# Table des matières

## 0.1 Notations générales

$p^*$ : le conjugué de $p$, i.e., $\frac{1}{p}+\frac{1}{p^*}=1$.

$X_1\widehat{\otimes}_\pi...\widehat{\otimes}_\pi X_m$ : le produit tensoriel projectif.

$l_p^n(X)$ : l'espace de suites finies fortement $p$-sommables.

$l_p^{n,w}(X)$ : l'espace de suites finies faiblement $p$-sommables.

$T^*$ : l'opérateur adjoint de $T$.

$\widetilde{T}$ : linéarisation de l'opérateur multilinéaire $T$.

$i_m$ : plongement canonique de $X_1\times ... \times X_m$ dans $X_1\widehat{\otimes}_\pi...\widehat{\otimes}_\pi X_m$.

$\mathcal{B}(X;Y)$ : l'espace des opérateurs linéaires bornés.

$\mathcal{W}(X;Y)$ : classe des opérateurs linéaires faiblement compact.

$\mathcal{L}(X_1,...,X_m;Y)$ : l'espace des opérateurs mulilinéaires bornés.

$\mathcal{L}(X_1,...,X_m)$ : l'espace des formes mulilinéaires bornées.

$\mathcal{W}(X_1,...,X_m;Y)$ : classe des opérateurs multilinéaires faiblement compact.

$\mathcal{W}\circ\mathcal{L}(X_1,...,X_m;Y)$ : classe des opérateurs multilinéaires qui se factorisent par un seul espace de Banach réflexif.

$\mathcal{L}(\mathcal{W})(X_1,...,X_m;Y)$ : classe des opérateurs multilinéaires qui se factorisent par $m$ espaces de Banach réflexifs.

$c_0$ : l'espace des suites convergente vers 0.

$L_p$ : est l'espace des fonctions mésurables $f$ telles que

$$\begin{aligned}\|f\|_{L_p} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty\\ \|f\|_{L_\infty} &= \sup{}_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|\cdot\end{aligned}$$

# Introduction

Dans ce mémoire de Master option analyse fonctionnelle, on étudiera les opérateurs linéaires et multilinéaires faiblement compact. Ce type d'opérateurs possède des propriétés importantes dans l'analyse classique et ses opérateurs jouent un rôle indispensable dans l'étude des espaces de Banach réflexifs. Dans le cas linéaire, on note par exemple qu'un opérateur est faiblement compact si, et seulement s'il se factorise par un espace réflexif. Un autre résultat annonce aussi qu'un espace de Banach $X$ est réflexif si, et seulement si, pour tout espace de Banach $Y$ et tout opérateur linéaire $u : X \to Y$, $u$ est faiblement compact. Dans le cas multilinéaire, deux types de factorisation sont envisagées dont on enchainera par plusieurs résutats de caractérisation. Dans le premier type, on factorise les opérateurs multilinéaires autour d'un seul espace de Banach réflexif, la classe de ces opérateurs sera notée $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}$. Alors, $T$ est de type $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}$ s'il existe un espace de Banach $G$ ; un opérateur linéaire $u \in \mathcal{B}(G; Y)$ et un opérateur multilinéaire $A \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; G)$ tels que $T$ s'écrit sous la forme $T = u \circ A$. En d'autre termes, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} X_1 \times ... \times X_m \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "A"'] & Y \\ & G \arrow[u, "u"'] \end{tikzcd}$$

Dans le duexième type, on considère les opérateurs multilinéaires qui se factorisent de la façons suivante : on supposera qu'il existe des espaces de Banach $G_j$, des opérateurs linéaires $u_j : X_j \longrightarrow G_j$ et un opérateur multilinéaire $A : G_1 \times ... \times G_m \longrightarrow Y$ tels que $T = A(u_1, ..., u_m)$. En d'autre termes, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[d, "u_1"'] & \times ... \times & X_m \arrow[d, "u_m"'] \arrow[r, "T"] & Y \\ G_1 & \times ... \times & G_m \arrow[ur, "A"'] & \end{tikzcd}$$

Cette classe d'opérateurs multilinéaire sera notée $\mathcal{L}(\mathcal{W})$. Plusieurs résultats de factorisation correspondantes à ces deux types seront établis notammant celle des espaces de Banach réflexifs. Dans ce mémoire, on abordera approfondément ce sujet en prenant les classes des opérateurs linéaires et multilinéaires faiblement compacts.

Le mémoire s'articule autour de trois chapitres.

Le premier chapitre sera consacré à étudier les suites et les ensembles faiblement compact. Commençons par donner la définition d'un espace de Banach ainsi que un espace de Hilbert et quelques propriétés relatives à ces deux types d'espaces. Ensuite, certaines propriétés concernant les suites faiblement convergentes, ensembles compact et faiblement compact seront établi. On termine ce chapitre par mettre l'accent sur une série de caractérisation concernant les espaces de Banach réflexifs.

Dans le deuxième chapitre, on étudiera les opérateurs faiblement compact. Tout d'abord on verra la classe des opérateurs linéaires bornés et sa norme d'opérateurs. On enchaînera en discutant les propriétés des opérateurs linéaires faiblement compact. Enfin, on termine par étudier les opérateurs multilinéaires faiblement compact.

Le dernier chapitre comportera certains théorèmes et résultats de caractérisation et de factorisation. On y trouve la factorisation d'un opérateur linéaire faiblement compact par un espace réflexif, ainsi que des résultats de coïncidences. Même étdue sera adopté pour la catégorie des opérateurs multilinéaires faiblement compact. Ici, on exposera les deux types de factorisation citées ci-dessus. On termine ce chapitre par sur la réflexivité de l'espace des opérateurs multilinéaires bornés $\mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y\right)$.

# Chapitre 1

# Suites et ensembles faiblement compact

## 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on donnera des exemples des espaces de Banach classiques à savoir les petits $\ell_p$, les $L_p$ de Lebesgue. Ensuite, on fera une étude approfondie sur les espaces de Banach réflexifs. On exposera également des résultats concernant les suites et ensembles faiblement compact ainsi que des caractérisations des espaces de Banach réflexifs notammant celle de James.

## 1.2 Espaces de Banach classiques

Dans ce mémoire les espaces vectoriels sont toujours supposés sur le corps $\mathbb{R}$. Si on muni un espace vectoriel d'une norme on peut donner donc la définition d'un espace de Banach. En fait, dans un espace normé on sait que toute suite convergente est une suite de Cauchy, la réciproque n'est plus vraie en générale, pour cette raison les espaces de Banach sont introduits pour que cette propriété réciproque soit vérifie.

**Définition 1.1.** (*Espace de Banach*). Un espace vectoriel normé $X$ est dit de Banach (complet), si toute suite de Cauchy de $X$ est convergente dans $X$.

Notons ici que tout espace normé de dimension finie est un espace de Banach. De plus, tout sous espace fermé d'un espace de Banach est un espace de Banach.

**Exemple : Les espaces de suites $\ell_p$**

**Définition 1.2.** Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ et $p \in [1, +\infty[$. On définit l'ensemble $\ell_p$ par

$$\ell_p = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : (\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Si $p = \infty$, on définie $\ell_\infty$ par

$$\ell_\infty = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}.$$

Les opérations algébrique dans ces ensembles sont définies par

1) Pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x' = (x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$, on a $x + x' = (x_n + x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$, on a $\lambda x = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

*Alors, $\ell_p$ devient un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*

**Théorème 1.3.** *Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace $\ell_p$ est un Banach.*

Si on munit un espace vectoriel d'un produit scalaire, il lui fait donc un espace pré-hilbertien. Ce produit scalaire peut générer une norme et par conséquent il engendre une distance. Alors on donne la définition suivante :

**Définition 1.4.** (*Espace de Hilbert*). Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la distance issue du produit scalaire.

**Théorème 1.5.** (*L'espace $\ell_2$*). *L'espace $\ell_2$ est un espace de Hilbert dont le produit scalaire* *est*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n . \forall x, y \in \ell_2$$

**Proposition 1.6.** (*Comparaison entre les espaces*). *Soit* $1 \leq p \leq q \leq \infty$. *Nous avons*

$$\ell_p \subset \ell_q.$$

**Représentation de Riesz dans les espaces de Hilbert**

Soit $H$ un espace de Hilbert. Pour tout vecteur $y$ de $H$, la forme linéaire qui à $x$ associe $< y, x >$ est continue sur $H$ (sa norme est égale à celle de $y$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz). Le théorème de Riesz annonce la réciproque : toute forme linéaire continue sur $H$ s'obtient de cette façon.

**Théorème 1.7.** (*Représentation de Riesz*) *Soient* $H$ *un espace de Hilbert et* $u$ *une forme linéaire sur* $H$. *Alors, il existe un élément unique* $a \in H$ *tel que*

$$\forall x \in H : u(x) = \langle a, x\rangle .$$

**Caractérisation d'un espace de Hilbert**

Soit $H$ un espace de Banach quelconque, on définit l'identité du parallélogramme par

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

qui signifie que la somme des carrés des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des diagonales  Le théorème dû à Jordan-Von-Neumann en 1935 donne une caractrisation en utilisant cette dernière identité.

**Théorème 1.8**. *Un espace de Banach est un espace de Hilbert si et seulement si sa* *norme vérifie l'égalité du parallélogramme.*

## 1.3 Applications linéaires

Soit $u : X \to Y$ une application entre deux espace de Banach. Elle est linéaire si

$$\forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y).$$

On note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires, on le muni de deux opérations algébriques suivantes

1) $\forall x \in X : (u_1 + u_2)(x) = u_1(x) + u_2(x)$.

2) $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda u)(x) = \lambda u(x)$.

L'application linéaire $u$ est continue (borné) s'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall x \in E : \|u(x)\| \leq C \|x\|.$$

On note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des applications linéaires continues. On définit une norme des opérateurs $\|.\|$ sur $\mathcal{L}(X; Y)$ par

$$\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|,$$

On a également

$$\|u\| = \inf \{C : \text{ vérifie l'inégalité précédente}\}.$$

Alors, la quantité $\|u\|$ définit une norme sur $\mathcal{L}(X; Y)$. Si $Y$ est un espace de Banach alors $\mathcal{L}(X; Y)$ est aussi un espace de Banach.

**Définition 1.9.** (*Dual topologique).* Soit $X$ un espace vectoriel normé. On appelle dual topologique, et on note $X^*$, l'espace de Banach des formes linéaires continues sur $X$, i.e.,

$$X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R}).$$

Notons ici que l'espace $X^*$ est toujours complet pour la norme des opérateurs.

**Exemple 1.10.** Soit $1 < p < +\infty$. On a

$$(\ell_p)^* = \ell_{p^*},$$

avec $p^*$ est le conjugué de $p$, i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

## 1.4 Espace de Banach réflexif

Soit $X$ un espace de Banach. Le dual du dual $X^*$ de $X$, noté $X^{**}$, s'appelle le bidual de $X$. Pour tout $x \in X$ notons

$$\mathbf{J}_X(x) : X^* \to \mathbb{R}$$

la forme linéaire sur $X^*$ définie par

$$\forall x^* \in X^* : \langle \mathbf{J}_X(x), x^* \rangle = x^*(x)$$

Pour tout $x^* \in X^*$, on a

$$|\langle \mathbf{J}_X(x), x^* \rangle| = |x^*(x)| \leq \|x^*\| \|x\|,$$

ce qu'il montre que $\mathbf{J}_X(x)$ est bien dans $X^{**}$. L'application $\mathbf{J}_X : X \to X^{**}$ est isométrique. Elle s'appelle l'isométrie canonique. L'application $\mathbf{J}_X$ est toujours injective. En général, elle n'est pas surjective.

**Definition 1.11.** (*Espace réflexif*). Un espace de Banach $X$ est dit réflexif si l'application canonique

$$\mathbf{J}_X : X \to X^{**},$$

est bijective. Autrement dit, $X$ s'identifie isométriquement à $X^{**}$. Ca nous permettra d'associer à chaque élément $x^{**}$ de $X^{**}$ un unique vecteur $x$ de $X$ tel que

$$\forall x^* \in X^* : x^{**}(x^*) = x^*(x).$$

Si $X$ est réflexif, alors il s'identifie à son bidual. La réciproque n'est pas vraie comme le montre James où il a donné un exemple d'un espace non réflexif $X$ pour lequel il existe une isométrie surjective de $X$ dans $X^{**}$. Pour cette raison, il est indisponsable d'utiliser l'application $\mathbf{J}$ dans la déflnition précédente.

**Exemple 1.12.**

1) Pour tout $1 < p < \infty$, l'espace $L_p$ est réflexif. Il en est de même pour les petit $\ell_p$ avec $1 < p < \infty$. Par contre, les espaces $L_1, L_\infty, c_0, \ell_1, \ell_\infty$ ne sont pas réflexifs.

2) Tout espace de dimension finie est réflexif.

3) Tout espace de Hilbert est réflexif.

**Proposition 1.13.**

1) *Si $X$ est réflexif et si $Y$ est isomorphe à $X$, alors $Y$ est réflexif.*

2) *Si $X$ est réflexif, alors $X^*$ est réflexif.*

3) *Tout sous espace fermé $Y$ de $X$ est réflexif.*

## 1.5 La topologie faible et $*-$faible

Dans un espace de Banach $X$, on sait que sa norme engendre une topologie appelée topologie forte. En revanche, il existe d'autre topologie dont on peut munir $X$. La justification d'introduire d'autres topologies est d'essayer de récupérer la compacité de certains ensembles de $X$. En effet, si on munit l'espace $X^*$ de la topologie $*$-faible que nous allons présenter dans la suite, la boule fermée de $X^*$ devient compacte néanmoins elle n'était pas pour la topologie forte (en générale). Le théorème de Riesz confirme que pour que la boule fermée $B_X$ soit compacte pour la topologie forte, il faut et il suffit que l'espace $X$ soit de dimension finie.

**Topologie faible**. On définit la topologie faible, notée $\sigma(X, X^*)$, sur un espace de Banach $X$ comme étant la topologie la moins fine sur $X$ rendant continues toutes les formes linéaires sur $X$.

**Théorème 1.14.** *Les sous espaces vectoriels fermés de $X$ sont les mêmes pour les deux topologies (forte et faible). Il en est de même plus généralement des parties fermées convexes.*

**Suites faiblement convergentes.** On introduit la définition suivante.

**Définition 1.15.** (*Suite faiblement convergente*). Une suite $(x_n)_{x\in\mathbb{N}} \subset X$ est *faiblement convergente* vers un vecteur $x$ si

$$\langle x^*, x_n\rangle \overset{n}{\to} \langle x^*, x\rangle\,, \text{ pour tout } x^* \in X^*.$$

Bien entendu, dans un espace de Banach, la convergence forte (en norme) implique la convergence faible, car on a toujours

$$|\langle x^*, x_n\rangle - \langle x^*, x\rangle| \leq \|x^*\| \, \|x_n - x\|\,.$$

La réciproque n'est pas vraie en général.

**Théorème 1.16.** *Si $X$ est réflexif, toute suite bornée dans $X$ admet une sous suite faiblement convergente.*

**Topologie $*$-faible**. Soient $X$ un espace de Banach et $X^*$ son dual. La topologie $*$-faible sur le dual $X^*$, notée $\sigma(X^*, X)$, c'est la topologie la moins fine sur $X^*$ rendant continues toutes les applications de la forme

$$x : X^* \to \mathbb{R} : x^* \mapsto x^*(x) ; \text{ où } x \in X.$$

Note que cette topologie est moins fine que la topologie faible de $X^*$.

**Lemme 1.17.** *Dans un espace de Banach, toute suite faiblement convergente est bornée et toute suite $*$-faiblement convergente dans $X^*$est bornée.*

**Définition 1.18.** **(***Prédual***).** L'espace de Banach $X$ possède un prédual s'il existe un espace de Banach $G$ tel que $X = G^*$.

Dans le cas des espaces de Banach qui possèdent un prédual, on peut définir les trois types de topologies (forte, faible et $*$-faible). L'espace $X^*$ possède l'espace $X$ comme un prédual.

**Théorème 1.19.**
(1) *L'espace $X$ est réflexif si et seulement si son prédual est $X^*$.*
(2) *L'espace $X$ est réflexif si et seulement si la topologie faible et $*$-faible dans $X^*$ sont coïncides.*

## 1.6 Ensembles compact et faiblement compact

**Ensemble compact.** Dans un espace topologique séparé, un sous ensemble $F$ est dit compact si tout recouvrement ouvert de $F$ on peut extraire un sous recouvrement fini. Cela veut dire que, $F \subset X$ est compact si pour toute famille d'ouverts $(O_i)_{i \in I}$ telle que $F \subset \underset{i \in I}{\cup} O_i$ il existe une partie finie $J$ de $I$ telle que

$$F \subset \underset{i \in J}{\cup} O_i.$$

**Proposition 1.20**. *Soient $X$ un espace de Banach et $F$ un sous ensemble de $X$.*
(1) *$F$ est compact si et seulement si pour toute suite de $F$ on peut extraire une sous suite convergente.*
(2) *Un sous ensemble $F$ de $X$ est dit relativement compact si son adhérence $\overline{F}$ compact.*

**Proposition 1.21.** *Toute partie compacte d'un espace topologique séparé est fermée.*

**Ensemble faiblement compact**. Soient $X$ un espace de Banach et $F \subset X$. On munit $X$ de sa topologie faible. Alors, l'ensemble $F$ est dit faiblement compact s'il est compact pour la topologie faible de $X$. De plus, $F$ est relativement faiblement compact si son adhérence $\bar{F}$ faiblement compact.

**Corollaire 1.22.** *Si $X$ est réflexif, la boule unité de $X$ est faiblement compact.*

Le théorème suivant montre que cette propriété caractérise les espaces réflexifs.

**Théorème 1.23.** (*Kakutani*). *Soit $X$ un espace de Banach. Alors :*

*$X$ est réflexif si et seulement si la boule unité fermée de $X$ est faiblement compacte*

**Corollaire 1.24.** *Si $X$ est réflexif, les convexes fermés bornés de $X$ sont faiblement compacts.*

## 1.7 Caractérisation au sens de James

Une caracterisation d'un espace de Banach reflexif très célèbre due à James. Ce résultat permet d'établir une relation entre les espace réflexifs et les formes linéaires qui atteinent leurs normes. Un espace de Banach est réflexif, si et seulement si toute les formes linéaires sue $X$ atteint son maximum sur la boule unité fermée. Soit $X$ un espace de Banach, la forme linéaire $x^*$ de $X^*$ est dite atteint sa norme s'il existe $x_0$ de $B_X$ telle que

$$\|x^*\| = \sup_{x \in B_X} |x^*(x)| = |x^*(x_0)|.$$

Cette propriété s'appelle par fois la *propriété de James.*

**Théorème 1.25.** (*James*) *Un espace de Banach $X$ est réfexif si et seulement si toute forme linéaire continue sur $X$ atteint sa norme sur la boule unité fermée de $X$.*

Ce théorème a lieu uniquement dans les espace de Banach. En effet, un contre exemple montrant qu'il existe un espace normé non complet possède la propriété de James. Une forte version de ce théoréme confirme que

**Théorème 1.26.** *Un sous ensemble faiblement fermé $C$ d'un espace de Banach $X$ est faiblement compact si et seulement si toute forme linéaire $x^*$ de $X^*$ atteint son maximum sur $C$ ,i.e.*

$$\exists x_0 \in C, \forall x^* \in X^* : |x^*(x_0)| = \sup_{x \in C} |x^*(x)| = \|x^*\|.$$

**Définition 1.27.** Un sous ensemble convexe $C$ de $X$ est dit a la propriété de séparation si il peut être séparé de tout sous ensemble convexe fermé $A$ de $X$, qui est disjoint de $C$, par un hyperplan fermé, c'est à dire il y a une forme linéaire continue $f$ sur $X$ telle que

$$\inf\{f(x) : x \in A\} > \sup\{f(x) : x \in C\}.$$

**Théorème 1.28.** *Un espace de Banach $X$ est réflexif si et seulement si la boule unité fermée $B_X$ de $X$ a la propriété de séparation.*

Cette propriété de sapration si elle vérifie par un certain espace normé, donc cet espace devient complet et bien entendu réflexif.

# Chapitre 2

# Opérateurs linéaires et multilinéaires faiblement compact

L'objet de ce chapitre est d'étudier les opérateurs linéaires et multilinéaires faiblement compact. Commençons par les opérateurs linéaires faiblement compact. Ensuite, on prendra la catégorie des opérateurs multilinéaires en donnant les propriétés essentiels de ces opérateurs puis on étendra la notion de faiblement compact pour cette catégorie d'opérateurs.

## 2.1 Opérateur linéaire faiblement compact

Dans le premier chapitre on a vu la définition d'un opérateur linéaire borné. Notons ici que si l'espace arrivé d'un opérateur linéaire est $\mathbb{R}$, l'opérateur $u$ est dit *forme linéaire.* Concernant la continuité d'un opérateur linéaire et on donne le résultat suivant **:**

**Théorème 2.1.** *Soient $X, Y$ deux espaces véctoriels et $u \in L(X, Y)$, alors les propriétés suivantes sont équvalentes :*
*a) $u$ est continue ;*
*b) $u$ est continue en $0$ ;*

*c) $u$ est bornée sur la boule unité fermé $\overline{B}_X$.*

*De plus,*

$$\|u\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\|$$

*est une norme sur l'espace véctoriels des applications linéaires continues $\mathcal{L}(X,Y)$. Alors nous avons*

$$\forall x \in X, \|u(x)\| \leq \|u\| \|x\| .$$

**Remarque 2.2.** Tout operateur linéaire définie sur un espace de dimension finie est continu.

**Définition 2.3.** On dit qu'un opérateur linéaire entre espaces de Banach $u : X \longrightarrow Y$ est *faiblement continu* si pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $X$, on a

$$x_n \xrightarrow{w} x \text{ implique } u(x_n) \xrightarrow{w} u(x).$$

**Prposition 2.4.** *Nous avons :*

(1) *Une forme linéaire est continue si est seulement si elle est faiblement continue.*

(2) *Tout opérateur linéaire continu est faiblement continu, la réciproque n'est pas vraie.*

Nous sommes maintenant sur le point de donner la définition d'un opérateur linéaire faiblement compact.

**Définition 2.5.** Soient $X$ et $Y$ deux espaces de Banach. Un opérateur $u \in L(X;Y)$ est dit *faiblement compact* si le sous ensemble $u(B_X)$ est relativement faiblement compact (i.e., $\overline{u(B_X)}$ est faiblement compact) dans $Y$. La collection de tous les opérateurs linéaires faiblement compacts de $X$ dans $Y$ sera notée $\mathcal{W}(X;Y)$, qui est un Banach pour la norme des opérateurs. Si $X = Y$ on écrit simplement $\mathcal{W}(X)$.

**Proposition 2.6**. *Soit $u : X \to Y$ un opérateur linéaire faiblement compact entre espaces* *de Banach. Alors $u$ est continu.*

**Preuve**. Comme $u$ est faiblement compact, alors $\overline{u(B_X)} = \overline{\{u(x) : x \in B_X\}}$ est faiblement compact. D'autre part,

$$\|u\| = \sup_{x \in B_X} \|u(x)\| \leq \sup_{y \in \overline{u(B_X)}} \|y\|,$$

comme l'application $y \mapsto y$ est faiblement continu sur $Y$, alors elle atteint son maximum sur $\overline{u(B_X)}$ (faiblement compact). Donc $u$ est borné. $\blacksquare$

**Proposition 2.7.** (*Propriété d'idéal*). *Soient $X, Y$ deux espaces de Banach et $u \in \mathcal{W}(X;Y)$. Soient $G, Z$ deux autres espaces de Banach et $v \in \mathcal{B}(Y;G), w \in \mathcal{B}(Z;X)$. Alors*

$$v \circ u \circ w \text{ est faiblement compact.}$$

**Définition 2.8 (**Opérateur linéaire de rang finie). Un opérateur $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ est de rang finie si

$$\dim T(X) \prec \infty.$$

On note $\mathcal{L}_f(X, Y)$ l'ensemble d'*opérateurs* de rang finie.

**Théorème 2.9**. *La famille des opérateurs linéaires faiblement compact forme un idéal des opérateurs linéaires, i.e., pour tout $X$ et $Y$ des espaces de Banach on a :*

(1) *L'ensemble $\mathcal{W}(X;Y)$ est un sous espace de $\mathcal{B}(X;Y)$ qui contient les opérateurs linéaires de rang finis.*

(2) *La classe $\mathcal{W}(X;Y)$ vérifie la propriété d'idéal.*

*De plus, si $\|.\|_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \to \mathbb{R}^+$ satisfait*

$(1')$ $(\mathcal{W}(X;Y), \|.\|_{\mathcal{W}})$ *est un espace normé (Banach)*

$(2')$ $\|A : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ A(x) = x\|_{\mathcal{W}} = 1.$

$(3')$ *Si* $u \in \mathcal{W}(X;Y), v \in \mathcal{B}(E;X), w \in \mathcal{B}(Y;F)$,

$$\|w \circ u \circ v\|_{\mathcal{W}} \leq \|w\| \|u\|_{\mathcal{M}} \|v\|.$$

*Alors* $(\mathcal{W}; \|.\|_{\mathcal{W}})$ *s'appelle idéal normé (de Banach) des opérateurs linéaires.*

On peut caractériser les opérateurs linéaires faiblement compacts dans le résultat suivant.

**Proposition 2.10.** *Soit* $u : X \longrightarrow Y$ *un opérateur linéaire borné. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

*a) L'opérateur* $u$ *est faiblement compact.*

*b) Pour toute suite bornée* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $X$*, la suite* $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une sous suite faiblement convergente dans* $Y$*.*

*c) L'opérateur* $u^{**}$ *est de valeurs dans* $Y$ *, i.e.,* $u^{**}(X^{**}) \subseteq Y$*.*

## 2.2 Opérateur multilinéaires faiblement compact

### 2.2.1 Définitions préliminaires

**Définition 2.11.** Soient $X_1, ..., X_m$ des espaces de Banach. Un opérateur

$$T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y,$$

est dit multilinéaire ou $m$-linéaire s'il est linéaire par rapport à chaque composante. Il est borné (continu) s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x^1, ..., x^m) \in X_1 \times ... \times X_m$, on a

$$\left\|T(x^1, ..., x^m)\right\| \leq C \left\|x^1\right\| ... \|x^m\|.$$

On note $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ l'espace des opérateurs $m$-linéaires bornées qui est Banach dont sa norme est la plus petite constante vérifiant l'inégalité précédente. Elle peut s'exprimer aussi par

$$\|T\| = \sup_{\|x^j\| \leq 1,\ 1 \leq j \leq m} \left\| T(x^1, ..., x^m) \right\|.$$

**Opérateur adjoint**. Pour tout opérateur multilinéaire $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$, on associe l'opérateur adjoint suivant

$$T^* : Y^* \longrightarrow \mathcal{L}(X_1, ..., X_m),$$

qui est défini par

$$y^* \longmapsto T^*(y^*) : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow \mathbb{R},$$

où

$$T^*(y^*)(x^1, ..., x^m) = y^*(T(x^1, ..., x^m)).$$

**Produit tensoriel projectif.** Soient $X_1, ..., X_m$ des espaces de Banach. On note $X_1 \otimes ... \otimes X_m$ le produit tensoriel algébrique de $X_1, ..., X_m$. On définit la norme projective par

$$\|v\|_\pi = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \left\| x_i^j \right\| \right\},$$

où l'infimum porte sur toutes les représentations possibles de $v$ de la forme

$$v = \sum_{i=1}^n x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m.$$

On note $X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$ le produit tensoriel projectif des espaces $X_1, ..., X_m$ i.e. ; le complété de $X_1 \otimes ... \otimes X_m$ pour cette norme. Si $X_1 = ... = X_m = X$ on écrit simplement $\widehat{\otimes}_\pi^m X$.

### 2.2.2 Opérateur linéairisé

Pour tout opérateur multilinéaire $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ on peut associer un opérateur linéaire, appelé linéarisation de $T$, $\widetilde{T} : X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m \longrightarrow Y$ défini par

$$\widetilde{T}(\sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m) = \sum_{i=1}^{n} T(x_i^1, ..., x_i^m).$$

**Proposition 2.12**. *L'opérateurs $\widetilde{T}$ est unique et*

$$\left\| \widetilde{T} \right\| = \|T\| .$$

**Preuve.** L'action de $\widetilde{T}$ sur $u$ est donnée par

$$\left\langle \widetilde{T}, u \right\rangle = \widetilde{T}(u) = \sum_{i=1}^{n} T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \left|\widetilde{T}(u)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} \left\langle T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right), y_i^*\right\rangle\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \left|T\left(x_i^1, ..., x_i^m\right)\right| \\ &\leq \|T\| \sum_{i=1}^{n} \left\|x_i^1\right\| ... \left\|x_i^m\right\| \end{aligned}$$

En prenant l'infimum sur toutes les représentations de $u$, on trouve

$$\left|\widetilde{T}(u)\right| \leq \|T\| \, \|u\|_\pi ,$$

et $\left\| \widetilde{T} \right\| \leq \|T\|$.

Inversement, soit $x^j \subset X_j \, (1 \leq j \leq m)$. On a

$$\begin{aligned}
\left\| T\left(x^1, ..., x^m\right) \right\| &= \sup_{\|y^*\|=1} \left| \left\langle T\left(x^1, ..., x^m\right), y^* \right\rangle \right| \\
&= \sup_{\|y^*\|=1} \left| \left\langle \widetilde{T}\left(x^1 \otimes ... \otimes x^m\right), y^* \right\rangle \right| \\
&= \left\| \widetilde{T}\left(x^1 \otimes ... \otimes x^m\right) \right\| \\
&\leq \left\| \widetilde{T} \right\| \left\| x^1 \otimes ... \otimes x^m \right\| \\
&\leq \left\| \widetilde{T} \right\| \left\| x^1 \right\| ... \left\| x^m \right\|.
\end{aligned}$$

Alors $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ et $\|T\| \leq \left\| \widetilde{T} \right\|$. ■

**Proposition 2.13**. *Pour tous espaces de Banach* $X_1, ..., X_m, Y$, *on a l'identification isométrique*

$$\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y) = \left(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m \widehat{\otimes}_\pi Y^*\right)^*.$$

**Preuve.** Sans perdre sa généralitée, montrons cette identification pour deux espaces, c'est à dire, pour tous espaces de Banach $X, Y$ on a

$$\mathcal{B}(X; Y) = (X \widehat{\otimes}_\pi Y^*)^*.$$

Soit $u \in \mathcal{B}(X; Y)$. On pose l'application suivante

$$\begin{array}{cccc}
\Phi_u & : & X \widehat{\otimes}_\pi Y^* & \longrightarrow & \mathbb{K} \\
 & & v & \longmapsto & \Phi_u(v)
\end{array}$$

avec

$$\begin{aligned}
\Phi_u(v) &= \Phi_u\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i^*\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle u(x_i), y_i^* \right\rangle.
\end{aligned}$$

Montrons que la correspondence $u \leftrightarrow \Phi_u$ établi un isomorphisme isométrique entre les deux espaces.

Soient $u_1, u_2 \in \mathcal{B}(X;Y)$ tels que $\Phi_{u_1} = \Phi_{u_2}$. Montrons que $u_1 = u_2$. Soit $x \in X$. Pour tout $y^* \in Y^*$ on a

$$\Phi_{u_1}(x \otimes y^*) = \Phi_{u_2}(x \otimes y^*),$$

ce qui implique que

$$\langle u_1(x), y^* \rangle = \langle u_2(x), y^* \rangle,$$

donc

$$u_1(x) = u_2(x).$$

Finalement on a $u_1 = u_2$.

Soit maintenant $\Psi \in (X \widehat{\otimes}_\pi Y^*)^*$. On définit un opérateur $u$ par

$$\langle u(x), y^* \rangle = \Psi(x \otimes y^*).$$

Cet opérateur est linéaire, en effet soient $x_1, x_2 \in X$ alors

$$\begin{aligned} \langle u(x_1 + x_2), y^* \rangle &= \Psi((x_1 + x_2) \otimes y^*) \\ &= \Psi(x_1 \otimes y^*) + \Psi(x_2 \otimes y^*) \\ &= \langle u(x_1), y^* \rangle + \langle u(x_2), y^* \rangle \\ &= \langle u(x_1) + u(x_1), y^* \rangle, \end{aligned}$$

alors $u(x_1 + x_2) = u(x_1) + u(x_1)$. Même chose pour la propriété $u(\lambda x) = \lambda u(x)$.

D'autre part, $u$ est unique, en effet, supposons qu'il existe deux opérateurs $u$ et $u'$, alors

$$\langle u(x), y^* \rangle = \Psi(x \otimes y^*) = \langle u'(x), y^* \rangle,$$

donc,

$$\langle (u - u')(x), y^* \rangle = 0$$

alors, on a $u(x) = u(x')$. Finalement, nous avons

$$\Phi(u) = \Phi_u,$$

soit $v \in X\widehat{\otimes}_\pi Y^*$ alors

$$\begin{aligned}
\Phi_u(v) &= \Phi_u(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i^*) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle u(x_i), y_i^* \rangle = \sum_{i=1}^{n} \Psi(x_i \otimes y_i^*) \\
&= \Psi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i^*\right) = \Psi(v).
\end{aligned}$$

Donc

$$\Phi_u = \Psi.$$

Il est facile de voir que $\|\Phi_u\| = \|u\|$. Ce qu'il termine la démonstartion. $\blacksquare$

**Cas particulier**. Le dual de $X_1\widehat{\otimes}_\pi...\widehat{\otimes}_\pi X_m$ s'identifie à l'espace des formes multilinéaires bornées

$$(X_1\widehat{\otimes}_\pi...\widehat{\otimes}_\pi X_m)^* = \mathcal{L}(X_1, ..., X_m).$$

### 2.2.3 Idéaux multilinéaire

Pietsch en 1983 a introduit les idéaux d'opérateurs multilinéaires ainsi que certaines méthodes de construction qui permettent d'engendrer des idéaux multilinéaires à partir d'un idéal linéaire. On donne la définition d'un idéal multilinéaire.

**Définition 2.14. (**Opérateur multilinéaire de rang finie). Un opérateur $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ est de rang finie s'il est somme finie d'opérateurs de la forme

$$T : (x^1, ..., x^m) \longmapsto \varphi_1(x^1)...\varphi_m(x^m)y. \text{ Où } \varphi_j \in X_j^* \ (1 \leq j \leq m) \text{ et } y \in Y.$$

L'espace des opérateurs multilinéaires de rang finie sera noté $\mathcal{L}_f(X_1, ..., X_m; Y)$.

**Définition 2.15.** (*Idéal des opérateurs m-linéaires*). Un idéal des opérateurs multilinéaires (ou multi-idéal) $\mathcal{M}$ est une classe d'opérateurs multilinéaires bornés tels que pour tout $X_1, ..., X_m$ et $Y$ des espaces de Banach on a :

(1) L'ensemble $\mathcal{M}(X_1, ..., X_m; Y)$ est un sous espace de $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ qui contient les opérateurs $m$-linéaires de rang finis.

(2) *Propriété d'idéal* : si $T \in \mathcal{M}(X_1, ..., X_m; Y)$, $u_j \in \mathcal{B}(E_j; X_j)$ et $v \in \mathcal{B}(Y; F)$, alors $v \circ T \circ (u_1, ..., u_m)$ est dans $\mathcal{M}(E_1, ..., E_m; F)$.

De plus, si $\|.\|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^+$ satisfait

(1′) $(\mathcal{M}(X_1, ..., X_m; Y), \|.\|_{\mathcal{M}})$ est un espace normé (Banach)

(2′) $\|A^n : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K};\ A^n(x_1, ..., x_m) = x_1...x_m\|_{\mathcal{M}} = 1$.

(3′) Si $T \in \mathcal{M}(X_1, ..., X_m; Y), u_j \in \mathcal{B}(E_j; X_j), v \in \mathcal{B}(Y; F)$,

$$\|v \circ T \circ (u_1, ..., u_j)\|_{\mathcal{M}} \leq \|v\| \|T\|_{\mathcal{M}} \|u_1\| ... \|u_m\|.$$

Alors $(\mathcal{M}; \|.\|_{\mathcal{M}})$ s'appelle *idéal normé (de Banach) des opérateurs multilinéaires.*

L'idéal des opérateurs multilinéaires $\mathcal{M}$ est dit *symétrique* si $T_S \in \mathcal{M}$ dès que $T \in \mathcal{M}$.

Nous sommes donc sur le point d'introduire la définition des opérateurs multitilinéaires faiblement compact qui est une généralisation naturelle de celle du cas linéaire.

**Définition 2.16**. (Opérateur multilinéair faiblememt compact). Soient $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$. L'opérateur $T$ est faiblememt compact s'il envoie tout ensemble borné sur un ensemble relativement faiblement compact. Autrement dit si $T(B_{X_1} \times ... \times B_{X_m})$ est relativement faiblement compact dans $Y$.

**Notation**. On notera $\mathcal{W}(X_1, ..., X_m; Y)$ l'espace de tous les opérateurs multilinéaires faiblement compacts, c'est un espace de Banach avec la norme des opérateurs.

**Lemme 2.17**. *Soit $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*
(1) *L'opérateur $T$ est faiblement compact.*
(2) *Pour toute suite bornée $(x^j_{i_j}) \in X_J (1 \leq j \leq m)$, la suite $(T((x^1_{i_1})_{i_1}, ..., (x^m_{i_m})_{i_m}))$ admet une sous suite faiblement convergente dans $Y$.*

**Proposition 2.18.** (*Propriété idéal*). *Soit $T \in \mathcal{W}(X_1, ..., X_m; Y)$. Soient $\mathcal{B}(Y; Z)$ et $v_j \in \mathcal{B}(G_j; X_j)(1 \leq j \leq m)$ Alors,*
(1) *L'opérateur $u \circ T \in \mathcal{W}(X_1,...,X_m; Z)$.*
(2) *L'opérateur $T(v_1, ..., v_m)$ est un élément de $\mathcal{W}(G_1, ..., G_m; Y)$.*

**Corollaire 2.19**. *L'espace des opérateurs multilinéaires faiblement compact est un idéal de Banach des opérateurs multilinéaires.*

**Théorème 2.20.** (*Grantmacher m-linéaire*). *Soit $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ et*

$$T^* \in \mathcal{B}(Y^*; \mathcal{L}(X_1, ..., X_m)),$$

*son opérateur adjoint. Alors, $(a) \Leftrightarrow (b)$ où*
$(a)$ *$T$ est faiblement compact.*
$(b)$ *$T^*$ est faiblement compact.*

# Chapitre 3

# Théorèmes de caractérisation et résultats de factorisation

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre on va illustrer des résultats de factorisation des opérateurs linéaires et multilinéaires faiblement compact. Les résultats linéaires jouent un rôle important pour donner des versions non linéaires. Ici on s'interesse au cas multilinéaire dont beaucoup de résutats sont établi à partir de celle du cas linéiare..

## 3.2 Factorisation des opérateurs linéaires faiblement compact

Dans cette partie, on étudie certains résultats célèbres qui visent les opérateurs linéaires faiblement compact. Commençons par le résultat suivant qui considère au même temps une caractérisation des opérateurs linéaires faiblement compact.

**Théorème 3.1**. *Soient $X, Y$ deux espaces de Banach. Soit $u : X \to Y$ un opérateur linéaire borné. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

$(a)$ *$u$ est faiblement compact.*

$(b)$ *$u$ se factorise autour un espace de Banach réflexif, i.e., $\exists G$ un espace de Banach réflexif et deux opérateurs linéaires bornés $v, w$ tels que le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ & \searrow v & \uparrow w \\ & & G \end{array}$$

**Corollaire 3.2**. *Soit $X$ un espace de Banach réflexif. Soient $Y$ un espace de Banach et $u : X \to Y$ un opérateur linéaire borné, alors $u$ est faiblement compact.*

**Preuve**. On considère le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ & \searrow id_X & \uparrow u \\ & & X \end{array}$$

alors, $u$ se factorise par un espace réflexif $X$. D'après le théorème précédent $u$ est faiblement compact. ■

**Remarque 3.3**. Dans le Corollaire précédent, si on suppose l'espace arrivé $Y$ réflexif, on obtient un résultat pareil.

**Proposition 3.4**. *Soit $X$ un espace de Banach. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

$(a)$ *$X$ est réflexif.*

$(b)$ *L'identité $id_X : X \to X$ est faiblement compact.*

**Preuve.** $(a) \Rightarrow (b)$ : Clair d'après le Corollaire 3.2.

$(b) \Rightarrow (a)$ : Supposons que $id_X$ est faiblement compact. *Alors* $id_X(B_X)$ relativement *faiblement compact c'est à dire* $\overline{id_X(B_X)}$ faiblement compact. Nous avons donc

$$\overline{id_X(B_X)} = \overline{B_X}.$$

Par consèquent (Théorème de Kakutani) $X$ est réflexif.

**Corollaire 3.5**. *Soit $X$ un espace de Banach. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

*$(a)$ $X$ est réflexif.*

*$(b)$ Pour tout espace de Banach $Y$ et tout opérateur linéaire borné $u : X \to Y$, $u$ est faiblement compact.*

**Preuve.** $(a) \Rightarrow (b)$ : Immédiate d'après le Corollaire 3.2.

$(b) \Rightarrow (a)$ : On prend $Y = X$ et $u = id_X$ et appliquons la Proposition 3.4, on trouve ce qu'on veut. $\blacksquare$

Notons ici qu'on peut remplacer dans l'énoncé du Corollaire précédent l'espace $X$ par $Y$, on trouve même résultat.

## 3.3 Caractérisation à l'entour des opérateurs $m$-linéaires faiblement compact

Le cas multilinéaire se distingue généralement du cas linéaire et les résultats de factorisation s'effectuent différemment. On distingue deux types de factorisation, le premier type utilise une factorisation autour un seul espace, le deuxième utilise plutôt $n$ espaces de Banach. Chaque types de factorisation ramène des résultats caractérisation spécifiques. Dans ce paragraphe, on étudie les deux types ainsi que les résultats de caractérisation correspondantes.

### 3.3.1 Factorisation du type $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}$

La factorisation des opérateurs multilinéaires se représente en deux variantes. Dans la première variante, on suppose qu'il existe un espace de Banach $G$ ; un opérateur linéaire $u \in \mathcal{B}(G; Y)$ et un opérateur multilinéaire $A \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; G)$ tels que $T$ s'écrit sous la forme

$$T = u \circ A.$$

En d'autre termes, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccccc} X_1 & \times & ... & \times & X_m & \xrightarrow{T} & Y \\ & & & & A \searrow & & u \uparrow \\ & & & & & & G \end{array}$$

Soit $\mathcal{W}$ la classe des opérateurs linéaires faiblement compacts. On note $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ l'espace des opérateurs multilinéaires qui possèdent une factorisation pareille où $u$ est dans $\mathcal{W}(G; Y)$. On munit cette classe par norme suivante

$$\|T\|_{\mathcal{W} \circ \mathcal{L}} = \inf \|u\|_{\mathcal{W}} \|A\|,$$

où l'infimum porte sur toutes les factorisations possibles de $T = u \circ A$ avec $u \in \mathcal{W}(G, Y)$.

Il existe trois méthodes, introduites par Pietsch en 1983, pour construire des idéaux multilinéaires à partir d'un idéal linéaire. Ce sont la méthode de factorisation, la méthode de linéarisation et la méthode de composition. Ici, dans la factorisation de type $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}$, on s'est inspiré l'idée de celle de la méthode composition. Ce qui fait que la Proposition suivante sera immédiate.

**Proposition 3.6**. Soit $\mathcal{W}$ l'idéal linéaire des opérateur faiblement compact. Alors :
$(a)$ L'espace $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}$ est un multi-idéal
$(b)$ Si $\mathcal{W}$ est un idéal de Banach, alors $(\mathcal{W} \circ \mathcal{L}, \|.\|_{\mathcal{W} \circ \mathcal{L}})$ est un multi-idéal de banach.

Le Lemme suivant relie entre un opérateur multilinéaire et son opérateur linéarisé pour le concept de faiblement compact.

**Lemme 3.7.** Soit $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ et $\widetilde{T} \in B(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y)$ sa linéarisation. Alors, les deux propriétés suivantes sont équivalentes.
$(a)$ L'opérateur $T$ est dans $\mathcal{W}(X_1, ..., X_m; Y)$.
$(b)$ L'opérateur $\widetilde{T} \in \mathcal{W}(X_1 \widehat{\otimes}_\pi, ... \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y)$.

**Théorème 3.8.** *Soit $T : X_1 \times ... \times X_m \to Y$ un opérateur multilinéaire. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*
$(a)$ *$T$ est faiblement compact.*
$(b)$ *$T$ se factorise par un espace réfexif, i.e. il existe un espace de Banach $G$ réflexif et $u \in \mathcal{B}(G; Y)$ et opérateur multilinéaire $A \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; G)$ tels que $T = u \circ A$. En d'autres termes*

$$\mathcal{W}(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{W} \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y).$$

**Preuve**. $(a) \Rightarrow (b)$ : Soit $T \in \mathcal{W}(X_1, ..., X_m; Y)$. Alors nous avons

$$T = \widetilde{T} \circ i_m,$$

d'après le Lemme précédent $\widetilde{T}$ est faiblement compact, c'est à dire il se factorise par un espace réflexif, soit $G$. Alors nous avons

$$T = \widetilde{T} \circ i_m = v \circ w \circ i_m,$$

ce qu'il confirme que $T$ est dans $\mathcal{W} \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$.
$(b) \Rightarrow (a)$ : Supposons que $T \in \mathcal{W} \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$, alors $T$ se factorise par

$$T = u \circ A, \text{telle que } u \text{ est faiblement compact}$$

nous avons dans ce cas

$$\widetilde{T} = u \circ \widetilde{A},$$

Par la propriété d'idéal $\widetilde{T}$ est faiblement compact, donc $T$ est faiblement compact par le Lemme précédent. ■

### 3.3.2 Caractérisation $m$-linéaire d'un espace réflexif

Dans cette section, on expose certains résultats de caractérisation des espaces de Banach réflexifs. On comence par le Corollaire suivant.

**Corollaire 3.9**. *Soit $Y$ un espace réflexif. Pour tous $X_1, ..., X_n$ des espaces de Banach et tout opérateur multilinéaire $T : X_1 \times ... \times X_m \to Y$, $T$ est faiblement compact.*

**Preuve**. On applique le Théorème précédent en posant

$$\begin{array}{ccccccc} X_1 & \times & ... & \times & X_m & \xrightarrow{T} & Y \\ & & & & T \searrow & & id_X \uparrow \\ & & & & & & Y \end{array}$$

c'est à dire $T \in \mathcal{W} \circ \mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ donc faiblement compact. ■

**Théorème 3.10.** *Soit $Y$ un espace de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
*$(a)$ L'espace $Y$ est réflexif.*
*$(b)$ Pour tous $X_1, ..., X_m$ des espaces de Banach on a*

$$\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{W}(X_1, ..., X_m; Y).$$

**Preuve**. $(a) \Longrightarrow (b)$ Immédiate d'après le Corollaire 3.9.
$(b) \Longrightarrow (a)$ Soit $1 \leq j \leq m$ : Soit $id_Y : Y \longrightarrow Y$ l'identité de $Y$. On va montrer que $id_Y$

est faiblement compact. Pour $2 \leq j \leq m$ ; on fixe $y^j \in B_Y$ et $y_j^* \in B_Y$ tels que

$$y_j^*(y^j) = 1.$$

D'après $(b)$ ; l'opérateur multilinéaire

$$T = id_Y \otimes y_2^* \otimes ... \otimes y_m^* : Y \times ... \times Y \longrightarrow Y$$

est faiblement compact. Sa linéarisation $\widetilde{T}$ est donc faiblement compact. Posons $v : Y \longrightarrow Y\widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi Y$ définie par

$$v = id_Y \otimes y^2 \otimes ... \otimes y^m.$$

Alors, $id_Y = \widetilde{T} \circ v$ est faiblement compact. La Proposition 3.4 termine la démonstration. ■

### 3.3.3 Factorisation de type $\mathcal{L}(\mathcal{W})$

Dans le deuxième de type de factorisation, on supposera qu'il existe des espaces de Banach $G_j$, des opérateurs linéaires $u_j : X_j \longrightarrow G_j$ et un opérateur multilinéaire $A : G_1 \times ... \times G_m \longrightarrow Y$ tels que

$$T = A(u_1, ..., u_m).$$

En d'autre termes, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccccc} X_1 & \times & ... & \times & X_m & \xrightarrow{T} & Y \\ u_1 \downarrow & & & & u_m \downarrow & \nearrow A & \\ G_1 & \times & ... & \times & G_m & & \end{array}$$

Soit $\mathcal{W}$ l'espace des opérateurs linéaires faiblement compacts. On note $\mathcal{L}(\mathcal{W})(X_1, ..., X_m; Y)$ l'espace de Banach des opérateurs multilinéaires qui admettent une factorisation similaire dont sa norme est donnée par

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{W})} = \inf \|A\| \, \|u_1\|_{\mathcal{W}} ... \|u_m\|_{\mathcal{W}} .$$

où l'infimum porte sur toutes les factorisations possibles de $T = A \circ (u_1, ..., u_m)$ avec $u_j \in \mathcal{W}(X_j; G_j)$.

Notons que dans cette factorisation, on s'est inspiré l'idée de celle de la méthode factorisation qui viens des méthodes de construction. Alors, la Proposition suivante sera immédiate.

**Proposition 3.11**. *Soit $\mathcal{W}$ l'idéal linéaire des opérateurs faiblement compact. Alors :*
$(a)$ *L'espace $\mathcal{L}(\mathcal{W})$ est un multi-idéal*
$(b)$ *Si $\mathcal{W}$ est un idéal de banach, alors $(\mathcal{L}(\mathcal{W}), \|.\|_{\mathcal{L}(\mathcal{W})})$ est un multi-idéal de Banach.*

**Lemme 3.12**. *L'espace $\mathcal{W}(X;Y)$ est injective et fermé dans $\mathcal{B}(X;Y)$, i.e.,*
(1) *Injective : pour tout $u \in \mathcal{B}(X;Y)$ et $i \in \mathcal{B}(Y;Y_0)$ un isométrie, alors,*

$$i \circ u \in \mathcal{W}(X;Y_0) \Longleftrightarrow u \in \mathcal{W}(X;Y)$$

(2) *Fermé : pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{W}(X;Y)$ convergente en norme vers $u$, alors $u \in \mathcal{W}(X;Y)$.*

**Proposition 3.13**. *Soit $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ un opérateur multilinéaire borné. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(1) *L'opérateur $T$ est dans $\mathcal{L}(\mathcal{W})(X_1, ..., X_m; Y)$.*
(2) *Les opérateurs linéaires $T_j : X_j \longrightarrow \mathcal{L}(X_1, \overset{[j]}{\ldots}, X_m; Y)$ définie par*

$$\begin{array}{rcl} x_j & \longmapsto & T_j(x_j) : X_1, \overset{[j]}{\ldots}, X_m \longrightarrow Y \\ (x_1, \overset{[j]}{\ldots}, x_m) & \longmapsto & T_j(x_j)(x_1, \overset{[j]}{\ldots}, x_m) = T(x_1, ..., x_m) \end{array}$$

*sont faiblement compacts.*

**Preuve**. (1) $\Longrightarrow$ (2) : Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{W})(X_1, ..., X_m; Y)$ Alors, $T$ s'écrit sous la forme

$$T = A(u_1, ..., u_m)$$

où $u_j \in \mathcal{W}(X_j; G_j)$ et $A \in \mathcal{L}(G_1, ..., G_m; Y)$. On définit l'opérateur

$$\begin{aligned} \varphi &: G_j \longrightarrow \mathcal{L}(X_1, \overset{[j]}{\dots}, X_m; Y) \\ \varphi(g^j)(x_1, \overset{[j]}{\dots}, x_m) &= A(u_1(x^1), ..., u_j(x^j), ..., u_m(x^m)) \\ &= T(x_1, ..., x_m) \\ &= T_j(x_j)(x_1, \overset{[j]}{\dots}, x_m) \end{aligned}$$

Comme $u_j \in \mathcal{W}(X_j; G_j)$ par la propriété d'idéal, on a

$$T_j \in \mathcal{W}(X_j; \mathcal{L}(X_1, \overset{[j]}{\dots}, X_m; Y)). \quad \blacksquare$$

**Théorème 3.14.** *Soient $X_1, ..., X_m$ des espaces de Banach réflexifs et $Y$ un espace de Banach. Pour tout opérateur multilinéaire borné $T : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow Y$ ils existent des espaces de Banach $G_j$ et $u_j \in \mathcal{W}(X_j; G_j)(1 \leq j \leq m)$ et un opérateur multilinéaire $A \in \mathcal{L}(G_1, ..., G_m; Y)$ tels que*

$$T = A(u_1, ..., u_m).$$

**Preuve.** Pour tout $1 \leq j \leq m$ ; l'espace $X_j$ est réflexif, alors l'opérateur $T_j$ est faiblement compact (définie sur un réflexif). Par la proposition, on trouve ce qu'on veut. $\blacksquare$

**Théorème 3.15.** *Soit $Y$ un espace de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
*$(a)$ Les espaces $X_1, ..., X_m$ sont réflexifs.*

$(b)$ *Pour tout espace de Banach* $Y$ *on a*

$$\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{L}(\mathcal{W})(X_1, ..., X_m; Y).$$

**Preuve**. $(a) \Longrightarrow (b)$ Immédiate d'aprés le Théorème 3.14.

$(b) \Longrightarrow (a)$ Supposons que $T$ est dans $\mathcal{L}(\mathcal{W})(X_1, ..., X_m; Y)$ D'après la Proposition on a pour tout $1 \leq j \leq m$

$$T_j \in \mathcal{W}(X_j; \mathcal{L}(X_1, \overset{[j]}{\ldots}, X_m; Y)).$$

Soient maintenant $1 \leq j \leq m$ et $id_{X_j} : X_j \longrightarrow X_j$ l'identité de $X_j$. On va montrer que $id_{X_j}$ est faiblement compact. Pour $1 \leq k \leq m$ $(k \neq j)$ on fixe $x^k \in B_{X_k}$ et $x_k^* \in B_{X_k^*}$ tels que $x_k^*(x^k) = 1$. posons

$$T = x_1^* \otimes .... \otimes id_{X_j} \otimes ... \otimes x_m^*.$$

Soit l'opérateur multilinéaire

$$v = x^1 \otimes \overset{[j]}{\ldots} \otimes x^m : \mathcal{L}(X_1, \overset{[j]}{\ldots}, X_m; X_j) \longrightarrow X_j,$$

définit par

$$v(\varphi) = x^1 \otimes \overset{[j]}{\ldots} \otimes x^m(\varphi) = \varphi(x^1, ..., x^m).$$

Il est facile de voir que

$$id_{X_j} = v \circ T_j.$$

En effet, pour tout $x^j$ de $X_j$ on a

$$\begin{aligned} id_{X_j}(x^j) &= v \circ T_j(x^j) = v(T_j(x^j)) \\ &= T_j(x^j)(x^1, \overset{[j]}{\ldots}, x^m) = T(x_1, ..., x_m) \\ &= x_1^*(x^1) \otimes ... \otimes id_{X_j}(x^j) \otimes ... \otimes x_m^*(x^m) \\ &= x^j. \end{aligned}$$

Par la propriété d'idéal, $id_{X_j}$ est réflexif, ce qui termine la démonstration. ■

**Remarque 3.16**. En général, la composition d'un multilinéaire borné avec des opérateurs linéaires faiblement compacts n'est pas un multilinéaire faiblement compact. Prenons l'exemple suivant. Soit $X_j (1 \leq j \leq m)$ des espaces réflexifs. Pour tout $1 \leq j \leq m$, l'identité $id_{X_j}$ est faiblement compact. On définit l'opérateur

$$A : X_1 \times ... \times X_m \longrightarrow X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m,$$

par

$$A(x_1, ..., x_m) = x_1 \otimes ... \otimes x_m$$

Posons $T = A(id_{X_1}, ..., id_{X_m})$. Si $T$ est faiblement compact, il en est de même pour sa linéairisation $\widetilde{T}$

$$\widetilde{T} = \widetilde{A} \circ id_{X_1} \otimes ... \otimes id_{X_m} : X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m \longrightarrow X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$$

qui n'est autre que l'identité de $X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$. En effet, soit $u \in X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$ alors

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m$$

Donc,

$$\begin{aligned}\widetilde{A} \circ id_{X_1} \otimes ... \otimes id_{X_m}(\sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m) &= \sum_{i=1}^{n} A(id_{X_1}, ..., id_{X_m})(x_i^1, ..., x_i^m) \\ &= \sum_{i=1}^{n} A(x_i^1, ..., x_i^m) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m \\ &= u.\end{aligned}$$

Ce qui est impossible, car en général le produit projectif des espaces réflexifs n'est pas un espace réflexif.

### 3.3.4 Sur la réflexivité de l'espace des opérateurs multilinéaires

**Corollaire 3.17**. *Soient $X_1, ..., X_m$ des espaces de Banach. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.*
*(a) L'espace $X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$ est réflexif.*
*(b) Pour tout espace de Banach $Y$ nous avons*

$$\mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y\right) = \mathcal{W}\left(X_1, ..., X_m; Y\right).$$

**Preuve**. $(a) \Rightarrow (b)$ : Soit $T \in \mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y\right)$. Si l'espace $X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$ est réflexif, l'opérateur $\widetilde{T}$ devient faiblement compact par le Lemme 3.7, par conséquent $T$ est faiblement compact.
$(b) \Rightarrow (a)$ : On va montrer que l'opérateur identité $id_{X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m}$ est faiblement compact. On pose $Y = X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$ et

$$T : X_1 \times ... \times X_m \rightarrow X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m,$$

un opérateur multilinéaire définie par

$$T(x_1, ..., x_m) = x_1 \otimes ... \otimes x_m,$$

alors il est facile de voir que

$$\widetilde{T} = id_{X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m}.$$

Par $(b)$ l'opérateur $T$ est faiblement compact, par le Lemme 3.7, $\widetilde{T}$ est aussi faiblement compact, par conséquent le produit tensoriel $X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$ est réflexif. $\blacksquare$

**Remarque 3.18**. Si $X$ n'est pas réflexif, pour tout espace de Banach $Y$, le produit projectif $X \widehat{\otimes}_\pi Y$ ne jamais être réflexif. En effet, sinon, on peut construire une forme bilinéaire à partir d'une forme linéaire quelconque de $X$ de la forme $x^* \otimes y^*$ avec $\|y^*\| = 1$. Par un arguement simple on conclut que $x^*$ est faiblement compact.

**Proposition 3.19**. *Soient $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces de Banach. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.*
*(a) L'espace $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ est réflexif.*
*(b) Nous avons*

$$\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{W}(X_1, ..., X_m; Y).$$

**Preuve**. Partons de l'identification suivante

$$\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y) = \left(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m \widehat{\otimes}_\pi Y^*\right)^*,$$

alors, $X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m \widehat{\otimes}_\pi Y^*$ est réflexif si et seulement si $\left(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m \widehat{\otimes}_\pi Y^*\right)^*$ est réflexif si et seulement si pour tout espace de Banach $Z$ nous avons

$$\mathcal{L}(X_1, ..., X_m, Y^*; Z) = \mathcal{W}(X_1, ..., X_m, Y^*; Z).$$

On termine la démonstration par la remerque que

$$\mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m, Y^*; \mathbb{R}\right) = \mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y\right). \quad \blacksquare$$

Nous avons le corollaire suivant.

**Corollaire 3.20**. *Si $\mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y\right)$ est réflexif, alors tous les espaces $X_1, ..., X_m, Y$ sont réflexifs. Contrairement, si l'un de ces espaces est non réflexif alors l'espace*

$$\mathcal{L}\left(X_1, ..., X_m; Y\right) \text{ est non réflexif.}$$

# Bibliographie


[1] Dahmane ACHOUR *Factorisation des opérateurs sous linéaires et géométrie des espaces de Banach.* Thèse de Doctorat en science, Université de Batna, Algérie 2005.

[2] R. Alencar. *Multilinear mappings of nuclear and integral type.* Proc. Amer. Math. Soc. **94**(1),33–38 (1985).

[3] BELAADA Abdelaziz, *Classes de Schatten et opérateurs multilinéaires de Hilbert Schmidt.* Mémoire de Magister, université de M'sila, Algérie, 2011.

[4] R. M. Aron, C. Hervés and M. Valdivia. *Weakly continuous mappings on Banach spaces.* J. Funct. Anal. **52**, 189–204 (1983).

[5] H. A. Braunss. *Multi-ideals with special properties,* Blätter Potsdamer Forschungen1/87, Potsdam, (1987).

[6] Hïm Brezis. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* MASSON Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987

[7] R. C. Blei. *Multilinear measure theory and the Grothendieck factorization theorem.* Proc. London Math.Soc. **56**(3), 529–546 (1988).

[8] G. Botelho. *Ideals of polynomials generated by weakly compact operators*, Note Mat. 25 (2005) 69-102.

[9] G. Botelho, D. Pellegrino and P. Rueda. *On composition ideals of multilinear mappings and homogeneous polynomials*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 43 (2007), 1139–1155

[10] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge. *Absolutely summing operators.* Cambridge University Press, (1995).

[11] A. Defant, K. Floret. *Tensor Norms and Operator Ideals.* North-Holland (1993).

[12] Manuel Gonzalez and Joaquin M. Gutierrez. *Injective factorization of holomorphic mappings.* Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999), no. 6, 1715–1721.

[13] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach Spaces, I and II.* Springer-Verlag, Berlin (1996).

[14] BELLAALA Maatougui, *Extension non linéaire des théorèmes de caractérisation des espaces de Banach.* Mémoire de Magister, université de M'sila, Algérie, 2011.

[15] J. Mujica. *Complex Analysis in Banach Spaces.* Math. Studies, Vol. **120**, North Holland, Amsterdam, (1986).

[16] Nadji Najet, *Factorisation des opérateurs multilinéaires faiblement compacts entre espaces de Banach.* Mémoire de Magister, université de M'sila, Algérie, 2011.

[17] A. Pełczyński. *On weakly compact polynomial operators on B-spaces with Dunford-Pettis property.* Bull.Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys. 11, 371–378 (1963).

[18] A. Pietsch. *Ideals of multilinear functionals* (designs of a theory), Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and their Applications in Theoretical Physics, 185-199. Leipzig. Teubner-Texte, 1983.

[19] Raymound A. Ryan. *Introduction to tensor products of Banach spaces.* Springer Monographs in Mathematics. (2001).

[20] Khalil SAADI. *Les opérateurs multi p-sommant et leurs applications.* Thèse de Doctorat en science, Université de Batna, Algérie 2010.

[21] Abdelmoumen TIAIBA. *Les opérateurs sous linéaires $L_p$-sommant version commutative et non commutative.* Thèse de Doctorat en science, Université de Batna, Algérie 2006.