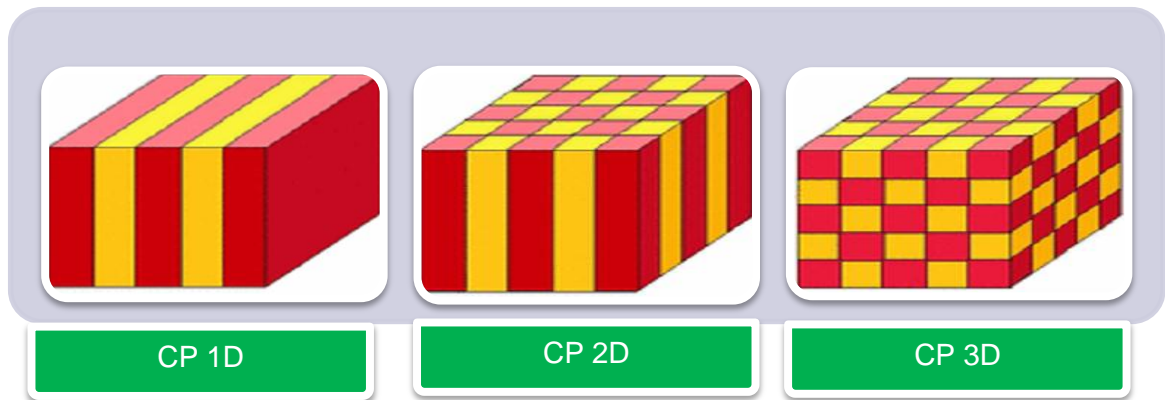
Les cristaux photoniques peuvent être caractérisés par deux paramètres indépendants, à savoir le rapport de la fonction diélectrique et la fraction volumique occupée par un de ces composants ; tandis que pour les cristaux phononiques plusieurs paramètres peuvent déterminer la propagation des ondes, tels que: le rapport des vitesses transversales et longitudinales, la densité, la fraction volumique... etc. [21]. Dans les deux cas la propagation des ondes dépend de la structure.

En outre, ces dernières années, il a été démontré que les cristaux photoniques sous certaines conditions géométriques et physiques, se comportent comme des matériaux à indice de réfraction négatif et que ces types de matériaux peuvent être utilisés dans fabrication de super lentilles. En parallèle, de fortes résonances apparaissent à des faibles fréquences et ceci ouvre la possibilité de produire des lentilles phoniques [21].

## **I.2. DIFFERENTS TYPES DES CRISTAUX PHONONIQUES**

Les cristaux phononiques sont des structures uni-, bi- et tri- dimensionnelles. Ils sont composés d'unions de deux matériaux ayant des propriétés élastiques différentes (figure I.3). Leur propriété intéressante est l'existence de bandes interdites. Il s'agit de bandes de fréquences pour lesquelles la pénétration des ondes dans le cristal est interdite.

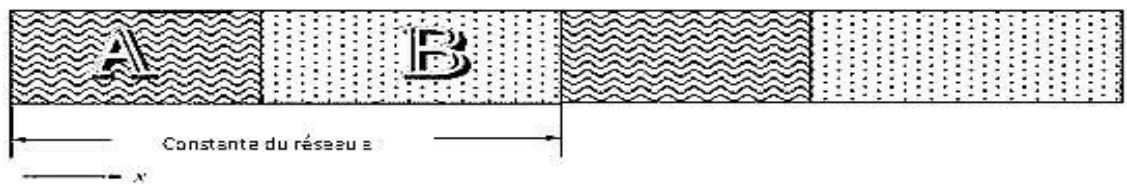
L'apparition de bandes interdites n'est possible sous des conditions spécifiques dépendant du choix des matériaux et des paramètres géométriques de la structure.



**Figure I. 3** : Représentation schématique de cristaux photoniques ou phononiques :  
(a) unidimensionnel (1D), (b) bidimensionnels (2D) et (c) tridimensionnels (3D).

### I.2.1. STRUCTURES PERIODIQUES UNIDIMENSIONNELLES

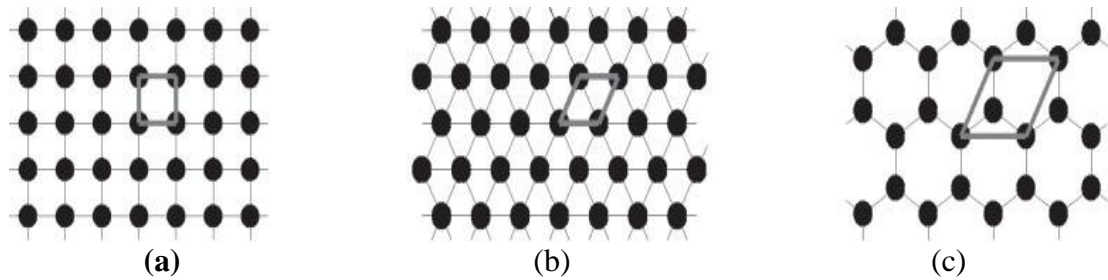
Un cristal phononique unidimensionnel est un composite stratifié obtenu en empilant en alternance des couches de matériaux de caractéristiques physiques différentes (propriétés élastiques différentes). Dans ces structures unidimensionnelles, les domaines de fréquence où les bandes interdites apparaissent dépendent de la direction de propagation de l'onde incidente [21]. Ces cristaux phononiques unidimensionnels conduisent à de nombreuses applications dans l'isolation acoustique à basse fréquence. En raison de leurs structures, il est facile d'obtenir de grandes bandes interdites. La figure I.4 montre un cristal phononique unidimensionnel composé de deux matériaux différents A et B [21].



**Figure I.4** : Représentation schématique d'un cristal phononique  
Unidimensionnel constitué de deux matériaux A et B [21].

### I.2.2. STRUCTURES PERIODIQUES BIDIMENSIONNELLES

Dans le cas d'un cristal phononique bidimensionnel, les inclusions sont des cylindres de section quelconque que l'on peut disposer par exemple suivant un réseau carré ou triangulaire (figure I.5). Les inclusions peuvent aussi être composées d'un matériau différent de celui de la matrice qui peut être de simples trous. L'essentiel est que la diffusion (l'interférence) des ondes acoustiques et/ou élastiques sur ces inclusions soit très efficace, [21].

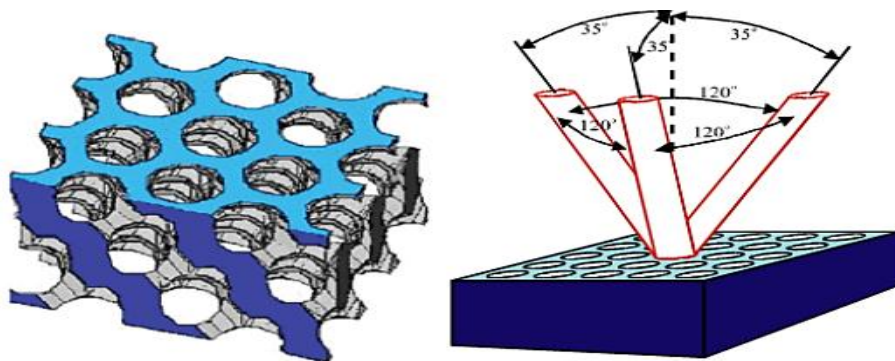


**Figure I.5 :** Représentation schématique des Principaux réseaux dans le cas d'un cristal Phononique à deux dimensions [21].

On distingue plusieurs classes de cristaux phononiques selon la nature physique des constituants, tels que les composites solide/solide (respectivement fluide/fluide) dont tous les constituants sont des solides (respectivement fluides) et les composites mixtes formés à la fois de solides et de fluides.

### I.2.3. STRUCTURES PERIODIQUES TRIDIMENSIONNELLES

Les cristaux phononiques tridimensionnels sont des structures généralement artificielles périodiques suivant les trois directions de l'espace. Dans les structures phononiques bidimensionnelles et tridimensionnelles, en revanche, il est possible d'obtenir des bandes interdites absolues ou omnidirectionnelles, c'est-à-dire qu'une onde incidente de fréquence appartenant à une telle bande interdite ne peut pas se propager quelque soit son angle d'incidence. Malheureusement, l'inconvénient des structures tridimensionnelles (3D) réside dans le fait qu'elles soient difficiles à réaliser expérimentalement. La figure I.6 montre quelques exemples des structures tridimensionnelles (3D)



**Figure I.6 :** Exemples de structure BIP 3D: la yablonovite.[22]

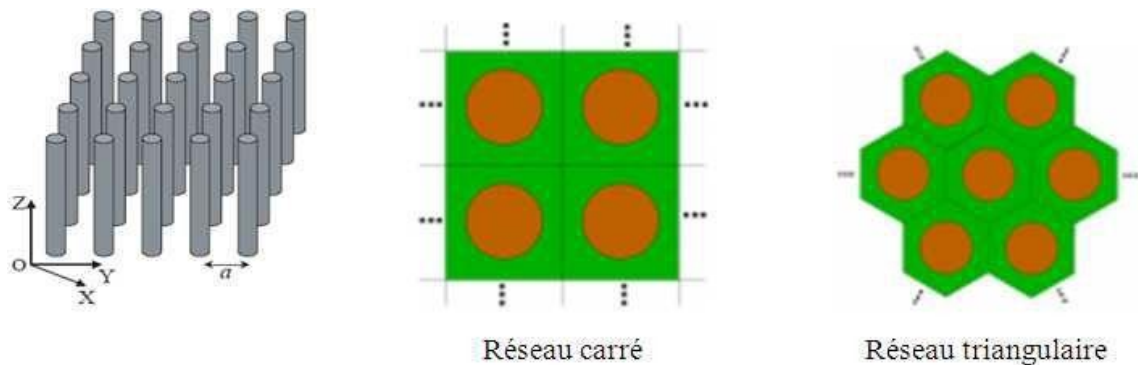
### I.3. DIFFERENTS TYPES DE RESEAUX CRISTALLINS

Les cristaux phononiques bidimensionnels sont des structures périodiques suivant deux directions de l'espace et infinies suivant la troisième. Les cristaux phononiques 2D sont

formés d'au moins de deux matériaux composites distinctes. Selon leurs constituants inclusions / air ou cylindre d'Air / matrice hôte, on peut distinguer deux types de structures périodiques bidimensionnels :

- Les structures dites «connectées» : Dans ces structures les propriétés acoustiques telles que la masse volumique et vitesse de propagation dans les diffuseurs/ inclusions (motif élémentaire) sont inférieures à celles dans la matrice élastique. Cette structure est constituée par exemple de cylindre d'airs percés dans la matrice hôte.
- Les structures dites «déconnectées» : Dans ce cas, les diffuseurs ou les inclusions ont des propriétés acoustiques supérieures à celles de la matrice. Elles sont constituées de tiges élastiques alignées périodiquement dans l'air par exemple.

Dans le cas d'un cristal phononique bidimensionnel, les inclusions sont des cylindres de section quelconque que l'on peut disposer par exemple suivant un réseau carré ou triangulaire (figure I.7). Les inclusions peuvent aussi être composées d'un matériau différent de celui de la matrice qui peut être de simples trous. L'essentiel est que la diffusion (l'interférence) des ondes acoustiques et/ou élastiques sur ces inclusions soit très efficace [16].

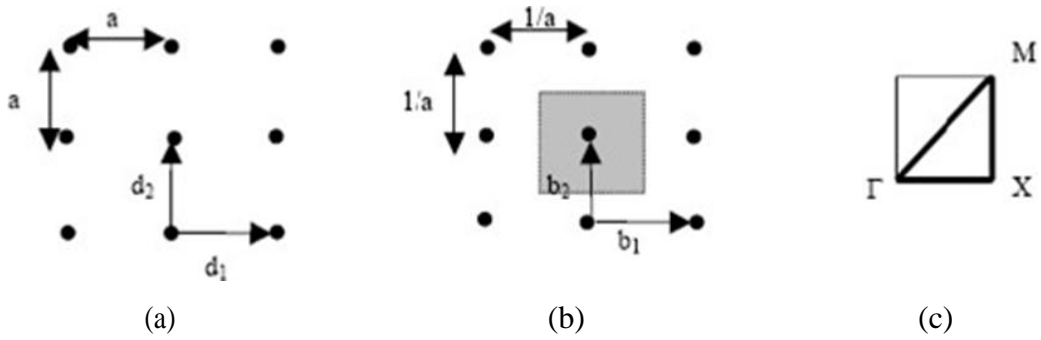


**Figure I.7 :** Représentation schématique d'un cristal phononique 2D :

Réseau carré ou réseau triangulaire

### I.3.1. RESEAU CARRE

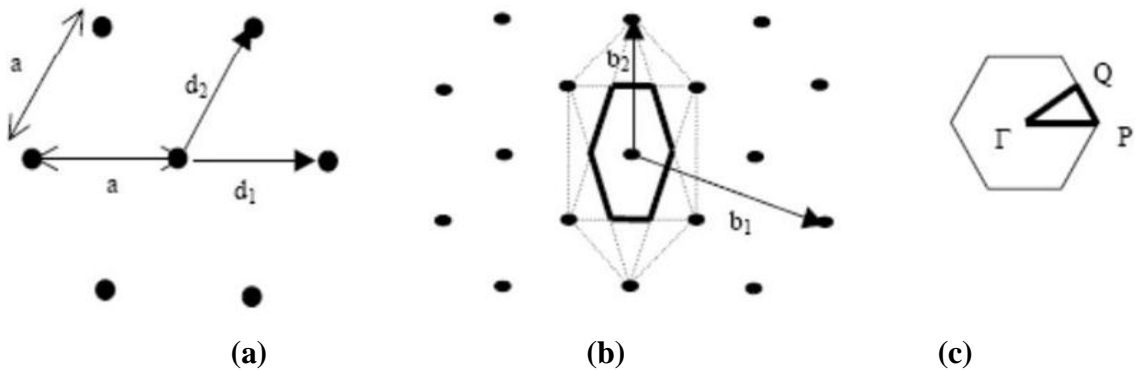
Les nœuds du réseau sont situés sur un carré de côté « a » (Figure I.8.a). Il a été montré que ce type de réseau est très sensible à l'angle d'incidence et à la polarisation de l'onde incidente. Il est ainsi difficile d'obtenir une bande interdite totale, c'est-à-dire une bande interdite qui empêche la propagation quelle que soit la polarisation. La figure I.8 (b) et (c) représentent le réseau réciproque et la zone de Brillouin respectivement.



**Figure I.8 :** Représentation : a) d'un réseau carré, b) son réseau réciproque, c) de sa zone de Brillouin

**I.3.2. RESEAU TRIANGULAIRE**

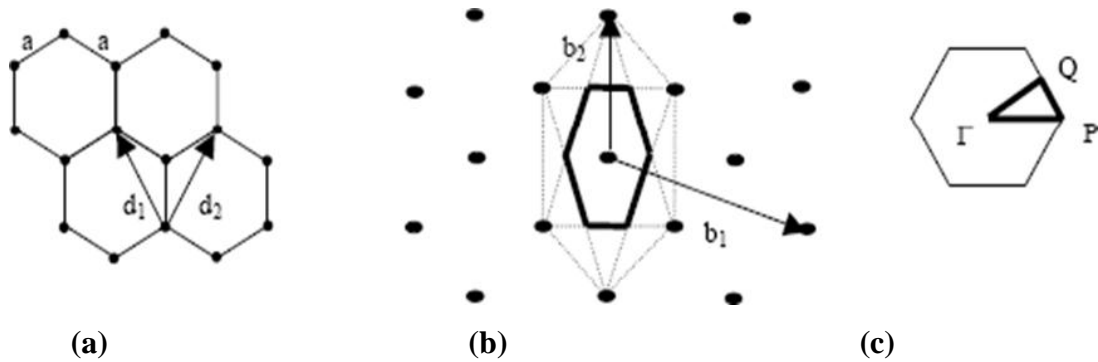
Le réseau triangulaire, est le réseau 2D de plus haute symétrie dès lors que l'on se limite à un seul « atome » par maille. La zone de Brillouin est un hexagone. Chaque nœud du réseau est espacé de son proche voisin d'une même distance « a » (Figure I.9.b). Cette structure est moins sensible à l'angle d'incidence que le réseau carré mais la bande interdite complète reste difficile à obtenir. La zone de Brillouin pour ce type de réseaux est un hexagone comme il est montré sur la figure I.9 (c).



**Figure I.9 :** Représentation : a) d'un réseau triangulaire, (b) de son réseau réciproque,(c) et de sa zone de Brillouin

**I.3.3. RESEAU HEXAGONAL**

Dans cette structure tous les nœuds sont identiques et espacés de "a", elle est similaire à la structure d'un réseau triangulaire sauf que le nœud du centre est enlevé. Parmi ces structures, on trouve la structure cristalline du graphite (figure I.10.a).La zone de Brillouin pour ce type de réseaux est un hexagone comme il est montré sur la figure I.10 (c).



**Figure I.10:** Représentation schématique : a) d'un réseau hexagonal, b) de son réseau réciproque, c) et de sa zone de Brillouin

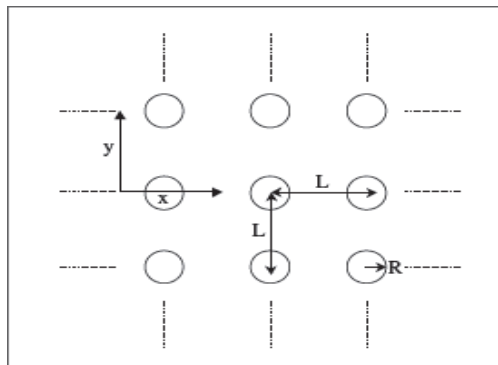
On distingue plusieurs classes de cristaux phononiques selon la nature physique des constituants, tels que les composites solide/solide (respectivement fluide/fluide) dont tous les constituants sont des solides (respectivement fluides) et les composites mixtes formés à la fois de solides et de fluides [21].

### I.4. RESEAU DIRECT ET RESEAU RECIPROQUE

#### I.4.1. RESEAU DIRECT

D'un point de vue géométrique, chaque éléments du réseau illustré sur la figure I.11 peut être a l'aide de deux vecteurs de base  $\vec{d}1$  et  $\vec{d}2$ . De plus, réseau considéré étant à géométrie carré, ces deux vecteurs définissent une base orthogonale dont les normes sont égales au paramètre de maille L

$$\|\vec{d}1\| = \|\vec{d}2\| = L \tag{I.1}$$

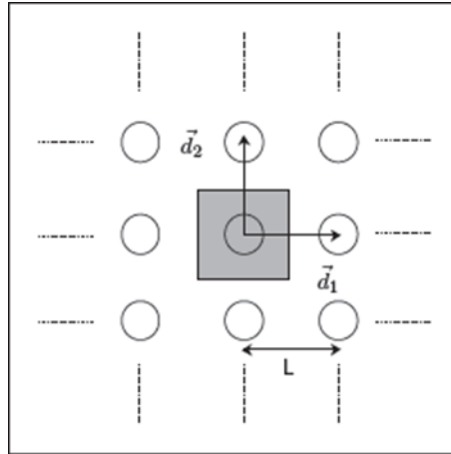


**Figure I.11.** Cristal phononique a deux dimensions constitue D'un ensemble de cylindres dispose de réseau carré

La géométrie ce cristal est entièrement définie par le rayon R des cylindre et le paramétré de L du réseau. Ces deux vecteurs de base sont représentés sur la figure I.8 en fixant pour origine arbitraire le centre d'un cylindre. L'ensemble des positions des centres des cylindres est direct par les vecteurs  $\vec{d}_{1,2}$  Ces vecteurs sont définis par la relation.

$$\vec{D}_{L_1, L_2} = L_1 \vec{d}_1 + L_2 \vec{d}_2 \quad (\text{I.2})$$

Ou  $L_1$  et  $L_2$  sont des entiers relatifs les vecteurs  $\vec{D}$  désignant les positions du centre des cylindres dans le réseau direct.



**Figure I.12 :** Vecteur de base et maille élémentaire de Wing-Seits (zone grisée) dans le réseau direct.

Pour décrire totalement ce réseau direct, il suffit de connaître la géométrie complète d'une maille élémentaire. A partir de celle-ci l'ensemble du réseau est décrit par l'intermédiaire de la relation (I.2). Une exemple de maille élémentaire est représenté en zone grisée sur la figure I.12 [23].

#### I.4.2. RESEAU RECIPROQUE

A toute structure cristalline est associée deux réseaux : le réseau direct et le réseau réciproque. Une figure de diffraction d'un cristal est une carte du réseau réciproque du cristal. Quand nous faisons subir la même rotation au réseau direct et au réseau et réciproque si  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  sont les vecteurs primitifs du réseau cristallin, un nœud de ce réseau est repéré par un vecteur  $\vec{r}$  tel que :

$$\vec{r} = u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c} \quad (\text{I.3})$$

Et si  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  sont les vecteurs primitifs du réseau réciproque, un nœud de ce réseau est repéré par un vecteur  $\vec{G}$  tel que

$$\vec{G} = h\vec{A} + k\vec{B} + l\vec{C} \quad (\text{I.4})$$

On  $u, v, w$  sont les coordonnées d'un nœud du réseaux direct et  $h, k, l$  les indice de Maille définissants un nœud du réseau réciproque .les deux réseau sont relies par les définitions suivantes :

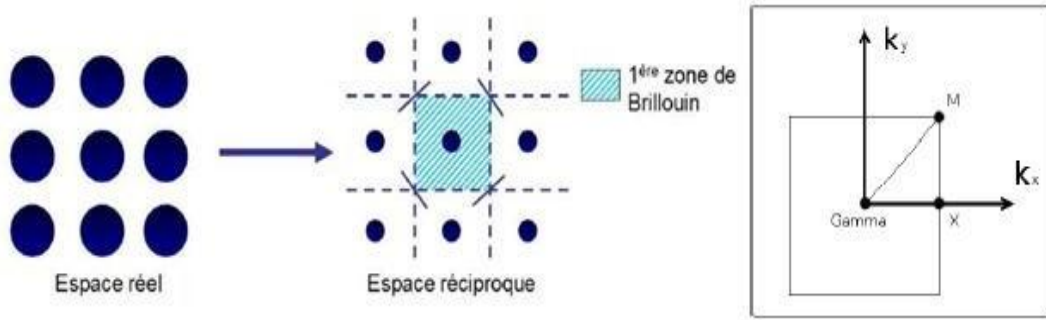
$$\vec{a} \cdot \vec{A} = 2\pi \quad \vec{b} \cdot \vec{B} = 2\pi \quad \text{et} \quad \vec{c} \cdot \vec{C} = 2\pi$$

$$\vec{A} = \frac{2\pi}{V}(\vec{b} \times \vec{c}), \quad \vec{B} = \frac{2\pi}{V}(\vec{c} \times \vec{a}) \quad \text{et} \quad \vec{C} = \frac{2\pi}{V}(\vec{a} \times \vec{b}) \quad \text{avec} \quad V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Le facteur  $2\pi$  n'est pas utilisé par les cristallographe mais il est pratique en physique du solide les vecteurs du réseau cristallin (direct) ont les dimensions d'une [longueur] ; les vecteurs du réseaux réciproque ont dimensions [longueur]<sup>-1</sup> [ 3].

### I.4.3.Zone de Brillouin

La zone de Brillouin irréductible dans l'espace réciproque est l'équivalent de la cellule élémentaire pour un réseau de Bravais dans l'espace réel. On peut y définir une cellule élémentaire correspondant à la zone définie par les plans médiateurs entre chaque motif de la maille représentant les points de hautes symétries du réseau réciproque. Chaque point de l'espace contenu dans cette zone de Brillouin irréductible est donc plus proche du nœud d'un réseau que des autres nœuds. Pour illustrer simplement cet aspect, la figure I.13 représente la zone de Brillouin irréductible pour un réseau carré de période  $a$ .

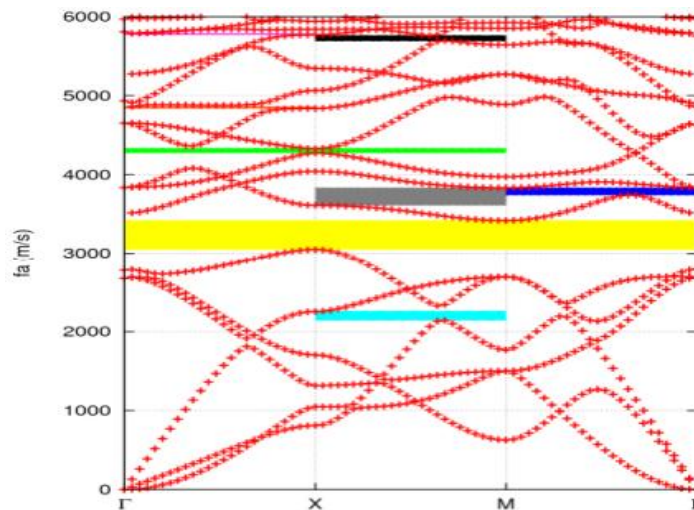


**Figure I.13 :** Représentation d'un réseau carré dans l'espace réel et l'espace réciproque avec la première zone de Brillouin associée.

#### I.4.4. DIAGRAMME DE BANDE

Les diagrammes de bandes sont parmi les outils les plus utilisés pour illustrer les propriétés de propagation d'une onde acoustique ou élastique au sein des cristaux. Le comportement des ondes dans la zone irréductible de Brillouin pour décrire entièrement le comportement des ondes dans un milieu périodique. On peut donc se contenter de tracer les courbes de dispersion pour différentes orientations en faisant varier le nombre d'onde entre 0 et l'extrémité de la zone irréductible de Brillouin dans la direction concernée.

Les conditions de périodicité créent, de plus, des bandes d'arrêt, ce qui se traduit par un décalage en fréquence des repliements. Un exemple de diagramme de bandes, calculé avec la méthode des éléments finis pour un cristal de maille carrée, constitué de trous d'air percés dans une membrane AlN /SiO<sub>2</sub>, est présenté sur la Figure I.14.



**Figure I.14 :** diagramme de bandes d'un cristal phononique constitués de trous D'airs percés dans une membrane AlN/SiO<sub>2</sub>, avec un remplissage de 60 % [24].

Ces repliements, les symétries et les interférences de Bragg induisent dans les cristaux phononiques des bandes interdites, plages de fréquences pour lesquelles les ondes présentes dans le cristal phononique seront évanescentes. Ces bandes interdites, ou bandes d'arrêt, correspondent donc à des plages de fréquences pour lesquelles le coefficient de réflexion à l'entrée du cristal phononique est proche de 1. Lorsque les ondes sont bloquées quelle que soit la direction de leur vecteur d'onde on a une bande d'arrêt complète, comme celle présentée en jaune sur la figure I.14. Il arrive que les ondes ne soient bloquées que dans une direction, mais quel que soit leur nombre d'onde, on parle alors de bande d'arrêt directionnelle ou partielle. C'est le cas, par exemple, de la bande tracée en bleu foncé sur la figure I.12, qui ne touchera que les ondes se propageant dans la direction  $\Gamma M$ .

Les bandes d'arrêt seront les caractéristiques des cristaux phononiques que nous rechercherons dans la suite de ce travail, pour permettre notamment des fonctions de filtrage, ainsi que l'apparition de résonances.

## **I.5. CREATION DES DEFAUT DANS LES CRISTAUX PHONONIQUE**

### **I.5.1. DEFANTS PONCTUELS**

L'étude des cavités ou de plusieurs cavités couplées commence un peu plus tard pour les cristaux phononiques. La première étude remonte à 1997, quand étudie théoriquement la possibilité d'obtenir les modes de résonance d'un défaut grâce à la méthode des super cellules. Une étude expérimentale est menée en 2001 : Wu et al. étudient l'impact d'un défaut volontaire placé dans un réseau d'inclusion rempli d'eau dans du mercure. En 2003, une étude plus complète est menée avec des piliers d'acier immergés dans de l'eau avec plusieurs cavités séparés par quelques inclusions, ce qui a permis de mettre en évidence expérimentalement le couplage entre deux cavités, similairement aux cristaux photoniques. Par la suite, en 2004 utilisent la méthode des super cellules pour calculer les modes de résonance de deux cavités couplées. D'autres publications abordent ce thème en utilisant des configurations plus sophistiquées : en 2008, Miyashita étudie le spectre de transmission sur une série périodique de cavités ; en 2009, Sánchez-Pérez et al utilisent des algorithmes itératifs, pour optimiser les bandes interdites et le confinement des ondes dans les cavités. L'obtention de cavité à haut facteur de qualité est aussi un enjeu d'importance : la durée de vie phononique dans ce type de cavité est élevée ce qui permet d'exalter les effets de couplages avec les phonons.

### I.5.2. DEFAUT LINEAIRES

Les premières études portant sur les défauts linéaires ont commencé quasiment simultanément aux études des cavités ponctuelles. La possibilité de guider l'onde dans les cristaux phononiques a bien entendu fait l'objet d'un grand nombre de publications.

Les guides phononiques sont introduits en 1999, lorsque étudié théoriquement le guidage d'une onde acoustique dans un coude à  $90^\circ$ . Un résultat de cette étude fait état de la perte de confinement de l'onde lors du changement de direction du guide. De ce fait, beaucoup de travaux cherchent à optimiser la transmission de l'onde en présence d'un coude. En particulier, d'autres auteurs étudient expérimentalement l'impact de divers coudes sur la transmission acoustique.

L'application de la méthode des super cellules aussi a permis d'établir les modes de résonance des systèmes plus à même de transmettre l'onde acoustique. De là, des travaux d'optimisation ont été effectués afin d'améliorer les Coefficients de transmission dans les guides d'onde, par exemple en modifiant la largeur des guides ou sur la modification des inclusions voisines des coudes [9].

## CONCLUSION

Un cristal phononique est un matériau généralement artificiel qui présente une périodicité spatiale dans une, deux ou trois directions de l'espace. Ce nouveau type de matériau est capable de bloquer la propagation des ondes élastiques ou acoustiques dans certaines directions et gammes de fréquences. Dans ce chapitre, nous avons rappelé les concepts fondamentaux et les notions de bases associées aux cristaux phononiques notamment la bande interdite phononique.

## **CHAPITRE II**

---

# **METHODES DE CALCUL DE LA BANDE INTERDITE PHONONIQUE**

---

## INTRODUCTION

Actuellement, de nombreux modèles réalistes ont été développés afin de comprendre les comportements des systèmes et phénomènes. Cette "prédiction" est basée sur des équations mathématiques dont la recherche de solutions a tant suscité et suscite encore une grande préoccupation de la part des scientifiques. A ce propos, on peut citer l'exemple des équations régissant le champ électromagnétique établies par James Clerk Maxwell au 19<sup>ème</sup> siècle ; elles sont devenues depuis lors les équations de base pour décrire les comportements de tous les systèmes électroniques, optiques et optoélectroniques quelle que soit leur complexité. Par conséquent, plusieurs méthodes et techniques numériques ont été développées [3].

Dans le domaine de propagation des ondes, la simulation numérique a longtemps été appliquée en électromagnétisme pour la résolution des équations de Maxwell, pour d'innombrables systèmes complexes. Parmi ces derniers, les cristaux photoniques qui ont fait l'objet d'une large application de méthodes numériques pour l'étude de leur comportement ondulatoire. On peut citer par exemple la méthode de décomposition en ondes planes appelée : PWE (Plane Wave Expansion), très utilisée pour le calcul de structures de bandes.

D'autres méthodes, basées aussi sur l'approche de décomposition, ont été développées, dont celle de Kohn-Korringa-Rostocker (KKR), la méthode TMM (The Transfer Matrix Method), la MST (Multiple scattering Theory) et la décomposition en ondelettes. D'autres algorithmes basés sur d'autres approches de calcul ont été utilisés, comme la méthode des différences finies résolues dans le temps, appelée FDTD (Finite Difference Time Domain), et celle des éléments finis (Finite Elements Method) qui utilise une base de fonctions définies sur un maillage du domaine de résolution. Durant les deux dernières décennies, certaines de ces méthodes ont été appliquées à l'étude théorique de la propagation des ondes élastiques/acoustiques dans les cristaux phononiques (CP) [3].

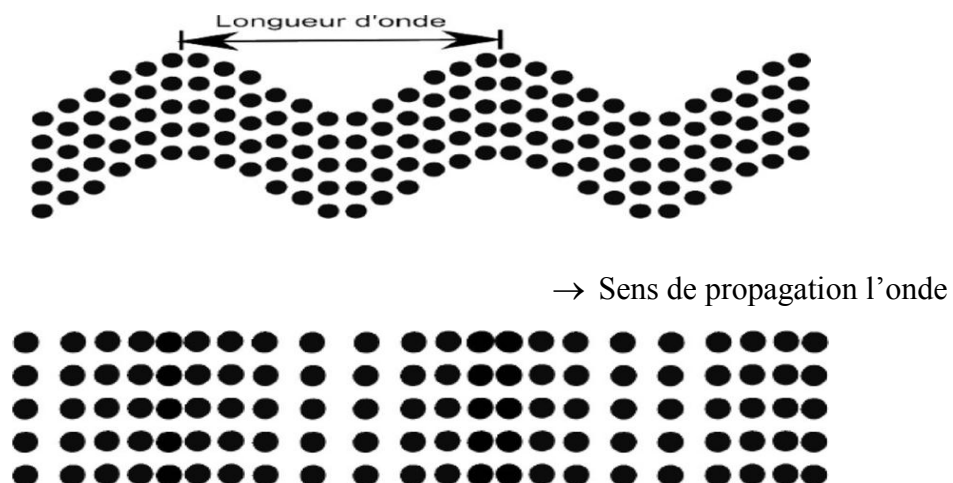
## II.1. EQUATION DE PROPAGATION DES ONDES ELASTIQUES

### II.1.1. Ondes longitudinales et ondes transversales

Dans un milieu élastique excité par des ondes, si les éléments du milieu vibrent dans la direction de propagation, l'onde est longitudinale (ondes acoustiques, ressort...). S'ils vibrent normalement à la direction de propagation, l'onde est transversale (corde vibrante ...).

Les ondes ultrasonores longitudinales encore appelées ondes de compression, sont caractérisées par un déplacement des particules parallèle à la direction de propagation c'est-à-dire par une polarisation colinéaire au vecteur d'onde (Figure II.1) Le passage d'une onde longitudinale plane entraîne une variation de la distance entre les plans parallèles contenant les particules si bien que le volume occupé par un nombre donné de particules varie. Ce sont des ondes de volume. Elles se propagent normalement dans les solides, les liquides et les gaz. Cependant, compte tenu des fréquences très élevées utilisées dans le contrôle non destructif, l'atténuation de ces ondes est extrêmement élevée dans les gaz. Ainsi, les ondes longitudinales ne se propagent réellement que dans les solides et les liquides. [2].

Les ondes élastiques et acoustiques transversales, plus communément appelées aussi ondes de cisaillement. Ce type d'ondes sont composées de déplacements perpendiculaires à la direction de propagation. Par conséquent le glissement des plans parallèles ne donne lieu à aucune variation de volume puisque les distances entre les plans sont conservées. Si ces vibrations se font infiniment dans toutes les directions contenues dans ce plan, l'onde transversale est dite polarisée. Autrement dit, elles sont caractérisées par une polarisation perpendiculaire au vecteur d'onde ou tout simplement, les particules oscillent de part et d'autre de la droite de leur position initiale. Les ondes transversales ne se propagent que dans les solides ou dans les liquides visqueux. (Figure II.1) représente le schéma d'un solide traversé par une onde transversale [25].



**Figure II-1** : Représentation schématique d'une onde transverse et longitudinale

### II.1.2. Constantes élastiques du niobate de lithium

Les constantes élastiques appelés communément modules élastiques. Les modules élastiques expriment l'aptitude du matériau à se déformer élastiquement sous l'effet d'une contrainte. Ces modules sont généralement définis comme le rapport entre la variation de pression et la variation des dimensions du matériau soumis à cette pression.

### II.1.3. Equation de propagation des ondes élastiques

La propagation des ondes élastiques/acoustiques dans les solides est décrite par deux champs d'équations de base : l'équation reliant le tenseur de déformation au champ de déplacement  $\nabla = \text{suS}$  et l'équation du mouvement  $\nabla \cdot \mathbf{T} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$  [26]. Cette dernière exprime le comportement vibratoire propre d'un milieu libre de toute interaction extérieure, où les forces d'inertie et celles de rappel élastique agissent sur les particules du milieu pour donner lieu aux mouvements d'oscillation. À ces deux équations, on ajoute la loi de Hooke  $\mathbf{T} = \mathbf{c} : \mathbf{S}$  reliant le tenseur des contraintes à celui des déformations, permettant ainsi d'établir le lien entre les forces élastiques de rappel et la déformation du matériau au moyen des constantes élastiques du milieu. Un système d'équations en  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{u}$  est ainsi défini :

$$\mathbf{S} = \nabla_s \mathbf{u} \quad (\text{II. 1})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (\text{II. 2})$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{c} : \mathbf{S} \quad (\text{II. 3})$$

où  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{S}$  représentent respectivement les tenseurs des contraintes et des déformations,  $\mathbf{u}$  le vecteur champ de déplacement, et  $\mathbf{c}$  le tenseur de rigidité élastique (stiffness tensor) regroupant les constantes élastiques du milieu. Le produit désigné par les deux points ":" (double dot product) signifie que les deux tenseurs  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{S}$  sont liés par la relation suivante:

$$T_{ij} = \sum_{k,l} c_{ijkl} S_{kl}$$

L'expression  $\mathbf{S} = \nabla_s \mathbf{u}$  implique

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad , \text{ avec } (i, j, k, l) \in \{x, y, z\}^4 \quad , x, y \text{ et } z \text{ étant les trois directions du}$$

repère cartésien dans l'espace tridimensionnel.

Le système décrit par les équations (II.1), (II.2) et (II.3) peut aussi être écrit sous la forme :

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_j \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} = \sum_{j,k,l} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right)$$

Ces équations peuvent encore être simplifiées par les symétries des tenseurs  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{S}$ , à savoir  $C_{ijkl} = C_{jikl}, C_{ijkl} = C_{ijlk}$  et  $C_{ijkl} = C_{klij}$  [26], et en utilisant la notation de Voigt pour le tenseur de rigidité élastique et celui des contraintes :  $C_{ijkl} = C_{IJ}$  et  $T_{ij} = T_I$ , avec :

$ij, kl$	$xx$	$yy$	$Zz$	$yz, zy$	$xz, zx$	$xy, yx$
$I, J$	1	2	3	4	5	6

**Tableau 2.1:** Notation de Voigt

On obtient ainsi:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial T_6}{\partial y} + \frac{\partial T_5}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_6}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} + \frac{\partial T_4}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial T_5}{\partial x} + \frac{\partial T_4}{\partial y} + \frac{\partial T_3}{\partial z} \end{cases} \text{ avec } \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial u_x / \partial x \\ \partial u_y / \partial y \\ \partial u_z / \partial z \\ \partial u_y / \partial z + \partial u_z / \partial y \\ \partial u_x / \partial z + \partial u_z / \partial x \\ \partial u_y / \partial x + \partial u_x / \partial y \end{bmatrix} \quad (\text{II. 4})$$

Dans un milieu isotrope par exemple, le tenseur élastique se présente sous la forme [4] :

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \text{ avec } c_{44} = (c_{11} - c_{12})/2 \quad (\text{II-5})$$

En analyse numérique, la résolution de ces équations permet de simuler le comportement élastique d'un milieu solide quelconque, et donc sa réponse aux différentes sollicitations extérieures qu'il subit, notamment les excitations générant des ondes acoustiques ou élastiques.

## II.2. METHODES NUMERIQUES DE SIMULATION

### II.2.1. Méthode de décomposition en ondes planes

La décomposition en ondes planes, communément appelée PWE, est sans doute la méthode la plus utilisée par la communauté scientifique travaillant dans les domaines de la photonique et la phononique, où les systèmes étudiés sont généralement périodiques. L'une de ses premières applications a été son utilisation pour obtenir les états d'énergie électroniques dans les cristaux métalliques périodiques[29]. Elle a été ensuite largement utilisée en photonique[27-28] puis en phononique pour le calcul des structures de bandes.

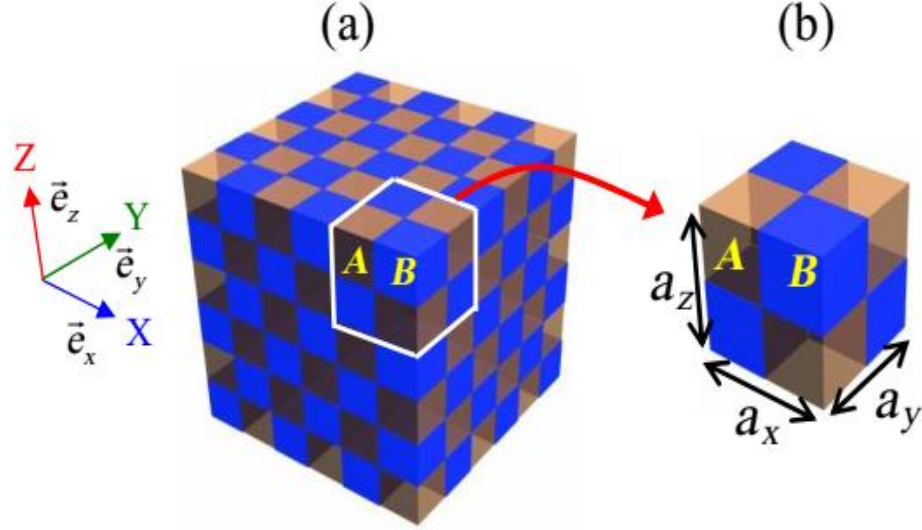
Dans le domaine de la phononique, du fait de la périodicité des structures étudiées, le champ de déplacement et les paramètres d'élasticité sont décomposés en ondes planes périodiques suivant les directions de la périodicité du CP. Le théorème de Bloch est appliqué afin de ramener l'étude au niveau d'une cellule constituant l'élément de périodicité du système en exprimant les conditions aux limites périodiques.

Le système d'équations de mouvement est ensuite développé et ramené à un problème classique de recherche de valeurs propres. Ce dernier permet de calculer les modes de propagation des ondes et de tracer la structure de bandes. Durant les deux dernières décennies, la PWE a largement montré son efficacité dans le calcul des structures de bandes phononiques pour différents types de systèmes : structures bidimensionnelles solides composites[30-31] ou solide-air[32], CP à une ou deux dimensions, constitués d'une plaque avec inclusions périodiques, pour la propagation d'ondes de Lamb[33-34], systèmes présentant un ou plusieurs défauts [35-36], ainsi que le guidage des ondes dans des systèmes finis[37]. La PWE a aussi fait ses preuves dans l'étude des milieux anisotropes [38] ou dispersifs pour les ondes de surfaces [39-40] ainsi que les milieux piézoélectriques [41-42]. Elle a également été modifiée et améliorée afin de calculer la structure de bandes complexes pour les ondes évanescentes [43-44].

#### II.2.1.1. Principe de décomposition en ondes planes

Afin de décrire au mieux le principe de la PWE, nous traiterons un exemple de CP pour développer les équations de mouvement. Nous partirons d'une structure composite tridimensionnelle formée par une répétition cubique de deux matériaux : A et B, avec les

périodes  $a_x$ ,  $a_y$  et  $a_z$ , respectivement suivant les trois directions X, Y et Z de l'espace (figure II.2). On désigne les vecteurs unitaires du repère cartésien (O,X,Y,Z) par  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$ .



**Figure II.2:** (a) Cristal phononique tridimensionnel constitué de deux matériaux isotropes : A (en marron transparent) et B (en bleu). (b) La cellule unité de périodicité de la structure phononique.

En considérant les milieux A et B isotropes, on commence d'abord par écrire sous forme fréquentielle les équations de mouvement en posant  $u_i = u_i(x, y, z)e^{j\omega t}$  pour une onde plane se propageant dans le CP; on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} -p\omega^2 u_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( C_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial u_y}{\partial y} + C_{12} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \\ \quad + \frac{\partial}{\partial y} \left( C_{44} \frac{\partial u_x}{\partial y} + C_{44} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( C_{44} \frac{\partial u_x}{\partial z} + C_{44} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ -p\omega^2 u_y = \frac{\partial}{\partial x} \left( C_{44} \frac{\partial u_x}{\partial y} + C_{44} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \quad + \frac{\partial}{\partial y} \left( C_{12} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{11} \frac{\partial u_y}{\partial y} + C_{12} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( C_{44} \frac{\partial u_y}{\partial z} + C_{44} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ -p\omega^2 u_z = \frac{\partial}{\partial x} \left( C_{44} \frac{\partial u_x}{\partial z} + C_{44} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \quad + \frac{\partial}{\partial y} \left( C_{44} \frac{\partial u_y}{\partial z} + C_{44} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( C_{12} \frac{\partial u_x}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial u_y}{\partial y} + C_{11} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \end{array} \right. \quad (\text{II.6})$$

Puisque nous sommes en présence d'un milieu composite, les constantes élastiques dépendent de la position spatiale dans le cristal. On a donc :

$$\rho = \rho(\vec{r}) \text{ et } c_{ij} = c_{ij}(\vec{r}) \text{ pour } (i, j) \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}^2.$$

Ensuite, à partir de la structure de notre cristal, on définit l'espace réciproque correspondant, dont la base est notée  $(\vec{b}_x, \vec{b}_y, \vec{b}_z)$  avec :

$$\vec{b}_x = 2\pi \frac{\vec{a}_y \times \vec{a}_z}{\vec{a}_x(\vec{a}_y \times \vec{a}_z)}, \vec{b}_y = 2\pi \frac{\vec{a}_z \times \vec{a}_x}{\vec{a}_y(\vec{a}_z \times \vec{a}_x)}, \vec{b}_z = 2\pi \frac{\vec{a}_x \times \vec{a}_y}{\vec{a}_z(\vec{a}_x \times \vec{a}_y)}$$

Dans notre cas de structure cubique :

$$\vec{b}_x = \frac{2\pi}{a_x} \vec{e}_x; \quad \vec{b}_y = \frac{2\pi}{a_y} \vec{e}_y; \quad \vec{b}_z = \frac{2\pi}{a_z} \vec{e}_z$$

La position de chaque point du réseau réciproque est repérée par :

$$\vec{G} = \vec{m}_1 \vec{b}_x + \vec{m}_2 \vec{b}_y + \vec{m}_3 \vec{b}_z = m_1 \frac{2\pi}{a_x} \vec{e}_x + m_2 \frac{2\pi}{a_y} \vec{e}_y + m_3 \frac{2\pi}{a_z} \vec{e}_z \quad (\text{II.7})$$

$$\text{avec } (m_i)_{i \in \{x, y, z\}} \in Z^3$$

Les vecteurs de base de ce réseau réciproque interviendront par la suite dans les fonctions de base de décomposition de Fourier des constantes élastiques et du champ de déplacement suivant la périodicité du CP.

Par ailleurs, du fait de la périodicité de la structure suivant les trois directions X, Y et Z de l'espace, le théorème de Bloch peut être appliqué à la fonction inconnue  $u_i$  :

$$u_i(\vec{r}) = e^{-i\vec{k}\vec{r}} u_{i,\vec{k}}(\vec{r}) \quad (\text{II.8})$$

$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$  étant le vecteur d'onde de l'onde solution à notre système d'équations (II.6).  $i$

est le nombre complexe vérifiant  $i^2 = -1$

La fonction  $u_{i,\vec{k}}$  est périodique suivant la variable  $\vec{r}$  :

$$u_{i,\vec{k}}(\vec{r} + \vec{a}_i) = u_{i,\vec{k}}(\vec{r}) \text{ et } i \in \{x, y, z\} \text{ et } x_x = x, y_y = y \text{ et } z_z = z$$

L'étude de la fonction  $u_{i,\vec{k}}$  peut donc se ramener aux domaines  $u_{\vec{a}} = [0, a_x] \times [0, a_y] \times [0, a_z]$  et

$u_{\vec{k}} = \left[ -\frac{\pi}{a_x}, \frac{\pi}{a_x} \right] \times \left[ -\frac{\pi}{a_y}, \frac{\pi}{a_y} \right] \times \left[ -\frac{\pi}{a_z}, \frac{\pi}{a_z} \right]$  respectivement pour la variable  $\vec{r} = (x, y, z)$  et le vecteur d'onde  $\vec{k}$ .

Par conséquent, le domaine de résolution se réduit à une cellule du CP définie par l'intervalle  $u_{\vec{a}}$  (voir figure II.2(b)). L'intervalle auquel se restreint le vecteur d'onde  $\vec{k}$  dans l'espace réciproque, à savoir  $u_{\vec{k}}$ , est appelé la première Zone de Brillouin. Le calcul de la structure de bandes phononiques dans l'espace réciproque se limitera donc aux limites de cette zone.

La zone de Brillouin est définie comme étant une unité de l'espace réciproque qui peut être déterminée géométriquement comme suit : on repère d'abord un point du réseau réciproque et on le relie à ses premiers points voisins les plus proches. Ensuite, on trace les médiatrices des segments formés par ces derniers et le point considéré. La zone délimitée par ces médiatrices définit la première zone de Brillouin.

La fonction définie par :  $u_i(\vec{r}) = e^{-i\vec{k}\vec{r}} u_{i,\vec{k}}(\vec{r})$

est solution du système (II.6) quel que soit  $\vec{k} \in u_{\vec{k}}$

Donc, dans l'ouvert  $u_{\vec{a}}$ , on se ramène à résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -p\omega^2 \left( e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{x,\vec{k}}(\vec{r}) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( C_{11} \frac{\partial \left( e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{x,\vec{k}}(\vec{r}) \right)}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial \left( e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{y,\vec{k}}(\vec{r}) \right)}{\partial y} + C_{12} \frac{\partial \left( e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{z,\vec{k}}(\vec{r}) \right)}{\partial z} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left( C_{44} \frac{\partial \left( e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{x,\vec{k}}(\vec{r}) \right)}{\partial y} + C_{44} \frac{\partial \left( e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{y,\vec{k}}(\vec{r}) \right)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( C_{44} \frac{\partial \left( e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{x,\vec{k}}(\vec{r}) \right)}{\partial z} + C_{44} \frac{\partial \left( e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{z,\vec{k}}(\vec{r}) \right)}{\partial x} \right) \\ -p\omega^2 \left( e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{y,\vec{k}}(\vec{r}) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( C_{44} \frac{\partial \left( e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{x,\vec{k}}(\vec{r}) \right)}{\partial y} + C_{44} \frac{\partial \left( e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{y,\vec{k}}(\vec{r}) \right)}{\partial x} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left( C_{12} \frac{\partial \left( e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{x,\vec{k}}(\vec{r}) \right)}{\partial x} + C_{11} \frac{\partial \left( e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{y,\vec{k}}(\vec{r}) \right)}{\partial y} + C_{12} \frac{\partial \left( e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{z,\vec{k}}(\vec{r}) \right)}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( C_{44} \frac{\partial \left( e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{y,\vec{k}}(\vec{r}) \right)}{\partial z} + C_{44} \frac{\partial \left( e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{z,\vec{k}}(\vec{r}) \right)}{\partial y} \right) \\ -p\omega^2 \left( e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{z,\vec{k}}(\vec{r}) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( C_{44} \frac{\partial \left( e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{x,\vec{k}}(\vec{r}) \right)}{\partial z} + C_{44} \frac{\partial \left( e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{z,\vec{k}}(\vec{r}) \right)}{\partial x} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left( C_{44} \frac{\partial \left( e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{y,\vec{k}}(\vec{r}) \right)}{\partial z} + C_{44} \frac{\partial \left( e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{z,\vec{k}}(\vec{r}) \right)}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( C_{12} \frac{\partial \left( e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{x,\vec{k}}(\vec{r}) \right)}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial \left( e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{y,\vec{k}}(\vec{r}) \right)}{\partial y} + C_{11} \frac{\partial \left( e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{z,\vec{k}}(\vec{r}) \right)}{\partial z} \right) \end{array} \right. \quad (\text{II.9})$$

Du fait de leur périodicité suivant les trois directions de l'espace, les fonctions constantes élastiques, densité du cristal et champ de déplacement  $u_{i\vec{k}}$  peuvent être décomposées dans la base en exponentielle de Fourier exprimée dans l'espace réciproque :

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} \rho_{\vec{G}} e^{i\vec{G}\vec{r}} \text{ et } c_{ij}(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} c_{ij,\vec{G}} e^{i\vec{G}\vec{r}} \text{ pour } (i, j) \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}^2. \quad (\text{II.10})$$

$$u_{i,\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} u_{i,\vec{k},\vec{G}} e^{i\vec{G}\vec{r}} \text{ pour } i \in \{x, y, z\} \text{ et donc } u_i(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} u_{i,\vec{k},\vec{G}} e^{i(\vec{G}+\vec{k})\vec{r}} \quad (\text{II.11})$$

Les expressions (II.10) et (II.11) sont reportées dans l'équation (II.9) pour obtenir finalement un problème matriciel en valeurs propres  $\omega^2$  de la forme :

$$\omega^2 A \vec{U}_G = B(\vec{k}) \vec{U}_G \quad (\text{II.12})$$

Les matrices  $A$  et  $B$  sont connues et dépendent des coefficients de Fourier, des constantes élastiques, de la densité et du vecteur d'onde  $\vec{k}$

### II.2.1.2. Formulation des conditions aux limites libres

L'exemple du CP tridimensionnel présenté dans la figure II.2 ne présente aucune frontière libre ou fixe. Nous avons exploité la périodicité de la structure dans les trois directions de l'espace pour introduire les conditions aux limites périodiques en utilisant le théorème de Bloch-Floquet. Si l'on est en présence d'une structure finie dans une direction donnée, les conditions aux limites libres s'imposent aux surfaces supérieures et inférieures dans cette direction, auquel cas il faut les définir et les ajouter au système d'équations (II.9).

La périodicité bidimensionnelle du cristal fait qu'on a un réseau réciproque à deux dimensions  $\vec{G} = (G_x, G_y)$ . Les conditions aux limites libres, définissant les contacts libres au niveau des surfaces supérieure et inférieure du CP, s'expriment par l'annulation des contraintes à ces surfaces. On a ainsi aux frontières  $z=0$  et  $z=e$  :

$$T \cdot \vec{e}_z = 0$$

$$\text{c'est-à-dire : } T_5|_{z=0,e} = T_4|_{z=0,e} = T_3|_{z=0,e} = 0$$

Dans le cas où les milieux du CP sont isotropes, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{12} \frac{\partial u_x}{\partial x} \Big|_{z=0,e} + c_{12} \frac{\partial u_y}{\partial y} \Big|_{z=0,e} + c_{11} \frac{\partial u_z}{\partial z} \Big|_{z=0,e} = 0 \\ c_{44} \frac{\partial u_y}{\partial z} \Big|_{z=0,e} + c_{44} \frac{\partial u_z}{\partial y} \Big|_{z=0,e} = 0 \\ c_{44} \frac{\partial u_x}{\partial z} \Big|_{z=0,e} + c_{44} \frac{\partial u_z}{\partial x} \Big|_{z=0,e} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.13})$$

Afin de résoudre ce système, le champ de déplacement est développé en série de Fourier suivant les deux directions de la périodicité de la structure :

$$u_i(\vec{r}) = \sum_{\vec{g}} e^{i(\vec{k}+\vec{g})\vec{r}} a_{\vec{g}}(z) \quad \text{avec} \quad \vec{k}(k_x, k_y)$$

Cette décomposition du champ de déplacement ainsi que celles des constantes élastiques et de la densité sont introduites dans les deux systèmes d'équations (II.9) et (II.12). Deux problèmes matriciels sont ainsi obtenus et doivent être résolus simultanément afin d'obtenir les modes  $\omega$  de Lamb pour les différentes valeurs du vecteur d'onde  $\vec{k}$

La méthode de résolution par PWE des problèmes faisant intervenir une surface de contact libre a été initialement introduite par Tanaka et Tamura [15] qui ont cherché les modes de surface pour un système phononique bidimensionnel semi-infini. Cette méthode a été ensuite utilisée pour étudier des problèmes similaires à présentant deux surfaces libres[45-44]. Par ailleurs, Hsu et Wu[43] ont proposé une autre méthode pour résoudre les problèmes des conditions aux limites, en combinant la théorie Mindlin de plaque et la PWE pour calculer les premières courbes de dispersion pour les ondes de Lamb. Finalement Laude et al [46] ont étudié les ondes de surfaces dans un CP piézoélectrique en appliquant les conditions aux limites mécaniques et électriques libres à la surface étudiée.

### II.2.1.3. Avantages et inconvénients de la méthode

Les décompositions de cette méthode sont des solutions exactes. La méthode est particulièrement bien adaptée au problème des solutions modales. Les problèmes de grande taille peuvent être résolus en utilisant des techniques itératives, comme la méthode du gradient conjugué.

Que ce soit pour le problème aux valeurs propres normal ou généralisé, un petit nombre seulement d'indices de bande dans le diagramme est nécessaire, reposant souvent sur les côtés de la zone de Brillouin. Ceci correspond aux solutions des modes propres en utilisant

des techniques itératives et non à la diagonalisation de toute la matrice.

Il arrive que de faux modes apparaissent. Les problèmes de grande taille s'exécutent en, la méthode PWE est assez consommatrice à la fois de temps et d'espace mémoire. Parmi les alternatives figurent la méthode spectrale et les méthodes utilisant FDTD qui sont plus simples et plus indépendants du modèle.

### **II.2.2. METHODE DES DIFFERENCES FINIES DANS LE DOMAINE TEMPOREL (FDTD)**

Durant ces dernières décennies, les scientifiques ont développé une méthode numérique permettant la résolution de problèmes physiques dans le temps basée sur les différences finies (appelée souvent par son acronyme FDTD).

La FDTD a été mise en place dans les années soixante pour étudier les phénomènes régis par des équations différentielles impliquant le temps. Elle permet de suivre l'évolution des événements physiques depuis l'instant initial jusqu'à l'état permanent en passant par le régime transitoire. Il n'y a donc pas d'inversion de matrice ou de recherche de valeurs propres comme dans le cas de la PWE. De plus, l'approche temporelle qu'offre la FDTD la rend adaptée même aux phénomènes non linéaires et non stationnaires.

Offrant davantage de facilité dans sa compréhension et dans l'écriture de son algorithme, la FDTD est largement utilisée dans les études relatives à la mécanique des matériaux ainsi qu'à la propagation des ondes. Dans le domaine de la phononique, elle se rapproche plus de la réalité car elle offre la possibilité de générer une excitation (source) dans un CP et de suivre dans le temps le comportement de l'onde et son interaction avec le CP, ce qui permet d'y étudier sa transmission. Ainsi, elle a été appliquée en 2000 par Sigalas et Garcia pour déterminer le coefficient de transmission dans une structure phononique tridimensionnelle.

Ils ont montré qu'en plus de ses résultats concordant parfaitement avec ceux de la PWE dans la détermination des bandes interdites, la FDTD dépasse les limites de la PWE car elle permet l'étude de systèmes phononiques impliquant des éléments fluides (où la vitesse transverse est nulle) dans une matrice solide. La FDTD a de surcroît montré son efficacité pour différents types de systèmes périodiques solide-solide, solide-liquide et solide-vide [3].

En plus du calcul du coefficient de transmission, Myashita et Inoue [47] se sont intéressés au guidage d'ondes élastiques dans un cristal sonore fini. Ils ont ainsi construit une

structure artificielle finie et ont montré l'efficacité de la FDTD dans l'analyse de propagation d'ondes élastiques dans ce type de système. D'autres études de transmission, de confinement d'ondes et de guidage ont pu être réalisées par la suite en recourant à la FDTD. On peut citer par exemple les travaux de Khelif et al[48,49] et ceux de Pennec et al[50] sur des structures phononiques présentant des défauts avec des guides d'ondes simples et coudés, ou ayant des défauts de cavité pour des systèmes infinis à inclusions cylindriques périodiques. Heisch et al[44] ont pu FDTD pour le calcul de structures de bandes, donnant des résultats qui concordent avec ceux de la PWE. De leur côté, Sun et al [51] se sont intéressés au guidage des ondes acoustiques de surface dans un CP bidimensionnel en utilisant des milieux absorbants appelées PML (Perfectly Matched Layer). Nous aurons l'occasion de revenir sur les propriétés de ce type de milieux par la suite.

### **II.2.2.1. Principe de la méthode FDTD**

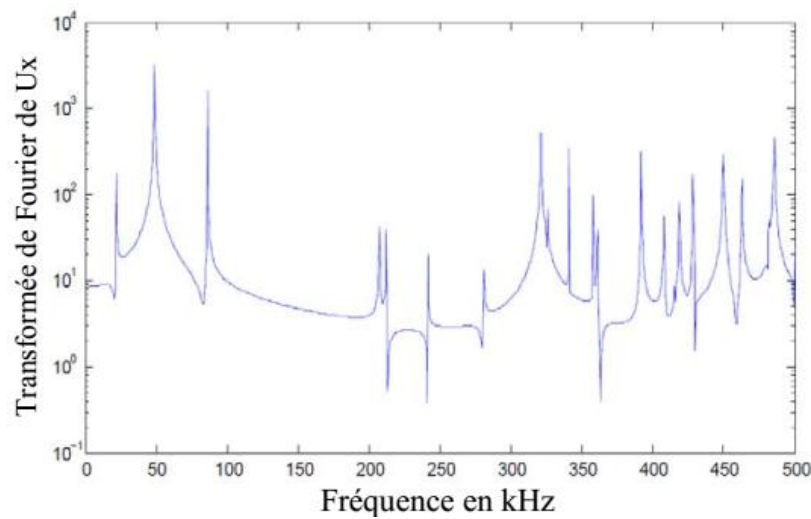
A partir des équations de mouvement qui régissent la propagation des ondes acoustique dans un milieu élastique quelconque, la FDTD permet de rapprocher les solutions champ de déplacement et contraintes en se basant sur un développement en différences finies des dérivées partielles qui interviennent dans les équations en question. Ces différences finies reposent sur une discrétisation dans l'espace (pour les dérivées spatiales) et une autre temporelle (relative aux dérivées temporelles), lesquelles discrétisations doivent être bien choisies afin d'assurer la convergence des fonctions inconnues recherchées.

### **II.2.2.2. Application de FDTD pour le calcul des bandes**

La première étape dans la résolution des équations de mouvement consiste à isoler une cellule de périodicité de la structure phononique en appliquant la condition périodique de Bloch, introduite en FDTD par Hsieh et al [48]. Si le calcul de structure de bandes dans la PWE et la FEM se ramène à la résolution d'un problème matriciel de recherche de valeurs propres, l'approche adoptée dans la FDTD est bien différente.

En effet, dans le calcul des courbes de dispersion par la FDTD, les modes de vibration de la structure phononique sont déterminés pour chaque valeur de  $k$ . Pour se faire, une source d'excitation à large bande fréquentielle est introduite à un endroit de la cellule. Une onde acoustique est ainsi générée par cette source et se propage dans la cellule unité en conformément aux conditions de Bloch. Après plusieurs itérations temporelles, les modes de vibration de la cellule apparaissent. En relevant les valeurs du champ de déplacement en

fonction du temps sur un point de la cellule, les modes peuvent être obtenus à partir des pics de résonance du spectre du champ de déplacement. La figure II.3 montre un exemple de spectre de champ de déplacement pour une structure phononique bidimensionnelle infinie, avec des pics de modes longitudinaux, calculé par transformée de Fourier. Les valeurs des fréquences des pics sont ainsi relevées pour chaque valeur du vecteur d'onde, ce qui permet de déterminer la structure de bandes du CP [3].

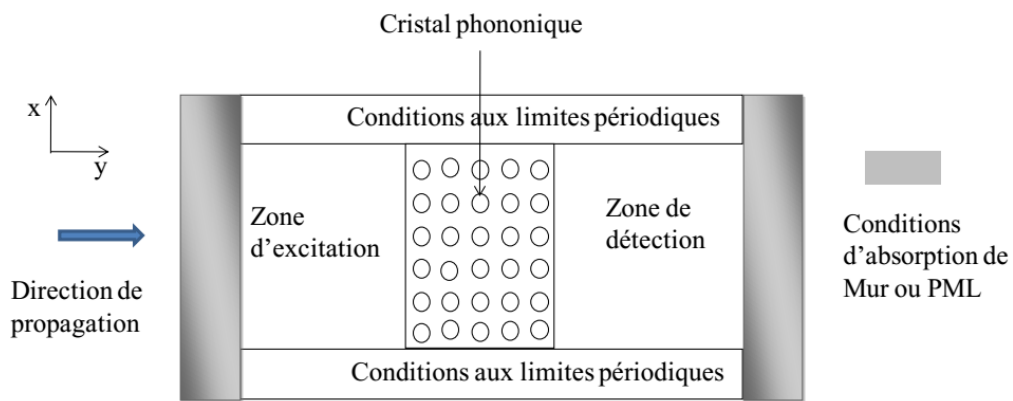


**Figure II.3 :** Exemple de spectre de transmission dans un cristal phononique bidimensionnel pour un vecteur d'onde fixé [3].

### II.2.2.3. Calcul du coefficient de réflexion et de transmission

Pour déterminer l'ensemble des matrices de réflexion et transmission sur chacune des faces d'entrée et de sortie d'une rangée, il est nécessaire d'explicitier les formes des différents potentiels pour chaque cas (acoustique, entropique et tourbillonnaire). Dans un premier temps, ces trois potentiels sont écrits en fonction des coefficients de réflexion et transmission constituant les 18 matrices décrites précédemment. Une seconde formulation où les potentiels sont exprimés en fonction des champs diffusés et incidents autour d'un cylindre de la rangée est ensuite proposée. Une identification entre ces deux formulations conduit à l'expression exacte des coefficients de réflexion et transmission recherchés. Le problème est traité parallèlement pour les trois potentiels mis en jeu.

Pour calculer le coefficient de transmission, on commence d'abord par choisir une direction de propagation qui définira l'arrangement des cylindres vus par l'onde élastique afin d'étudier sa transmission dans cette direction. Ensuite, une rangée de cylindres suffisamment nombreux est choisie afin d'avoir une bonne interaction entre l'onde et la structure. A tout cela, les conditions aux limites périodiques sont ajoutées sur les frontières dont la normale est perpendiculaire à la direction de propagation. Des domaines absorbants (PML) sont aussi joints aux frontières perpendiculaires à la direction de propagation afin d'éliminer les phénomènes de réflexion de l'onde sur les bords (figure II.6).



**Figure II.4 :** Schéma d'un cristal phononique fini à deux dimensions pour le calcul des courbes de coefficients de transmission[3].

#### II.2.2.4. Conditions aux limites PML (Perfectly Matched Layer)

En simulation numérique, les domaines conçus ne peuvent pas être infinis, donc, il est nécessaire de placer des couches absorbantes aux frontières du domaine étudié PML (**Perfectly Matched Layer**). L'objectif est de pouvoir empêcher l'onde de se réfléchir au niveau de ces frontières. Les ondes passent ainsi l'interface entre le domaine Non PML et le domaine PML et sont absorbées au niveau de ce dernier [3].

#### II.2.2.5. Avantages et limitations de la méthode FDTD

D'opérations arithmétiques mises en œuvre à chaque itération est faible. Elle met en jeu, des concepts et des outils de résolutions élémentaires, cette méthode permet de :

- Obtenir en une seule simulation des informations temporelles et spectrales sur une structure.
- Offrir la possibilité d'obtenir la distribution du champ à différents temps.
- Modéliser des structures aux géométries complexes dont les matériaux peuvent être anisotropes ou inhomogènes.

La méthode FDTD nécessite l'utilisation d'une grille cartésienne ; cela entraîne des difficultés pour faire des La méthode FDTD est relativement simple à mettre en œuvre et rapide puisque le nombre raffinements locaux. En particulier, les géométries courbées doivent être approchées par des courbes en escalier.

La FDTD possède des limitations telles que:

- Le schéma de Yee impose une discrétisation en mailles régulières.
- Il faut des longueurs d'arêtes entre  $\lambda /16$  et  $\lambda /20$  pour avoir la convergence en maillage.
- Il est difficile de prendre en compte des matériaux dispersifs.

Les conditions aux limites approchées introduisent une approximation qui peut avoir une influence sur la précision du calcul.

- La FDTD étant un schéma explicite, le pas temporel maximal est relié au pas spatial par une condition de stabilité.

- Le pas de maillage et par conséquent le pas sur le temps sont liés à la plus petite longueur d'onde  $\lambda$  considérée. Un maillage typique aura au moins 10 mailles par longueur d'onde pour garantir une précision acceptable sur la solution. Donc, pour traiter un objet de taille  $100\lambda$ , il faudra un maillage  $1000 \times 1000 \times 1000$ , soit 6 milliards d'inconnues scalaires, d'où un coût mémoire très important sur de gros maillages.

Le principal inconvénient de la FDTD est qu'elle nécessite de longs temps de calculs et un espace mémoire important, en particulier pour les calculs 3D [3].

### II.2.3. METHODE DES ELEMENTS FINIS

La méthode des éléments finis (**FEM**) est une méthode numérique adaptée à la résolution des équations aux dérivées partielles, elle est basée sur la description géométrique de la structure sous forme d'un maillage.

Dans le cadre de ce modèle, le cristal phononique est considéré comme un arrangement périodique infini dans les directions X et Y. Le domaine est ensuite fragmenté en cellules élémentaires indexées par la paire d'entiers  $(m, p)$ , chacune étant composée d'un trou unique entouré du matériau constitutif de la matrice. Cette cellule élémentaire est ensuite divisée en éléments connectés par des nœuds. On excite alors la structure complète avec une onde plane, caractérisée par un vecteur d'onde réel  $k$  [2]. La méthode des éléments finis est capable de simuler des structures phononiques de dimension finie ou infinie avec ou sans défauts. Cette méthode a connu un développement prodigieux mais elle nécessite de grands espaces .

Dans toutes ces études, la FEM a montré son efficacité en termes de convergence et de temps de calcul, comparée à la PWE, notamment dans le cas des plaques finies.

#### II.2.4. METHODE DE DIFFUSION MULTIPLE

La méthode de diffusion multiple (**MSM**) découla de la méthode Koring- KohnRostoker (**KKR**), développée initialement pour le calcul de la structure électronique des solides. Le succès de cette méthode réside dans le calcul des structures de bandes électroniques et électromagnétiques. Son application a été étendue à des problèmes acoustiques ou élastiques, pour calculer les structures de bande phononique. Elle est également susceptible de calculer la transmission de ces ondes dans les matériaux composites à structure périodiques et aléatoires ; ce qui n'est pas le cas pour la méthode de développement en ondes planes, alors que la MSM semble être numériquement efficace.

Dans un système périodique ou aléatoire formé de tiges (diffuseurs), par exemple, parallèles à une direction donnée, de section quelconque (circulaire, carré, rectangulaire, elliptique...) insérées dans une matrice, l'onde incidente sur chaque diffuseur est la somme des ondes diffusées par tous les autres diffuseurs. D'où l'appellation diffusion multiple. Dans ce qui suit nous détaillons la méthode sur laquelle s'appuiera ce travail, éventuellement la méthode de développement en ondes planes (**PWE**) [3].

### CONCLUSION

Les méthodes PWE, MSM, FEM, FDTD sont devenues des outils incontournables pour simuler le comportement mécanique des structures à cristaux phononiques lors d'une propagation d'onde acoustique dans un milieu élastique. Ainsi, à partir des équations de mouvement élastique, elles ont permis aux chercheurs d'accéder aux calculs des courbes de dispersion de ces systèmes ainsi que leurs coefficients de transmission d'onde acoustique / élastique. Chacune de ces méthodes numériques, ayant une formulation différente, présente des avantages et des inconvénients, et est plus ou moins adaptée à l'étude de tel ou tel autre système. Ainsi, le choix de la méthode de calcul se base essentiellement sur son degré de complexité et d'adéquation avec le système étudié, et dépend du comportement physique que l'on envisage d'observer, des objectifs fixés, et enfin des moyens de calculs.

## **CHAPITRE III**

---

### **RESULTATS DE SIMULATION ET DISCUSSIONS**

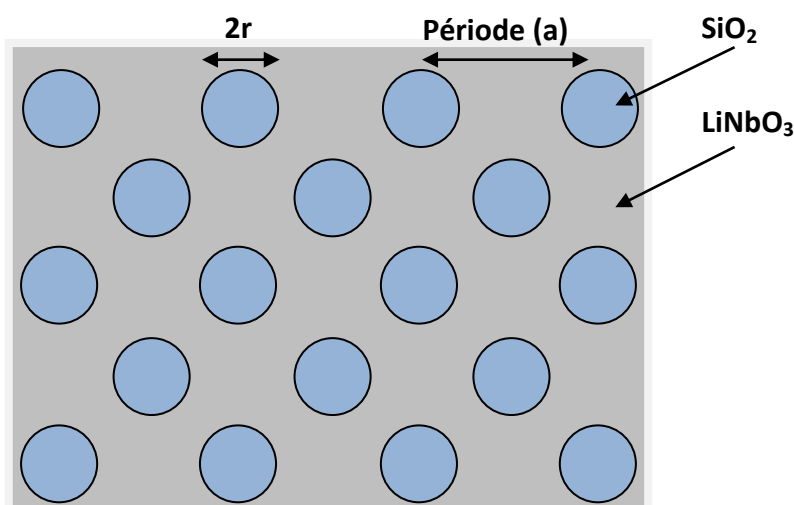
---

## INTRODUCTION

Au cours de ce chapitre on va étudier les variations de la bande interdite phononique d'un cristal bidimensionnel d'une structure dite non connectée (composé à partir des inclusions de  $\text{SiO}_2$  plongés dans  $\text{LiNbO}_3$ ) à réseau triangulaire et une seconde structure dite connectée composée des inclusions de  $\text{LiNbO}_3$  plongées dans le  $\text{SiO}_2$ ). Nous avons utilisé un code en matlab afin de comprendre les conditions d'ouverture des bandes interdites phononiques ainsi que leurs variations en fonction des paramètres physiques (la masse volumique et la vitesse de propagation) et les paramètres géométriques tels que : le coté des inclusions de matériau « D » et la période du réseau carré « a » et le facteur de remplissage.

### III.1. CAS D'UN CRISTAL PHONONIQUE-2D A BASE DE $\text{SiO}_2/\text{LiNbO}_3$

Dans cette section, la structure considérée est un cristal phononique bidimensionnels à réseau triangulaire, composée de cylindres de  $\text{SiO}_2$  plongés dans une matrice de  $\text{LiNbO}_3$ . La figure III.1 montre le schéma de la structure considérée. Dans cette structure, le rayon des inclusions est  $r = 2.0$  mm et la période du réseau (le paramètre de maille) est égal à  $6.0$  mm.



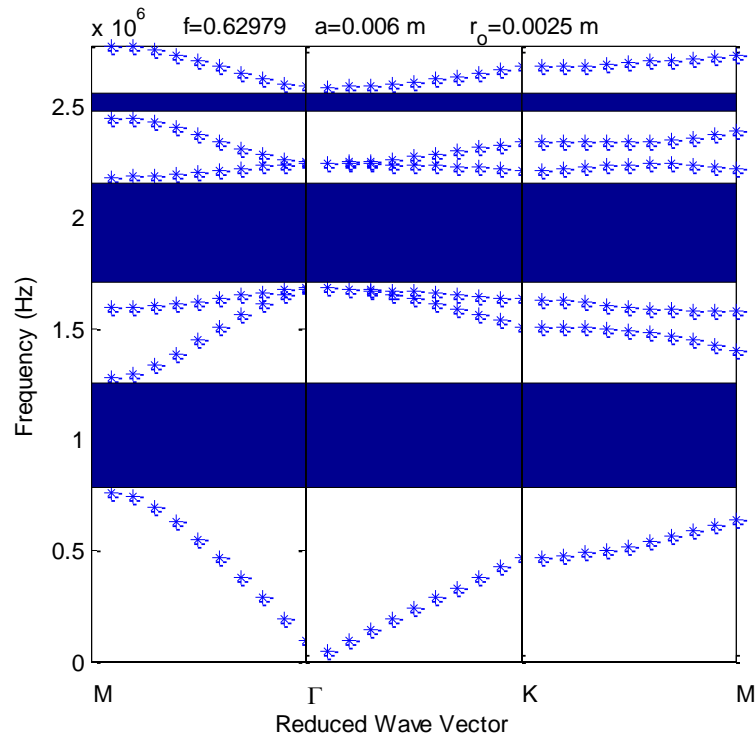
**Figure III.1:** Cristal phononique bidimensionnels constitué d'inclusions de  $\text{SiO}_2$  plongées dans la matrice de  $\text{LiNbO}_3$  disposés en réseau périodique triangulaire.

Les constantes d'élasticité de la matrice et des inclusions constituant le cristal phononique sont illustrées par le tableau III.1

Matériau/constante	LiNbO <sub>3</sub>	SiO <sub>2</sub>
Masse volumique (Kg/m <sup>3</sup> )	4674	2600
Vitesse longitudinale (m/s)	6574	5840
Vitesse transversale (m/s)	4030	3370

**Tableau III.1 :** Constantes élastiques des matériaux utilisés

En utilisant un code de la méthode des ondes planes PWE écrit en Matlab, nous avons obtenu le diagramme de bandes illustré sur la figure III.2. D'après ce diagramme, il est clair que le cristal phononique 2D considéré présente trois bandes interdites dans la gamme des fréquences d'ultrasons; la première située entre 0.7593 et 1.2839 Mhz, la seconde entre 1.6863 et 2.1912 Mhz et la troisième bande s'étende entre 2.4563 et 2.6003 Mhz.



**Figure III.2:** Diagramme de bandes dans le cas d'un cristal phononique bidimensionnels à réseau triangulaire SiO<sub>2</sub>/LiNbO<sub>3</sub>

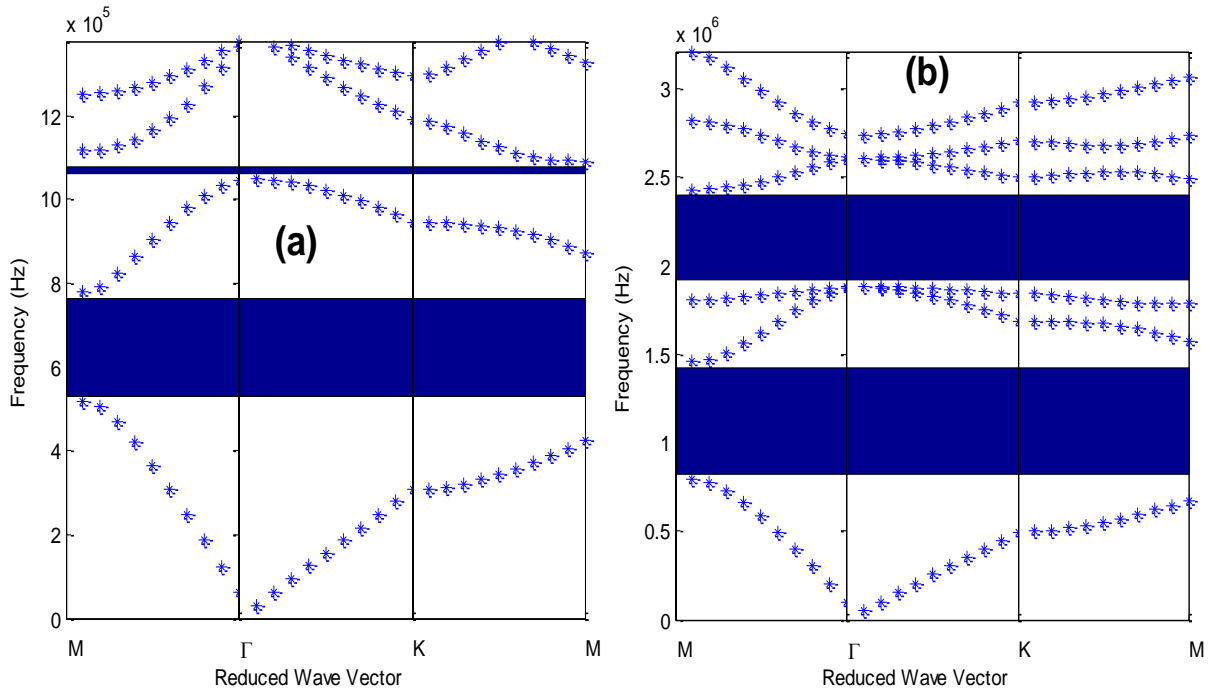
### III.1.1. EFFET DES PARAMETRES GEOMETRIQUES

Avant de passer à une application, il est nécessaire d'étudier l'effet des paramètres géométriques et physiques sur les variations de la bande interdite phononique. Dans ce qui

suit on va étudier l'effet du rayon des inclusions de  $\text{SiO}_2$  « r » et l'influence de la période du réseau « a » sur les caractéristiques des bandes ouvertes.

### a. Influence de la période du réseau

Pour étudier l'influence de la période « a » sur la bande interdite photonique, nous avons fixé le diamètre des inclusions de  $\text{SiO}_2$  ( $r=2.0$  mm) de la structure considérée, puis on fait varier la période tout en gardant les mêmes valeurs des paramètres élastiques pour les deux matériaux du cristal phononique. La figure III. 3 donne le diagramme de bande pour deux valeurs de la période  $a=12.00$  mm et  $a=5.7$  mm.



**Figure III.3:** Diagramme de bandes dans le cas d'un cristal phononique 2D :

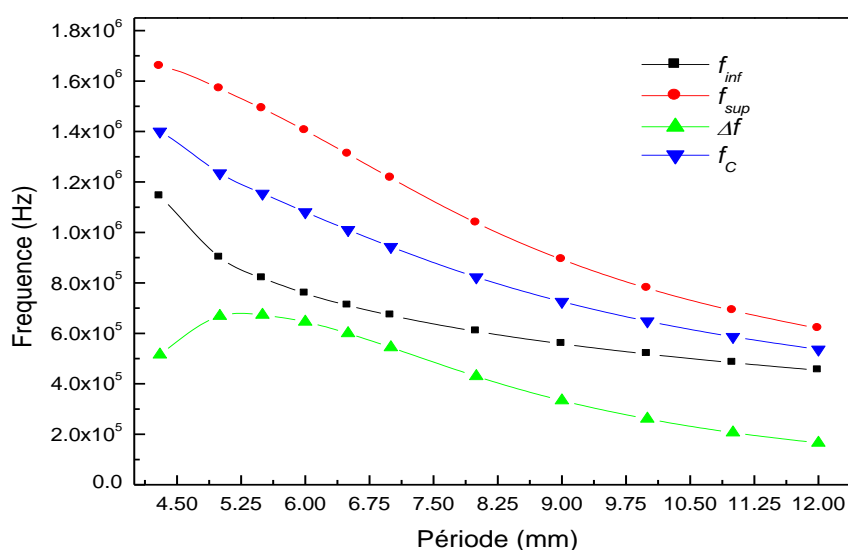
(a) Pour  $a= 12.00$  mm, (b) Pour  $a=5.70$  mm.

Les calculs de la fréquence inférieure, supérieure, centrale et la largeur de la première bande interdite sont donnés dans le tableau III.2.

Période en (mm)	$f_{inf}$ (HZ)	$f_{sup}$ (HZ)	$\Delta f$ (HZ)	$f_c$ (HZ)
4.3	1.1427E6	1.65807E6	515366.2654	1.40039E6
5	900587.0168	1.56918E6	668593.3645	1.23488E6
5.5	818193.7043	1.4908E6	667609.2315	1.1545E6
6	758098.5523	1.40355E6	645456.275	1.08083E6
6.5	710587.7399	1.31025E6	599662.5359	1.01042E6
7	671154.1266	1.21514E6	543988.6647	943148.4589
8	608063.5657	1.03766E6	429597.6776	822862.4045
9	558540.9417	892354.7841	333813.8424	725447.8629
10	517889.5552	778856.1189	260966.5637	648372.837
11	483418.6613	690074.9654	206656.3041	586746.8133
12	453560.7244	619445.751	165885.0267	536503.2377

**Tableau III.2:** Influence de la période du réseau « a » sur les propriétés des bandes phononiques ouvertes

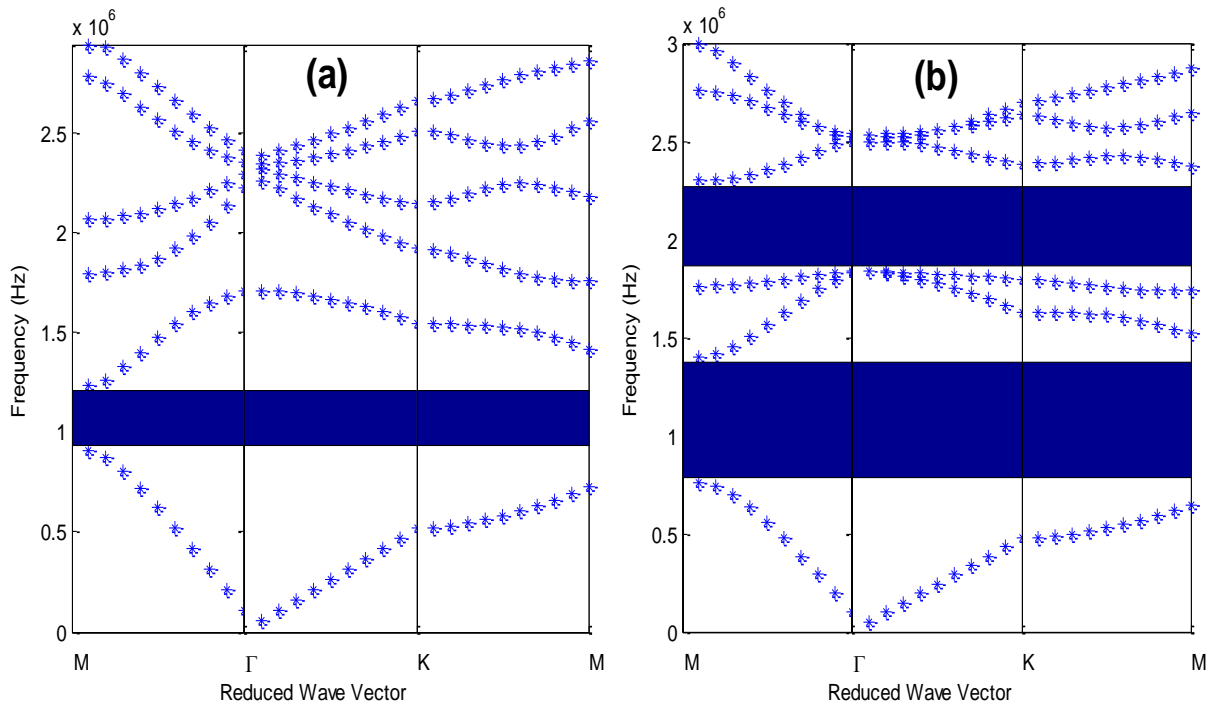
Sur la figure III.4, nous avons présenté les variations de la largeur, la fréquence inférieure, la limite supérieure et la fréquence centrale de la première bande interdite. D'après les courbes de la figure III.4 on peut constater que plus la période augmente, la largeur, la limite supérieure, la limite inférieure et la fréquence centrale sont inversement proportionnels avec la période.



**Figure III.4:** Variations des propriétés des bandes phononiques en fonction de la période du réseau « a »

### b. Influence du rayon des inclusions

Pour voir l'influence du paramètre « r » sur les caractéristiques des bandes phononiques ouvertes, on va fixer d'abord la période du réseau à la valeur  $a=6.00$  mm. Ensuite, on va changer le rayon r des inclusions. Puis, en utilisant le même code concernant la méthode des ondes planes PWE après modification, nous avons calculé les bandes interdites ouvertes pour chaque valeur du rayon r. Sur la figure III.5, nous avons illustré le diagramme des bandes pour deux valeurs du rayon  $r=1.00$  mm et  $r=2.00$  mm.



**Figure III.5:** Diagramme de bandes dans le cas d'un cristal phononique 2D :

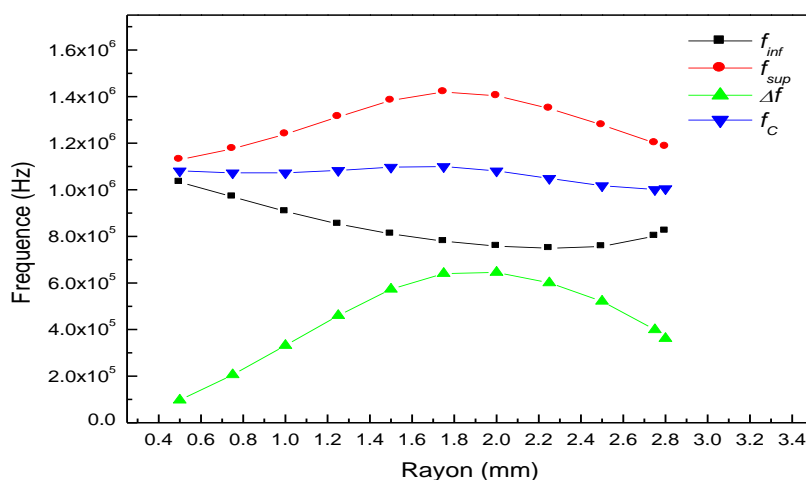
(a) Pour  $r= 1.00$  mm, (b) Pour  $r= 2.00$  mm

Le tableau III.3, représente les propriétés de la première bande interdite ouverte ainsi que la fréquence centrale de la structure étudiée.

Rayon (mm)	$f_{inf}$ (HZ)	$f_{sup}$ (HZ)	$\Delta f$ (HZ)	$f_c$ (HZ)
0.5	1032542.82	1129556.81	97013.9913	1081049.81
0.75	970161.72	1175892.36	205730.637	1073027.04
1	907121.449	1238891.5	331770.053	1073006.48
1.25	853259.48	1313401.44	460141.963	1083330.46
1.5	810751.421	1383548.32	572796.903	1097149.87
1.75	779139.839	1419674.63	640534.796	1099407.24
2	758098.552	1403554.83	645456.275	1080826.69
2.25	748881.695	1349359.78	600478.089	1049120.74
2.5	756766.041	1277969.29	521203.246	1017367.66
2.75	801700.081	1200922.31	399222.229	1001311.2
2.8	823613.128	1185400.61	361787.482	1004506.87

**Tableau III.3:** Influence du rayon des inclusions «r» sur les propriétés des bandes phononiques ouvertes

Sur la figure III.6, nous avons reporté les résultats obtenus concernant la variation de la largeur et la position de la première bande en fonction du diamètre des inclusions pour différentes valeurs du rayon. Il est clair que les bandes ouvertes se déplacent vers les fréquences supérieures. Par contre, la largeur des bandes est inversement proportionnelle au rayon des inclusions. Alors que la largeur de la bande augmente jusqu'à une valeur limite puis diminue.



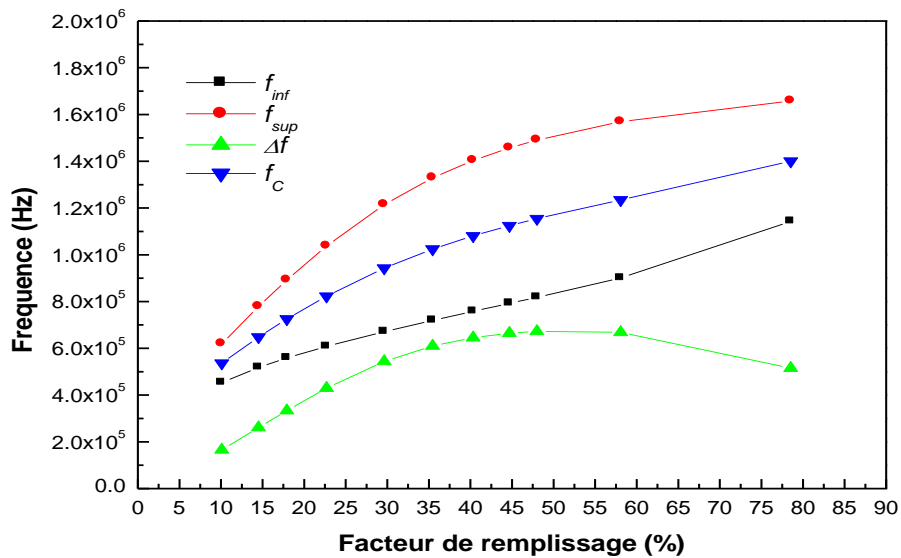
**Figure III.6:** Variations des propriétés des bandes phononiques en fonction du rayon « r » des inclusions de surface circulaire

### c. Influence du facteur de remplissage

En pratique, il est préférable de travailler avec le facteur de remplissage au lieu des paramètres géométriques individuellement. Cependant, pour une structure donnée, on peut définir un facteur de remplissage comme étant le rapport entre la surface occupée par l'inclusion sur la surface de la cellule élémentaire. Ce facteur de remplissage pour une structure triangulaire est donné par :

$$ff = \frac{\pi * r^2}{\frac{\sqrt{3}}{2} * a^2}$$

La figure III.7, représente les variations des bandes ouvertes en fonction du facteur de remplissage pour la structure considérée. D'après les résultats obtenus, on peut constater que l'ouverture des bandes interdites phononiques est réalisée pour des facteurs de remplissages compris entre 010% et 80%.



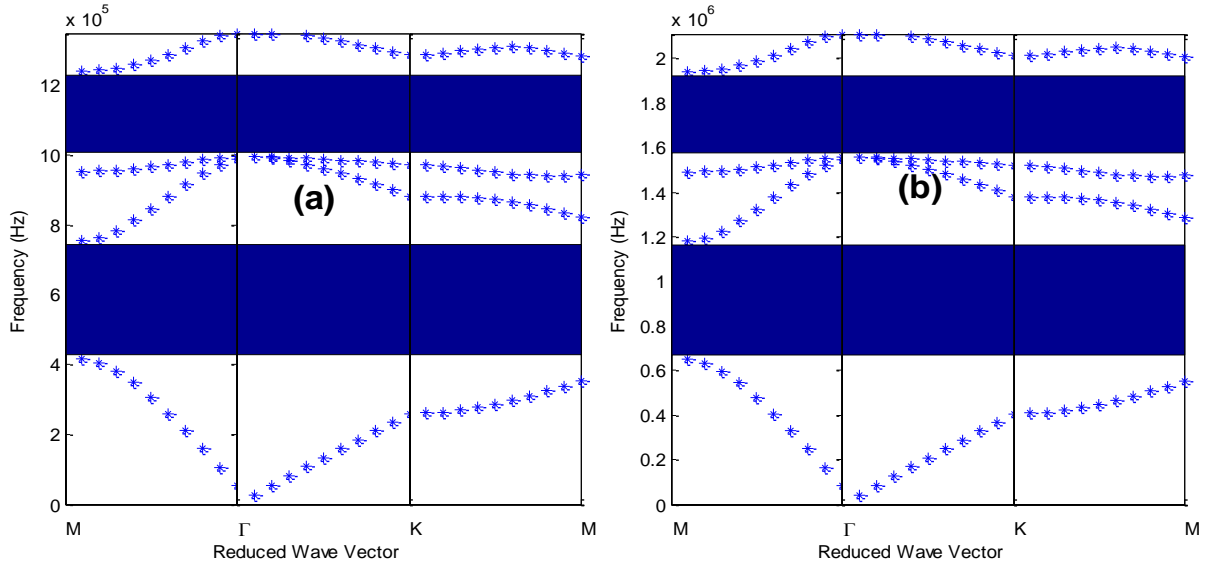
**Figure III.7:** Variations de la largeur de la bande phononique ouverte en fonction du facteur de remplissage.

## III.1.2. EFFET DES PARAMETRES PHYSIQUES

### a. Influence de la vitesse de propagation

Pour étudier l'influence du contraste dans la vitesse de propagation des ondes acoustiques dans le cristal phononique 2D, il est nécessaire de fixer tout d'abord les autres paramètres géométriques ( $r=2.00$  mm,  $a=6.00$  mm) et physiques (la densité et le module de young).

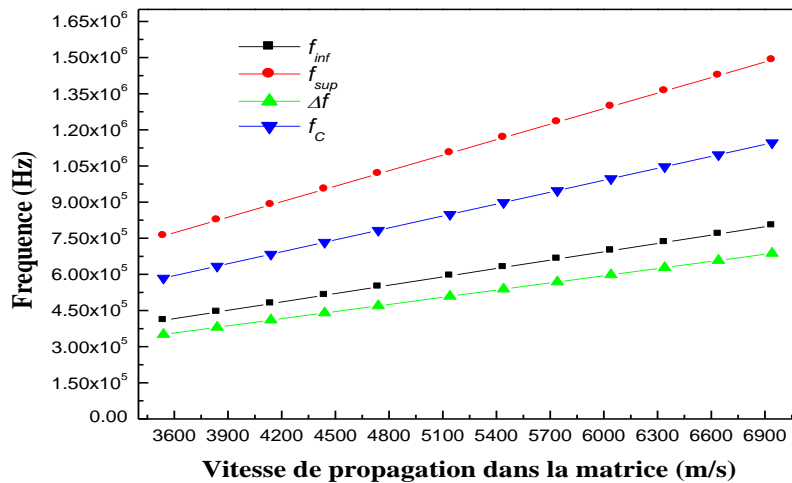
Ensuite, nous avons simulé le diagramme de bande pour différentes vitesses de propagation longitudinale  $V_L$  (m/s) dans la matrice. La figure III.8 donne le diagramme de bande pour deux vitesses longitudinales 3540 m/s et 5540 m/s.



**Figure III.8:** Diagramme de bandes dans le cas d'un cristal phononique 2D

(a) Pour  $V_L = 3540$  m/s (b) Pour  $V_L = 5540$  m/s

Sur la figure III.9, nous avons reporté les variations de la bande interdite phononique en fonction de la vitesse de propagation longitudinale. Ces résultats sont obtenus en modifiant le même code en Matlab de la méthode des ondes planes PWE. D'après les courbes, on peut conclure que plus la vitesse de propagation augmente, les fréquences limites supérieures, inférieures et la fréquence centrale ainsi que la largeur augmentent.

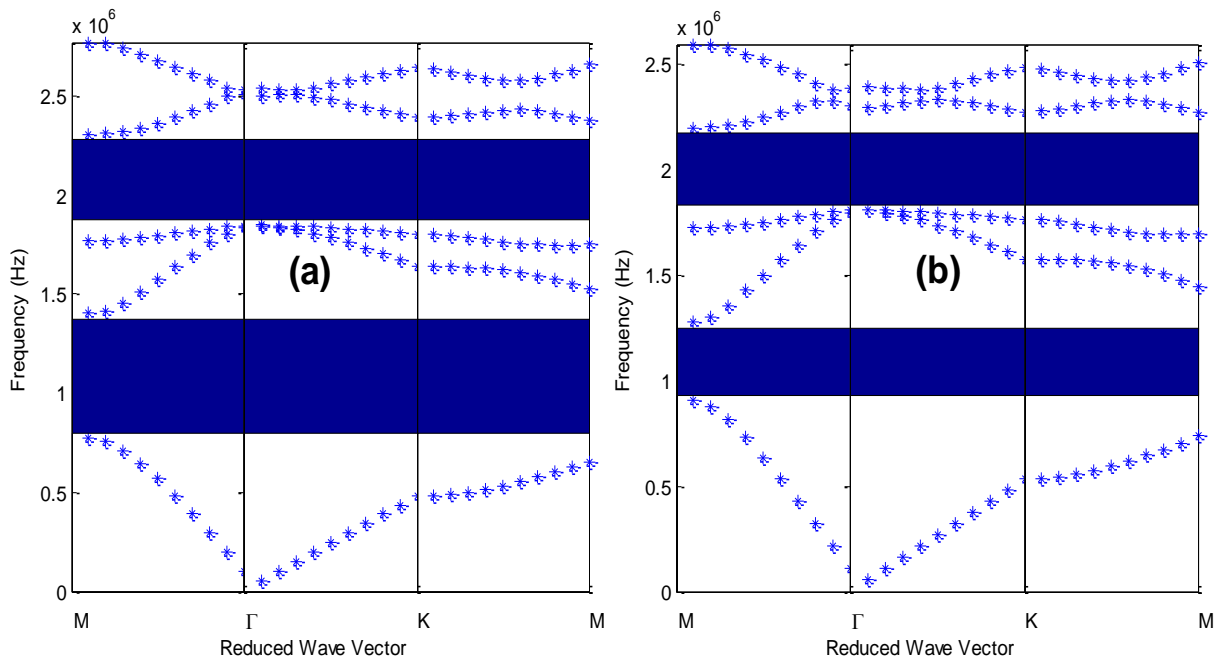


**Figure III.9 :** Variations des propriétés des bandes phononiques en fonction de la vitesse de propagation longitudinale

### b. Influence de la masse volumique

Le contraste dans la masse volumique entre les inclusions et la matrice est défini par le rapport ( $\rho_{\text{inclusion}} / \rho_{\text{matrice}}$ ) ou par ( $\rho_{\text{inclusion}} - \rho_{\text{matrice}}$ ). Dans cette section, on va étudier l'influence de ce paramètre sur les propriétés des bandes ouvertes. Pour cela, les autres caractéristiques géométriques ( $a=6.0$  mm et le rayon  $r=2.0$  mm) et physiques sont fixées. Ensuite, et en utilisant le même code pour différentes matrices nous avons obtenus les résultats ci-dessous.

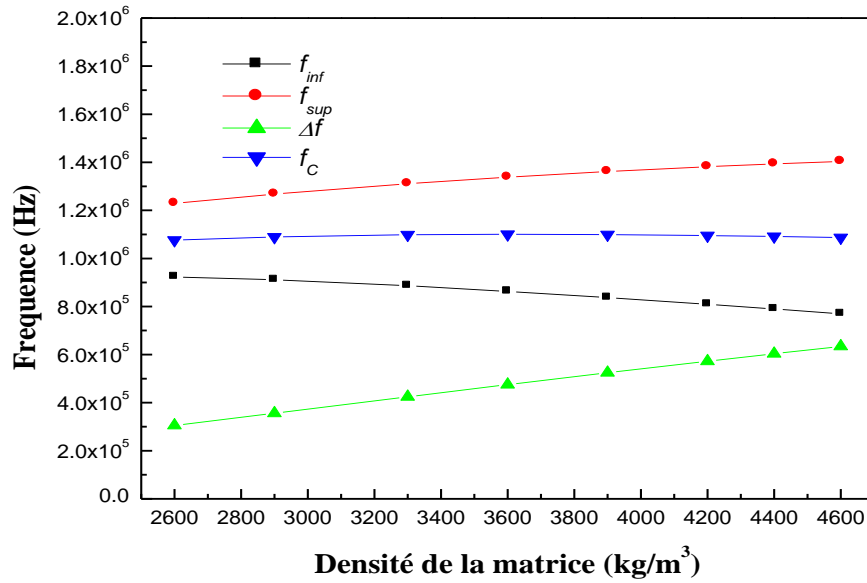
Les figures III.10 (a) et (b) sont obtenues pour deux contrastes  $\Delta\rho=2000$   $\text{kg/m}^3$  et  $400$   $\text{kg/m}^3$  respectivement.



**Figure III.10:** Diagramme de bandes dans le cas d'un cristal phononique 2D :

(a) Pour  $\Delta\rho= 2000$   $\text{Kg/m}^3$  (b) Pour  $\Delta\rho= 400$   $\text{Kg/m}^3$

La figure III.11 illustre les propriétés de la bande phononique ouverte en fonction de la densité de la matrice ( $\text{LiNbO}_3$ ). D'après les résultats obtenus, il est clair que le contraste joue un rôle important sur les propriétés de la bande ouverte (la fréquence inférieure, fréquence supérieure, largeur de la bande et la fréquence centrale).

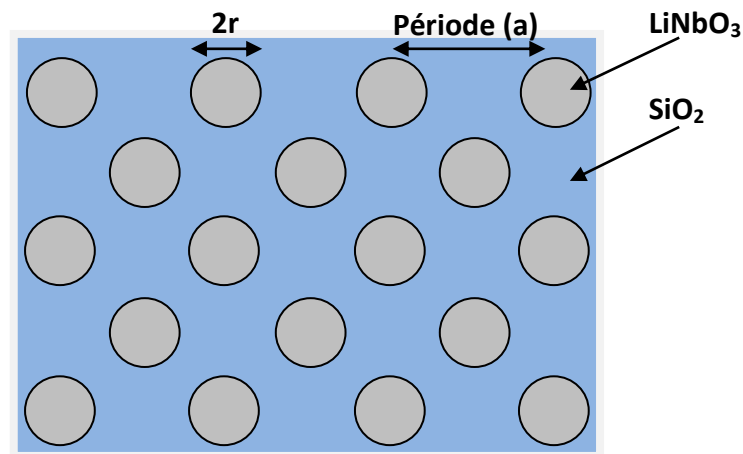


**Figure III.11 :** Variations des propriétés des bandes phononiques en fonction de la densité de la matrice

### III.2. CAS D'UN CRISTAL PHONONIQUE-2D A BASE DE $\text{LiNbO}_3/\text{SiO}_2$

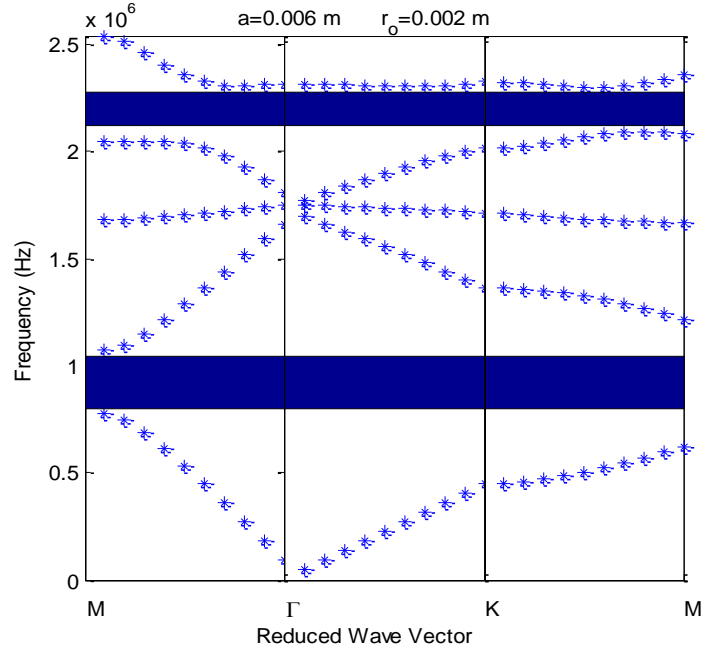
Dans cette section, on va étudier un cristal phononique bidimensionnels à réseau triangulaire formé par des inclusions de  $\text{LiNbO}_3$  plongées dans une matrice de  $\text{SiO}_2$  comme il est représenté sur la figure III.12.

Dans la structure considérée, le rayon des inclusions est  $r = 2.00$  mm, la période du réseau (le paramètre de maille) est  $a = 6.00$  mm.



**Figure III.12 :** Cristal phononique bidimensionnels constitué d'inclusions  $\text{LiNbO}_3$  plongées dans la matrice de  $\text{SiO}_2$  disposés en réseau périodique triangulaire.

En utilisant un code en Matlab de la méthode des ondes planes PWE, nous avons obtenu le diagramme de bandes illustré sur la figure III.13.

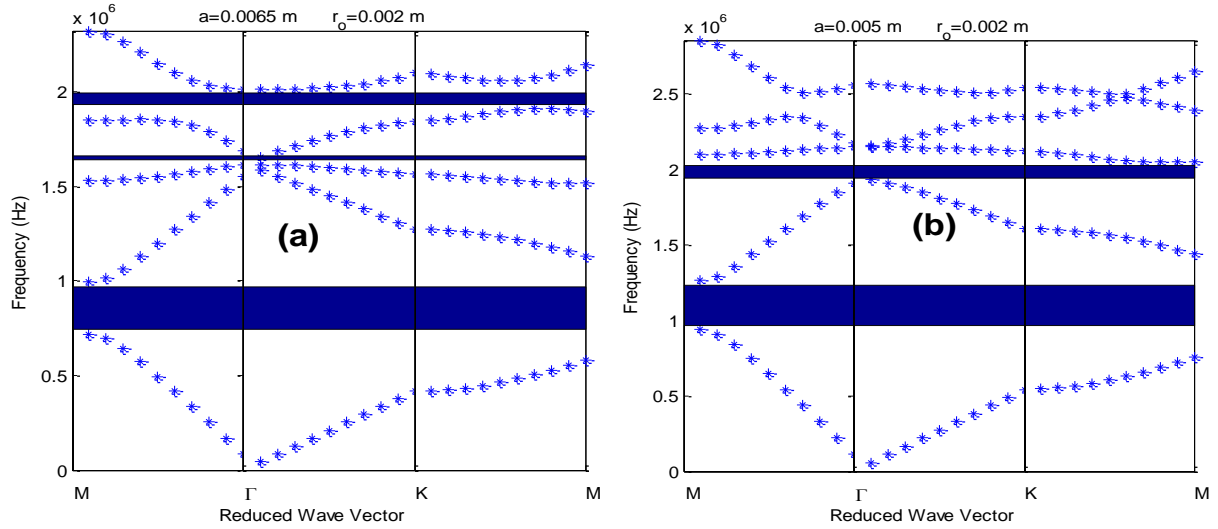


**Figure III.13:** Diagramme de bandes dans le cas d'un cristal phononique bidimensionnels à réseau triangulaire  $\text{LiNbO}_3/\text{SiO}_2$

### III.2.1. EFFET DES PARAMETRES GEOMETRIQUES

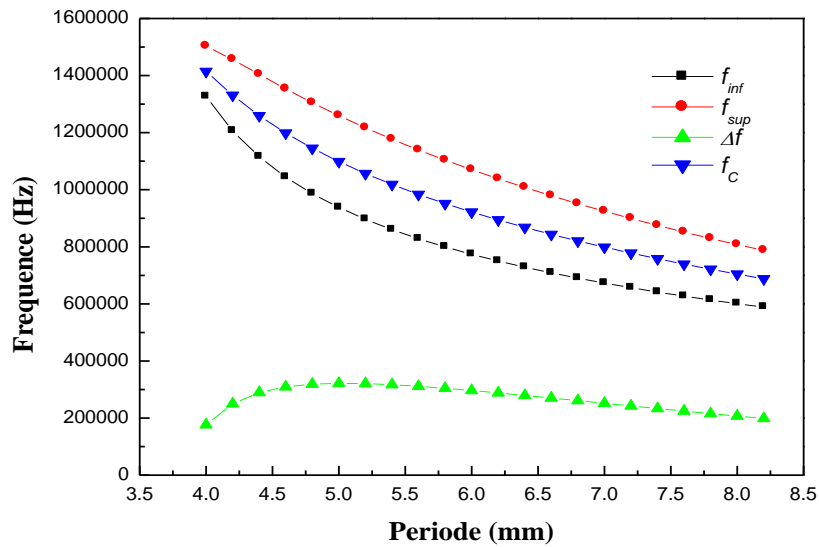
#### a. Influence de la période du réseau

Pour étudier l'influence de la période « a » sur la bande interdite phononique, nous avons considérés la structure décrite précédemment où le rayon des inclusions de  $\text{LiNbO}_3$  est  $r = 2.00$  mm puis on fait varier la période tout en gardant les mêmes valeurs des paramètres élastiques pour les deux matériaux du cristal phononique  $\text{LiNbO}_3/\text{SiO}_2$ . Les figures III.14 (a) et (b) donnent le diagramme de bande pour  $a = 6.5$  mm et  $a = 5$  mm respectivement.



**Figure III.14:** Diagramme de bandes dans le cas d'un cristal phononique 2D :  
 (a) Pour  $a= 6.5$  mm (b) Pour  $a= 5$  mm

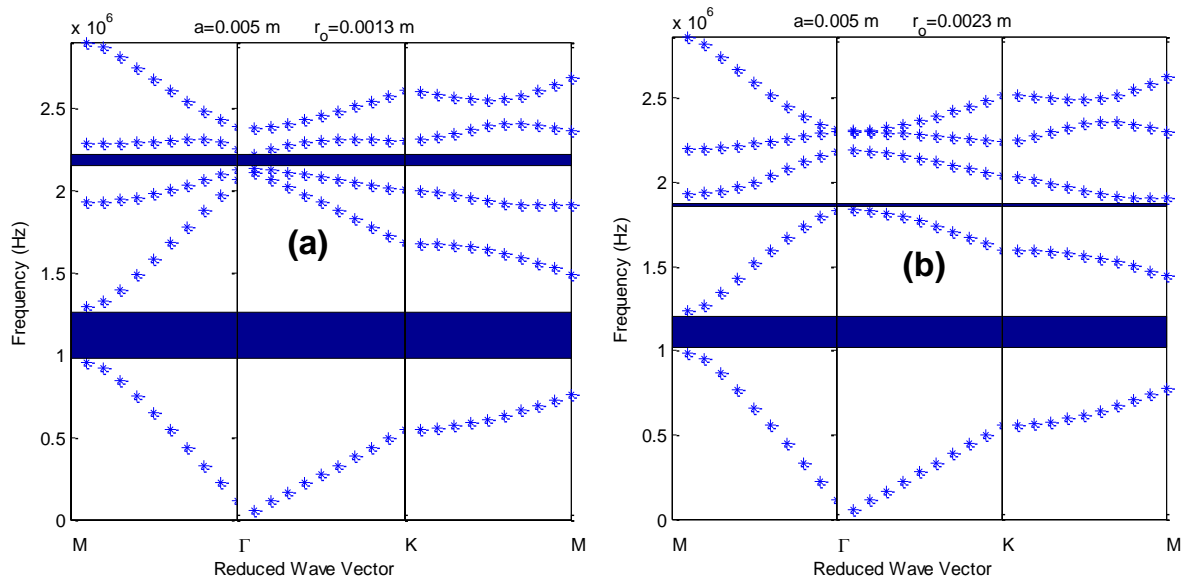
Sur la figure III.15, nous avons tracé les évolutions de la largeur de bande, la fréquence inférieure, la fréquence supérieure et la fréquence centrale de la première bande interdite. Les courbes de la figure III.15 montrent bien que plus la période augmente, la fréquence supérieure, centrale et inférieure diminue. Alors que la largeur de la bande augmente jusqu'à une valeur limite puis diminue.



**Figure III.15:** Variations des propriétés des bandes phononiques en fonction de la période du réseau « a »

### b. Influence du rayon des inclusions

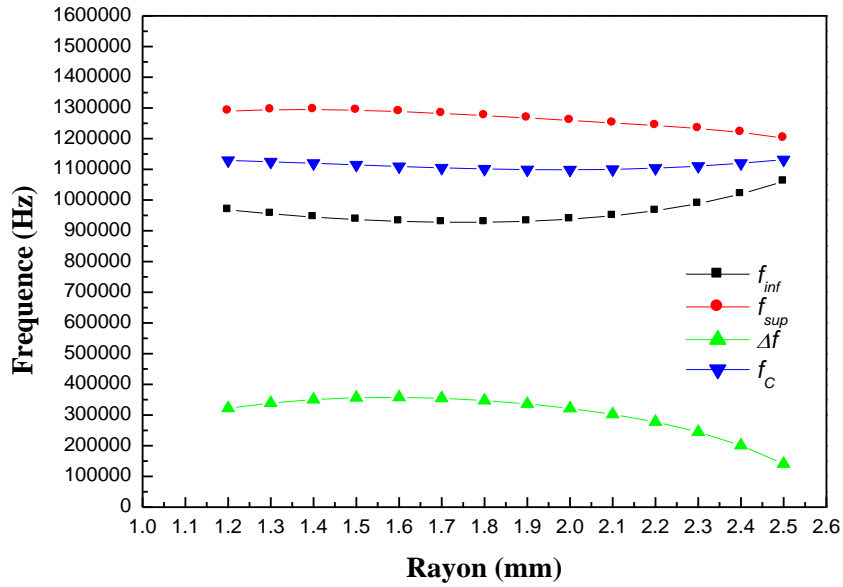
Pour voir l'influence du rayon «  $r$  » des inclusions sur les caractéristiques des bandes phononiques ouvertes, on va fixer d'abord les propriétés élastiques des deux matériaux et la période du réseau à la valeur ( $a=6.0$  mm). Ensuite, on va effectuer une série de simulations en changeant le rayon  $r$  des inclusions. Puis, en utilisant le même code de la méthode des ondes planes PWE après modification on va calculer les bandes interdites ouvertes pour chaque valeur du rayon  $r$ . Les figures III.16 (a) et (b) illustrent le diagramme des bandes pour  $r=1.3$  mm et pour  $r=2.3$  mm respectivement.



**Figure III.16:** Diagramme de bandes dans le cas d'un cristal phononique 2D :

(a) Pour  $r= 1.3$  mm (b) Pour  $r= 2.3$  mm

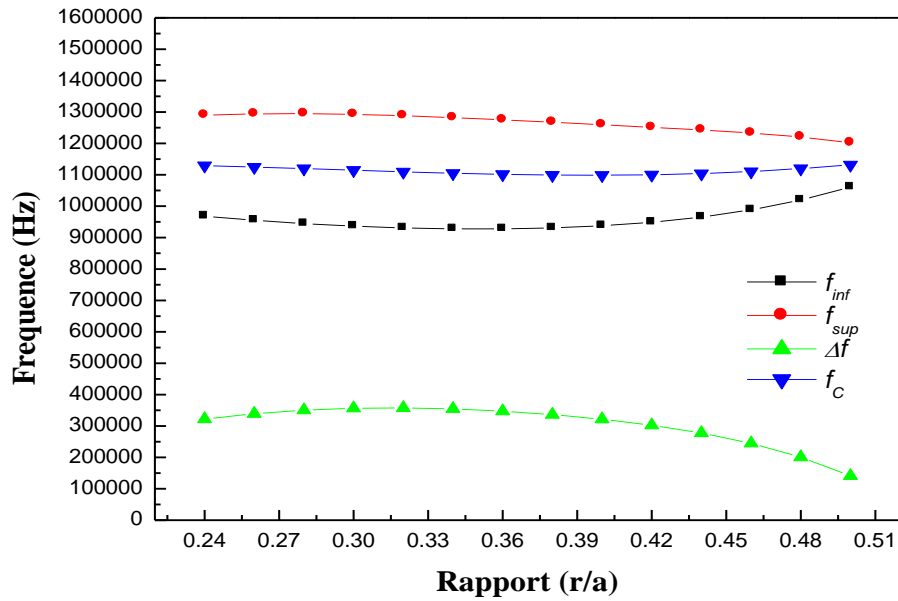
Sur la figure III.17, nous avons reporté les résultats obtenus concernant la variation de la largeur et la position de la première bande en fonction du diamètre des inclusions pour différentes valeurs du rayon. On peut constater d'une part, que la largeur des bandes diminue. Alors que la fréquence supérieure, la fréquence centrale et la fréquence inférieure augmentent avec le rayon.



**Figure III.17:** Variations des propriétés des bandes phononiques en fonction du rayon des inclusions « r »

**c. Influence du rapport (r/a)**

La figure III.18, représente les variations des bandes ouvertes en fonction du rapport  $r/a$  de la structure considérée. D’après les résultats obtenus, on peut constater que l’ouverture des bandes interdites phononiques est réalisée pour des facteurs de remplissages compris entre 0.24 et 0.52.

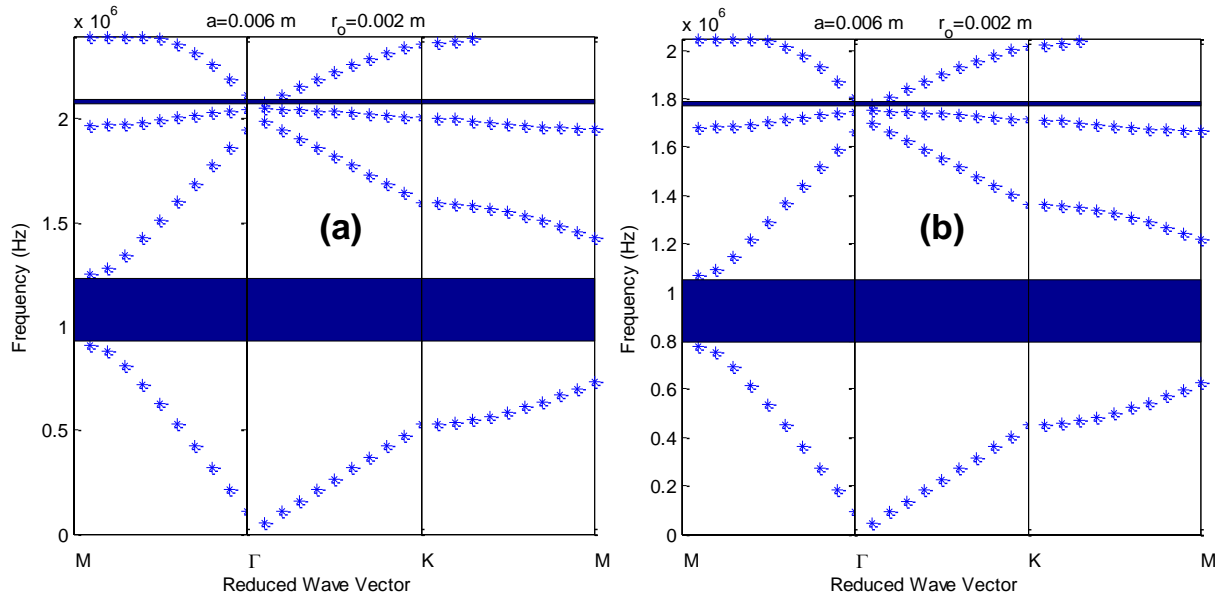


**Figure III.18:** Variations de la largeur de la bande en fonction du rapport (r/a)

### III.2.2. EFFET DES PARAMETRES PHYSIQUES

#### a. Influence de la vitesse de propagation

Pour étudier l'influence de la vitesse de propagation longitudinale le matériau de la matrice, il est nécessaire de fixer les paramètres géométriques ( $a=6.00$  mm,  $r=2.00$ mm). Ensuite, nous avons effectué une série de simulations pour différentes vitesses  $V_L$  (m/s).



**Figure III.19:** Diagramme de bandes dans le cas d'un cristal phononique 2D :

(a) Pour  $V_{Lb} = 6840$  m/s (b) Pour  $V_{Lb} = 5840$  m/s

Sur la figure III.19 (a) et (b), nous avons reporté les diagrammes de bandes pour deux vitesses. La figure III.20 donne les variations de la bande interdite phononique en fonction de la vitesse de propagation longitudinale de la matrice. Ces résultats sont obtenus en modifiant le même code en Matlab de la méthode des ondes planes PWE. D'après les courbes, on peut conclure que plus le contraste de la vitesse est faible, les fréquences limites  $f_{sup}$ ,  $f_{inf}$  et la fréquence centrale  $f_c$  ainsi que la largeur  $\Delta f$  augmentent.

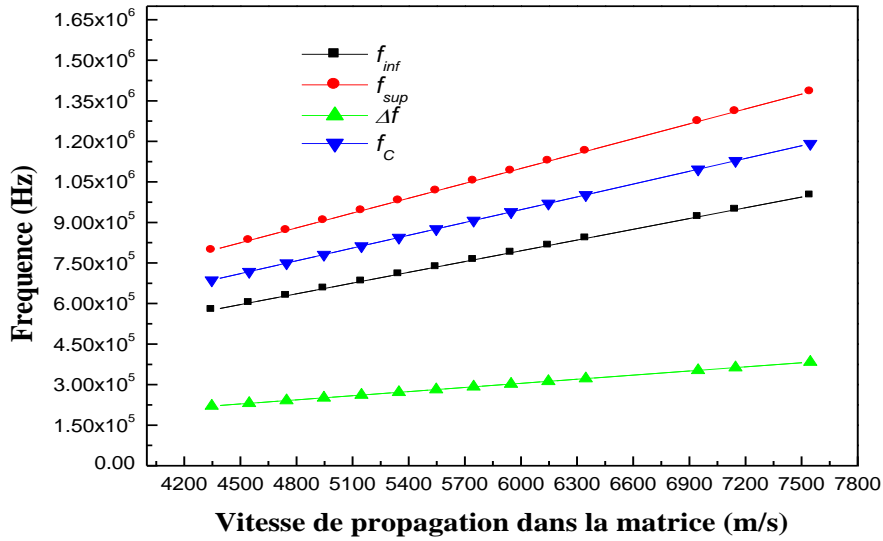


Figure III.20 : Variations des propriétés des bandes phononiques en fonction de la vitesse de propagation dans le SiO<sub>2</sub>

**b. Influence de la masse volumique**

De la même façon, pour étudier l'influence du contraste dans la masse volumique défini par  $(\rho_{inclusion} - \rho_{matrice})$  nous avons fixé tout d'abord les paramètres géométriques et la vitesse de propagation dans la matrice. Ensuite, nous avons appliqué le même code pour différents contrastes. Les résultats ci-dessous sont obtenus pour deux contrastes ;  $\Delta\rho= 1000 \text{ Kg/m}^3$  et  $\Delta\rho= 2600 \text{ Kg/m}^3$ .

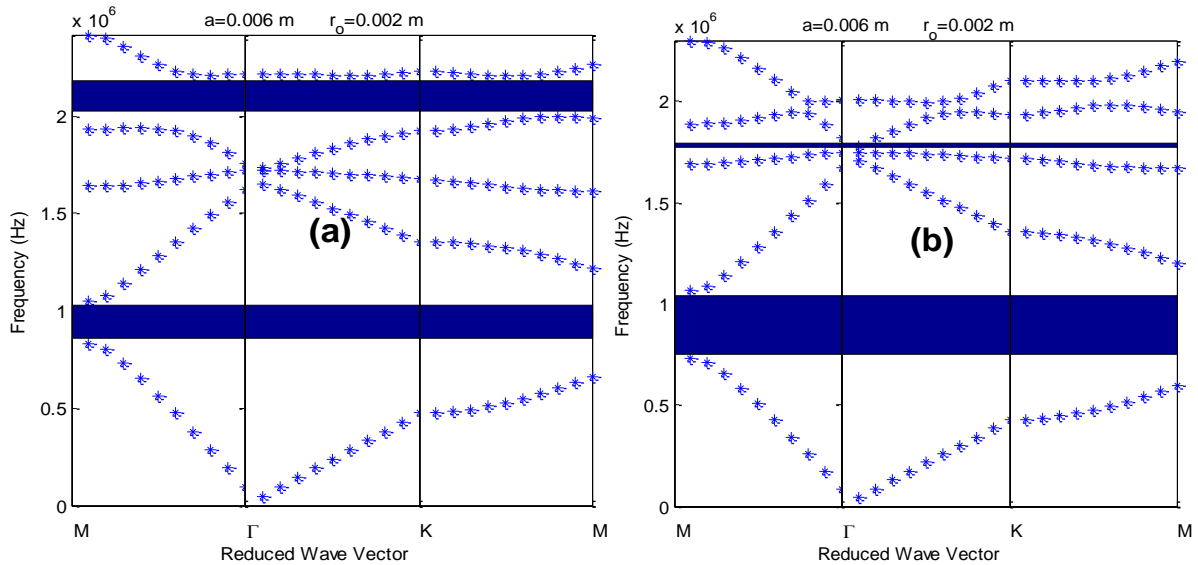
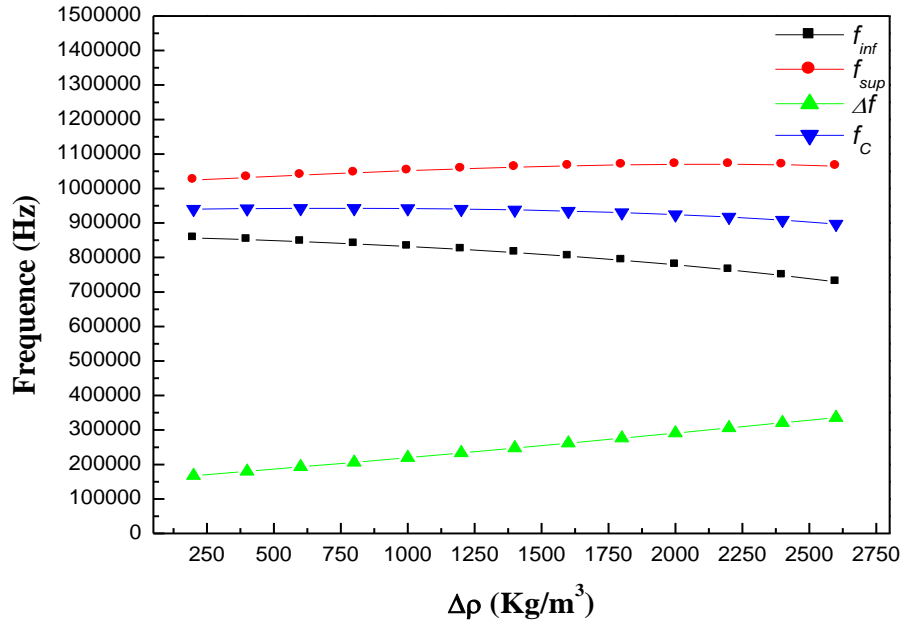


Figure III.21: Diagramme de bandes dans le cas d'un cristal phononique 2D :

(a) Pour  $\Delta\rho= 1000 \text{ Kg/m}^3$  (b) Pour  $\Delta\rho= 2600 \text{ Kg/m}^3$

La figure III.22 illustre les propriétés de la bande phononique ouverte en fonction du contraste dans la masse volumique entre les deux matériaux du cristal  $\text{LiNbO}_3/\text{SiO}_2$ . D'après les résultats obtenus, il est clair que la largeur de la bande ouverte augmente pour des contrastes élevés.



**Figure III.22:** Variations des propriétés des bandes phononiques en fonction de la densité de la matrice

## CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons eu l'occasion d'étudier la possibilité d'ouverture des bandes interdites dans le domaine fréquentiel des ondes acoustiques autour de 1MHz. Nous nous sommes intéressés à l'influence des paramètres géométriques notamment la période, le rayon et le facteur de remplissage d'une part et d'autre part des paramètres physiques en particulier la masse volumique et la vitesse de propagation longitudinale. Les différents calculs des bandes interdites pour le modèle d'un cristal phononique 2D démontrent que pour obtenir une bande interdite autour d'une fréquence donnée, il est nécessaire de régler les paramètres géométriques, il faut bien choisir les constituants du cristal et d'autre part, il faut bien choisir la topologie du cristal phononique notamment le type du réseau et la forme des inclusions.

---

## **CONCLUSION GENERALE**

---

## CONCLUSION GENERALE

En structurant périodiquement la matière, il est possible d'empêcher les ondes acoustiques ou élastiques de se propager dans certaines directions et gammes de fréquence. Ces réseaux périodiques constitués de deux matériaux de propriétés élastiques différentes sont qualifiés de cristaux phononiques. Ceux-ci ont fait de ce domaine de recherche d'ébullition exponentielle et en évolution permanente. De nombreuses structures périodiques ont été étudiées et plusieurs approches théoriques ont été employées. Toutes ont mis en évidence l'existence de propriétés physiques importantes telle que la présence de bandes interdites phononiques où des bandes de fréquences empêchent la propagation des ondes élastiques /acoustiques à travers le cristal. Cela offre de nombreuses applications allant de l'isolation sonore au filtrage et traitement du signal acoustique en passant par les guides.

Dans ce travail, nous avons étudié et simulé la propagation des ondes acoustiques et élastiques à base de cristaux phononiques bidimensionnels à réseau triangulaire en utilisant la méthode des ondes planes; nous avons considéré deux structures  $\text{SiO}_2/\text{LiNbO}_3$  et  $\text{LiNbO}_3/\text{SiO}_2$ .

En premier lieu, nous avons étudié l'influence des paramètres géométriques (le rayon des inclusions et la période du réseau et le facteur de remplissage) sur la largeur et la position des bandes interdites phononiques ouvertes. Les simulations réalisées ont montré clairement l'ouverture des bandes interdites en fréquences autour de 1MHz. D'autre part, les variations de ces bandes interdites dépendent fortement de la topologie des structures.

En second lieu, nous avons simulé l'influence des constantes élastiques représentées par le contraste dans la masse volumique des matériaux constituants et la vitesse de propagation longitudinale sur les propriétés des bandes interdites phononiques. Les différents résultats de simulation ont montré clairement que la largeur et la location des bandes interdites sont liées au contraste de la vitesse longitudinale et au constante de la masse volumique.

**BIBLIOGRAPHIE**

- [1] Hocine larbi «cristaux phononique et matemateriaux aux domaines du guidage -filtre et de l'isolation phonique », docteur deb l'université Lille 2 sciences et technologies 2011
- [2] S. kheffache : propagation d'onde élastiques dans les critaux phononiques bidimensionnels, TIZI\_ OUZOU,2011.
- [3] Oudich, M. (2011). Contribution à l'étude des cristaux phononiques à résonance locale dans les régimes sonique et hypersonique: approches théorique et expérimentale (Doctoral dissertation, Université Henri Poincaré-Nancy 1).
- [4] Van Der Biest, F., "Diffusion multiple et renversement du temps ultrasonore dans des milieux périodiques et désordonnés ", Thèse de doctorat - Université de Paris 7,(Janvier 2006).
- [5] Laude, V., Khelif, A., Choujaa, A., "Les cristaux phononique", le journal de la recherche et du transfert de l'arc jurassien, n° 210, (Octobre 2006).
- [6] <http://www.femto-st.fr/fr/Diffusion/Une-introduction-aux-cristaux-phononiques-3>
- [7] Solie, L. P., "Surface acoustic wave reflective dot array (RDA)", *Applied Physics Letters*, vol. 28, no. 8, (1976), pp. 420–422.
- [8] Achenbach, J. D. et Kitahara, M., "Harmonic waves in a solid with a periodic distribution of spherical cavities", *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 81, no. 3, (1987), pp. 595–598.
- [9] Narayanamurti, V., Stormer, H. L., Chin, M. A., Gossard, A. C. et Wiegmann, W., "Selective transmission of high-frequency phonons by a superlattice : The "dielectric" phonon filter", *Physical Review Letters*, vol. 43, no. 27, ( 1979), pp. 2012–2016.
- [10] Berger, V., Lourtioz, J.M., "Les photons dans tous leurs états : les matériaux à bandes interdites photoniques", *Images de la Physique*, (1998).
- [11] Yablonovitch, E., "Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics," *1Phys. Rev. Lett*, vol. 58, no. 20, (1979), pp. 2059-2062.
- [12] Yablonovitch, E., Gmitter, T. J. et Leung, K. M., "Photonic band structure : The

facecentered-cubic case employing nonspherical atoms", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 67, no. 17, (1991), pp. 2295-2298.

[13] Kushwaha, M.S., Halevi, P., Dobrzynski, L. et Djafari-Rouhani, B., "Acoustic band structure of periodic elastic composites", *Phys. Rev. Lett.* 71, 2022–2025 (1993).

[14] Economou, E. N. et Sigalas M., "Stop bands for elastic waves in periodic composite materials", *J. Acous. Soc. Am.*, 95, 1734 (1994).

[15] Goffaux, C. et Vigneron, J. P., "Theoretical study of a tunable phononic band gap system", *Phys. Rev. B*, 64, 075118 (2001).

[16] Martínez-Sala, R., Rubio, C., García-Raffi, L. M., Sánchez-Pérez, J. V., Sánchez Pérez, E. A. et Llinares, J., "Control of noise by trees arranged like sonic crystals", *J. Sound Vib.*, 291, 100 (2006).

[17] Meseguer, F., Holgado, M., Caballero, D., Benaches, N., Sánchez-Dehesa, J. López, C. et Llinares, J., "Rayleigh-wave attenuation by a semi-infinite two-dimensional elastic-band-gap crystal", *Phys. Rev. B*, 59, 12169 (1999).

[18] Kushwaha, M. S., "Stop-bands for periodic metallic rods : Sculptures that can filter the noise", *Applied Physics Letters*, vol. 70, no. 24, (1997), pp. 3218–3220.

[19] Liu, Z., Zhang, X., Mao, Y., Zhu, Y. Y., Yang, Z., Chan, C. T. et Sheng, P., "Locally resonant sonic materials", *Science*, vol. 289, no. 5485, (2000), pp. 1734 -1736.

[20] Wang, G., Wen, X., Wen, J., Shao, L. et Liu, Y., "Two-dimensional locally resonant phononic crystals with binary structures", *Physical Review Letters*, vol. 93, no. 15, (2004), p. 154302.

[21] W. HERIZ « Etude théorique de la propagation des ondes acoustique dans une membrane à cristal phononique bidimensionnels» mémoire de master université m'sila

[22] E. Yablonovitch, T. J.Gmitter, K. M. Leung.«Photonic band structure: The facecentered-cubic case employing nonspherical atoms.» *Phys. Rev. Lett.*, Vol.67, 1991: 2295 -2298.

[23] A. bougressi, mémoire de magister, université mouloud mammeri de tizi ouzou, Application du concept des réseaux acoustiques à bandes interdites pour l'isolation sismique d'un site», Année 2013 .

- [24] duclos,A,, “Diffusion multiple en fluide visco-thermique, cas du cristal phononique à deux dimensions” These de doctoral-Ecole doctorale de l’université du Maine, le Mans, France, (juin 2007).
- [25] R. Houwink, Elasticity Plasticity and structure of matter, Cambridge University Press, London, (1971) .
- [26] B.A. AULD, “Acoustic fields an waves in solids” Volume I, Wiley-interscience (1973)
- [27] M. Plihal and A. A. Maradudin, Phys. Rev. B **44**, 8565 (1991)
- [28] R. D. Meade, K. D. Brommer, A. M. Rappe, and J. D. Joannopoulos, Appl. Phys. Lett. **61**, 495 (1992)
- [29] C. Herring, Phys. Rev. **57**, 1169 (1940)
- [30] M. S. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski, and B. Djafari-Rouhani, Phys. Rev. Lett. **71**, 2022 (1993)
- [31] J. O. Vasseur, B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzynski, M. S. Kushawaha, and P. Halevi, J. Phys : Condens. Matter, **6** 8759-8770 (1994)
- [32] M. M. Sigalas, and E. N. Economou, Europhys. Lett. **36** 241-246 (1996)
- [33] Z. Hou, and B. M. Assouar, J. Phys. D : Appl. Phys. **42** 085103 (2009)
- [34] M. M. Sigalas, and E. N. Economou, J. Appl. Phys. **75** 2845 (1994)
- [35] Z. G. Huang, and T-T. Wu, IEEE Ultrason. Symp. **1**, 77 (2005)
- [36] M. M. Sigalas, J. Acoust. Soc. Am. **101**, 1256 (1997)
- [37] J. O. Vasseur, P. A. Deymier, B. Djafari-Rouhani, Y. Pennec, and A-C. Hladky-Hennion. Phys. Rev. B **77**,085415 (2008)
- [38] T-T. Wu, Z-G. Huang, and S. Lin, Phys. Rev. B **69**, 094301 (2004)
- [39] Y. Tanaka, and S-I. Tamura, Phys. Rev. B **58**, 7958 (1998)
- [40] B. Manzanares-Martinez, Phys. Rev. B **68** 134303 (2003)
- [41] V.Laude, M. Wilm, S. Benchabane, and A. Khelif, Phys. Rev. E **71**, 036607 (2005)

- [42] J-C. Hsu, and T-T. Wu, IEEE Trans. Ultrason. Ferro- electr. Freq. Control **53**, 1169 (2006)
- [43] V. Laude, Y. Achaoui, S. Benchabane, and A. Khelif, Phys. Rev, B **80**, 092301 (2009)
- [44] V. Romero-Garcia, J. V. Sanchez-Pérez, and L. M. Garcia-Raffi, J. Appl.
- [45] J. J. Chen, B. Qin, and J. C. Cheng, Chin. Phys. Lett. **22**, 1706 (2005)
- [46] B. Bonello, C. Charles, and F. Ganot, Ultrasonics **44**, 1209 (2006)
- [47] T. Miyashita, and C. Inoue, Jpn. J. Appl. Phys. 40, 3488 (2001).
- [48] A. Khelif, B. Djafari-Rouhani, V. Laude, and M. Solal, J. Appl. Phys. 94, 7944 (2003).
- [49] A. Khelif, A. Choujaa, S. Benchabane, B. Djafari-Rouhani, and V. Laude, Appl. Phys. Lett. 84, 4400 (2004).
- [50] Y. Pennec, B. Djafari-Rouhani, J. O. Vasseur, and H. Larabi , Appl. Phys. Lett. 87, 261912 (2005).
- [51] P-F. Heisch, T-T. Wu, and J-H Sun, Trans. Ultrason. Ferro- electr. Freq. Control 53, 148 (2006).

:

الفونونية هي بنى اصطناعية دورية تتكون من مادتين مرنتين مختلفتين. معينة، هذه المواد تتميز بظهور الإتجاهات ونطاقات التردد . هذا العمل هو مساهمة مكرسة لدراسة انتشار الأمواج الصوتية في بلورة صوتية ثنائية الإتجاهات ونطاقات التردد . لكن و قبل إنجاز وظائف حقيقية للتحكم في انتشار الموجات الصوتية و المرنة يجب إجراء دراسة طوبوغرافية و براميتريية للخلية الأساسية من أجل تحديد العوامل التي تؤثر .

و طريقة PWE

ية : الفونونية ثنائية

## Abstract

Phononic crystals are periodic artificial structures formed of at least two different elastic materials. These crystals indeed under certain conditions of frequency bands for which the propagation of elastic or acoustic waves is prohibited in certain directions and frequency ranges. This work is a contribution devoted to the study of the propagation of acoustic waves in a 2D phononic crystal with a triangular lattice. However, before performing real functions to control the propagation of acoustic waves, a topological and parametric study of the elementary cell must be performed to determine the different parameters having a significant influence on the phonon band.

**Keywords:** 2D Phononic crystal, bandgap, elastic waves and PWE Method.