

# Sommaire

|          |                                                                                                         |           |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 0.1      | Introduction . . . . .                                                                                  | 2         |
| <b>1</b> | <b>Rappels sur l'espace de Hilbert</b>                                                                  | <b>3</b>  |
| 1.1      | Définitions et propriétés générales . . . . .                                                           | 3         |
| 1.2      | Orthogonalité . . . . .                                                                                 | 6         |
| 1.3      | Projection orthogonale sur un sous espace fermé                                                         |           |
| <b>2</b> | <b>Opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert</b>                                                    | <b>10</b> |
| 2.1      | Rappels sur les opérateurs linéaires sur un espace normé . . . . .                                      | 10        |
| 2.2      | Opérateurs adjoints et auto-adjoints . . . . .                                                          | 12        |
| 2.3      | Opérateurs auto-adjoints positifs et unitaires . . . . .                                                | 16        |
| <b>3</b> | <b>Sur la décomposition polaire d'un opérateur inversible</b>                                           | <b>21</b> |
| 3.1      | Valeurs propres d'un opérateur linéaire . . . . .                                                       | 21        |
| 3.2      | Le spectre d'un opérateur auto-adjoint et unitaire d'un espace de Hilbert<br>sur $\mathbb{C}$ . . . . . | 26        |
| 3.3      | Fonctions continues d'un opérateur auto-adjoint et unitaire et la décomp-<br>sition polaire . . . . .   | 33        |

## 0.1 Introduction

La décomposition polaire d'un opérateur linéaire inversible en l'analyse fonctionnelle, occupe une place particulière, puisque la résolution de plusieurs problèmes dans differens domaines de l'analyse fonctionnelle soutient cette décomposition.

Le but de ce travail est de résoudre l'un de ses problèmes, alors on décompose un opérateur linéaire inversible  $T$  défini sur un espace de Hilbert  $H$  dans lui-même, sous la forme  $T = e^{V_1} e^{V_2}$  tel que  $V_1, V_2 \in \mathcal{L}(H)$ , cette décomposition est très importante, dans la théorie des semi-groupes.

Ce mémoire est réparti en trois chapitres dans le premier est un rappels sur les définitions et propriétés générale dans l'espace de Hilbert, orthogonalité et projection orthogonale sur un sous espace fermé.

Dans le second chapitre on donne des rappels sur les opérateurs dans un espace normé, et notamment quelques notions et théorèmes principales sur les opérateurs; adjoints, auto-adjoints, positifs et unitaires.

Dans le dernier chapitre on étudie l'ensemble  $\sigma_P(T)$  des valeurs propres pour lesquelles  $(T - \lambda I)$  n'est pas injectif et nous intéresserons à savoir pour quelles valeurs  $\lambda \in \mathbb{C}$  l'opérateur  $(T - \lambda I) \in \mathcal{L}_r(E)$  telle que  $\mathcal{L}_r(E)$  l'espace des opérateurs réguliers,  $E$  un espace de Banach sur  $\mathbb{C}$  et  $T \in \mathcal{L}(E)$ . Puis, dans le deuxième paragraphe nous étudierons l'ensemble des spectres d'un opérateur auto-adjoint et unitaire, finalement le dernier paragraphe est consacré aux fonctions continues sur le spectre de l'opérateur auto-adjoint et unitaire pour décomposer un opérateur inversible  $T$ , sur un espace de Hilbert  $H$  sous la forme  $T = e^{V_1} e^{V_2}$  tel que  $V_1, V_2 \in \mathcal{L}(H)$  avec  $H$  un espace de Hilbert, en utilisant la décomposition polaire.

# CHAPITRE 1

## Rappels sur l'espace de Hilbert

Dans le premier chapitre de ce mémoire nous exposerons un rappel sur quelques définitions et propriétés générales sur l'espace de Hilbert .

### 1.1 Définitions et propriétés générales

#### Définition 1.1.1

*On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel  $E$  (réel ou complexe) une fonction  $\langle x, y \rangle$  définie sur  $E \times E$  dans  $\mathbb{K}$  (  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$  ) possédant les propriétés suivantes*

$$\mathbf{1)} \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$\mathbf{2)} \quad \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$\mathbf{3)} \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$\mathbf{4)} \quad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$$

$$\mathbf{5)} \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \quad .$$

*où les éléments  $x, y$  et  $z$  appartiennent à  $E$  et le scalaire  $\lambda$  appartient à  $\mathbb{K}$ . Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, est appelé un espace préhilbertien.*

**Exemple**

*a* - Dans l'espace

$$l_2 \times l_2 = \left\{ x/x = (x_n)_{n \geq 1}, x_n \in \mathbb{C}, n = 1, 2, \dots, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : l_2 \times l_2 \rightarrow \mathbb{K}$  donnée par :

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n \times \overline{\eta_n}$$

où  $x = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots\}$  et  $y = \{\eta_1, \eta_2, \dots\}$  est un produit scalaire .

**Théorème 1.1.1 ( Inégalité de cauchy-schwarz)**

*Soit  $E$  un espace préhilbertien, alors pour tout  $x, y \in E$  on a :*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

**Corollaire 1.1.1**

$$\forall x, y \in E \text{ on a : } \sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

**Corollaire 1.1.2**

*Dans un espace préhilbertien  $E$ , l'application  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ , donnée par*

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}, \text{ pour tout } x \in E$$

*est une norme pour  $E$ .*

**Théorème 1.1.2**

*Le produit scalaire est une fonction continuée sur  $E \times E$ , par rapport à la norme induite.*

**Théorème 1.1.3**

Dans l'espace préhilbertien,  $\forall x, y \in E$  on a :

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \\ \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 &= 2(\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle) \\ \langle x, y \rangle &= \frac{1}{4} [\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 + i(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2)]\end{aligned}$$

**Théorème 1.1.4**

Soit  $E$  un espace normé,  $E$  est un espace préhilbertien si et seulement si pour tout  $x, y \in E$  on a :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

**Exemple**

L'espace  $\mathbb{C}^n$ , muni de la norme  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$  est un espace préhilbertien puisque pour tout  $x, y \in \mathbb{C}^n$  on a :

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^2 + \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 = 2 \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right) \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)\end{aligned}$$

**Définition 1.1.2**

On appelle espace de Hilbert un espace préhilbertien complet.

**Exemple**

$\mathbb{C}^n, \mathbb{R}^n, l^2$  sont des espaces de Hilbert.

## 1.2 Orthogonalité

### Définition 1.2.1

Soit  $H$  un espace de Hilbert, deux vecteurs  $x, y \in H$  sont orthogonaux si  $\langle x, y \rangle = 0$  et on note  $x \perp y$ .

### Propriété 1.2.1

Soit  $H$  un espace de Hilbert sur le corps  $\mathbb{K}$ , alors on a :

- 1)  $0 \perp x$  pour tout  $x \in H$
- 2)  $x \perp x_i$  et  $\lambda_i \in \mathbb{K}, i = 1, 2, \dots, n \implies x \perp \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$
- 3)  $x \perp x \implies x = 0$
- 4) si  $\langle x_i, y_j \rangle = 0, i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n$ , alors :

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$$

### Définition 1.2.2

Considérons deux ensembles  $A_1, A_2$  non vides d'un espace de Hilbert  $H$ . Nous disons que  $A_1$  est orthogonale à  $A_2$ , noté par  $A_1 \perp A_2$ , si pour tout  $x \in A_1$  et pour tout  $y \in A_2$  on a  $x \perp y$ .

### Théorème 1.2.3

Si  $A$  est un ensemble non vide d'un espace de Hilbert  $H$ , alors

$$A^\perp = \{x, x \in H \text{ et } x \perp A\}$$

est un sous-espace vectoriel fermé de  $H$ . S'appelle complément orthogonal de  $A$ .

### Remarque

- 1) si  $\Phi \neq A_1 \subset A_2$  alors  $A_2^\perp \subset A_1^\perp$

- 2)  $A^\perp = [A]^\perp = \overline{[A]}^\perp$
- 3)  $A \cap A^\perp = \{0 \text{ ou } \Phi\}$
- 4)  $H^\perp = \{0\}$
- 5)  $A^\perp = \{0\} \iff \overline{[A]} = H$

## 1.3 Projection orthogonale sur un sous espace fermé

### Théorème 1.3.1

Soient  $H$  un espace de Hilbert ,  $A \subset H$  un ensemble non vide convexe et fermé et  $x_0 \in H \setminus A$ . Alors il existe un et seulement un  $y_0 \in A$ , tel que

$$\|x_0 - y_0\| = \inf_{y \in A} \{\|x_0 - y\|\}$$

### Corollaire 1.3.1

Soit  $H_1$  un sous espace fermé d'un espace de Hilbert  $H$ . Alors il existe pour tout  $x \in H$  fixé, un seul  $y_0(x) \in H_1$ , tel que

$$\|y_0 - x\| = \inf_{y \in H_1} \{\|y - x\|\}$$

### Théorème 1.3.2

Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $H_1$  un sous-espace fermé de  $H$ . Un élément  $y_0 \in H_1$  satisfait à l' inégalité

$$\|x - y_0\| \leq \|x - y\| , \text{ pour tout } y \in H_1.$$

si et seulement si  $x - y_0 \perp H_1^\perp$ .

### Corollaire 1.3.2

Soit  $H_1$  un sous espace fermé d'un espace de Hilbert  $H$ , et soit  $x \in H$ . Alors il existe un et seulement un  $y_0 \in H_1$  tel que  $x - y_0 \perp H_1$  et  $\|x - y_0\| \leq \|x - y\|$ , pour tout  $y \in H_1$ . On appelle cet élément la projection orthogonale de  $x$  sur  $H_1$  et l'on note  $y_0 = P(x)$ .

### Théorème 1.3.3

Soient  $H$  un espace de Hilbert,  $H_1$  un sous-espace fermé de  $H$  et  $P$  la projection orthogonale de  $H$  sur  $H_1$ , alors :

- 1)  $P(\alpha x + \beta y) = \alpha P(x) + \beta P(y)$ , pour tout  $x, y \in H$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ .
- 2)  $P \circ P = P^2 = P$
- 3)  $\|P(x)\| \leq \|x\|$  pour tout  $x \in H$ .

### Théorème 1.3.4 ( Décomposition orthogonale)

Si  $H_1$  est un sous espace fermé d'un espace de Hilbert  $H$ , alors :

$$H = H_1 \oplus H_1^\perp$$

### Définition 1.3.1

Un ensemble non vide  $A$  d'un espace de Hilbert est un système orthogonal si pour tout  $x, y \in A$ ,  $x \neq y$  on a  $x \perp y$ .

### Définition 1.3.2

Un ensemble  $\{e_i ; i \in I\}$  d'un espace de Hilbert  $H$  est un système orthonormal si :

$$\begin{cases} \langle e_i, e_j \rangle = 0 & \text{si } i \neq j \\ \langle e_i, e_j \rangle = 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

### Exemple

Dans l'espace de Hilbert  $H = L^2(\frac{dt}{2\pi})$  sur  $[-\pi, \pi]$ , l'ensemble  $E = \{e^{int}; n \in \mathbb{Z}\}$  est un



système orthonormal.

### **Théorème 1.3.5**

Soit  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  un système orthonormal fini dans l'espace de Hilbert  $H$ , alors, pour tout  $x \in H$  :

$$\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \leq \|x\|^2 \quad \alpha_k = \langle x, e_k \rangle, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

### **Théorème 1.3.6 (Inégalité de Bessel)**

Soit  $E = \{e_i, i \in \mathbb{N}\}$  un système orthonormal dans un espace de Hilbert  $H$ , alors pour tout  $x \in H$ , on a :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \leq \|x\|^2 \quad \alpha_k = \langle x, e_k \rangle ; k = 1, 2, \dots$$

### **Théorème 1.3.7 (Egalité de Parseval)**

Soit  $E = \{e_k, k \in \mathbb{N}\}$  un système orthonormal dans un espace de Hilbert  $H$ , alors pour tout  $x \in H$  on a :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \|x\|^2 \iff \overline{[(e_{k \geq 1})]} = H$$

Telle que  $\alpha_k = \langle x, e_k \rangle, k = 1, 2, \dots$

### **Corollaire 1.3.3**

Soit  $E = \{e_k, k \in \mathbb{N}\}$  un système orthonormal dans un espace de Hilbert  $H$ , alors :

$$1 - \forall x, y \in H \text{ on a } \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\langle e_k, x \rangle} \langle y, e_k \rangle$$

$$2 - \forall x \in H \text{ on a } x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$$

# CHAPITRE 2

## Opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert

Dans ce chapitre nous étudierons les opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert et ses propriétés, et nous intéresserons spécialement aux opérateurs auto-adjoints et unitaires.

### 2.1 Rappels sur les opérateurs linéaires sur un espace normé

#### Théorème 2.1.1

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés, alors *l'opérateur linéaire  $T \in L(E, F)$  est continu sur  $E$ , si et seulement s'il est borné.*

#### Théorème 2.1.2

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces normés. *L'application  $\|\cdot\| : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathbb{R}$ , donnée par :*

$$\|T\| = \sup \{ \|T(x)\|_F ; \|x\|_E \leq 1 \}$$

*est une norme pour  $\mathcal{L}(E, F)$ . De plus on a :*

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$

### **Théorème 2.1.3**

*Soient  $E$  un espace normé et  $F$  un espace de Banach, alors  $\mathcal{L}(E, F)$  est un espace de Banach.*

### **Définition 2.1.1**

*Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach, l'opérateur  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  est inversible s'il existe  $g \in \mathcal{L}(E, F)$ , telle que :*

$$gf = I_E \quad \text{et} \quad fg = I_F$$

**Notation :** L'opérateur  $g$  s'appelle l'opérateur inverse de  $f$ , noté par  $f = g^{-1}$

### **Théorème 2.1.3**

*Soit  $T \in L(E, F)$ , l'opérateur inverse  $T^{-1}$  existe est continu sur  $TE \subset F$  , si et seulement si :*

$$\exists k > 0 \quad / \quad \forall x \in E, \quad \|T(x)\| \geq k \|x\|$$

### **Théorème 2.1.4**

*Soit  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ , telle que  $E, F$  deux espaces de Banach et  $T$  bijectif, alors  $T^{-1} \in \mathcal{L}(E, F)$ .*

### **Définition 2.1.2**

*Soit  $E$  un espace de Banach, un opérateur  $T \in \mathcal{L}(E)$  est régulier si :*

$$1) TE = E$$

2)  $T^{-1}$  existe sur  $E$  et  $T^{-1} \in \mathcal{L}(E)$

**Notation :** L'ensemble d'opérateurs réguliers sur  $E$  est noté par  $\mathcal{L}_r(E)$ .

### **Théorème 2.1.5**

Soient  $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_r(E)$ , alors  $T_1 \circ T_2 \in \mathcal{L}_r(E)$  et  $\lambda T_1 \in \mathcal{L}_r(E)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

**Remarque :** L'ensemble  $\mathcal{L}_r(E)$  n'est pas fermé.

### **Théorème 2.1.6**

Soit  $T \in \mathcal{L}(E)$  où  $E$  est un espace de Banach on a :

- 1) Si  $\|T\| \leq 1$ , alors  $I - T \in \mathcal{L}_r(E)$  et  $(I - T)^{-1} = \sum_{k \geq 0} T^k$
- 2) Si  $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_r(E)$  tel que  $T_1 \in \mathcal{L}_r(E)$  et  $\|T_1 - T_2\| \leq \frac{1}{\|T_1^{-1}\|}$ , alors  $T_2 \in \mathcal{L}_r(E)$ .
- 3) Si  $T_1 \circ T_2 \in \mathcal{L}_r(E)$  et  $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$ , alors  $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_r(E)$ .

## **2.2 Opérateurs adjoints et auto-adjoints**

### **Théorème 2.2.1**

Soit  $H$  un espace de Hilbert et soit  $\mathcal{L}(H)$  l'espace de Banach des opérateurs linéaires continus. Pour tout  $T \in \mathcal{L}(H)$  il existe un et un seul opérateur  $T^* \in \mathcal{L}(H)$  tel que

- 1)  $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$  pour tout  $x, y \in H$
- 2)  $(T^*)^* = T$
- 3)  $\|T\| = \|T^*\|$

**Notation:** l'opérateur  $T^*$  est appelé l'adjoint de  $T$ .

### **Exemple**

Soient l'espace de Hilbert  $H = L_2([a, b])$  et l'opérateur integrale  $A$  défini sur  $H$  dans lui-même comme suite :

$$Ax = y \text{ / } y(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)ds$$

tel que  $K(t, s)$  est une fonction continue sur  $[a, b] \times [a, b]$ .

Pour tout  $x, z \in L_2([a, b])$  on a :

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= \int_a^b \left( \int_a^b K(t, s)x(s)ds \right) \overline{z(t)}dt \\ &= \int_a^b x(s) \overline{\left( \int_a^b K(t, s)z(t)dt \right)} ds = \langle x, A^*y \rangle \text{ / } A^*z = \int_a^b \overline{K(t, s)}z(t)dt \end{aligned}$$

**Propriété 2.2.1** Soit  $A, B \in \mathcal{L}(H)$  on a :

1.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$  on a  $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha}A^* + \overline{\beta}B^*$
2.  $(AB)^* = B^*A^*$ .
3. Si  $A^{-1}$  existe, alors  $(A^*)^{-1}$  existe et de plus on a  $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$
4.  $I^* = I$
5.  $\ker A^* = (\text{Im } gA)^\perp$
6.  $(\text{Im } gA^*)^\perp = \ker A$

**Définition 2.2.1**

L'opérateur  $T \in \mathcal{L}(H)$  s'appelle *auto-adjoint* si  $T = T^*$  i.e  $T$  est *auto-adjoint* si et seulement si :

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \text{ pour tout } x, y \in H$$

**Notation :** Notons par  $A(H)$  l'ensemble des opérateurs auto-adjoints sur l'espace de Hilbert  $H$ .

### **Théorème 2.2.2**

*Si  $T$  un opérateur auto-adjoint alors :*

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, x \rangle|$$

### **Preuve**

On pose

$$\alpha_T = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, x \rangle|$$

D'après l'inégalité de Cauchy-schwarz

$$|\langle Tx, x \rangle| \leq \|Tx\| \|x\| \leq \|T\| \implies \alpha_T \leq \|T\| \dots\dots\dots (1)$$

Pour tout  $x, (\|x\| \leq 1)$  on a :

$$\begin{aligned} |\langle Tx, x \rangle| \leq \alpha_T &\implies \left| \left\langle T \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \right| \leq \alpha_T \quad ; x \neq 0 \\ &\implies |\langle Tx, x \rangle| \leq \alpha_T \|x\|^2 \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

On d'autre part pour tout  $x, y \in H$  on a :

$$\begin{aligned} \langle T(x+y), x+y \rangle &= \langle Tx, x \rangle + \langle Tx, y \rangle + \overline{\langle Tx, y \rangle} + \langle Ty, y \rangle \\ &= \langle Tx, x \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle Tx, y \rangle + \langle Ty, y \rangle \end{aligned}$$

De la même méthode on trouve :

$$\langle T(x - y), x - y \rangle = \langle Tx, x \rangle - 2 \operatorname{Re} \langle Tx, x \rangle + \langle Ty, y \rangle$$

on a donc

$$4 \operatorname{Re} \langle Tx, x \rangle = \langle T(x + y), x + y \rangle - \langle T(x - y), x - y \rangle .$$

D'après (2) et la loi du pralylogramme on a :

$$\begin{aligned} 4 |\operatorname{Re} \langle Tx, x \rangle| &\leq |\langle T(x + y), x + y \rangle| + |\langle T(x - y), x - y \rangle| \\ &\leq \alpha_T (\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2) \\ &\leq 2\alpha_T (\|x\|^2 + \|y\|^2) \end{aligned}$$

et donc pour tout  $x, y \in H$  on a

$$|\operatorname{Re} \langle Tx, x \rangle| \leq \frac{1}{2} \alpha_T (\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Si  $y = \frac{\|x\|}{\|Tx\|} Tx \not\sim Tx \neq 0$  on a :

$$\|x\| = \|y\| \text{ et } \operatorname{Re} \left\langle Tx, \frac{\|x\|}{\|Tx\|} Tx \right\rangle = \frac{\|x\|}{\|Tx\|} \langle Tx, Tx \rangle = \|Tx\| \leq \alpha_T \|x\|$$

d'où

$$\|T\| \leq \alpha_T \dots\dots (3)$$

d'après (1) et (3) on trouve  $\|T\| = \alpha_T$

**Corollaire 2.2.1** Si  $T \in A(H)$  alors :

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, x \rangle| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle| = \max(|m_T|, |M_T|)$$

telle que  $m_T = \inf \{ \langle Tx, x \rangle, \|x\| = 1 \}$  et  $M_T = \sup \{ \langle Tx, x \rangle, \|x\| = 1 \}$ .

**Propriété 2.2.2** Si  $T, G \in A(H)$ , alors on a :

1.  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$  on a  $\alpha T + \beta G \in A(H)$
2. si  $TG = GT$ , alors  $TG \in A(H)$
3.  $\forall x \in H, \langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$
4.  $T^* \circ T, T \circ T^* \in A(H)$  pour tout  $T \in A(H)$
5. Si  $T \in A(H)$ , alors  $T^n \in A(H)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . ( $T^0 = I$ )

## 2.3 Opérateurs auto-adjoints positifs et unitaires

### Définition 2.3.1

Un opérateur  $T \in A(H)$  est positif noté par  $T \geq 0$  si :

$$\langle Tx, x \rangle \geq 0 \text{ pour tout } x \in H$$

### Exemple

1- Pour tout  $T \in \mathcal{L}(H)$  on a  $T^* \circ T \geq 0$  et  $T \circ T^* \geq 0$ . En effet

$$\langle T^* \circ T(x), x \rangle = \langle Tx, Tx \rangle = \|Tx\|^2 \geq 0$$

2-  $I \geq 0$ . Puisque pour tout  $x \in H, \langle I(x), x \rangle = \|x\|^2 \geq 0$ .

3- Si  $T \geq 0, G \geq 0$  et  $\alpha, \beta \geq 0$ , alors  $\alpha T + \beta G \geq 0$ . Puisque :

$$\langle (\alpha T + \beta G)x, x \rangle = \alpha \langle Tx, x \rangle + \beta \langle Gx, x \rangle \geq 0, \text{ pour tout } x \in H$$



**Notation:** On dit que  $T$  est plus grand que  $G$  et on note  $T \geq G$ , si  $T - G \geq 0$ .

**Théorème 2.3.1**

Soit  $T \in A(H)$  et soient  $m_T = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$  et  $M_T = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$ , alors :

i)  $T \geq 0 \iff m_T \geq 0$

ii) Si  $T \geq 0$ , alors  $m_T I \leq T \leq M_T I$

**Preuve**

i)  $\implies$  ] (Evident)

$\Leftarrow$  ] Pour tout  $x \in H \setminus \{0\}$  on a :

$$\langle Tx, x \rangle = \|x\|^2 \left\langle T \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \geq \|x\|^2 m_T = \langle m_T I x, x \rangle$$

d'où

$$T - m_T I \geq 0$$

ii) Nous avons pour tout  $x \in H$  :

$$\langle Tx, x \rangle \leq \|T\| \|x\|^2 = \|T\| \langle x, x \rangle \dots (1)$$

Mais si  $T \geq 0$  alors  $m_T \geq 0$ , donc on a

$$\|T\| = M_T$$

Et de (1) on a

$$T \leq M_T I$$

D'autre part pour tout  $x \in H \setminus \{0\}$

$$\langle Tx, x \rangle = \|x\|^2 \left\langle T \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \geq \|x\|^2 m_T = \langle m_T I x, x \rangle$$

Et donc on a

$$m_T I \leq T$$

### Définition 2.3.2

Soit  $H$  un espace de Hilbert. Une application  $T : H \rightarrow H$  est unitaire si

- 1)  $TH = H$  i.e  $T$  est surjectif.
- 2)  $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ , pour tout  $x \in H$ .

### Théorème 2.3.2

Soit  $T$  une application unitaire. Alors  $T$  est linéaire et de plus on a :

$$\|T\| = 1$$

### Preuve

Montrons d'abord que  $T$  est linéaire. En effet, pour tout  $x, y, z \in H; \alpha, \beta \in \mathbb{k}$ , nous avons

$$\begin{aligned} \langle T(\alpha x + \beta y) - \alpha Tx - \beta Ty, Ty \rangle &= \langle T(\alpha x + \beta y), Ty \rangle - \alpha \langle Tx, Ty \rangle - \beta \langle Ty, Ty \rangle \\ &= \langle \alpha x + \beta y, y \rangle + \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Donc on a  $T(\alpha x + \beta y) - \alpha Tx - \beta Ty \perp H$  ce que implique que :

$$T(\alpha x + \beta y) - \alpha Tx - \beta Ty = 0 \text{ i.e } T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$$

Pour  $x = y$  on a

$$\|Tx\| = \|x\| \implies \|T\| = 1 \text{ .}\square$$

**Notation:** Notons par  $U(H)$  l'ensemble des opérateurs unitaires sur  $H$

### **Théorème 2.3.3**

*Un opérateur unitaire  $T$  est régulier. De plus  $T^{-1} \in U(H)$ .*

#### **Preuve**

Pour tout  $x \in H$  on a

$$Tx = 0 \implies 0 = \|Tx\| = \|x\| = 0 \implies x = 0$$

donc l'opérateur  $T^{-1}$  existe, et  $T^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ .

Puisque  $T^{-1}H = H$  on a  $T^{-1}$  est surjectif. Il nous reste à montrer que  $T^{-1}$  satisfait

ii). Pour tout  $x \in H$  on a :

$$\langle x, y \rangle = \langle T(T^{-1}x), T(T^{-1}y) \rangle = \langle T^{-1}x, T^{-1}y \rangle \text{ .}$$

### **Théorème 2.3.4**

*Soit un opérateur  $T \in \mathcal{L}(H)$  on a :*

$$T \in U(H) \iff T^{-1} = T^*$$

#### **Preuve**

$\implies$  ] Soit  $T \in U(H)$ . D'après le théorème 2.3.3 on a  $T^{-1} \in U(H)$ , donc nous avons pour tout  $x, y \in H$  :

$$\langle x, T^*y \rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle Tx, T(T^{-1}y) \rangle = \langle x, T^{-1}y \rangle$$

Donc on a :

$$\langle x, (T^* - T^{-1})y \rangle = 0 \text{ pour tout } x \in H$$

Pour  $x = (T^* - T^{-1})y$  :

$$\|(T^* - T^{-1})y\| = 0 \text{ pour tout } y \in H$$

D'où

$$T^* = T^{-1}$$

$\Leftarrow$  ] Si  $T^{-1} = T^*$ , alors  $T^{-1}$  défini sur  $H$  et donc  $TH = H$ .

En d'autre part, pour tout  $x, y \in H$

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, T^*(Ty) \rangle = \langle x, T^{-1}(Ty) \rangle = \langle x, y \rangle$$

### **Théorème 2.3.5**

*Un opérateur unitaire  $T \in U(H)$  est auto-adjoint, si et seulement si  $T^2 = I$ .*

#### **Preuve**

Si  $T$  auto-adjoint, alors

$$T = T^* = T^{-1} \implies T^2 = I .$$

Inversement

si  $T^2 = I$ , alors  $T^{-1} = T$  et donc  $T^* = T^{-1} = T$

# CHAPITRE 3

## Sur la décomposition polaire d'un opérateur inversible

Dans ce dernier chapitre on va décomposer un opérateur linéaire inversible  $T$  défini sur un espace de Hilbert  $H$ , sous la forme  $T = e^{V_1} e^{V_2}$  tel que  $V_1$  et  $V_2$  sont deux opérateurs linéaires continus sur  $H$ , en utilisant les théories des spectres d'un opérateur auto-adjoint et unitaire et la décomposition polaire.

### 3.1 Valeurs propres d'un opérateur linéaire

Soit  $E$  un espace normé sur le corps  $\mathbb{C}$ .

#### Définition 3.1.1

Un nombre  $\lambda \in \mathbb{C}$  est une valeur propre de  $T \in L(E)$  s'il existe un vecteur  $x \in E \setminus \{0\}$  tel que :

$$(T - \lambda I)x = T_\lambda x = 0$$

Chaque vecteur  $x \neq 0$  qui satisfait cette équation s'appelle vecteur propre  $T \in \mathcal{L}(E)$ .

**Notation :** Nous notons par  $\sigma_P(T)$  l'ensemble de valeurs propres de  $T$ .

**Théorème 3.1.1**

Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  et soit  $E_\lambda = \{x \in E, T_\lambda x = 0\}$ . L'ensemble  $E_\lambda$  est un sous-espace invariant par rapport à  $T$ , i.e  $T_\lambda E_\lambda \subset E_\lambda$ . De plus  $E_\lambda$  est fermé si  $T \in \mathcal{L}(E)$ .

**Preuve**

Notons d'abord que  $E_\lambda \neq 0$ , parce qu'au moins  $0 \in E_\lambda$ . Soient maintenant  $x_1, x_2 \in E_\lambda$ , alors

$$T_\lambda x_1 = T_\lambda x_2 = 0$$

d'où pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2) = 0$$

et  $E_\lambda$  est un sous espace vectoriel de  $E$ .

Soit  $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \subset E_\lambda$  et supposons que  $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$  si  $n \rightarrow \infty$  alors

$$Tx_n = x_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

puisque  $T$  est continu, on obtient

$$Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = 0$$

donc  $x \in E_\lambda$  et  $E_\lambda$  est fermé.

Finalement montrons que  $x \in E_\lambda$  implique  $Tx \in E_\lambda$ .

$$x \in E_\lambda \implies Tx = \lambda x \implies T(Tx) = T(\lambda x) = \lambda T(x)$$

d'où  $Tx \in E_\lambda$ .

**Définition 3.1.2**

*Si  $\lambda \in \mathbb{C}$  est une valeur propre de  $T$ , i.e  $E_\lambda \neq \{0\}$ , alors le sous espace  $E_\lambda$  s'appelle l'espace propre de  $T$  par rapport à  $\lambda$ .*

**Théorème 3.1.2**

$$\lambda \in \sigma_P(T) \iff T_\lambda \text{ n'est pas injectif sur } E$$

**Preuve :**  $\implies ]$

Soit  $\lambda \in \sigma_P(T) \implies \exists x \in E \setminus \{0\}$  tel que  $T_\lambda x = 0$

$$\implies \ker T_\lambda \neq \{0\}$$

$$\implies T_\lambda \text{ n'est pas injectif}$$

$\Leftarrow ]$

$$T_\lambda \text{ n'est pas injectif} \implies \exists x \in E \setminus \{0\} \text{ tel que } T_\lambda x = 0$$

$$\implies E_\lambda \neq \{0\} \implies \lambda \in \sigma_P(T) .$$

**Théorème 3.1.3**

*Soit  $T \in \mathcal{L}(E)$ , alors les valeurs propres de  $T$  sont dans la boule fermée  $\overline{B}(0, \|T\|)$   
i.e :*

$$\sigma_P(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq \|T\|\}$$

**Preuve**

Soit  $\lambda \in \sigma_P(T)$ , alors  $\exists x \in E \setminus \{0\}$  tel que

$$Tx = \lambda x \implies |\lambda| \|x\| = \|Tx\| \leq |\lambda| \|T\| \|x\| \implies |\lambda| \leq \|T\|.$$

### **Théorème 3.1.4**

Soit  $H$  un espace de Hilbert sur  $\mathbb{C}$  et soit  $T \in \mathcal{L}(H)$ , alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  on a :

$$E_\lambda = ((T^* - \bar{\lambda}I)H)^\perp$$

### **Preuve**

En effet,  $x \in E_\lambda$  si et seulement si pour tout  $y \in H$

$$0 = \langle T_\lambda x, y \rangle = \langle x, T_\lambda^* y \rangle$$

donc si et seulement si  $x \perp (T^* - \bar{\lambda}I)H$

### **Corollaire 3.1.1**

Soient  $H$  un espace de Hilbert sur  $\mathbb{C}$  et  $T \in \mathcal{L}(H)$ , alors :

$$\lambda \in \sigma_P(T) \iff \overline{(T^* - \bar{\lambda}I)H} \neq H$$

### **Preuve**

$\implies$  ] On suppose que  $\lambda \in \sigma_P(T)$  et  $\overline{T_\lambda^* H} = H$ , alors  $\lambda \in \sigma_P(T) \subset \mathbb{C}$  donc d'après le théorème 3.1.3 on a :

$$E_\lambda = (T_\lambda^* H)^\perp \implies E_\lambda^\perp = \left( (T_\lambda^* H)^\perp \right)^\perp = \overline{T_\lambda^* H}$$

En d'autres part  $E_{\bar{\lambda}}$  est une sous espace fermé donc

$$H = E_\lambda^\perp \oplus E_\lambda = E_{\bar{\lambda}}$$



D'où

$$E_\lambda = \{0\} . \text{ Contradiction .}$$

$$\Longleftarrow ] \quad \overline{T_\lambda^* H} \neq H \implies H \neq E_\lambda^\perp \implies E_\lambda^\perp \oplus E_\lambda \neq E_\lambda^\perp \implies E_\lambda \neq \{0\} \implies \lambda \in \sigma_P(T)$$

### Définition 3.1.2

Un nombre  $\lambda \in \mathbb{C}$  est régulier par rapport à  $T \in \mathcal{L}(E)$ , si  $T_\lambda \in \mathcal{L}_r(E)$ . L'ensemble de valeurs régulières s'appelle la résolvante de  $T$  et est noté par  $R(T)$ .

### Définition 3.1.3

Un nombre  $\lambda \in \mathbb{C}$  appartient au spectre de  $T$  noté par  $\sigma(T)$ , si  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus R(T)$ .

### Théorème 3.1.5

$$\text{Si } |\lambda| > \|T\|, \text{ alors } \lambda \in R(T) .$$

#### Preuve

Posons  $T_1 = \frac{1}{|\lambda|} \|T\|$ , alors  $\|T_1\| = \frac{\|T\|}{|\lambda|} < 1$ . Donc l'opérateur invers  $(T_1 - I)^{-1} = (\frac{1}{\lambda} T - I)^{-1}$  existe et il est borné, donc  $\lambda \in R(T)$ .

### Corollaire 3.1.2

Si  $\lambda \in \sigma(T)$ , alors  $|\lambda| \leq \|T\|$  i.e

$$\sigma(T) \subset \{\lambda; |\lambda| \leq \|T\|\}$$

### Théorème 3.1.6

Soient  $\lambda \in R(T)$  et  $\eta \in \mathbb{C}$ , si  $|\lambda - \eta| < \frac{1}{\|(T - \lambda I)^{-1}\|}$ , alors  $\lambda \in R(T)$ .

#### Preuve

En effet

$$\|(T - \lambda I) - (T - \eta I)\| = |\lambda - \eta| \leq \frac{1}{\|(T - \lambda I)^{-1}\|}$$

donc d'après le théorème 3.1.4 on a  $\lambda \in R(T)$ .

### Corollaire 3.1.3

*l'ensemble  $\sigma(T)$  est fermé dans  $\mathbb{C}$ .*

#### Preuve

Soit  $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T) = R(T)$ , alors  $T_{\lambda_0} \in \mathcal{L}_r(T)$ .

D'après le corollaire 3.1.5 si :

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|T_{\lambda_0}^{-1}\|}$$

alors  $T_\lambda$  est un opérateur inversible, i.e  $\lambda \in R(T)$ , et donc on a

$$\lambda_0 \in B\left(\lambda_0, \frac{1}{\|T_{\lambda_0}^{-1}\|}\right) \subset R(T)$$

d'où  $\lambda_0$  est un point intérieur dans  $R(T)$ . Donc  $\sigma(T)$  ensemble fermé.

## 3.2 Le spectre d'un opérateur auto-adjoint et unitaire d'un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$

### Théorème 3.2.1

*Soient  $T \in A(H)$  et  $\lambda$  une valeur propre de  $T$ , i.e  $\lambda \in \sigma_P(T)$ , alors  $\lambda \in \mathbb{R}$ .*

#### Preuve

- Soit  $\lambda \in \sigma_P(T)$  et soit  $x \neq 0$  un vecteur propre  $x \in E_\lambda$ , alors

$$\langle Tx, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \|x\|^2$$

et puisque  $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$  on a  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### Corollaire 3.2.1

Soient  $T \in A(H)$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Alors  $E_\lambda = [(T - \lambda I) H]^\perp$ .

### Preuve

Soit  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} g\lambda \neq 0\}$ , alors  $\lambda, \bar{\lambda} \notin \sigma_P(T)$  (de 3.2.1) donc on a :

$$H = E_\lambda^\perp = E_{\bar{\lambda}}^\perp \quad (\text{Théorème 3.1.1})$$

D'où

$$H^\perp = \{0\} = E_\lambda = E_{\bar{\lambda}} = [(T - \lambda I) H]^\perp \quad (E_\lambda \text{ sous espace fermé})$$

Si  $\operatorname{Im} g\lambda = 0$ , alors  $\bar{\lambda} = \lambda$  donc d'après le théorème 2.2.5 on a :

$$E_\lambda = ((T - \bar{\lambda} I) H)^\perp = ((T - \lambda I) H)^\perp = [(T - \lambda I) H]^\perp$$

### Théorème 3.2.2

Soient  $T \in A(H)$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ , alors on a :

$$\lambda \in \sigma_P(T) \iff \overline{(T - \lambda I) H} \neq H$$

### Preuve

$\implies$  ] On suppose que  $\lambda \in \sigma(T)$  et  $\overline{(T - \lambda I) H} = H$ . On a :

$$\lambda \in \sigma_P(T) \subset \mathbb{C} \implies \lambda = \bar{\lambda} \text{ et } E_\lambda = \overline{(T - \lambda I) H}$$

Mais

$$H = \overline{(T - \lambda I)H} = E_\lambda^\perp = E_\lambda \oplus E_\lambda^\perp$$

D'où

$$E_\lambda = \{0\}$$

Contradiction avec le fait que  $\lambda \in \sigma_P(T)$

$\Leftarrow ] H \neq \overline{(T - \lambda I)H} = E_\lambda^\perp \implies E_\lambda^\perp \neq \{0\} \implies \bar{\lambda} \in \sigma_P(T)$ . Et comme  $T \in A(H)$ , alors  $\bar{\lambda} = \lambda$  donc on a :

$$\lambda \in \sigma_P(T)$$

### **Théorème 3.2.3**

Soit  $T \in A(H)$ , alors on a :

$$\lambda \in R(T) \iff \exists k > 0 / \forall x \in H \text{ on a } \|(T - \lambda I)x\| \geq k \|x\| \dots (*)$$

**Preuve  $\implies$ ]**

Soit  $\lambda \in R(T)$ , alors  $(T - \lambda I)$  est inversible i.e  $(T - \lambda I)^{-1}$  existe et  $(T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$

d'où

$$\forall y \in H, \|(T - \lambda I)^{-1}y\| \leq \|(T - \lambda I)^{-1}\| \|y\|$$

Pour  $y = (T - \lambda I)x$  on a

$$\exists k = \frac{1}{\|(T - \lambda I)^{-1}\|} > 0 / \forall x \in H \text{ on a } \|(T - \lambda I)x\| \geq k \|x\|$$

$\Leftarrow ]$  Supposons que la relation  $(*)$  est satisfaite, alors  $(T - \lambda I)^{-1}$  existe et  $(T - \lambda I)^{-1}$  est continu sur  $(T - \lambda I)H$ . En effet,

$$(T - \lambda I) x = 0 \implies 0 \geq k \|x\| \implies \|x\| = 0 \implies x = 0$$

D'où

$$(T - \lambda I)^{-1} \text{ existe .}$$

Pour  $x = (T - \lambda I)^{-1} y$  on a :

$$\|(T - \lambda I)^{-1} y\| \leq k \|y\|$$

Il nous reste à montrer que

$$(T - \lambda I) H = H$$

Puisque  $\lambda \notin \sigma_P(H)$ , alors on a  $\overline{(T - \lambda I)H} = H$ . Soit  $y \in H$ , alors il existe une suite  $\{y_n, n \in \mathbb{N}\} \subset (T - \lambda I)H$  telle que  $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$ . Notons par  $x_n \in H$  les éléments qui satisfont  $(T - \lambda I)x_n = y_n, n \in \mathbb{N}$ . Puisque :

$$\|x_n - x_m\| = \|(T - \lambda I)^{-1}(y_n - y_m)\| \leq \|(T - \lambda I)^{-1}\| \|y_n - y_m\|$$

La suite  $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  converge vers un élément  $x \in H$  et nous avons,

$$(T - \lambda I)x = \lim_{n \rightarrow \infty} (T - \lambda I)x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$$

Ce qui montre que  $(T - \lambda I)H = H$ .

### ■Corollaire 3.3.2

Soit  $T \in A(H)$ , alors on a :

$$\lambda \in \sigma_P(T) \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H \text{ telle que } \|x_n\| = 1 \text{ et } (T - \lambda I)x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$$

**Théorème 3.3.4**

Si  $T \in A(H)$  et  $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} g\lambda \neq 0\}$ , alors  $\lambda \in R(T)$  i.e :

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} g\lambda \neq 0\}$$

**Preuve**

Puisque pour  $x \in H$  et  $y = (T - \lambda I)x$

$$|\langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle| = |2i \operatorname{Im} g\lambda| \|x\|^2 \leq 2 \|x\| \|y\|$$

Nous obtenons pour tout  $x \in H$

$$\|(T - \lambda I)x\| \geq |\operatorname{Im} g\lambda| \|x\|$$

et d'après le théorème 3.2.3  $\lambda \in R(t)$  si  $\operatorname{Im} g\lambda \neq 0$

**Théorème 3.3.5**

Soient  $T \in A(H)$ ,  $m_T = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$  et  $M_T = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$ . Alors :

$$\sigma(T) \subset [m_T, M_T] \text{ et } m_T, M_T \in \sigma(T)$$

**Preuve**

Si  $\|T\| = M_T$ , alors d'après la définition de  $M_T$  on a :

$$\exists (x_n)_{n \geq 1} / \|x_n\| = 1 \text{ et } \langle Tx_n, x_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M_T$$

on a donc

$$\begin{aligned}
\|M_T x_n - T x_n\|^2 &= \langle M_T x_n - T x_n, M_T x_n - T x_n \rangle \\
&= M_T^2 - 2M_T \langle T x_n, x_n \rangle + \|T x_n\|^2 \\
&\leq 2M_T^2 - 2M_T \langle T x_n, x_n \rangle \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

D'après 3.3.2, on a  $M_T \in \sigma(T)$ .

Soit maintenant  $\|T\| \neq M_T$

Considérons l'opérateur auto-adjoint  $S = T - m_T I$ , pour tout  $x \in H / \|x\| = 1$  on a :

$$\langle Sx, x \rangle = \langle Tx, x \rangle = m_T$$

et donc

$$M_S = M_T - m_T \text{ et } m_S = 0$$

Nous appliquons maintenant le cas **1-**) de la démonstration à  $S$ . Puisque  $\|S\| = \max\{|M_S|, |m_S|\} = |M_S| = M_S$  il existe une suite  $\{x_n, \|x_n\| = 1 \text{ pour } n \in \mathbb{N}\}$  telle que  $M_S x_n - S x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ . Mais puisque

$$M_S x_n - S x_n = M_T x_n - T x_n \text{ on a } M_T \in \sigma(T)$$

D'une façon analogue on montre que  $m_T \in \sigma(T)$

**ii)** On montre que  $\lambda \in R(T)$ , si  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [m_T, M_T]$ . soit  $\lambda < m_T$ , pour tout  $x \in H \setminus \{0\}$ , nous avons

$$\left\langle T \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \geq m_T$$

et donc

$$\left\langle (T - \lambda I) \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \geq m_T - \lambda$$

L'inégalité

$$\|x\|^2 - (m_T - \lambda) \leq \langle (T - \lambda I)x, x \rangle \leq \|(T - \lambda I)x\| \|x\|$$

entraîne que pour tout  $x \in H$

$$\|(T - \lambda I)x\| \geq (m_T - \lambda) \|x\|$$

et d'après 3.2.3 on a  $\lambda \in R(T)$

D'une façon analogue, on montre que si  $\lambda > M_T$ , alors  $\lambda \in R(T)$ .

### **Corollaire 3.3.3**

*Soit  $T \in A(H)$ , alors  $T \geq 0 \iff \lambda > 0$  pour tout  $\lambda \in \sigma(T)$ .*

### **Théorème 3.3.6**

*Soient  $T \in U(H)$  et  $\lambda \in \sigma_P(T)$ , alors  $|\lambda| = 1$ .*

#### **Preuve**

Soit  $x \in H \setminus \{0\}$  telle que  $Tx = \lambda x$ , alors on a :

$$\langle Tx, Tx \rangle = |\lambda|^2 \langle x, x \rangle = \langle x, x \rangle$$

on conclut que  $|\lambda|^2 = 1 \implies |\lambda| = 1$ .

### **Théorème 3.3.7**

*Soit  $T \in U(H)$ . Alors*



$$\sigma_P(T) \subset \{\lambda; \quad |\lambda| = 1\}$$

**Preuve**

Pour  $T \in U(H)$ , nous avons  $\|T\| = \|T^*\| = \|T^{-1}\| = 1$ .

si  $|\lambda| > \|T\| = 1 \implies \lambda \in R(T)$  .

Il nous reste à montrer que si  $|\lambda| < 1$ , alors  $\lambda \in R(T)$ . Notons d'abord que  $\lambda = 0 \in R(T)$  puisque  $T^{-1}$  existe et  $\|T^{-1}\| = 1$ . D'après 3.1.5 nous avons pour tout  $\eta \in \mathbb{C}$  tel que :

$$|\eta - 0| < \frac{1}{\|(T - 0I)^{-1}\|} = 1$$

i.e  $|\eta| < 1$ ,  $\eta \in R(T)$ . Donc  $\sigma(T) \subset \{\lambda; \quad |\lambda| = 1\}$  .

### 3.3 Fonctions continues d'un opérateur auto-adjoint et unitaire et la décomposition polaire

**Définition 3.3.1**

Soient  $P_n$  un polynôme de degré  $n$  et  $\sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k} z^k$  sont conjugué complexe. Alors nous définissons

$$P_n(T) = \sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k} (T^*)^k$$

**Théorème 3.3.1** Nous avons

$$[P_n(T)]^* = \overline{P_n}(T)$$

**Preuve** En effet

$$[P_n(T)]^* = \left[ \sum_{k=1}^n \alpha_k T^k \right]^* = \sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k} (T^k)^* = \overline{P_n}(T)$$

### **Théorème 3.3.2**

Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$ , alors pour un polynôme de degré  $n$ ,  $P_n$  nous avons :

$$\sigma(P_n(T)) = \{P_n(\lambda); \lambda \in \sigma(T)\}$$

### **Preuve**

Si  $n = 0$ , alors  $P_0(\sigma(T)) = \alpha_0$  et  $\sigma(P_0(T)) = \sigma(\alpha_0 I) = \alpha_0$ .

Soit donc  $n \geq 1$ . Nous montrons d'abord:

Si  $\lambda \in \sigma(T)$ , alors  $P_n(\lambda) \in \sigma(P_n(T))$ . Le polynôme  $q_n(z) = P_n(z) - P_n(\lambda)$  possède donc zéro à  $z = \lambda$  et il existe un polynôme d'ordre  $n - 1$ ,  $\tilde{P}_{n-1}(\lambda)$  tel que :

$$q_n(z) = (z - \lambda) \tilde{P}_n(z)$$

Pour l'opérateur  $T$ , nous obtenons :

$$q_n(T) = P_n(T) - P_n(\lambda) I = (T - \lambda I) \tilde{P}_n(T) = \tilde{P}_n(T) (T - \lambda I)$$

Supposons pour l'absurde que  $P_n(\lambda) \in R(P_n(T))$ , alors d'après le théorème 2.1.6) on a  $(T - \lambda I) \in \mathcal{L}_r(H)$  i.e  $\lambda \in R(T)$ . Contradiction.

Montrons maintenant que  $z_0 \in \sigma(P_n(T))$  implique qu'il existe un  $\lambda \in \sigma(T)$  tel que  $z_0 = P_n(\lambda)$ . Considérons donc le polynôme  $q_n(z) = P_n(z) - z_0$  et soient  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  les zéros de  $q_n(z)$ . Nous avons donc :

$$q_n(z) = \alpha \sum_{k=1}^n (z - \lambda_k)$$

Et

$$q_n(t) = P_n(T) - z_0 I = \alpha \sum_{k=1}^n (T - \lambda_k I)$$

Puisque  $z_0 \in \sigma(P_n(T))$  au moins un des  $\lambda_k, 1 \leq k \leq n$  appartient au spectre de  $T$ .

D'autre part, nous avons

$$q_n(\lambda_k) = P_n(\lambda_k) - z_0 \implies z_0 = P_n(\lambda_k)$$

**Définition 3.3.2** *Nous définissons*

$$P_n(\sigma(T)) = \{P_n(\lambda); \lambda \in \sigma(T)\}$$

**Corollaire 3.3.1**

*Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  et soit  $P_n$  un polynôme de degré  $n$ , alors*

$$[P_n(T)]^{-1} \in \mathcal{L}(H) \iff P_n(\lambda) \neq 0 \text{ pour tout } \lambda \in \sigma(T)$$

**Preuve**

$\implies ]$

$$\begin{aligned} [P_n(T)]^{-1} \in \mathcal{L}(H) &\implies 0 \in R(P_n(T)) \implies 0 \notin \sigma(P_n(T)) = P_n(\sigma(T)) \\ &\implies P_n(\lambda) \neq 0 \text{ pour tout } \lambda \in \sigma(T) \end{aligned}$$

$\longleftarrow ]$

$$P_n(\lambda) \neq 0 \text{ pour tout } \lambda \in \sigma(T) \implies 0 \notin P_n(\sigma(T)) = \sigma(P_n(T))$$

d'où

$$0 \in R(P_n(T)) \text{ et donc } [P_n(T)]^{-1} \in \mathcal{L}(H).$$

**Théorème 3.3.3**

Soient  $T \in A(H)$  et  $P$  un polynôme à coefficients réels, alors

$$\|P(T)\| = \|P\|_{\sigma(T)} = \sup \{|P(\lambda)|; \lambda \in \sigma(T)\}$$

**Preuve**

On sait que  $P(T) \in A(H)$  et  $\sigma(P(T)) \subset [m_{P(T)}, M_{P(T)}]$ , donc on a

$$\begin{aligned} \|P(T)\| &= \max \{|m_{P(T)}|; |M_{P(T)}|\} \\ &= \sup \{|\lambda|; \lambda \in \sigma(P(T)) = P(\sigma(T))\} \\ &= \sup \{|P(\lambda)|; \lambda \in \sigma(T)\} \\ &= \|P\|_{\sigma(T)} \end{aligned}$$

**Théorème 3.3.4**

Soient  $T \in A(H)$  et  $g \in C(\sigma(T))$  à valeurs complexes (ou réelles). De plus, soit  $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$  une suite de polynômes qui converge uniformément vers  $g$  sur  $\sigma(T)$  alors :

- i)  $P_n(T)$  converge en norme vers un opérateur continu noté par  $g(T)$  qui est uniquement déterminé par  $g$  et dont la norme satisfait  $\|g(T)\| \leq 2 \|g\|_{\sigma(T)}$ .
- ii)  $g(\sigma(T)) = \sigma(g(T))$ .

**Preuve**

Soit d'abord  $g \in C(\sigma(T))$  à valeurs réelles et soit  $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$  une suite de polynômes à valeurs réelles qui converge uniformément vers  $g$  sur  $\sigma(T)$ . Puisque  $P_n(T) \in A(H)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et

$$\|P_n(T) - P_m(T)\| = \|P_n - P_m\|_{\sigma(T)}$$

La suite  $\{P_n(T), n \in \mathbb{N}\}$  est une suite de Cauchy et converge donc en norme vers un  $g(T) \in A(H)$ .

Il nous faut montrer que  $g(T)$  ne dépend pas du choix de  $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Soit donc  $\{q_n, n \in \mathbb{N}\}$  une autre suite de *polynômes* à valeurs réelles qui converge uniformément vers  $g$  sur  $\sigma(T)$ . Puisque  $q_n(T) \in A(H)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons :

$$\begin{aligned}\|g(T) - q_n(T)\| &\leq \|g(T) - P_n(T)\| + \|P_n(T) - q_n(T)\| \\ &= \|g - P_n\| + \|P_n - q_n\| \\ &\leq 2\|g - P_n\| + \|g - q_n\|\end{aligned}$$

Ce qui montre que  $q_n(T)$  converge en norme vers  $g(T)$ .

De plus, nous avons :

$$\|g(T)\| = \|g\|_{\sigma(T)}$$

b) Soit maintenant  $g \in C(g(T))$  à valeurs complexes et soit  $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$  une suite de polynôme qui converge uniformément vers  $g$  sur  $\sigma(T)$ . Donc  $\operatorname{Re} P_n$  (resp.  $\operatorname{Im} P_n$ ) converge uniformément sur  $\sigma(T)$  vers  $\operatorname{Re} g$  (resp.  $\operatorname{Im} g$ ) ce qui entraîne que  $P_n(T)$  converge en norme vers un opérateur  $g(T) \in \mathcal{L}H$ ,

$$g(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} P_n(T) + i \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} P_n(T)$$

L'opérateur  $g(T)$  est bien défini et ne dépend pas du choix de la suite  $P_n$ . De plus nous avons :

$$\begin{aligned}\|g(T)\| &\leq \|\operatorname{Re} g(T)\| + \|\operatorname{Im} g(T)\| \\ &\leq 2\|g\|_{\sigma(T)}\end{aligned}$$

c) montrons la partie **ii**) du théorème. Soit  $\lambda \in \sigma(T)$  et supposons par l'absurde que  $g(\lambda) \in R(g(T))$ , i.e  $(g(T) - g(\lambda))^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ . On a  $g \in C(\sigma(T)) = \overline{P(\sigma(T))}$  donc il existe un polynôme  $P_n \in P(\sigma(T))$  tel que :

$$\|g - P_n\|_{\sigma(T)} \leq \frac{1}{3 \|(g(T) - g(\lambda)I)^{-1}\|}$$

Ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} \|(g(T) - g(\lambda)I) - (P_n(T) - P_n(\lambda)I)\| &\leq \|g(T) - g(\lambda)I\| + \|P_n - g\|_{\sigma(T)} \\ &\leq 3 \|g - P_n\|_{\sigma(T)} \\ &\leq \frac{1}{\|(g(T) - g(\lambda)I)^{-1}\|} \end{aligned}$$

D'après le théorème 3.1.5  $P_n(\lambda) \in R(P_n(T))$  ce qui contredit le théorème 3.1.1 .

Soit maintenant  $z_0 \in \sigma(g(T))$  . Il nous faut montrer qu'on a au moins un  $\lambda \in \sigma(T)$  tel que  $z_0 = g(\lambda)$ . Supposons par l'absurde, que cela n'est pas le cas, i.e, que  $g(\lambda) - z_0$  ne s'annule pas sur  $\sigma(T)$ . Donc  $\frac{1}{(g(\lambda) - z_0)}$  est une fonction continue sur  $\sigma(T)$  .

D'après le théorème de Tietze il existe une fonction  $\phi$  continue sur  $\mathbb{R}$  telle que sa restriction sur  $\sigma(T)$  est identique à  $\frac{1}{(g(\lambda) - z_0)}$ . Nous obtenons par construction

$$\begin{aligned} \|\phi(T)(g(T) - z_0I) - I\| &= \|(g(T) - z_0I)\phi(T) - I\| \\ &\leq 2 \|\phi(\lambda)(g(\lambda) - z_0) - 1\|_{\sigma(T)} = 0 \end{aligned}$$

Donc  $(g(T) - z_0I)^{-1}$  existe et est identique à  $\phi(T)$ .  $\phi$  étant une fonction continue il s'ensuit que  $\phi(T)$  est continue et donc  $(g(T) - z_0I)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$  i.e  $z_0 \in R(T)$ , contradiction.

**Remarque:** Pour le théorème de Tietze voir [2]

**Théorème 3.3.5**

Soient  $T \in A(H)$  et  $g, h \in C(\sigma(T))$  alors on a :

- 1)  $g(T) \in A(H) \iff g(\sigma(T)) \subset \mathbb{R}$
- 2)  $g(T) \geq 0 \iff g(\sigma(T)) \subset [0, \infty[$
- 3)  $(g(T))^{-1} \in \mathcal{L}(H) \iff g(\lambda) \neq 0 \text{ pour tout } \lambda \in \sigma(T)$
- 4)  $h(T) = g(T) \iff h(\lambda) = g(\lambda) \text{ pour tout } \lambda \in \sigma(T)$

**Preuve**

- 1)  $\implies$  ] Si  $g(T) \in A(H)$ , alors on a  $\sigma(g(T)) = g(\sigma(T)) \subset \mathbb{R}$   
 $\impliedby$  ]  $g(\sigma(T)) \subset \mathbb{R}$ , nous avons donc

$$\|g(T) - [g(T)]^*\| \leq 2 \|g - \bar{g}\|_{\sigma(T)} \text{ i.e } g(T) \in A(H)$$

- 2)  $\implies$  ]  $g(T) \geq 0 \implies m_{g(T)} \geq 0 \implies g(\sigma(T)) \subset [0, \infty[$   
 $\impliedby$  ]  $g(\sigma(T)) \subset [0, \infty[ \implies m_{g(T)} \geq 0 \implies g(T) \geq 0$

- 3)  $g(\sigma(T))^{-1} \in \mathcal{L}(H) \iff 0 \notin g(\sigma(T)) = \sigma(g(T))$

- 4) Si  $g(\lambda) = h(\lambda)$  pour tout  $\lambda \in \sigma(T)$ , alors l'inégalité

$$\|g(T) - h(T)\| \leq 2 \|g - h\|_{\sigma(T)}$$

entraîne que  $g(T) = h(T)$ .

D'autre part si  $g(T) = h(T)$ , nous avons :

$$0 = \|\operatorname{Re} g(T) - \operatorname{Re} h(T)\| = \|\operatorname{Re} g - \operatorname{Re} h\|_{\sigma(T)}$$

et

$$0 = \|\operatorname{Im} g(T) - \operatorname{Im} h(T)\| = \|\operatorname{Im} g - \operatorname{Im} h\|_{\sigma(T)}$$

donc  $g(\lambda) = h(\lambda)$  pour tout  $\lambda \in \sigma(T)$ .

### **Théorème 3.3.6**

*Soit  $T$  un opérateur positif. Alors il existe un seul opérateur  $S \geq 0$ , tel que  $S^2 = T$ , i.e  $S = \sqrt{T}$ . De plus si  $T$  est inversible, alors  $S$  est inversible.*

### **Preuve**

Nous définissons la fonction,  $g : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{R}$ , donnée par :

$$g(\lambda) = \sqrt{\lambda}$$

Puisque  $T$  est positif, alors  $\sigma(T) \subset [0, \infty[$  donc  $g$  est bien définie.

D'autre part  $g \in C_{\mathbb{R}}(\sigma(T)) = \overline{P_n(\sigma(T))}$  donc on a

$$\exists P_n \in P(\sigma(T)) \text{ tel que } \|P_n - g\|_{\sigma(T)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et d'après le théorème 3.3.4 on a

$$\|P_n(T) - g(T)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

donc  $g(T) = S \in A(H)$  ■. De plus on a :

$$\begin{aligned} \|S^2 - T\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|(P_n(T))^2 - T\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(P_n)^2 - \lambda\|_{\sigma(T)} \\ &= \|(g)^2 - \lambda\|_{\sigma(T)} = 0 \quad \text{ce qui implique que } S^2 = T. \end{aligned}$$

et comme  $\sigma(T) \subset [0, \infty[$ , alors  $g(\sigma(T)) \subset [0, \infty[$ . Donc  $S \geq 0$ .



Montrons maintenant l'unicité de  $S$ . Soient donc  $S_1 \geq 0$ ,  $S_2 \geq 0$ ,  $R_1 \geq 0$ ,  $R_2 \geq 0$  tels que  $S_1^2 = S_2^2 = T$ ,  $R_1^2 = S_1$  et  $R_2^2 = S_2$ . Alors pour tout  $x \in H$  on a

$$\begin{aligned}
& \|R_1 \circ (S_1 - S_2)x\|^2 + \|R_2 \circ (S_1 - S_2)x\|^2 \\
&= \langle R_1^2 \circ (S_1 - S_2)x, (S_1 - S_2)x \rangle + \langle R_2^2 \circ (S_1 - S_2)x, (S_1 - S_2)x \rangle \\
&= \langle S_1 \circ (S_1 - S_2)x + S_2 \circ (S_1 - S_2)x, (S_1 - S_2)x \rangle \\
&= \langle (S_1^2 - S_2^2)x, (S_1 - S_2)x \rangle \\
&= \langle 0.x, (S_1 - S_2)x \rangle = 0
\end{aligned}$$

d'où

$$R_1 \circ (S_1 - S_2) = 0 \text{ et } R_2 \circ (S_1 - S_2) = 0$$

ou encore en multipliant la première (resp. La deuxième) égalité par  $R_1$  (resp. Par  $R_2$ ), on trouve

$$S_1 \circ (S_1 - S_2) = 0 \text{ et } S_2 \circ (S_1 - S_2) = 0$$

ou

$$S_1 \circ (S_1 - S_2) - S_2 \circ (S_1 - S_2) = 0 \Rightarrow (S_1 - S_2)^2 = 0$$

en d'autre part on a

$$\begin{aligned}
\|(S_1 - S_2)x\|^2 &= \langle (S_1 - S_2)x, (S_1 - S_2)x \rangle \\
&= \langle (S_1 - S_2)^2 x, x \rangle \\
&= \langle 0.x, x \rangle = 0 \implies S_1 = S_2
\end{aligned}$$

On suppose maintenant que  $T$  est inversible alors,  $S^{-1}$  existe et on a:

$$\begin{aligned}\sigma(T) \subset ]0, \infty[ &\implies g(\lambda) = \sqrt{\lambda} \neq 0 \text{ pour tout } \lambda \in \sigma(T) \\ &\implies (g(T))^{-1} = S^{-1} \in \mathcal{L}(H), \text{ i.e } S \text{ inversible. (de 3.3.5).}\end{aligned}$$

### **Théorème 3.3.7**

*Soient  $H$  un espace de Hilbert sur  $\mathbb{C}$  et  $T \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur inversible, alors  $T = US$  tel que  $U$  est unitaire et  $S$  positif.*

### **Preuve**

$T$  est un opérateur inversible, donc  $T^*$  et  $T^*T$  sont aussi inversibles. Et comme  $TT^*$  est un opérateur positif, alors d'après le théorème 3.3.6 il existe un seul opérateur positif et inversible  $S$ , tel que  $S = \sqrt{T^*T}$ . Si on pose  $U = TS^{-1}$  on a :

$$\begin{aligned}U^*U &= (TS^{-1})(TS^{-1})^* = TS^{-1}(S^{-1})^*T^* = TS^{-1}S^{-1}T^* = T(T^*T)^{-1}T^* \\ &= TT^{-1}(T^*)^{-1}T^* = I.I = I\end{aligned}$$

donc  $U$  est un opérateur unitaire d'après le théorème 2.3.4 .

**Notation :** Soient  $H$  un espace de Hilbert et  $T \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur inversible. La décomposition  $T = US$ , tel que  $U$  un opérateur unitaire et  $S$  positif, dans le Théorème 3.3.7, s'appelle la décomposition polaire.

### **Théorème 3.3.8**

*Si  $S$  est un opérateur positif et inversible, alors on peut écrire  $S$  sous la forme suivante*

$$S = e^{\log S}$$

### Preuve

Puisque  $S$  est un opérateur positif et inversible alors on a :

$$\sigma(S) \subset ]0, \infty[$$

Donc on peut définir la fonction,  $g : \sigma(S) \rightarrow \mathbb{R}$ , donnée par :

$$g(\lambda) = \lambda = e^{\log \lambda} \in C(\sigma(S)) \text{ pour tout } \lambda \in \sigma(S)$$

et d'après le théorème 3.3.5 on a

$$S = e^{\log S}$$

**Remarque :**  $\log S \in \mathcal{L}(H)$ . En effet,  $\log \lambda \in C_{\mathbb{R}}(\sigma(T)) = \overline{P_n(\sigma(T))}$ , donc on a

$$\exists P_n \in P(\sigma(S)) \text{ tel que } P_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \log S. \quad \square$$

### Théorème 3.3.9

*Chaque fonction  $g$  continue sur  $\{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$  peut être uniformément approché par des polynômes trigonométriques. En d'autres mots*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists h_{\varepsilon}(t) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{ikt} = \sum_{k=-n}^n a_k \lambda^k, \text{ tel que } \|g - h\|_{\sigma(|\lambda|=1)} < \varepsilon.$$

### Théorème 3.3.10

*Si  $T$  est un opérateur unitaire et  $g \in C(\sigma(T))$ , alors on a :*

**i)**  $[g(T)]^* = \overline{g}(T)$

**ii)** *Si  $g(\sigma(T)) \subset \mathbb{R}$ , alors  $g(T) \in A(H)$ .*

**Preuve**

i) En effet, puisque  $\sigma(T) \subset \{\lambda; |\lambda| = 1\}$ , alors

$$\bar{g}(\lambda) = \sum_{k=-n}^n \overline{a_k} \overline{\lambda^k} = \sum_{k=-n}^n \overline{a_k} \lambda^{-k}$$

et donc

$$\bar{g}(T) = \sum_{k=-n}^n \overline{a_k} (T^{-1})^k = \sum_{k=-n}^n \overline{a_k} (T^*)^k = [g(T)]^*.$$

ii)  $g(\sigma(T)) \subset \mathbb{R} \implies \bar{g}(T) = g(T) \implies [g(T)]^* = g(T)$  i.e  $g(T) \in A(H)$

**Théorème 3.3.11**

Soient  $T \in U(H)$  et  $g \in C(\sigma(T))$  à valeurs complexes (ou réelles). De plus soit  $\{t_n, n \in \mathbb{N}\}$  une suite qui converge uniformément vers  $g$  sur  $\sigma(T)$ , alors :

- i) La suite  $\{t_n(T); n \in \mathbb{N}\}$  converge en norme vers un opérateur continu noté par  $g(T)$  qui est uniquement déterminé par  $g$  et dont la norme satisfait  $\|g(T)\| \leq 2 \|g\|_{\sigma(T)}$
- ii)  $g(\sigma(T)) = \sigma(g(T))$

**Preuve**

La démonstration suit exactement celle du théorème 3.3.4 .

**Théorème 3.3.12**

Soient  $T \in U(H)$  et  $g, h \in C(\sigma(T))$  alors on a :

- 1)  $g(T) \in A(H) \iff g(\sigma(T)) \subset \mathbb{R}$
- 2)  $g(T) \geq 0 \iff g(\sigma(T)) \subset [0, \infty[$
- 3)  $(g(T))^{-1} \in \mathcal{L}(H) \iff g(\lambda) \neq 0$  pour tout  $\lambda \in \sigma(T)$
- 4)  $g(T) = h(T) \iff g(\lambda) = h(\lambda)$  pour tout  $\lambda \in \sigma(T)$

**Preuve**

La démonstration suit exactement celle du théorème 3.3.5 .

**Théorème 3.3.13**

Soit  $U \in U(H)$ , alors on peut écrire  $U$  sous la forme suivante :

$$U = e^{\log U}$$

**Preuve**

Puisque  $\sigma(U) \subset \{\lambda; |\lambda| = 1\}$ , alors  $0 \notin \sigma(U)$ , donc on peut définir la fonction,  $g : \sigma(U) \rightarrow \mathbb{R}$ , donnée par :

$$g(\lambda) = \lambda = e^{\log \lambda} \in C(\sigma(U)), \text{ pour tout } \lambda \in \sigma(U)$$

et d'après le théorème 3.3.12 on a

$$U = e^{\log U}$$

**Remarque :**  $\log U \in \mathcal{L}(H)$ . En effet,  $0 \notin \sigma(U)$  donc  $\log \lambda \in C(\sigma(U))$ .

**Corollaire 3.3.2**

Soient  $H$  un espace de Hilbert sur  $\mathbb{C}$  et  $T \in \mathcal{L}(H)$ , un opérateur inversible. Alors :

$$T = e^{V_1} e^{V_2}$$

telle que  $V_1 = \log U$  et  $V_2 = \log S$ .

**Preuve**

En effet, d'après le théorème 3.3.7 on a

$$T = US = e^{V_1} e^{V_2}$$

# Cnclusion finale

*Chaque opérateur linéaire et inversible  $T$ , défini sur un espace de Hilbert  $H$ , dans lui-même admet une décomposition sous la forme suivante*

$$T=e^{V_1}e^{V_2}$$

*telle que  $V_1$  et  $V_2$  sont deux opérateurs linéaires continus sur  $H$ .*

# Bibliographie

- [1] Mostefa Nadir. *Cours d'analyse fonctionnelle*, Université de M'sila, 2004.
- [2] W.Hengartner. M.Lambert & C.Reischer. *Introduction à l'Analyse Fonctionnelle*. Université du Québec.1981.
- [3] A.Boccaro. *Analyse fonctionnelle , Édition Marketing,1984*.
- [4] Haim Brezis. *Analyse fonctionnelle, deuxième édition, Masson, Paris,1987*.
- [5] S. Lipschutz. *Topologie*, serie Schum. 1981 .
- [6] A.Taylor. *Introduction to Analysis*. 1958.
- [7] M.Hazi. *Introduction aux espaces normés*, O.P.U.1994 .
- [8] K.Schwartz. *Analyse hilbertienne*, Hermann. 1970 .
- [9] K.Kuratowsker. *topologie tom 1,2*,New york, 1966 .
- [10] A. Mostefa. *Cours de Topologie et analyse fonctionnelle*.
- [11] M.El Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces Fonctionelles, ellipses, 2008*.

