

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE M'SILA
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME
D'INGENIEUR D'ETAT EN GENIE ELECTROTECHNIQUE

OPTION : COMMANDE ELECTRIQUE

THEME

**CONTRIBUTION METHODOLOGIQUE APPLIQUEE A L'AMELIORATION
DES PERFORMANCES D'UNE MACHINE ASYNCHRONE PAR
OPTIMISATION
(Méthode du simplexe)**

Proposé et dirigé par :

Monsieur : S. CHEKROUN

Présenté par :

FERHAT Charif

BAHACHE Meryem

GOUISSEM Nawale

Année Universitaire : 2010 / 2011



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



REMERCIEMENTS

Tout d'abord nous remercions le bon Dieu le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il nous a donné durant toutes ces longues années.

*Puis, nous tenons également à exprimer nos vifs remerciements à notre Cher encadreur **Mr. Le docteur Salim CHEKROUN** pour avoir d'abord proposée ce thème, pour suivi continuel tout le long de la réalisation de ce mémoire et qui n'a pas cessée de nous donner ses conseils.*

Nous avons beaucoup profité de l'extrême rigueur scientifique de Mr. CHEKROUN, de son sérieux et son esprit physique qui nous a permet d'investir sereinement et efficacement dans ce travail.

Ainsi Nous exprimons nos profondes gratitude à nos parents pour leurs encouragements, leur soutien et pour les sacrifices qu'ils ont enduré.

Nous tenons à remercier vivement toutes personnes qui nous ont aidés à élaborer ce modeste travail, ainsi à tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin à accomplir ce travail.

*Nos remerciements vont aussi à tous les enseignants et le chef de département d'Electrotechnique Mr. Benjaïma Bachir qui a contribué à notre formation.
Par ailleurs, Nos remerciements à tous les membres du jury qui ont accepté de juger notre travail.*

En fin, nous tenons à exprimer notre reconnaissance à tous nos amis et collègues pour le soutien moral et matériel...

Dédicace

Louange à Dieu, peu importe la manière dont on l'a remercié, on le remerciera jamais assez, et que la louange et que le salut, prière et la paix soient dédiés aux bons envoyés messagers qui ont fait naître notre savoir et éclairés notre destinée

Je dédie le fruit de mon travail à:

Ce que le cœur espère...à ce que la vie sacrifie...et à ce que l'œil voit quand elle se repose...à celle qui m'a aimé par sa présence...et m'a éclairé de la blancheur de son rêve...à celle qui m'a porté neuf mois et m'a enrichi bébé d'amours et d'éducatons...à celle qui m'a élevé avec la volante du bon dieu malgré qu'elle devait un jour ne pas être là.

à la vie et à son existence ainsi qu'à sa destination... à celle qui m'a invité à la prosternation

Qui sous ses pieds des Jardins de l'Eternité ...où tout être espère un jour dedans résider

A ma chère précieuse, la lumière de ma vie ... ma mère et ma mère et puis ma mère ...reguia

A celui qui a vue battre les mots qui ne sont des mots sur lui...et est accru les mots amicaux et ne puis les consigner ou les restreindre ...à celle qui a vendu toute sa bonté et générosité et que je puis malgré lui être très chère et couteux...

A celui qui envers qui j'ai été enrichi de sa compassion, à mon chère père AHMED.

Pour ceux que je meurs dans leur amour et je ne puis imaginer ma vie sans eux, le symbole de mes frères est le bonheur, SAID-ZAHRA-ABD-GHANI_RABIA (que dieu les gardes)

A mes amis que j'aime beaucoup, qui m'ont aidée et encouragé lorsque je me retrouvais dans les moments les plus difficiles à affronter, je l'ai vue et retrouvé dans les épreuves tantôt difficiles et tantôt joyeuses. (Merci les amis)

A toutes les tantes et les oncles y compris leurs époux et épouses sans oublier leurs enfants

Sans exception, à tous ce qu'à rappelé mon cœur et qui par inadvertance ont tombé de ma plume,

A vous mon nom mention de gratitude et de la reconnaissance

*A ce qu'habite le cœur et que ne prononce la langue,
A chacun d'entre vous je consacre le fruit de mon mieux, de ma réussite*

JEVOUS REMERCIE tous.

F.charif
F.charif

Symboles	Notations	Unité
N	Nombre des barres d'une cage	
q	Nombre des phases	
p	Nombre de paire de pôle	
n_s	Vitesse de synchronisme ou vitesse du champ tournant	trs/min
n_r	Vitesse rotorique ou vitesse d'exploitation	trs/min
g	Vitesse nominale	trs/min
P	Glissement	
Q	Puissance active	W
S	Puissance réactive	VAR
C_u	Puissance apparente	N.m
C_n	Couple utile	N.m
C_{em}	Couple nominal	N.m
P_{mec}	Puissance mécanique	W
P_a	Puissance électrique	W
P_u	Puissance absorbée	W
P_{js}	Pertes joule statorique	W
P_{jr}	Pertes joule rotorique	W
P_{fs}	Pertes fer statorique	W
P_{fr}	Pertes fer rotorique	W
P_{v+p}	Pertes par ventilation et par frottement aux paliers	W
η	Rendement	
R	Résistance de conducteur	m Ω
I	valeur efficace de courant continu ou alternatif	m Ω
ρ	Résistivité du matériau	Hz W
a	Nombre de voies parallèles	
L_{moy}	Longueur moyenne	
N_s	Nombre de spires en série	W m
α	Coefficient caractéristique du matériau	T W
E_p	Epaisseur de peau	
f	Fréquence	
μ	Perméabilité	
D_0	Diamètre du conducteur à section circulaire	
d	Diamètre réduit	
R_0	Résistance du conducteur en courant continu	
h_{cd}	Epaisseur du conducteur	
h_{cdr}	Epaisseur réduite du conducteur	
R_i	Résistance des termes de série de Fourier	
f_i	fréquence des termes de série de Fourier	
P_{jl}	Pertes dues au fondamental du courant	
K_f	Coefficient du aux harmoniques	
K_r	Coefficient caractéristique de tôle	
K_h	Coefficient caractéristique de pertes par effet de Foucault	
P_f	Epaisseur de la tôle	
e	Induction maximale	
B_m	Pertes par hystérésis	
P_h	Coefficient de pertes par hystérésis	
K_h		

V_t	Vitesse tangentielle du rotor	trs/min
Z_1	Nombre d'encoches dans le stator	
Z_2	Nombre d'encoches dans le rotor	
f_{d1}	Fréquence de pulsation dans le stator	Hz
f_{d2}	Fréquence de pulsation dans le rotor	Hz V
U	Tension composée	
$\cos\varphi$	Facteur de puissance	rad/s
Ω_s	Vitesse de synchronisme	rad/s
Ω_r	Vitesse angulaire mécanique	
E	Espace de recherche	
$y h f_j$	Fonction du coût	
$f_{moyen} f_{max}$	Fonction de transformation	
f_{min}	Fonction d'aptitude de la chaîne j	
$R+$	Valeur moyenne de la fonction de cout	
P_1, P_2	Valeur maximum de la fonction de cout	
E_1, E_2	Valeur minimale de la fonction de cout	
L	Fitness ou fonction d'évaluation d'individu	
$K P_c P_m$	Parents de la population	
$P_s N F F$	Enfants de la population	
a, b	Longueur de chromosome	
$feval q$	Nombre entier	
$v_j x R$	Probabilité de croisement	
V_1, V_2, V_3, V_4	Probabilité de mutation	
V_1	Probabilité de sélection	
P_s	Nombre d'individu de la population ou taille de population	
N_1, N_2	Nombre d'évaluation totale	
Φ	Fonction simple	
B_δ	Nombre réel	
A_l	Fonction d'évaluation	
τ_p	Probabilité cumulative	
l_i	Code binaire de chaque chromosome binaire	
α_i	Valeur décimale	
D	Nombre généré aléatoirement	
$C K_{w1}$	Vecteur de la génération initiale en binaire	V W
K_{d1}	Tension statorique simple	
K_{p1}	Puissance apparente	Wb T
E_1, E_2	Nombre de spire par phase rotorique et statorique	A/m
m_1, m_2	Flux par pôle	
	L'induction dans l'enterfer	m m
	Densité linéaire de courant	
	Pas polaire	
	Longueur virtuelle de l'induit	
	Coefficient d'aplatissement de la courbe	
	Désigne le Diamètre intérieur du stator (diamètre d'alésage)	V
	Coefficient d'utilisation	
	Facteur de bobinage	
	Facteur de distribution	
	Facteur de raccourcissement	
	Force électromotrice primaire et secondaire	
	Nombre de phase primaire et secondaire	

$F.M.M \ I_1$	Force magnétomotrice totale	At
$I_2 f_1$	Valeur efficace du courant primaire et secondaire	A
$\lambda \beta C' y$	Fréquence	Hz
$H F B_i H_i$	Rapport	
$S_i F_i \mu_0 \mu_{ri}$	Rapport du raccourcissement	
$H_\delta \delta$	Désigne l'ouverture de la bobine	
δ'	L'ordre d'harmonique	
$F_\delta b_i$	Intensité du champ magnétique	A/m
$l_a B_{\delta eff}$	F.M.M nécessaire pour l'excitation de la machine	At T
$B_{\delta max} \ B_z$	Induction dans chaque tronçon	A/m
$B_{zm} K_f$	Intensité du champ pour chaque tronçon	mm ²
$K_s K_c K_{c1}$	Section de chaque tronçon	At
K_{c2}	Tension magnétique pour chaque tronçon	
Φ_δ	Perméabilité magnétique dans l'aire	
h_{zi}	Perméabilité relative pour chaque tronçon	A/m
S_δ	Intensité du champ dans l'entrefer	m m
$B_{ji} L_{fe} K_{fe}$	Entrefer	At m
$h_{ji} l_{ji}$	Entrefer fictif	m T
K_r	Force magnétomotrice dans l'entrefer	T T
σ	Pas polaire virtuel	
σ_H	Longueur effective du paquet des tôles	
σ_{h1}	Induction dans l'entrefer efficace	
σ_{h2}	Induction dans l'entrefer maximale	
σ_w	Induction dans la dent	
$B_{z1t}, B_{z1m}, B_{z1p}$	Facteur de forme de la courbe d'induction	Wb
$B_{z2t}, B_{z2m}, B_{z2p}$	Coefficient de saturation	m
B_{pont}	Facteur de carter	mm ²
τ_{z1}, τ_{z2}	Pour un stator lisse	T
F_z	Pour un rotor lisse	m
F_{z1}, F_{z2}	Flux dans l'entrefer	
F_{j1}, F_{j2r}	Profondeur de l'encoche statorique $i = 1$ ou rotorique $i = 2$	m
	Surface virtuelle traversée par le flux	m
	Induction dans la culasse statorique $i = 1$ ou rotorique $i = 2$	
	Longueur d'empilage sans les canaux de ventilation	
	Facteur de remplissage, compte tenu du foisonnement	
	Epaisseur de la culasse statorique $i = 1$ ou rotorique $i = 2$	
	Longueur du tronçon du circuit magnétique pour la culasse	
	Coefficient de remplissage	
	Coefficient de dispersion	T
	Représente une constante du matériau utilisé	T
	Coefficient de dispersion de Heyland du primaire	T
	Coefficient de dispersion de Heyland du secondaire	
	Constance du fer	At
	Induction au pied, à mi-hauteur, à la tête de la dent statorique	At
	Induction au pied, à mi-hauteur, à la tête de la dent rotorique	At
	Induction dans le pont	
	Pas dentaire statorique et rotorique	
	Chute de potentiel magnétique dans la dent	
	Force magnétomotrice au dent statorique et rotorique	
	Force magnétomotrice dans la culasse statorique et rotorique	

$I_{bardema}$	I_{an}	Courant de la barre au démarrage	A
$l_{\sigma 1}, l_{\sigma 2}$		Courant dans l'anneau de court-circuit	H
Φ_{σ}, Φ_c		Induction de fuite primaire et secondaire	Wb
Φ_i		Flux commun et Flux de dispersion	Wb
$\Phi_{\sigma 1}$		Flux par pôle dans chaque tronçon	Wb
h		Flux correspondent à la réactance de fuite $X_{\sigma 1}$	m m
h_1, h_2	h_z	Hauteur (au profondeur) d'encoche	m m
h_{z1}, h_{z2}	h_{an}	Profondeur d'encoche statorique et rotorique	m m
h^*		Hauteur de la dent	m m
b_z	d_{21}, d_{31}	Profondeur de la dent statorique et rotorique	
$\lambda_{\sigma s}$		Hauteur de l'anneau	
Λ		Hauteur fictive de l'encoche	
Λ_{σ}		Largeur d'encoche	
$A_{\sigma d 1}, A_{\sigma d 2}$		Dimension de conducteur	
$A_{b 1}, A_{b 2}$		Coefficient de perméance d'une encoche	
$\Lambda_{\sigma z 1}, \Lambda_{\sigma z 2}$		Perméance de Pont	m
$L_{c 0}$		Perméance d'encoche	m
L_{tot}		Perméance de dispersion différentielle statorique et rotorique	$\Omega \cdot m$
δ		Perméance de dispersion des têtes de bobines statorique	
g_v	K_c	Perméance d'encoche statorique et rotorique	
K_d	K_{max}	Longueur d'un conducteur	
H_z	$H_{z,min}$	Longueur totale de l'enroulement statorique	T
$H_{z,med}$		Résistivité	T
$H_{z,max}$		Facteur qui dépend de la distance	T
$H_{z,moy}$	pt	Coefficient de sur charge	T
γ_B		Coefficient de démarrage	T
$X_{\sigma 1}, X_{\sigma 2}$		Rapport du couple maximal et le couple de démarrage	
$X_{\sigma tot}$		Champ magnétique dans la dent	
$Z_{z 1}$		Valeur du champ magnétique minimum dans la dent	Ω
Z_z		Valeur du champ magnétique médian dans la dent	Ω
Z_{1p}	Z_{1t}	Valeur du champ magnétique maximum dans la dent	
Z_{1m}	Z_{2p}	Valeur du champ magnétique moyenne dans la dent	
Z_{2t}		Pont rotorique	
Z_{2m}		Densité des tôles	m
H_{z1moy}, H_{z2moy}		Réactance de fuite statorique et rotorique ramenée au stator	m
$H_{j 1}, H_{j 2}$		Réactance de fuite totale	m
$H_{z 1}, H_{z 2}$		Nombre de conducteur	m
Δh_z		Nombre de conducteur par encouche	m
\hat{h}		Largeur de la dent au pied statorique	m
P_{ft+vt}		Largeur de la dent à la tête statorique	T T
		Largeur de la mi-hauteur statorique	T
		Largeur de la dent au pied rotorique	m
		Largeur de la dent à la tête rotorique	m
		Largeur de la mi-hauteur rotorique	W
		Valeur moyenne du champ magnétique statorique, rotorique	
		Champ magnétique dans la culasse statorique et rotorique	
		Champ magnétique dans la dent statorique, rotorique	
		Pertes en hauteur d'encoche	
		Dépassement du largeur	
		Pertes par frottement et ventilation	

P_{sup}	Pertes superficielles et par pulsation du flux dans la dent	W H
L_1, L_2	Inductance cyclique d'une phase statorique et rotorique	H H
M	Inductance mutuelle	Ω Ω
L_s, L_r	Inductance propre statorique et rotorique	Ω W
R_1, R_2	Résistance statorique et rotorique par phase	mm ²
R_2'	Résistance totale d'une phase secondaire ramenée au primaire	m m
R_{bar}	Résistance de barre	
P_{j1}, P_{j2}	Pertes par effet Joule dans les enroulements du stator et rotor	m A
S	Section des conducteurs utilisant dans l'enroulement	A m
$l_{co} L_a N_n$	Longueur de conducteur	Ω m
$L_{tot} I_{bar}$	Longueur de la machine	mm ²
I_2'	Nombre du conducteur par phase	m W
$L_{bar} R_{an}$	Longueur totale de l'enroulement pour une phase	W
$d_b S_{an} S_t$	Courant de la barre	W
$P_w P_{h+w}$	Courant de barre ramenée au primaire	W m
P_{hz}	Longueur d'une barre	Kg
$P_{(h+w)z} D_e$	Résistance de anneau	Kg
m_i	Diamètre de barre	Kg
m_z	Section de anneau	
M_{z1}	Désigne l'épaisseur de la tôle du fer	
K_j, K_{Hj}, K_{wj}	Pertes par courant de Foucault	
γ	Pertes Hystérésis et de Foucault	A
ν	Pertes d'Hystérésis dans les dents d'encoche statorique	
I_0	Pertes totales par Hystérésis et par courants de Foucault	
I_{0a}	Diamètre extérieur de la culasse	
I_m	Masse de la culasse	
I_{cc}	Masse totale des dents	
$\cos\phi_{cc}$	Masse d'une dent	
$\cos\phi_0$	Coefficient	
K_{wp}	Densité volumique des tôles des fers	
	Volume du fer	
	Courant de marche à vide	
	Courant watté	
	Courant déwatté.	
	Courant de court-circuit	
	Facteur de puissance de court-circuit	
	Facteur de puissance de vide	
	Facteur de raccourcissement d'onde fondamentale	

Chapitre 01**Chapitre 02**

Tableau.2.1 Plaque signalétique de la machine étudiée	49
Tableau. 2.2 Résultats du programme de conception	50

Chapitre 03**Chapitre 04**

Tableau 4.1 Indications de la plaque signalétique de la machine étudiée	104
Tableau 4.2 Résultats du programme de la conception	104
Tableau 4.3 Paramètres de point de départ de la conception	105
Tableau 4.3.1 Résultats d'optimisation	105
Tableau 4.3.2 Résultats d'optimisation	105
Tableau 4.3.3 Résultats d'optimisation	105
Tableau 4.3.4 Résultats d'optimisation	105
Tableau 4.3.5 Résultats d'optimisation	106
Tableau 4.3.6 Résultats d'optimisation	106
Tableau 4.4 Paramètres de la conception et leurs points de départ	106
Tableau 4.5 Résultats d'optimisation	106
Tableau 4.6 Comparaison des résultats	107
Tableau 4.7 Résultats d'optimisation	107
Tableau 4.8 Comparaison des résultats	107
Tableau 4.9 Energie et économie d'énergie	108

Chapitre 01

Figure 1.1	Rotor (a gauche) et stator (a droite) d'une machine asynchrone	4
Figure 1.2	Plaque signalétique d'un moteur asynchrone.	4
Figure 1.3	Principe du démarrage direct.	6
Figure 1.4	Principe du démarrage étoile – triangle	7
Figure 1.5	Principe du démarrage statorique d'une MAS	7
Figure 1.6	Démarrage rotorique d'une MAS	8
Figure 1.7	Machine à double cage	9
Figure 1.8	Différentes sections de barres rotoriques utilisées	9
Figure 1.9	Freinage par injection du courant continu.	9
Figure 1.10	Principe de freinage par contre – courant.	10
Figure 1.11	Freinage par frein moteur.	10
Figure 1.12	Modèle d'une machine asynchrone triphasée.	12
Figure 1.13	Référentiel tournant d'axes (d– q).	16
Figure 1.14	Schéma bloc de la machine asynchrone alimentée en tension.	18
Figure 1.15	Domaines de fonctionnement de la machine asynchrone	22
Figure 1.16	Point de fonctionnement du moteur en charge	23

Chapitre 02

Figure 2.1	Organigramme de calcul pour la conception d'une machine électrique	27
Figure 2.2	Courbe d'induction $B=f(H)$ en fonction de la FMM	34
Figure. 2.3	Caractéristiques de fonctionnement de la machine étudiée	50

Chapitre 03

Figure 3.1	Principe de multiplication de Lagrange	63
Figure 3.2	Notion de dimension fini	65

Figure 3.3	L'espace F est de dimension m	68
Figure 3.4	Méthode du multiplicateur de Lagrange	68
Figure 3.5	Courbure de la frontière	77
Figure 3.5	L'intersection d'une ligne avec l'ensemble des contraintes	79
Figure 3.6	L'intersection de la surface avec l'espace des contraintes	80

Chapitre 04

Figure 4.1	Démarche de résolution d'un problème de conception	84
Figure 4.2	Modèle générale d'un réseau de neurone	87
Figure 4.3	Réseau entièrement connecté	88
Figure 4.4	Représentations géométriques d'un simplexe	90
Figure 4.5	Approximations quadratique et gaussienne d'une courbe de désirabilité	91
Figure 4.6	Simplexes initiaux en coin ou tourné	92
Figure 4.7	Différence de comportement selon le pas du simplexe basique	92
Figure 4.8	Organigramme de calcul	93
Figure 4.9	Organigramme de la méthode d'optimisation proposée	103

SOMMAIRE

Introduction Générale

Chapitre 01 *Fondement Théorique de la MAS*

Introduction	3
1.1 Constitution	4
1.2 Plaque signalétique d'un moteur asynchrone	4
1.3 Démarrage et freinage des moteurs asynchrones triphasés	6
1.3.1 Démarrage direct.....	6
1-3.2 Démarrage étoile – triangle.....	6
1.3.3 Démarrage statorique.....	7
1.3.4 Démarrage rotorique.....	7
1.4 Constructions spéciales	8
1.4.1 Moteur à double cage.....	8
1.4.2 Moteur à encoches profondes.....	9
1.5 Freinage	9
1.5.1 Freinage par injection de courant continu.....	9
1.5.2 Freinage par contre – courant.....	10
1.5.3 Frein moteur.....	10
1.6 Modélisation et mise en équations	10
1.6.1 Description de la machine triphasée.....	10
1.6.2 Modèle de la machine triphasée.....	12
1.6.3 Hypothèses simplificatrices.....	12
1.6.4 Equations générales de la machine triphasée.....	13
1.6.4.1 Equations électriques.....	13
1.6.4.2 Equations magnétiques.....	13
1.6.4.3 Equation mécanique.....	14
1.6.5 Transformation de PARK.....	15

1.6.5.1 Différents repères.....	15
1.6.5.2 Application de la transformation de Park au modèle de la M.AS.....	15
1.6.5.2.1 Equations électriques.....	17
1.6.5.2.2 Equations magnétiques.....	17
1.6.5.2.3 Equation mécanique.....	18
1.6.6 Alimentation de la machine asynchrone.....	18
1.6.7 Représentation d'état du modèle de la M.AS.....	18
1.7 Caractéristiques électromécaniques.....	19
1.7.1 Machine alimentée par un système de tensions de fréquence fixe.....	20
1.7.1.1 Couple électromécanique en fonction du glissement.....	20
1.7.1.2. Couple électromécanique en fonction de la vitesse de rotation.....	21
1.8 Bilan des puissances.....	22
1.9 Point de fonctionnement du moteur en charge.....	23
1.9.1 Méthode de résolution graphique.....	24
1.9.2 Méthode de résolution par le calcul.....	24
1.10 Autres informations.....	24
1.11 Complément : caractéristiques $T_r=f(n)$ de quelques charges.....	25
Conclusion.....	25

Chapitre 02 Approche Analytique de Conception des MAS

Introduction.....	26
2.1 Organigramme de calcul.....	27
2.2 Calcul des dimensions principales.....	28
2.3 Dimensionnement des encoches.....	29
2.3.1 Encoche du stator.....	30
2.3.2 Encoche du rotor.....	30
2.4 Type et choix de l'enroulement	31
2.5 Circuit magnétique	31
2.5.1 Calcul de la F.M.M.....	32

2.5.1.1	Calcul de la F.M.M dans l'entrefer.....	33
2.5.1.2	Chute de potentiel magnétique dans les dents.....	35
2.5.1.3	Chute de tension magnétique dans la culasse.....	36
2.5.2	Correction des valeurs d'induction - calcul de la FMM et du courant magnétisant.....	37
2.5.2.1	Calcul du nombre de spires par phase du primaire.....	37
2.5.2.2	Correction de l'induction dans les dents et la culasse du stator.	38
2.5.3	Courant magnétisant	40
2.6	Courant de barre et anneau de court-circuitage.....	40
2.7	Dispersion.....	41
2.7.1	Calcul de la dispersion	41
2.7.1.1	Dispersion d'encoche.....	42
2.7.1.2	Réactance de fuite différentielle.....	42
2.7.1.3	Réactance de fuite des têtes de bobines.....	42
2.7.2	Calcul des coefficients de dispersion	44
2.8	Les pertes.....	44
2.8.1	Pertes dans le cuivre ou pertes joules de la machine.....	44
2.8.2	Pertes dans le fer.....	45
2.8.3	Pertes dans la culasse statorique	46
2.8.4	Pertes dans les dents.....	47
2.9	Détermination des paramètres de marche à vide de la machine.....	47
2.10	Calcul des paramètres de marche en court circuit.....	48
2.11	Paramètres du schéma équivalent de la machine.....	48
2.12	Programme développé.....	49
	Conclusion.....	51

Chapitre 03 Synthèse des Méthodes d'Optimisation

	Introduction.....	52
3.1	Méthodes d'optimisation.....	53
3.1.1	Notation.....	53
3.2	Méthodes numériques.....	54

3.2.1 Simplifications.....	54
3.2.2 Recherche des zéros du gradient.....	55
3.3 Optimisation combinatoire.....	55
3.3.1 Résolution.....	56
3.4 Quelques classes de problèmes.....	57
3.4.1 Programmation linéaire.....	58
3.4.1.1 Algorithmes de la programmation linéaire.....	58
3.4.1.2 Implémentations en pratique.....	59
3.4.2 Programmation linéaire en nombres entiers.....	60
3.4.2.1 Applications.....	60
3.4.3 Programmation quadratique.....	61
3.4.3.1 Conditions de Kuhn-Tucker.....	61
3.4.3.2 Multiplicateur de Lagrange.....	63
3.4.3.3 Dimension fini	65
3.4.3.4 Notations et interprétation.....	67
3.4.3.5 Théorèmes.....	70
3.4.3.6 Écriture du problème.....	71
3.4.3.7 Espace fonctionnel.....	72
3.4.4 Équation d'Euler-Lagrange.....	75
3.4.4.1 Théorèmes.....	77
3.4.5 Programmation non linéaire.....	78
3.4.5.1 Formulation mathématique.....	79
3.4.5.2 Méthodes de résolution.....	79
3.4.6 Programmation dynamique.....	80
3.4.6.1 Principe.....	80
3.4.6.2 Utilisation.....	81
3.4.6.3 Quelques exemples concrets.....	81
3.4.6.4 Application algorithmique.....	81
Conclusion.....	82

Chapitre 04 **CAO Optimisée d'une MAS**

Introduction	83
4.1 Conception Assistée par ordinateur (CAO) – optimisée	84
4.2 Aspect théorique	85
4.2.1 Réseaux de neurones.....	85
4.2.1.1 Pourquoi utiliser les réseaux neuronaux.....	85
4.2.1.2 Propriétés des réseaux neuronaux.....	86
4.2.1.3 L'apprentissage.....	86
4.2.1.4 Modélisation générale.....	87
4.2.1.5 Architecture des réseaux de neurone.....	87
I. Réseaux à couches.....	87
1. Réseau monocouche.....	88
2. Réseaux multicouches.....	88
II. Réseaux entièrement connectés.....	88
4.2.1.6 Avantages et inconvénients des réseaux de neurones.....	88
4.2.2 Méthode du simplexe.....	89
4.2.2.1 Mathématique du simplexe.....	89
I. Méthode basique du simplexe.....	90
II. Méthode modifiée du simplexe.....	90
III. Méthodes super modifiées du simplexe.....	90
IV. Méthode centroïde pondérée.....	91
4.2.2.2 Procédure de test d'une méthode.....	91
4.2.2.3 Améliorations des méthodes.....	91
I. Choix de la forme du simplexe initial.....	92
II. Choix du pas du simplexe initial.....	92
4.2.2.4 Application de la méthode du simplexe à la maximisation d'une fonction mathématique.....	93
4.3 Rendement des moteurs à induction	96
4.3.1 Différentes pertes dans la machine.....	96
1) Pertes par effet Joule ou pertes le cuivre dans les enroulements statoriques et rotoriques.....	96

2) Pertes fer.....	97
3) Pertes mécaniques.....	97
4) Pertes additionnelles de charge.....	97
4.3.2 Différentes méthodes de mesures du rendement.....	97
a) Méthode 1.....	97
b) Méthode 2.....	98
c) Méthode 3.....	98
d) Méthode 4.....	98
e) Méthode 5.....	98
4.3.3 Normes et détermination du rendement.....	99
i. Norme de la CSA.....	99
ii. Norme de l'IEEE.....	99
iii. Norme de la IEC.	99
iv. Norme de la JEC.....	99
4.3.4 Comparaison entre différentes normes.....	100
4.3.5 Facteurs Influent sur le rendement des moteurs électriques.....	100
i. Qualité d'alimentation en énergie.....	101
ii. Charge du moteur.....	101
iii. Maintenance du moteur.....	101
iv. Plage d'utilisation des moteurs.....	101
4.3.6 Amélioration du rendement d'une machine asynchrone.....	101
➤ Méthode proposée.....	103
I. Organigramme de la méthode d'optimisation proposée.....	103
II. Application de la méthode du simplexe à l'optimisation de la conception d'une machine asynchrone.....	105
A) Utilisant l'interpolation linéaire (IL).....	105
a.1 Effet du diamètre d'alésage D.....	105
a.2 Effet du rapport géométrique (λ).....	105
a.3 Effet de l'épaisseur de l'entrefer (δ).....	105
B) Utilisant l'interpolation par réseaux de neurones (RN).....	105
b.1 Effet du diamètre d'alésage D.....	105

b.2	Effet du rapport géométrique (λ).....	106
b.3	Effet de l'épaisseur de l'entrefer (δ).....	106
III.	Point de départ des variables de conception.....	106
IV.	Résultats d'optimisation.....	106
a)	Utilisant l'interpolation linéaire (IL).....	106
b)	Utilisant l'interpolation par réseaux de neurones (RN).....	107
V.	Etude statistique.....	108
	Conclusion.....	109

Conclusion Générale

Bibliographie



Introduction

générale

Introduction Générale

Puisque leurs construction simple et robuste, les moteurs asynchrones et plus particulièrement ceux à cage d'écureuil, représentent environ 90-95% de la consommation d'énergie des moteurs électriques, ce qui équivaut à environ 53% de la consommation d'énergie électrique totale. Ils sont largement utilisés en tant qu'entraînements électriques dans l'industrie, le service public, la traction, les électroménagers, etc...

En raison de l'importante utilisation des moteurs asynchrones, ce travail a pour but de contribuer aux efforts de l'économie d'énergie, plus spécifiquement dans le domaine de moteurs à petites puissances. Il met en évidence le potentiel important d'économie d'énergie aussi bien lors de la phase de conception du moteur que lors de son utilisation.

Economiser de l'énergie implique de n'utiliser uniquement que la quantité d'énergie nécessaire au fonctionnement du moteur. Ceci peut être réalisé en améliorant le dimensionnement du moteur lors de sa conception ou par la réduction de son besoin en énergie électrique nominale quand le moteur a été déjà construit. Ces deux facteurs pourraient être pris en compte conjointement en optimisant le moteur à sa conception en fonction de l'utilisation prévue.

La conception, le dimensionnement et l'optimisation du moteur sont indispensables afin de minimiser les pertes et également de permettre son utilisation dans une large gamme de vitesse. Cependant, lorsque le moteur a déjà été construit, la seule possibilité d'économiser de l'énergie passe par la gestion de l'énergie fournie. Diverses stratégies sont possibles. Un accent particulier est porté sur l'utilisation du triac pour réduire la tension d'entrée du moteur. Dans ce mémoire nous aborderons le premier sujet qui s'intéresse beaucoup plus à la conception optimisée.

Suite aux problèmes précédents, tout au long de ce travail, nous nous sommes fixés comme objectifs les points suivants :

- a. Présenter une approche d'identification à l'aide des dimensions géométriques et des grandeurs de la plaque signalétique, qui sont utilisées comme contraintes pour la conception de cette machine.*
- b. Proposer une méthode d'optimisation basée sur la méthode du simplexe ;*

- c. *Développer et appliquer cette technique à l'amélioration du rendement d'une machine produite par le fabricant algérien d'I.E. E .AZAZGA avec l'action sur des paramètres à savoir: Diamètre interne statorique, épaisseur de l'entrefer, rapport géométrique;*
- d. *Entamer le problème d'optimisation paramétrique avec contrainte.*

Ce mémoire est organisé et structuré en quatre chapitres comme suit:

Dans le premier chapitre, sera présenté l'aspect théorique de la machine asynchrone.

Le deuxième chapitre de notre travail sera consacré à l'exposé de la méthodologie de conception d'une machine asynchrone à partir d'un cahier des charges clairement exprimé, le concepteur à la tâche de le traduire sous forme de formalisme mathématique. Cette méthode est appliquée sur une machine expérimentale (2.2 kW).

Dans le troisième chapitre, on mettra en relief les différentes méthodes d'optimisation : nous introduirons les méthodes déterministes et les méthodes stochastiques, en insistant sur la programmation linéaire qui constituent l'essentiel de notre travail.

Le quatrième chapitre présentera l'amélioration du rendement des machines asynchrones, par l'application d'une technique d'optimisation basée sur la méthode du simplexe. L'approche proposée sera appliquée sur une machine de 1.1 kW (données catalogue I.E.E AZAZGA).

Finalement on terminera par une conclusion générale, exposant les différents résultats obtenus et dégagant les perspectives à envisager.

Chapitre 01

Fondement

Théorique de la

MAS

Introduction

Le moteur asynchrone, dit parfois d'induction, est utilisé depuis de très nombreuses années pour assurer la variation de vitesse non seulement de processus industriels, mais aussi de chaînes de traction pour les transports (ferroviaires et véhicules électriques), également de systèmes domotiques... Pour des applications de faible puissance et pour des domaines restreints de variation de vitesse, on peut agir sur cette dernière par variation de l'amplitude de la tension statorique à l'aide de gradateurs. La récupération rotorique permet la variation de vitesse pour des machines de grande puissance (machine asynchrone associée à des éoliennes), sur des plages réduites de vitesse. Actuellement, la majorité des variateurs de vitesse utilise des alimentations à fréquence et amplitude variables sur le stator de la machine asynchrone. Le domaine de vitesse est beaucoup plus étendu et les performances dynamiques plus élevées. La machine asynchrone présente l'avantage d'être robuste, de construction simple et peu coûteuse, surtout si le rotor est à cage d'écureuil. Cependant, son contrôle est plus complexe que celui de la machine à courant continu ou de la machine synchrone. Dans la mesure où l'alimentation a lieu par une seule armature, le découplage entre les deux variables principales de cette machine, à savoir le flux magnétique et le couple électromagnétique, est difficile à réaliser, [1].

Dans ce chapitre, on présente des généralités sur la machine asynchrone pour faire la différence entre cette dernière, et les autres machines à partir de sa constitution, son principe de fonctionnement, et sa caractéristique mécanique. En suite on situera le principe des pertes existantes.

1.1 Constitution



Figure 1.1 Rotor (à gauche) et stator (à droite) d'une machine asynchrone.

La machine asynchrone se compose de deux pièces principales :

- Le stator est relié au réseau ou à un variateur de vitesse.
- Le rotor est constitué de conducteurs en court-circuit qui sont parcourus par des courants induits par le champ magnétique créé par les courants statoriques. C'est la principale différence avec une machine synchrone, laquelle a un rotor avec un champ magnétique provenant d'aimants permanents ou de bobines alimentées en courant continu.

Cette machine, peut selon sa construction, être reliée à un réseau monophasé ou polyphasé (généralement triphasé car c'est celui de la distribution).

La machine asynchrone, est une machine électrique, la plus utilisée dans le domaine des puissances supérieures à quelques kilowatts car elle offre alors le meilleur rapport qualité prix. Surtout depuis l'apparition dans les années 1970 de variateurs permettant de faire varier la fréquence de rotation du moteur dans une large gamme.

Bien que réversible, la machine asynchrone est principalement (mais pas exclusivement) utilisée en moteur.

1.2 Plaque signalétique d'un moteur asynchrone

Exemple de plaque signalétique d'un moteur asynchrone triphasé industriel :

Mot 3~ 50/60Hz	IEC34 IP55
MT90L24-4	
1.5 / 1.75 kW	1420 / 1710 tr/min
380-420 / 440-480 V - Y	3.7 / 3.6 A
220-240 / 250-280 V - Δ	6.4 / 6.3 A
	cos φ = 0.75 / 0.78

Figure 1.2 Plaque signalétique d'un moteur asynchrone.

Mot 3 ~ 50 / 60 Hz	Moteur asynchrone triphasée – Le fréquence .
MT 90224 - 04	Référence constructeur précisant notamment : La taille de la carcasse moteur - Le nombre de pôles
1.5 / 1.75 KW	Puissance utile nominale
380 – 420 V	Tension entre phases du réseau d'alimentation pour un couplage étoile
220 – 240 V	Tension entre phases du réseau d'alimentation pour un couplage triangle
IP55	Indice de protection
1420/1710tr/min	Vitesse de rotation
3.7 / 3.6 A	Courant de ligne nominal pour un couplage étoile
6.4 / 6.3 A	Courant de ligne nominal pour un couplage triangle
$\cos \varphi = 0.75 / 0.78$	Facteur de puissance au régime nominal.

Soit on dispose d'un réseau d'alimentation correspondant aux valeurs de tension de la troisième ligne et on doit réaliser un couplage étoile symbolisé par \mathbf{Y} (le plus fréquent), soit on dispose d'un réseau d'alimentation correspondant aux valeurs de tension de la quatrième ligne et on doit réaliser un couplage triangle symbolisé par $\mathbf{\Delta}$.

Sur la même ligne, la plaque signalétique indique pour chacun des couplages la valeur de l'intensité du courant de ligne qui sera absorbée au régime nominal.

À l'aide de grandeurs électriques fournies : tensions entre phases, intensités des courants de ligne et facteur de puissance, il est possible de calculer la puissance active absorbée et d'en déduire le rendement de la machine fonctionnant au régime nominal.

En monophasé :

$$P_a = U * I * \cos \varphi \quad (1.1)$$

En triphasé :

$$P_a = \sqrt{3} u * i * \cos \varphi \quad (1.2)$$

Le rendement :

$$\eta = \frac{P_u}{P_a} \quad (1.3)$$

1.3 Démarrage et freinage des moteurs asynchrones triphasés

1.3.1 Démarrage direct

Ce type de démarrage est réservé aux moteurs de faible puissance devant celle du réseau, ne nécessitant pas une mise en vitesse progressive. Le couple est énergique, l'appel de courant est important (5 à 8 fois le courant nominal), [6].

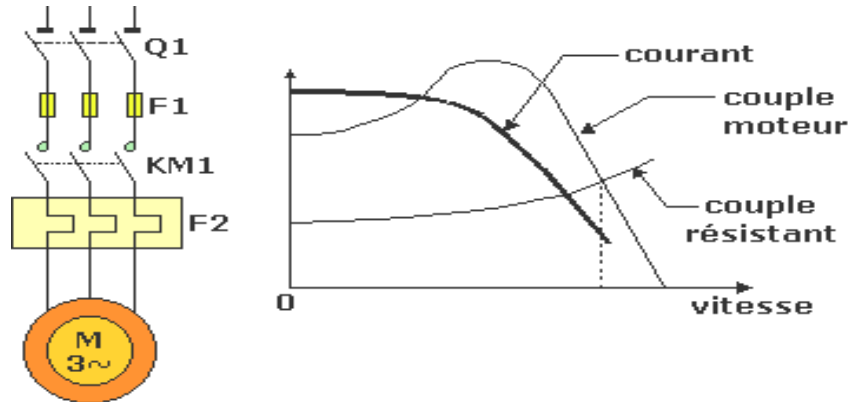
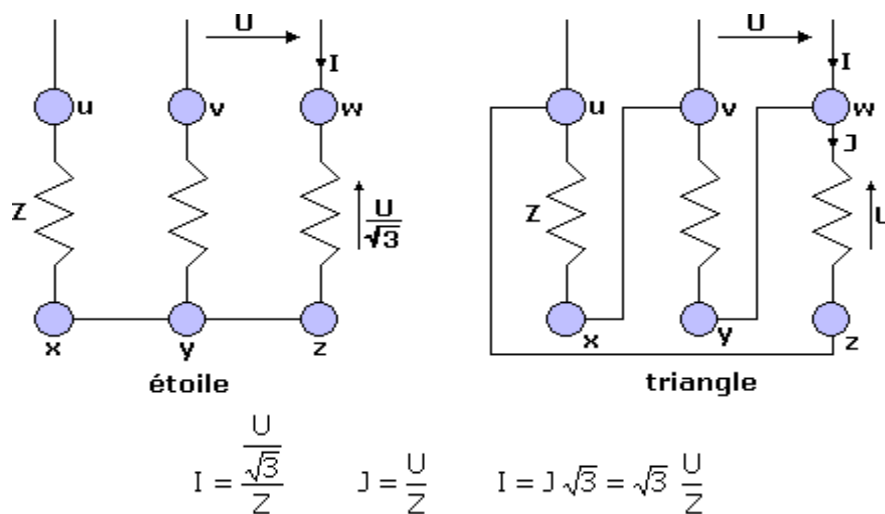


Figure 1.3 Principe du démarrage direct.

1-3.2 Démarrage étoile – triangle

Ce type de démarrage est réservé aux machines démarrant à vide ou dont le couple résistant est faible.

L'intensité de démarrage est divisée par 3, mais le couple de démarrage aussi (proportionnel au carré de la tension d'alimentation des enroulements).



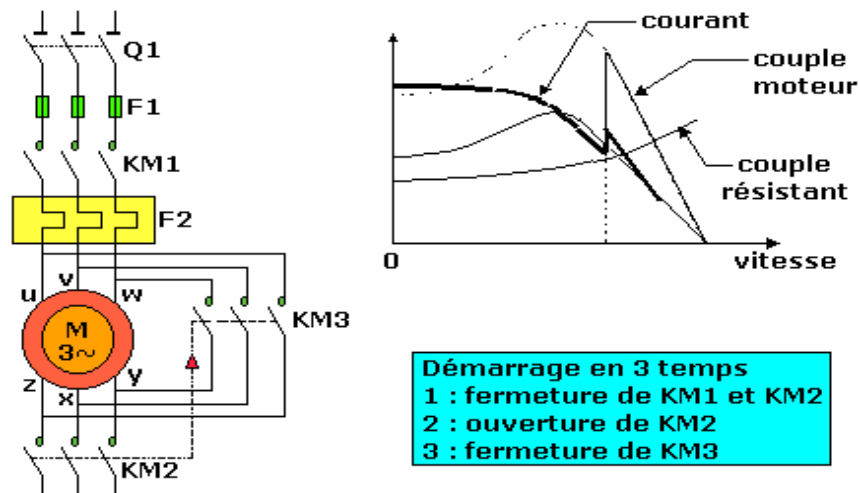


Figure 1.4 Principe du démarrage étoile – triangle

1.3.3 Démarrage statorique

Ce type de démarrage a des caractéristiques comparables au démarrage étoile - triangle.

Il n'y a pas de coupure de l'alimentation du moteur entre les deux temps de démarrage.

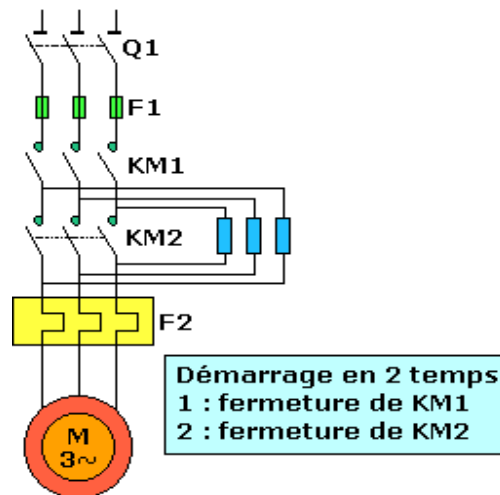


Figure 1.5 Principe du démarrage statorique d'une MAS .

1.3.4 Démarrage rotorique

Le courant de démarrage est limité, sans que le couple soit réduit. Ce type de démarrage nécessite un moteur à bagues (rotor bobiné).

$$C_{em} = 3(m.V_1)^2 \cdot \frac{P}{\omega} \cdot \frac{g.R_2}{R_2^2 + (g.l_2 \cdot \omega)^2} \tag{1.4}$$

avec :

- g Glissement ;
- P Nombre de paire de pôle ;
- ω Pulsation de la tension (rd/s) ;
- m Rapport de transformation ;
- V_1 Tension d'alimentation ;
- R_2 Résistance vue par le rotor ;
- l_2 Inductance de fuites du rotor .

Le couple ne dépend que du rapport R_2/g .

$$\text{à } C_{\min} : \frac{r + R + R'}{g_1} = \frac{r + R}{g_2} = \frac{r}{g_3} \tag{1.5a}$$

$$\text{à } C_{\max} : \frac{r + R + R'}{g_0} = \frac{r + R}{g_1} = \frac{r}{g_2} \tag{1.5b}$$

C_{\max} et C_{\min} sont fixés par le cahier des charges, g_2 et g_3 sont déterminés sur la caractéristique " naturelle " du moteur. Connaissant la valeur de la résistance du bobinage rotorique r , on détermine les valeurs des résistances de démarrage R et R' .

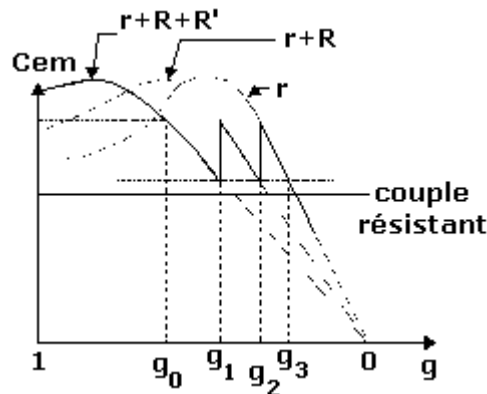


Figure 1.6 Démarrage rotorique d'une MAS .

1.4 Constructions spéciales

1.4.1 Moteur à double cage

Suivant la cage externe est plus " résistive " (laiton), la cage interne présente une inductance plus élevée. Au démarrage, le moteur se comporte comme un transformateur : la fréquence des courants rotoriques est élevée (50Hz). Le courant circule essentiellement dans la cage externe, car l'impédance de la cage interne ($L. w$) est plus élevée. Au fur et à

mesure que la vitesse du moteur augmente, la fréquence des courants rotoriques diminue, le courant circule progressivement dans la cage interne.

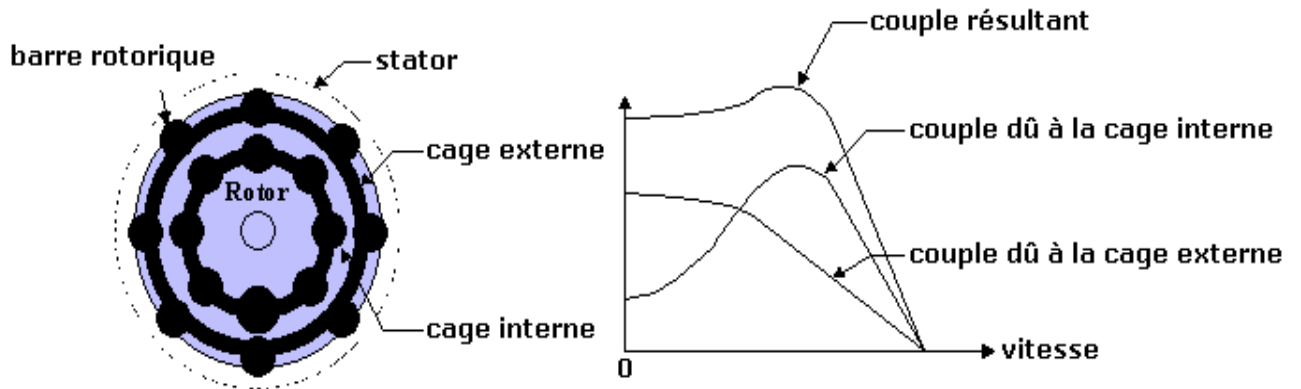


Figure 1.7 Machine à double cage .

1.4.2 Moteur à encoches profondes

Sachant que lors du démarrage, les courants rotoriques sont refoulés vers la périphérie des barres du rotor, la résistance " utile " du rotor est donc augmentée.

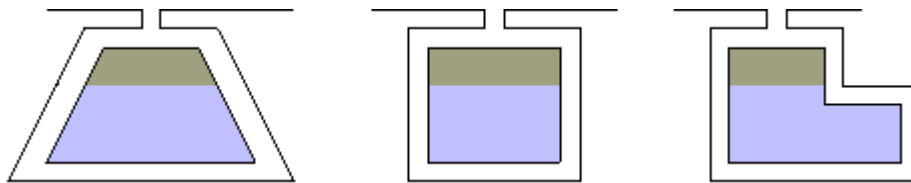


Figure 1.8 Différentes sections de barres rotoriques utilisées.

1.5 Freinage

1.5.1 Freinage par injection de courant continu

Au moment du freinage, KM1 s'ouvre puis KM2 se ferme. Un courant continu est envoyé dans le stator. Le moteur se comporte comme un alternateur dont l'inducteur est constitué par le stator, l'induit par le rotor en court - circuit.

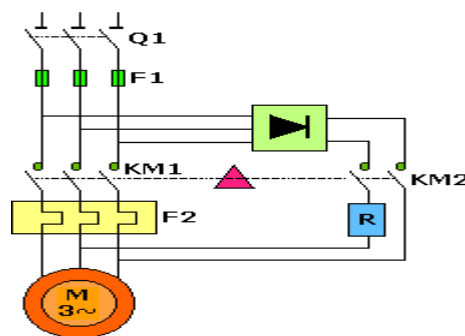


Figure 1.9 Freinage par injection du courant continu.

1.5.2 Freinage par contre – courant

Lors du freinage, il y a ouverture de KM1 puis fermeture de KM2 : le moteur est alimenté par un champ statorique inverse. Les pointes de courant sont très importantes et il est conseillé d'insérer un jeu de résistances pour limiter ce courant. KM2 doit s'ouvrir dès l'arrêt du moteur, pour éviter un redémarrage en sens inverse : il est donc nécessaire de prévoir un capteur détectant l'absence de rotation (capteur centrifuge), [6].

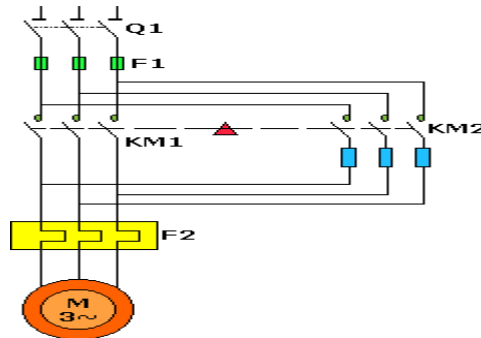


Figure 1.10 Principe de freinage par contre – courant.

1.5.3 Frein moteur

Le moteur est muni d'un frein électromagnétique à disque monté du côté opposé à l'arbre de sortie. En l'absence de courant (ouverture de KM1 ou coupure du réseau), un ressort de rappel permet d'assurer le freinage. C'est un élément important de sécurité, en particulier dans les applications de levage.

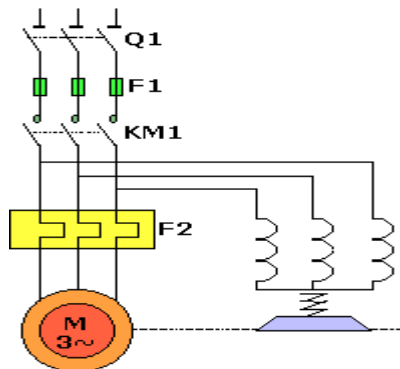


Figure 1.11 Freinage par frein moteur .

1.6 Modélisation et mise en équations

1.6.1 Description de la machine triphasée

La machine asynchrone comporte une partie fixe constituée d'une carcasse à l'intérieure de laquelle sont logés le circuit magnétique et le bobinage du stator d'une part,

et une partie mobile appelée rotor d'autre part. La carcasse nervurée à ailettes longitudinales est un monobloc en fonte ou en acier, [2].

Le principe de fonctionnement du moteur asynchrone est basé sur l'induction des courants dans le bobinage du rotor par un champ tournant dans l'entrefer dû à la circulation des courants polyphasés dans le stator. Ce champ tournant va créer un couple moteur qui s'exerce sur les conducteurs des courants induits, Il provoque ainsi le démarrage et la rotation du rotor dans le même sens que le champ tournant, [2].

En fonctionnement normal, le rotor de la machine asynchrone tourne à la vitesse de Ω_R exprimée en radians par seconde, et la force magnétomotrice produite par les courants statoriques tourne à la vitesse de synchronisme à Ω_S exprimée en radians par seconde, mais la vitesse Ω_R est généralement inférieure à Ω_S et on a :

$$\Omega_S = \frac{\omega_s}{P} \quad (1.6)$$

avec :

- ω_s Pulsation statorique , liée à la fréquence du stator ;
- p Nombre de paire de pôle de la force magnétomotrice résultante.

Le rotor est constitué de manière à obtenir trois enroulements ayant un nombre de pôles identique à celui du stator. Les enroulements rotoriques sont en court circuit, la vitesse de rotation du rotor est inférieure à Ω_S , et on note :

g Glissement de la vitesse de rotation par rapport à celle du champ tournant statorique.

- f_S Fréquence de la vitesse statorique ;
- f_R Fréquence de la vitesse rotorique.

On obtient les relations de glissement g , [3] :

$$g = \frac{\Omega_S - \Omega_R}{\Omega_S} = \frac{f_S - f_R}{f_S} \quad (1.7)$$

Dans une machine asynchrone, la condition de fréquence, $\omega_S = \omega_g + \omega_R$ d'ou $f_S = f_g + f_R$ est constamment satisfait. Quand la pulsation mécanique ω_R est égale à la pulsation du champ tournant ω_S , le phénomène d'induction électromagnétique disparaît.

- ω_g Pulsation de glissement.

1.6.2 Modèle de la machine triphasée

Le modèle de la machine à induction triphasée est illustré par le schéma de la Figure 1.12

avec les armatures statoriques et rotoriques sont munies chacune d'un enroulement triphasé, sont trois enroulements du stator : S_A , S_B et S_C , et pour les trois enroulements rotoriques : R_a , R_b et R_c , et θ : Angle entre l'axe de la phase statorique et la phase rotorique.

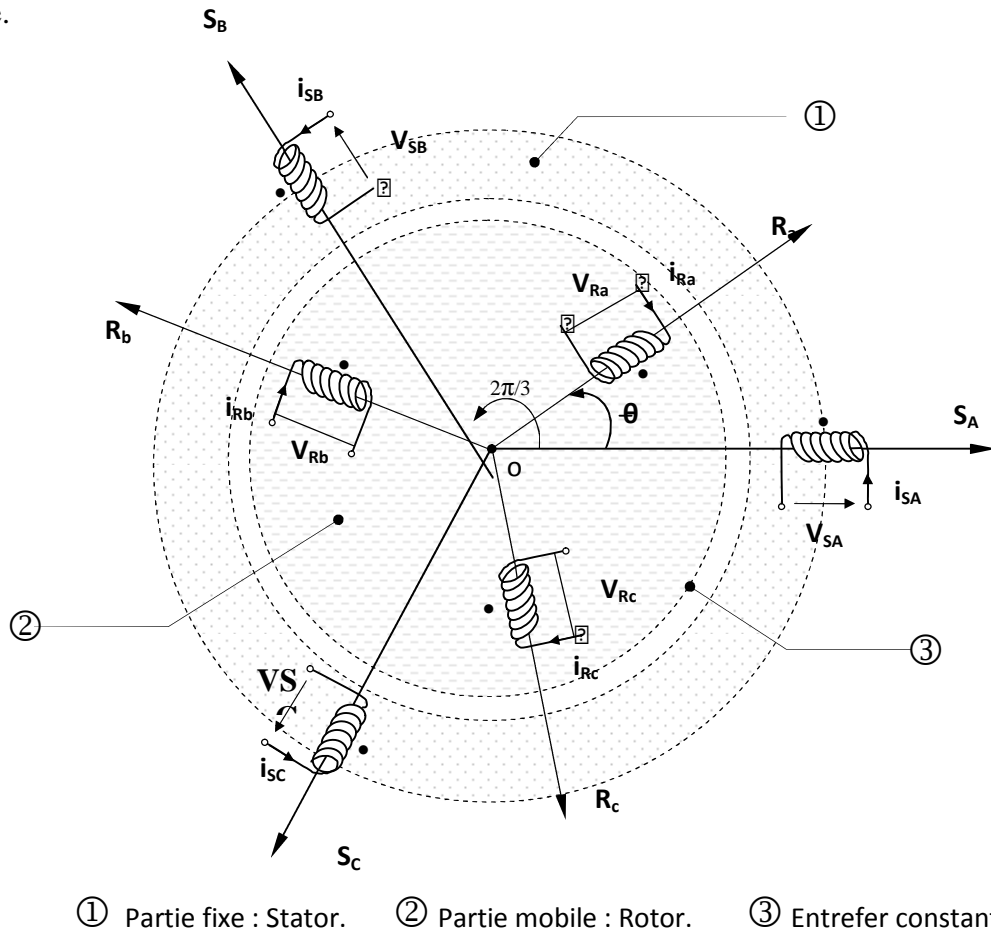


Figure 1.12 Modèle d'une machine asynchrone triphasée.

1.6.3 Hypothèses simplificatrices

L'étude de la machine asynchrone traduit les lois de l'électromagnétisme dans le contexte habituel d'hypothèses simplificatrices suivantes, [4] :

- ✓ Parfaite symétrie ;
- ✓ Assimilation de la cage à un bobinage en court-circuit de même nombre de phase que le bobinage statorique ;
- ✓ Répartition sinusoïdale le long de l'entrefer du champ magnétique de chaque bobinage ;
- ✓ Absence de saturation dans le circuit ;

✓ La loi de variation sinusoïdale des inductances mutuelles entre les enroulements statoriques et rotoriques en fonction de l'angle électrique.

1.6.4 Equations générales de la machine triphasée

Dans les conditions précédentes, les équations des circuits électriques statoriques et rotoriques se présentent sous forme matricielle donnée ci-après.

1.6.4.1 Equations électriques

Les équations électriques du modèle de la machine asynchrone triphasé s'écrivent respectivement :

$$\blacktriangleright \text{ pour le stator } \left[V_{S \ A \ B \ C} \right] = R_S \left[i_{S \ A \ B \ C} \right] + \frac{d}{dt} \left[\Phi_{S \ A \ B \ C} \right] \quad (1.8)$$

$$\blacktriangleright \text{ pour le rotor } \left[V_{R \ a \ b \ c} \right] = R_R \left[i_{R \ a \ b \ c} \right] + \frac{d}{dt} \left[\Phi_{R \ a \ b \ c} \right] \quad (1.9)$$

avec :

R_S, R_R ; Les résistances par phase respectivement du stator, et du rotor.

et :

$$\begin{aligned} \left[V_{S \ A \ B \ C} \right] &= \left[V_{SA} \quad V_{SB} \quad V_{SC} \right]^T && : \text{ Vecteur de tension statorique ;} \\ \left[V_{R \ a \ b \ c} \right] &= \left[V_{Ra} \quad V_{Rb} \quad V_{Rc} \right]^T && : \text{ Vecteur de tension rotorique ;} \\ \left[i_{S \ A \ B \ C} \right] &= \left[i_{SA} \quad i_{SB} \quad i_{SC} \right]^T && : \text{ Vecteur de courant statorique ;} \\ \left[i_{R \ a \ b \ c} \right] &= \left[i_{Ra} \quad i_{Rb} \quad i_{Rc} \right]^T && : \text{ Vecteur de courant rotorique.} \end{aligned}$$

Ainsi que pour les vecteurs des flux :

$$\begin{aligned} \left[\Phi_{S \ A \ B \ C} \right] &= \left[\Phi_{SA} \quad \Phi_{SB} \quad \Phi_{SC} \right]^T && : \text{ Vecteur de flux statorique ;} \\ \left[\Phi_{R \ a \ b \ c} \right] &= \left[\Phi_{Ra} \quad \Phi_{Rb} \quad \Phi_{Rc} \right]^T && : \text{ Vecteur de flux rotorique.} \end{aligned}$$

1.6.4.2 Equations magnétiques

Les relations entre les flux et les courants du stator et du rotor s'écrivent comme suit :

$$\blacktriangleright \text{ Pour le stator : } \left[\Phi_{S \ A \ B \ C} \right] = \left[L_S \right] \left[i_{S \ A \ B \ C} \right] + \left[M_{SR} \right] \left[i_{R \ a \ b \ c} \right] \quad (1.10)$$

$$\blacktriangleright \text{ Pour le rotor : } \left[\Phi_{R \ a \ b \ c} \right] = \left[L_R \right] \left[i_{R \ a \ b \ c} \right] + \left[M_{SR} \right]^T \left[i_{S \ A \ B \ C} \right] \quad (1.11)$$

où :

$[L_S]$ Matrice d'inductances statoriques ;

$[L_R]$ Matrice d'inductances rotoriques ;

$[M_{SR}]$ Matrice des inductance mutuelles du couplage entre stator-rotor.

alors :

$$[L_S] = \begin{bmatrix} \ell_S & M_S & M_S \\ M_S & \ell_S & M_S \\ M_S & M_S & \ell_S \end{bmatrix}, \quad [L_R] = \begin{bmatrix} \ell_R & M_R & M_R \\ M_R & \ell_R & M_R \\ M_R & M_R & \ell_R \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

ainsi :

$$[M_{SR}] = [M_{RS}]^T = M_0 \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta + 2\pi/3) & \cos(\theta - 2\pi/3) \\ \cos(\theta - 2\pi/3) & \cos(\theta) & \cos(\theta + 2\pi/3) \\ \cos(\theta + 2\pi/3) & \cos(\theta - 2\pi/3) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

où :

ℓ_S Inductance propre d'une phase statorique ;

ℓ_R Inductance propre d'une phase rotorique ;

M_S Inductance mutuelle entre phases statoriques ;

M_R Inductance mutuelle entre phases rotoriques ;

M_0 Maximum de l'inductance mutuelle entre phase du stator et la phase correspondante du rotor.

1.6.4.3 Equation mécanique

L'étude des caractéristiques de la machine asynchrone fait introduire du variation non seulement des paramètres électriques (tension, courant, flux) mais aussi des paramètres mécaniques (couple, vitesse), [5] :

$$C_{em} = p [i_{S \ A \ B \ C}]^T \frac{d}{dt} [M_{SR}] [i_{R \ a \ b \ c}] \quad (1.14)$$

L'équation du mouvement de la machine est :

$$J \frac{d}{dt} \Omega = C_{em} - C_r - f_r \Omega \quad (1.15)$$

avec :

J Moment d'inertie des masses tournantes ;

C_r Couple résistant imposé à l'arbre de la machine ;

Ω Vitesse rotorique ;

C_{em} Couple électromagnétique ;

- f_r Coefficient de frottement visqueux ;
 $(f_r \Omega)$ Terme de couple de frottement visqueux.

1.6.5 Transformation de PARK

La transformation de Park a pour but de traiter une large gamme de machines de façon unifiée en le ramenant à un modèle unique, Cette conversion est appelée souvent transformation des axes, fait correspondant aux deux enroulements de la machine originale suivie d'une rotation, les enroulements équivalents du point de vue électrique et magnétique. Cette transformation ainsi, pour l'objectif de rendre les inductances mutuelles du modèle indépendantes de l'angle de rotation, [4].

1.6.5.1 Différents repères

L'isotropie du moteur asynchrone permet une grande souplesse dans la composition des équations de la machine selon deux axes à l'aide des composantes de Park, cela nécessite l'utilisation d'un repère qui permet de simplifier au maximum les expressions analytiques. Il existe différentes possibilités pour le choix du repère d'axes, se ramène pratiquement à trois référentiels (systèmes biphasés) orthogonaux :

- ❶ Référentiel immobile par rapport au stator : $(\alpha - \beta) \rightarrow \omega_{obs} = 0$.
- ❷ Référentiel immobile par rapport au rotor : $(x - y) \rightarrow \omega_{obs} = \omega_R$.
- ❸ Référentiel immobile par rapport au champ tournant : $(d - q) \rightarrow \omega_{obs} = \omega_S$.

où :

ω_{obs} : Vitesse angulaire de rotation du système d'axes biphasé par rapport au système d'axes triphasé.

1.6.5.2 Application de la transformation de Park au modèle de la M.AS.

On désire transformer les enroulements de la M.AS triphasée en des enroulements biphasé orthogonaux équivalents selon les axes $(d - q)$ lié au champ tournant, voir «Figure 1.13», ainsi la composante homopolaire pour équilibrer le système transformé, c'est à dire :

- ♦ Direct selon l'axe (d) ;
- ♦ Quadrature (transversal) selon l'axe (q) ;
- ♦ Homopolaire (o) .

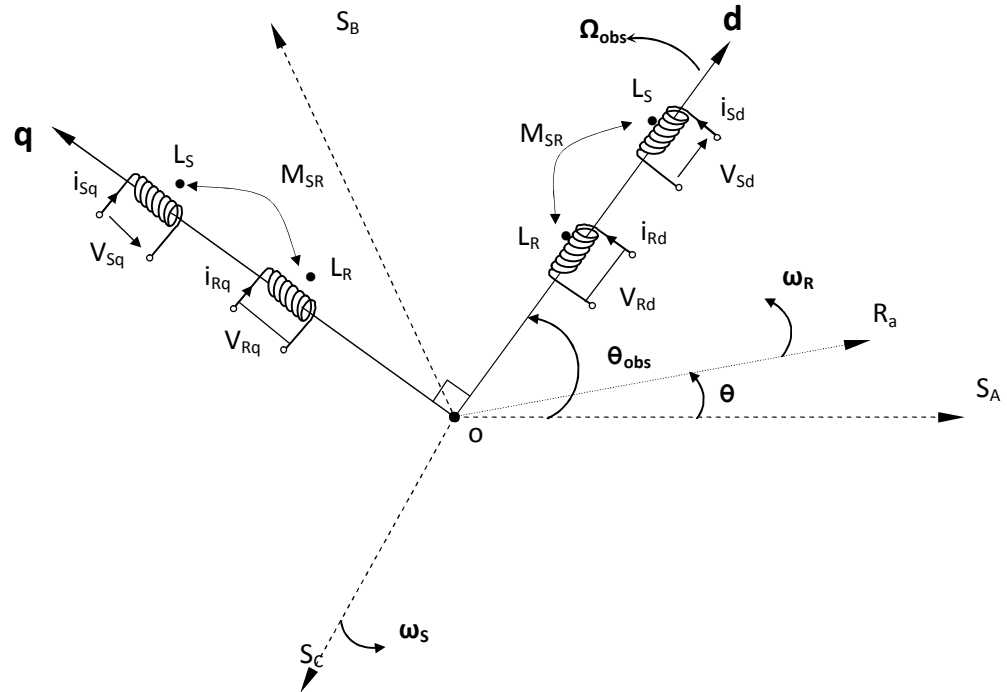


Figure 1.13 Référentiel tournant d'axes (d–q).

Où :

$\theta_{obs} = \int \omega_{obs} dt$: Position quelconque d'observation entre les systèmes d'axes biphasé par rapport au système d'axes triphasé ;

Pour le passage du système triphasé vers le système biphasé, on a les équivalents suivants :

- ▶ L'équivalent de tension : $[V_{dq0}] = [P(\theta_{obs})][V_{ABC}]$
- ▶ L'équivalent de courant : $[i_{dq0}] = [P(\theta_{obs})][i_{ABC}]$ (1.16)
- ▶ L'équivalent du flux : $[\Phi_{dq0}] = [P(\theta_{obs})][\Phi_{ABC}]$

où :

$[P(\theta_{obs})]$ Matrice de Park.

Dans le cas d'un passage inverse, on a :

$$\begin{cases} [V_{ABC}] = [P(\theta_{obs})]^{-1}[V_{dq0}] \\ [i_{ABC}] = [P(\theta_{obs})]^{-1}[i_{dq0}] \\ [\Phi_{ABC}] = [P(\theta_{obs})]^{-1}[\Phi_{dq0}] \end{cases} \quad (1.17)$$

La matrice de transformation de Park modifiée directe et inverse s'écrit alors :

$$[P(\theta_{\text{obs}})] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\theta_{\text{obs}}) & \cos(\theta_{\text{obs}} - 2\pi/3) & \cos(\theta_{\text{obs}} + 2\pi/3) \\ -\sin(\theta_{\text{obs}}) & -\sin(\theta_{\text{obs}} - 2\pi/3) & -\sin(\theta_{\text{obs}} + 2\pi/3) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

✓ Le facteur $(\sqrt{\frac{2}{3}})$: est là pour conserver la puissance électrique instantanée, [2].

$$[P(\theta_{\text{obs}})]^T = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos(\theta_{\text{obs}}) & -\sin(\theta_{\text{obs}}) & 1/\sqrt{2} \\ \cos(\theta_{\text{obs}} - 2\pi/3) & -\sin(\theta_{\text{obs}} - 2\pi/3) & 1/\sqrt{2} \\ \cos(\theta_{\text{obs}} + 2\pi/3) & -\sin(\theta_{\text{obs}} + 2\pi/3) & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

L'application de la transformation de Park aux modèles matriciels électriques, (1.8) et (1.9), et magnétiques, (1.10), (1.11), permet d'obtenir les équations suivantes:

1.6.5.2.1 Equations électriques

$$[V_{Sd}] = R_S i_{Sd} + \frac{d}{dt} \Phi_{Sd} - \omega_S \Phi_{Sq} \quad (1.20)$$

$$[V_{Sq}] = R_S i_{Sq} + \frac{d}{dt} \Phi_{Sq} + \omega_S \Phi_{Sd} \quad (1.21)$$

$$0 = R_R i_{Rd} + \frac{d}{dt} \Phi_{Rd} - (\omega_S - \omega_R) \Phi_{Rq} \quad (1.22)$$

$$0 = R_R i_{Rq} + \frac{d}{dt} \Phi_{Rq} + (\omega_S - \omega_R) \Phi_{Rd} \quad (1.23)$$

1.6.5.2.2 Equations magnétiques

$$\Phi_{Sd} = L_S i_{Sd} + M i_{Rd} \quad (1.24)$$

$$\Phi_{Sq} = L_S i_{Sq} + M i_{Rq} \quad (1.25)$$

$$\Phi_{Rd} = L_R i_{Rd} + M i_{Sd} \quad (1.26)$$

$$\Phi_{Rq} = L_R i_{Rq} + M i_{Sq} \quad (1.27)$$

avec:

$L_S = \ell_S - M$, $L_R = \ell_R - M$ Inductance cyclique propre du stator et du rotor respectivement ;

$M = \frac{3}{2} M_0$ Inductance cyclique mutuelle stator-rotor.

1.6.5.2.3 Equation mécanique

Le couple électromécanique représenté dans l'équation (I.9) devient :

$$C_{em} = p \frac{M}{L_R} (\Phi_{Rd} \cdot i_{Sq} - \Phi_{Rq} \cdot i_{Sd}) \tag{1.28}$$

Et l'équation de la vitesse mécanique est représentée par l'équation (1.15).

1.6.6 Alimentation de la machine asynchrone

Pour une machine asynchrone alimentée en tension, si on considère le courant statorique i_s et le flux rotorique Φ_R comme variables d'état, et la pulsation ω_s et les tensions V_{sd} , V_{sq} , comme grandeur de commande et le couple C_r comme une perturbation, on aura le schéma bloc suivant :

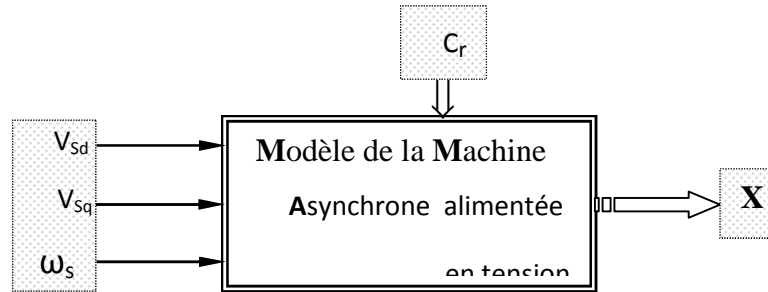


Figure 1.14 Schéma bloc de la machine asynchrone alimentée en tension.

Le vecteur de sortie $[X]$, peut avoir une des formes des différentes expressions :

- $[X] = [i_{Sd} \ i_{Sq} \ i_{Rd} \ i_{Rq}]^T ;$
- ou $[X] = [\Phi_{Sd} \ \Phi_{Sq} \ \Phi_{Rd} \ \Phi_{Rq}]^T ;$
- ou $[X] = [\Phi_{Sd} \ \Phi_{Sq} \ i_{Rd} \ i_{Rq}]^T ;$
- ou $[X] = [i_{Sd} \ i_{Sq} \ \Phi_{Rd} \ \Phi_{Rq}]^T .$

1.6.7 Représentation d'état du modèle de la M.AS.

La forme générale de l'équation d'état s'écrit de la façon suivante :

$$[\dot{X}] = [A][X] + [B][U] \tag{1.29}$$

avec :

$$\begin{cases} [X] = [i_{Sd} \ i_{Sq} \ \Phi_{Rd} \ \Phi_{Rq}]^T \\ [U] = [V_{sd} \ V_{sq}]^T \end{cases} \tag{1.30}$$

Pour le référentielle lié au champ tournant ($d - q$), on a :

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_t}{\sigma L_S} & \omega_s & \left(\frac{M}{\sigma L_S L_R T_R}\right) & \left(\frac{M}{\sigma L_S L_R}\right)\omega \\ -\omega_s & -\left(\frac{R_t}{\sigma L_S}\right) & -\left(\frac{M}{\sigma L_S L_R}\right)\omega & \left(\frac{M}{\sigma L_S L_R T_R}\right) \\ \frac{M}{T_R} & 0 & -\frac{1}{T_R} & (\omega_s - \omega) \\ 0 & \frac{M}{T_R} & -(\omega_s - \omega) & -\frac{1}{T_R} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_S} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_S} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

et pour le référentiel lié au stator ($\alpha - \beta$), la matrice [A] devient :

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_t}{\sigma L_S} & 0 & \left(\frac{M}{\sigma L_S L_R T_R}\right) & \left(\frac{M}{\sigma L_S L_R}\right)\omega \\ 0 & -\left(\frac{R_t}{\sigma L_S}\right) & -\left(\frac{M}{\sigma L_S L_R}\right)\omega & \left(\frac{M}{\sigma L_S L_R T_R}\right) \\ \frac{M}{T_R} & 0 & -\frac{1}{T_R} & -\omega \\ 0 & \frac{M}{T_R} & \omega & -\frac{1}{T_R} \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

avec :

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_R L_S} \quad \text{Coefficient de dispersion total ;}$$

$$T_R = \frac{L_R}{R_R} \quad \text{Constante de temps rotorique ;}$$

$$R_t = R_S + \frac{M^2}{L_R T_R} \quad \text{Résistance totale ramenée au stator.}$$

[A] : Matrice fondamentale qui caractérise le système et [B] : Matrice d'entrée.

1.7 Caractéristiques électromécaniques

Le schéma bloc établi précédemment permet d'obtenir facilement les caractéristiques électromécaniques de la machine asynchrone monophasée :

En effet la puissance électromagnétique utile, c'est-à-dire celle transformée en énergie mécanique correspond pour chaque phase à la puissance consommée par la résistance $R_r^* \cdot \frac{1-g}{g}$.

La puissance électromécanique totale pour les trois phases a donc pour expression :

$$P_{em} = T_{em} \cdot \Omega = 3 \cdot R_r^* \cdot \frac{1-g}{g} \cdot I_r^2 \quad (1.33)$$

1.7.1 Machine alimentée par un système de tensions de fréquence fixe

Le modèle ci-dessus permet d'obtenir l'expression du couple soit en fonction du glissement, soit en fonction de la vitesse. Le calcul est très simplifié et peut être fait à la main si l'on néglige la résistance statorique. Dans ce cas, on ajoute une erreur de 2 ou 3 %, mais on obtient une courbe dont l'allure est proche de la réalité. De toute façon, on ne doit pas perdre de vue que ce ne sont que des modèles, [7].

Dans le cadre de cette approximation on a :

$$I_r^* = \frac{V_s^2}{(N_r \cdot \omega_s)^2 + \left(\frac{R_r^*}{g}\right)^2} \quad (1.34)$$

Avec V_s : valeur efficace de la tension aux bornes d'une des phases du stator de la machine.

1.7.1.1 Couple électromagnétique en fonction du glissement

De l'expression de la puissance et des deux équations ci-dessus on en déduit l'expression du couple électromagnétique en fonction du glissement g :

$$\text{Pour une machine à } p \text{ paires de pôles on a : } \quad \Omega = (1 - g) \cdot \frac{\omega_s}{P} \quad (1.35)$$

Cela conduit à :

$$T_{em} = 3P \cdot \frac{V_s^2}{\omega_s} \cdot \frac{\frac{R_r^*}{g}}{(N_r \cdot \omega_s)^2 + \left(\frac{R_r^*}{g}\right)^2}$$

$$T_{em} = 3P \cdot \frac{V_s^2}{\omega_s} \cdot \frac{\frac{R_r^*}{g}}{\left(\frac{g}{R_r^*} (N_r \cdot \omega_s)^2\right) + \left(\frac{R_r^*}{g}\right)^2}$$

$$T_{em} = \frac{3P}{N_r} \cdot \frac{V_s^2}{\omega_s^2} \cdot \frac{\frac{R_r^*}{g}}{\left(\frac{g \cdot N_r \cdot \omega_s}{R_r^*}\right) + \left(\frac{R_r^*}{g}\right)^2}$$

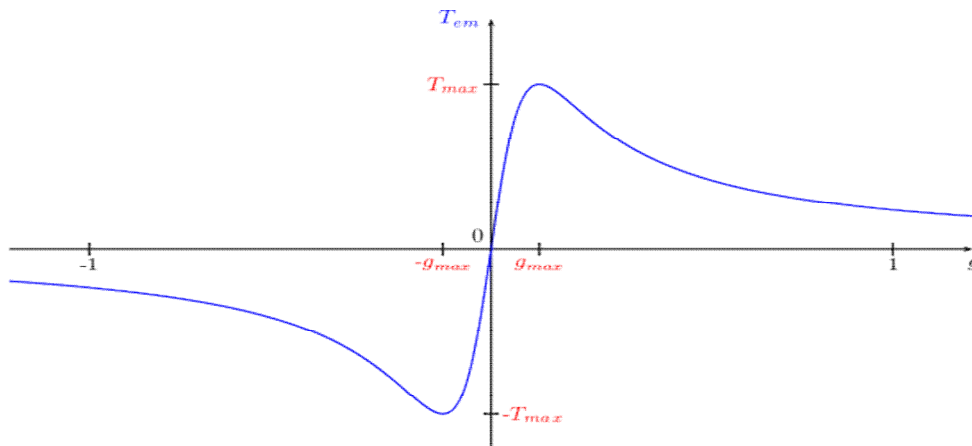
Le couple électromagnétique passe par un maximum $T_{\max} = \frac{3P}{2N_r} \cdot \frac{V_s^2}{\omega_s^2}$ pour :

$$g = g_{\max} = \frac{R_r^*}{N_r \cdot \omega_s} \quad (1.36)$$

En introduisant ce couple maximal et le glissement correspondant dans l'équation du couple électromagnétique on obtient la relation :

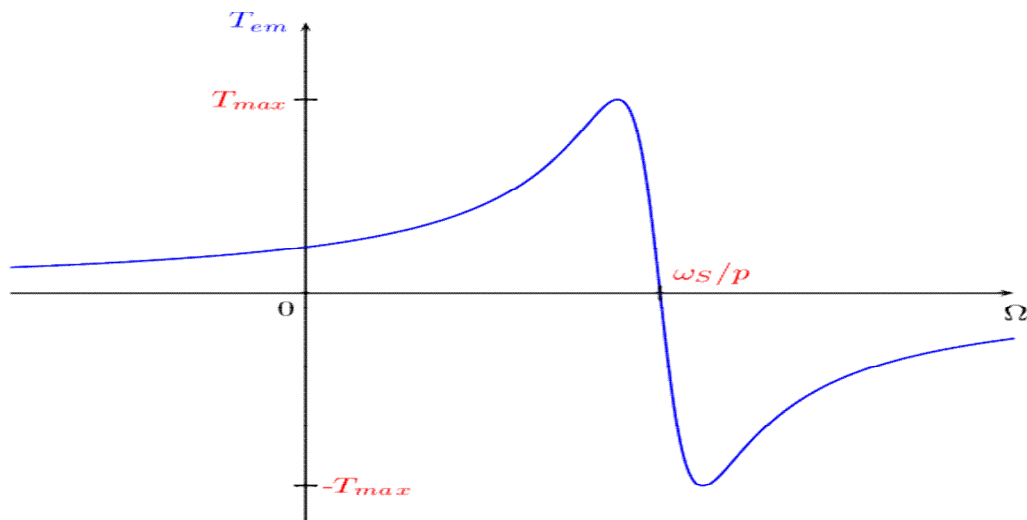
$$T_{em} = 2.T_{max} \cdot \frac{1}{\left(\frac{g_{max}}{g}\right) + \left(\frac{g}{g_{max}}\right)} \quad (1.37)$$

La courbe représentative de l'expression du couple en fonction du glissement possède une symétrie par rapport à l'origine :



1.7.1.2. Couple électromagnétique en fonction de la vitesse de rotation

Cette courbe est plus habituelle et plus concrète, elle se déduit simplement de la courbe en fonction du glissement grâce à la relation : $\Omega = (1 - g) \cdot \frac{\omega_s}{P}$



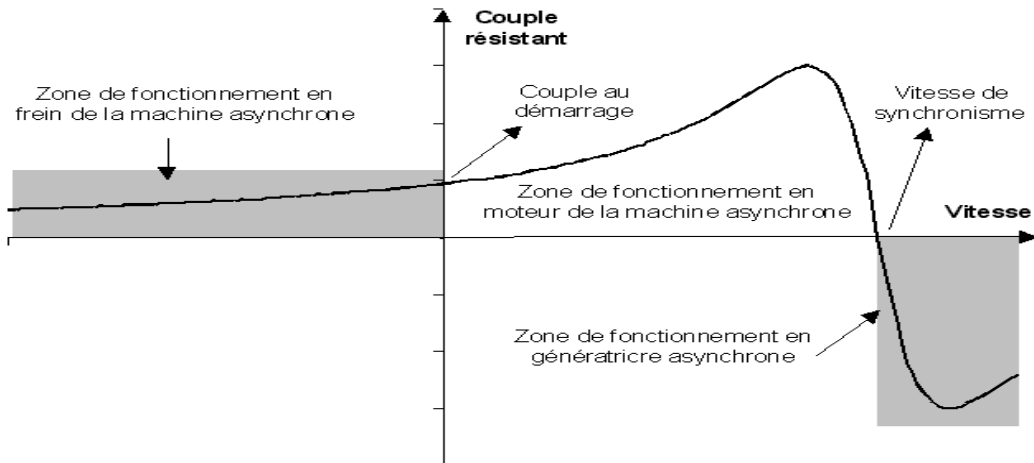
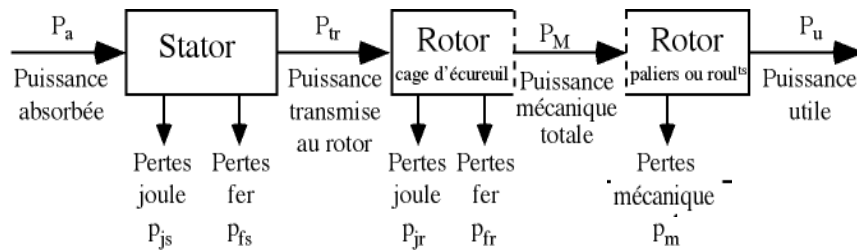


Figure 1.15 Domaines de fonctionnement de la machine asynchrone , [23].

1.8 Bilan des puissances



Puissance électrique absorbée	$P_a = \sqrt{3}UI \cos \varphi$	U : tension entre deux bornes du moteur I : courant en ligne
Pertes par effet joule au stator	$p_{js} = \frac{3}{2} RI^2$	R : résistance entre deux bornes du stator
Puissance transmise : P_{tr}	$P_{tr} = P_a - p_{js} - p_{fs}$	C'est la puissance qui reçoit le rotor.
Moment du couple électromagnétique : T_{em}	$T_{em} = \frac{P_{tr}}{\Omega_s}$	Forces qui s'exercent sur les conducteurs du rotor tournent à la vitesse Ω_s : elles <i>glissent</i> sur le rotor qui, lui, ne tourne qu'à la vitesse Ω . L'action de l'ensemble des forces électromagnétiques se réduit à un couple électromagnétique résultant de moment T_{em} .

Puissance mécanique totale : P_M	$P_M = P_{tr}(1 - g)$	Le couple électromagnétique de moment T_{em} entraîne le rotor à la vitesse Ω . Il lui communique donc la puissance mécanique totale P_M . Cette puissance comprend la puissance utile et les pertes mécaniques.
Pertes fer au rotor : p_{fr}	Ces pertes sont négligeables	
Pertes joules au rotor	$p_{jr} + p_{fr} = P_{tr} - P_M = P_{tr} - P_{tr}(1 - g) = gP_{tr}$	
Pertes collectives : p_c	$p_c = p_{fs} + p_m$	Ces pertes ne dépendent que de U , f et n . Comme ces grandeurs sont généralement constantes, les pertes fer au stator et les pertes mécaniques le sont aussi.
Couple de perte :	$T_p = \frac{P_c}{\Omega_s}$	Le couple de perte est une grandeur constante quelle que soit la vitesse et la charge de la machine
Autres :	$P_u = P_M - p_m$; $T_u = \frac{P_u}{\Omega}$; $\eta = \frac{P_u}{P_a}$	

1.9 Point de fonctionnement du moteur en charge

C'est le point d'intersection des caractéristiques $T = f(n)$ du moteur et de la charge.

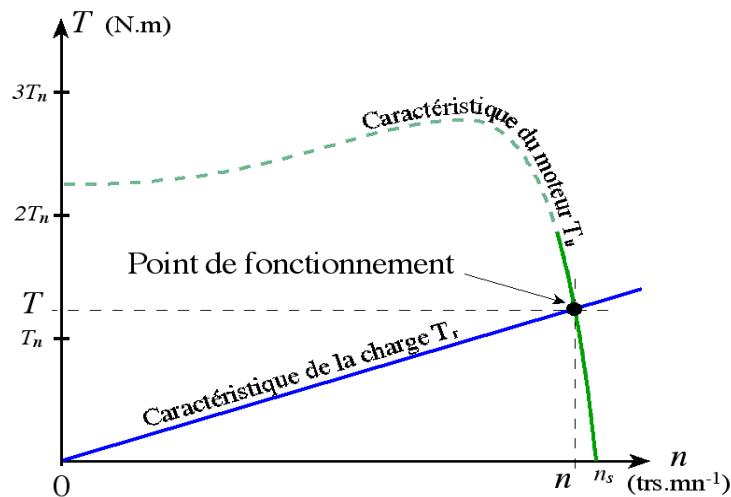


Figure 1.16 Point de fonctionnement du moteur en charge

T_u Couple utile du moteur ;

T_r Couple résistant de la charge dépend de la charge.

1.9.1 Méthode de résolution graphique

Tracer à l'échelle sur du papier millimétré les deux caractéristiques et relever les coordonnées du point d'intersection.

1.9.2 Méthode de résolution par le calcul

Il faut résoudre : $T_u = T_r$

Exemple : cas d'une charge ayant un couple résistant proportionnel au carré de la vitesse : $T_r = c.n^2$

Le couple utile du moteur est : $T_u = a.n + b$

$$T_u = T_r \Rightarrow a.n + b = c.n^2 \Rightarrow c.n^2 - a.n - b = 0$$

Finalement, il faut résoudre une équation du second degré. Une solution sur les deux trouvées sera la bonne (une des solutions n'aura pas de signification physique).

1.10 Autres informations

Réglage de la vitesse : Comme la vitesse n reste très proche de la vitesse n_s de synchronisme, pour varier la vitesse du moteur il faut en fait varier la fréquence f_s à l'aide d'un onduleur.

$$\frac{V}{f} = \text{constante}$$

Mais pour faire varier la vitesse sans modifier le couple utile, il faut garder le rapport tension / fréquence constant.

V est la tension d'alimentation d'un enroulement. Si on augmente la vitesse, il faut augmenter la fréquence et la tension d'alimentation dans les limites du bon fonctionnement de la machine.

Intérêts et utilisation : Le moteur asynchrone triphasé, d'une puissance de quelques centaines de watts à plusieurs mégawatts est le plus utilisé de tous les moteurs électriques.

Son rapport coût/puissance est le plus faible.

Associés à des onduleurs de tension, les moteurs asynchrones de forte puissance peuvent fonctionner à vitesse variable dans un large domaine (les derniers TGV, le Tram de Strasbourg, ...).

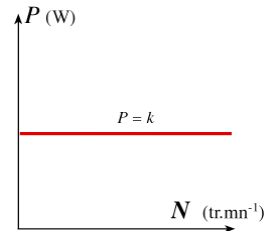
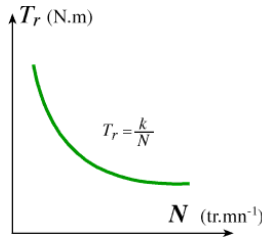
Toutefois l'emploi de ce type de moteur est évité en très forte puissance ($P > 10$ MW) car la consommation de puissance réactive est alors un handicap.

Remarques : en électroménager (lave-linge) la vitesse des moteurs asynchrones n'est pas réglée par un onduleur, mais ces moteurs possèdent plusieurs bobinages. Il est alors possible de changer le nombre de paires de pôles et donc la vitesse.

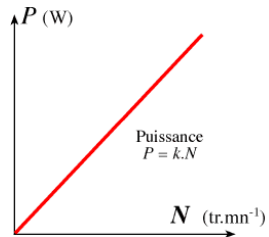
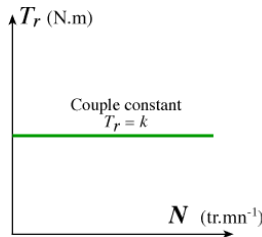
Réversibilité : Toutes les machines électriques tournantes sont réversibles.

1.11 Complément : caractéristiques $T_r=f(n)$ de quelques charges

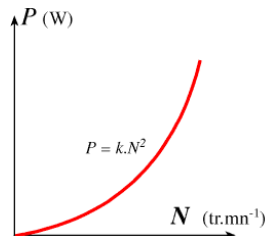
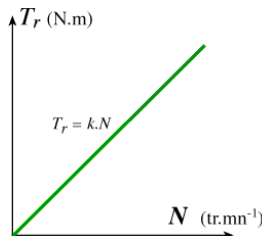
Machine à puissance constante (enrouleuse, compresseur, essoreuse)



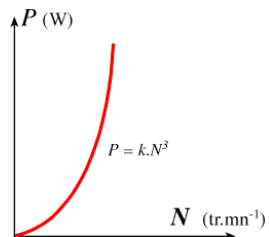
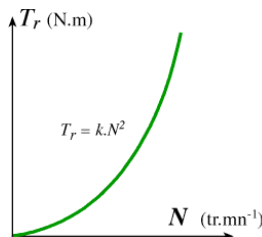
Machine à couple constant (levage, pompe)



Machine à couple proportionnel à la vitesse (pompe volumétrique, mélangeur)



Machine à couple proportionnel au carré de la vitesse (ventilateur)



Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présentées les constitutions et le principe fonctionnement de la machine asynchrone, étudier les caractéristiques mécanique couple / vitesse, avec différents pertes de ces machines, déterminer le rendement et le couple et présenter le point de fonctionnement du moteur en charge.

Chapitre 02

Approche

Analytique de

Conception des

MAS

Introduction

La conception est un exercice, et nous avons préféré une explication plus proche du travail de l'ingénieur. Il s'agit d'imaginer, de formuler des solutions pour remplir des fonctions bien définies à l'intérieur d'un ensemble de contraintes. Généralement, l'atteinte d'une solution (d'un design) n'est pas directe sauf pour des problèmes extrêmement simples.

Le processus est plutôt itératif de façon simpliste, on distingue d'abord le choix d'un modèle représentant le phénomène physique du problème. Ensuite, un premier design est élaboré et on vérifie si les contraintes sont satisfaites.

On peut décrire la conception ou le design comme un processus itératif au cours duquel un objet est conçu et modifié afin qu'il puisse remplir des fonctions bien définies et se conformer à un ensemble de contraintes.

La conception des machines asynchrones recouvre un domaine d'activité très vaste qui va de la machine de quelques watts de puissance destinée à des applications informatiques jusqu'au moteur de quelques mégawatts implanté dans des procédés industriels lourds. Il n'est pas possible de couvrir, dans les limites, la diversité de l'approche de l'ensemble de ces applications, ce qui nous conduit à nous restreindre aux machines polyphasées de taille moyenne.

Cependant, dans cette seule catégorie qui recouvre la plupart des applications industrielles, le cadre dans lequel se déroule la conception est d'une très grande variété qui inclut la conception de gammes normalisées de machines destinées à la constitution d'un catalogue, mais aussi, ce qui est de plus en plus fréquent de nos jours, la réponse à la commande d'un client pour une utilisation spécifique.

L'établissement du projet d'une machine électrique commence par le choix des dimensions et des matériaux de ses parties actives et constructives et en premier lieu de ses dimensions principales : du diamètre D et de la longueur de calcul de l'armature magnétique de l'induit. Après cela, on effectue les calculs électromagnétiques, mécaniques. A la suite de ces calculs, on apporte, s'il y a lieu, des corrections nécessaires dans les dimensions choisies primitivement et on choisit des matériaux présentant d'autres propriétés. Puis on reprend tous ces calculs jusqu'à ce qu'on obtienne une variante qui répond entièrement aux exigences énoncées dans le cahier de charge.

Dans la première partie de ce chapitre on présentera la procédure de calcul et de dimensionnement d'une machine asynchrone, ainsi que l'étude en vue de la vérification et

de la validation de l'approche adoptée. En effet il n'existe pas de théorie précise pour le calcul des machines, ou plutôt des méthodes de calcul plus au moins précises basées sur des diagrammes établis à partir d'études statistiques. Nous nous sommes efforcés de choisir l'approche la plus appropriée, avec la meilleure précision possible.

Dans la deuxième partie, on essaiera de donner les résultats élaborés par un programme de calcul sous environnement **MATLAB** d'une machine à induction type ELPROM, A0-112 M-2B3T-11.

2.1 Organigramme de calcul

La procédure de calcul d'une machine électrique est résumée dans l'organigramme de la **Figure. 2.1**

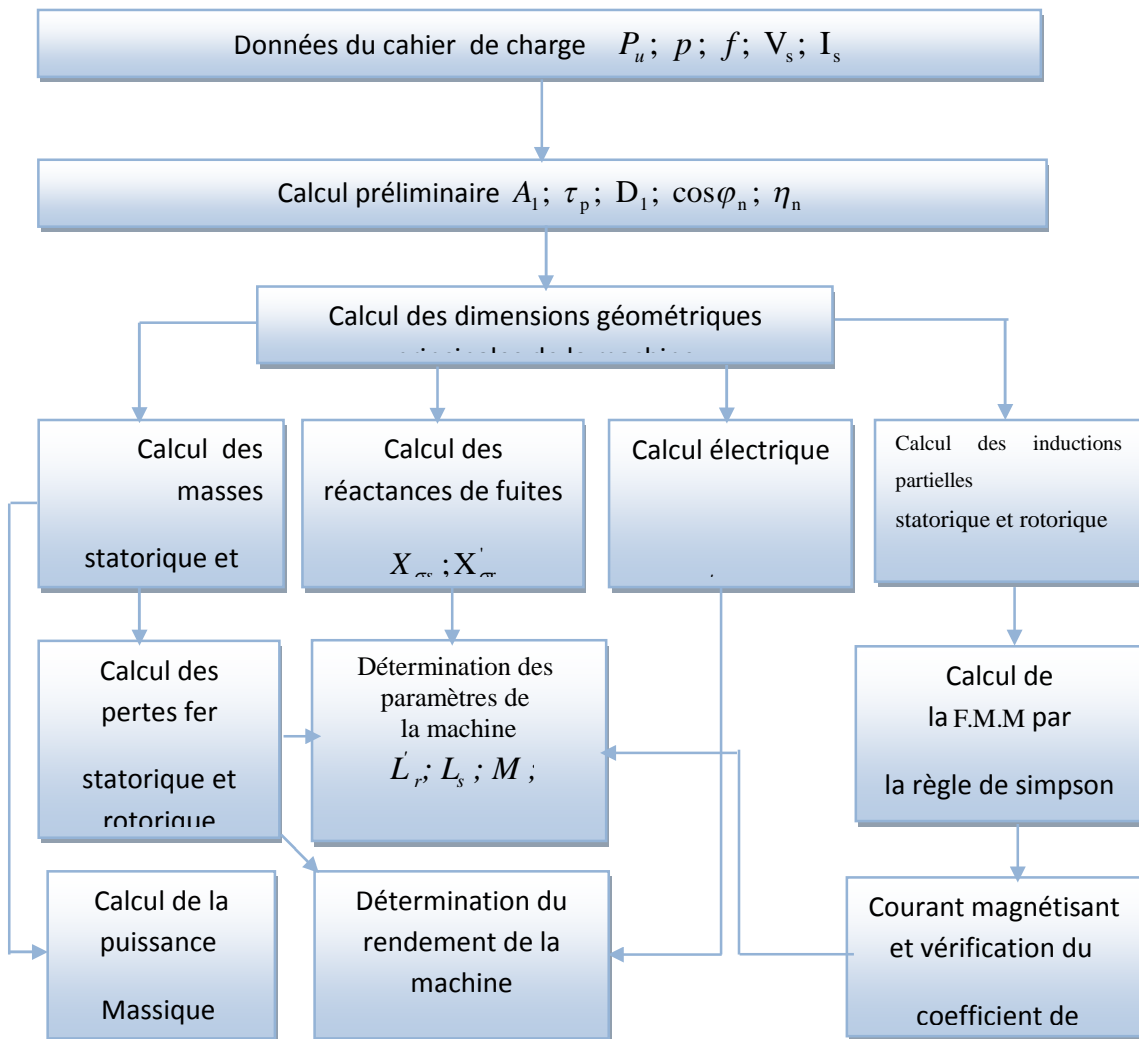


Figure 2.1 Organigramme de calcul pour la conception d'une machine électrique

2.2 Calcul des dimensions principales

Dans la détermination des dimensions principales des machines à courant alternatif, il est indiqué de prendre pour base la puissance apparente.

La liaison entre les dimensions principales et les contraintes, tant électriques que magnétiques, est donnée par une relation définissant le coefficient d'utilisation de la machine

Sachant que dans le cas idéal d'un champ sinusoïdal :

$$V_1 \approx E_1 = 4.44 f_1 N_1 K_{w1} \phi \quad (2.1)$$

Dans une première approximation

$$\phi = \alpha_i \tau_p l_i B_\delta \quad (2.2)$$

Pour le cas d'un champ sinusoïdal $\alpha_i = \frac{2}{\pi}$

N_1 Nombre de spires du primaire par phase ;

K_{w1} Facteur de bobinage ;

ϕ Flux par pôle ;

τ_p Pas polaire ;

l_i Longueur virtuelle de l'induit ;

α_i Coefficient d'aplatissement de la courbe.

En exprimant $f_1 = pn_s$ et $\tau_p = \frac{\pi D}{2p}$

D Diamètre du stator à l'alésage ;

p Nombre de paires de pôles.

Et en posant :

$$A_1 = \frac{m_1 2N_1 I_1}{\pi \cdot D} \quad (2.3)$$

A_1 Désigne la densité linéaire de courant au périphérique de l'induit ; elle caractérise l'utilisation électrique de la machine.

La puissance apparente interne est alors donnée par :

$$S_i = m_1 V_1 I_1$$

$$S_i = m_1 4.44 f_1 N_1 K_{w1} \phi \quad (2.4)$$

$$S_i = \frac{m_1 4.44 60 n_s p N_1 K_{w1} 2\pi D^2 l_i B_\delta I_1}{\pi D 2p}$$

$$S_i = \frac{A_1 B_\delta K_{wl} 60 n_s D^2 l_i 10^3}{8.6 \cdot 10^3}$$

$$\frac{S_i \cdot 10^3}{D^2 l_i 60 n_s} = \frac{K_{wl} B_\delta A_1}{8.6 \cdot 10^3} = C \quad (2.5)$$

(2.5) est l'équation fondamentale pour le calcul des dimensions principales. Elle nous permet de déterminer le volume $D^2 l_i$ en procédant de deux façons:

- On choisit un champ d'induction B_δ dans l'entrefer, et une densité de courant linéaire A_1 , puis on calcule le volume $D^2 l_i$.
- Ou bien on choisit un coefficient d'utilisation « C » puis on détermine le volume $D^2 l_i$, les valeurs de C, B_δ, A_1 sont déterminées (données) par des abaques en fonction de τ_p, p etc....

Pour la détermination du diamètre D et de la longueur virtuelle l_i on utilise la relation empirique, [8].

$$\frac{l_i}{\tau_p} = \sqrt[3]{p} = \lambda \quad (2.6)$$

Le rapport λ est donné en fonction du nombre de paires de pôles, avec un intervalle de variation, pour lequel les caractéristiques de la machine restent voisines.

Le rendement η et le facteur de puissance $\cos \varphi$ sont tirés des diagrammes tracés à partir des études statistiques faites sur un grand nombre de moteurs (Norme allemande), [8].

2.3 Dimensionnement des encoches

Le choix du type d'encoches pour une machine dépend:

- De la tension de service ;
- De la puissance ;
- Du type de bobinage.

Le stator des petites et moyennes machines, à basse tension, est exécuté avec des encoches trapézoïdales semi-ouvertes c'est le cas de notre machine 2,2 kW. Le choix de ce type d'encoches est d'assurer une meilleure insertion des conducteurs et obtenir un meilleur coefficient de remplissage de l'encoche. Puisque lors de la mise en encoche des enroulements, les conducteurs n'occupent pas tout l'espace qui leur a été réservé. Le rapport de surface des conducteurs et d'encoches est appelé coefficient de remplissage. Ce rapport varie selon la capacité des ouvriers spécialisés dans la mise en place du bobinage. Il peut être, dans les meilleures conditions égales à 0.7 pour des machines de faibles puissances.

Pour le rotor à cage d'écureuil l'enroulement est formé de barres court-circuitées par des anneaux.

On remarque que du point de vue électrique, on préfère des cages en cuivre car le cuivre possède une plus faible résistivité que l'aluminium ; on réduit ainsi les dimensions des encoches, ce qui influe beaucoup sur les paramètres de fonctionnement de la machine. Par contre l'aluminium est meilleur du point de vue coût et facilité de travail.

Les encoches sont rondes ou rectangulaires, Selon la technique d'exécution et la caractéristique demandée :

- Simple cage ;
- Double cage ;
- Cage à effet pelliculaire.

2.3.1 Encoche du stator

Soit Z_1 le nombre d'encoches du stator

$$Z_1 = 2p q m \quad (2.7)$$

Z_1 Permet la détermination du nombre d'encoches par pôle et par phase q , sachant que le nombre de paires de pôles p et le nombre de phases m sont définis:

$$q = \frac{Z_1}{2pm} \quad (2.8)$$

Le nombre q est un paramètre fondamental pour la machine, car il intervient dans le coefficient de distribution K_d .

Pour réduire l'amplitude des harmoniques supérieurs il est préférable que $q > 2$. L'augmentation de q engendre une augmentation de rang des harmoniques de denture. Cependant q ne peut pas augmenter indéfiniment car il est limité par la dimension de la machine.

2.3.2 Encoche du rotor

Pour le choix du nombre d'encoches rotoriques Z_2 , il n'existe aucune théorie. Cependant il existe des tableaux établis à partir d'essais ou résultats pratiques pour le choix de Z_2 en fonction du nombre de paires de pôles p et du nombre d'encoches statoriques Z_1 . Ces tableaux sont établis pour atténuer les vibrations et assurer une bonne caractéristique mécanique de la machine, [8].

2.4 Type et choix de l'enroulement

- **Choix du facteur de bobinage K_{w1}**

$$K_{w1} = K_{p1} K_{d1} \quad (2.9)$$

K_{d1} Facteur de distribution ;

K_{p1} Facteur de raccourcissement.

$$K_{d1} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2m}\right)}{q \sin\left(\frac{\pi}{2mq}\right)} \quad (2.10)$$

$$K_{p1} = \sin\left(\beta \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.11)$$

Le facteur $\beta = \frac{C'}{\tau_p}$ (2.12)

C' Désigne l'ouverture de la bobine. Ce facteur est aussi donné jusqu'au septième harmonique il est choisi en tenant compte des harmonique qu'on désire éliminer, généralement on choisit K_p de telle sorte que l'on puisse atténuer certains harmonique.

Il est préférable de faire un montage étoile de telle sorte que les harmonique d'ordre 3 et multiple de 3 soient automatiquement éliminés. On choisit alors un coefficient K_p pour atténuer les harmoniques d'ordre 5, 7, 11, etc.

Pour le montage triangle le choix de K_p est plus difficile puisque tous les harmoniques supérieures subsistent. On doit adapter un coefficient de raccourcissement K_p pour atténuer les influences sans prendre un K_p trop petit. La diminution engendre une augmentation du nombre de spires N_1 et de dispersion. Généralement en pratique, on adapte,

$$C' = \tau_p - \frac{\tau_p}{6} \quad (2.13)$$

2.5 Circuit magnétique

Le calcul du circuit magnétique constitue une partie importante dans la construction des machines électriques. La loi de circulation du champ dans le circuit magnétique constitue la base fondamentale pour ce calcul, soit :

$$\oint_c H \cdot dl = \sum F(At) \quad (2.14)$$

Qui s'énonce comme suit :

La différence de potentiel magnétique le long d'une ligne fermée est égale à la somme des forces magnétomotrices (F.M.M).

Pour N spires par phase parcourues par un même courant I , on a :

$$F = N.I \quad (2.15)$$

Pour simplifier les calculs dans les machines électriques on décompose l'intégrale (2.13) en une somme de produits:

$$\oint H_i . dl_i = \sum_{i=1}^n H_i . l_i = F(At) \quad (2.16)$$

Tel que dans un circuit i considéré la valeur du champ magnétique H_i est constante. On peut alors écrire :

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + \dots + H_n l_n = F = N I \quad (2.17)$$

H Est exprimé en A/m ;

l En mètre (m) ;

F En Ampère tours (At).

2.5.1 Calcul de la F.M.M

Le calcul de la F.M.M s'effectue de la manière suivante:

Connaissant la valeur de B_δ et les dimensions du moteur on calcule le flux ϕ par pôle, on peut déterminer aisément les valeurs de l'induction B_i et du champ magnétique H_i dans chaque tronçon par conservation du flux:

$$B_i = \frac{\phi_i}{S_i} \quad , \quad H_i = \frac{B_i}{\mu_i} \quad , \quad \mu_i = \mu_0 \mu_{ri}$$

μ_0 Perméabilité magnétique de l'air.

Le choix des tôles se fait suivant des critères économiques et selon leur qualité électromagnétique. La courbe d'aimantation de ce matériau $B = f(H)$ nous permet de déterminer les valeurs du champ magnétique relatif à chaque tronçon.

Ces valeurs du champ H_i multipliées par l_i , longueur du tronçon, nous donne la valeur de la tension magnétique pour chaque tronçon.

$$H_i . l_i = F_i \quad \text{En (A)} \quad (2.18)$$

On aura :

$$\sum_{i=1}^n H_i l_i = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = F_t = N.I \quad (2.19)$$

2.5.1.1 Calcul de la F.M.M dans l'entrefer

L'entrefer constitue le premier pas de calcul de la F.M.M, puisque l'on prend pour base de calcul l'induction B_δ ou le flux ϕ_δ dans celui-ci, et le fait que la chute de potentiel dans l'entrefer est le plus important dans la machine.

La chute de potentiel magnétique dans l'entrefer est proportionnelle au champ magnétique H_δ et à l'épaisseur de l'entrefer δ :

$$F_\delta = H_\delta \cdot \delta = \delta \cdot \frac{B_\delta}{\mu_0} \quad (At) \quad (2.20)$$

On note que S_δ la surface virtuelle traversée par le flux et que cette dernière est proportionnelle à la longueur virtuelle l_i et à l'arc polaire virtuel b_i .

$$S_\delta = b_i \cdot l_i \quad (2.21)$$

b_i Arc polaire virtuel représentant une fraction du pas polaire τ_p ;

La détermination de la valeur de S_δ présente quelque difficulté du fait des interruptions du fer que produisent les encoches le long de l'entrefer. Les canaux radiaux de ventilation et les intervalles entre les pôles ainsi que de l'influence exercée par la saturation des dents sur la répartition de l'induction dans l'entrefer.

Pour les petites machines n'exigent pas de canaux de ventilation. Donc la longueur l_i est égale à la longueur effective du paquet de tôles l_a .

Cependant dans le cas général pour les machines de grandes puissances les canaux de ventilation diminuent la longueur effective du paquet de tôles. Soit : $l_i < l_a$

La valeur de b_i dépend de la forme des pôles et de la saturation du fer, donc de la forme de la courbe d'induction.

$$b_i = \alpha_i \cdot \tau_p \quad (2.22)$$

α_i Est appelé coefficient d'aplatissement de la courbe.

$$\alpha_i = \frac{B_{\delta eff}}{B_{\delta max}} < 1 \quad (2.23)$$

- **Coefficient de saturation**

Supposons que l'on a tracé la courbe d'induction en fonction de la FMM ($B = f(F)$) pour différentes valeurs de B_δ .

F Etant la F.M.M nécessaire pour l'excitation de la machine.

On remarque que pour des petites valeurs de B_δ la chute de tension magnétomotrice dans l'entrefer est prédominante, mais dès que B_δ dépasse une certaine valeur, la chute de tension dans les dents augmente; le rapport de la somme des chutes de tensions FMMt: dans l'entrefer et les dents à la tension F_δ augmente. Ce rapport est appelé coefficient de saturation K_s

$$K_s = \frac{F_\delta + F_{z1} + F_{z2}}{F_\delta} > 1 \quad (2.24)$$

On remarque que la valeur de K_s dépend éventuellement de la chute de tension dans les dents statorique et rotorique F_{z1} et F_{z2} , donc de la saturation du fer dans celle-ci. Le coefficient de saturation K_s à une grande influence sur les caractéristiques de la machine, puisque l'augmentation de K_s signifie une saturation dans les dents donc une augmentation de la FMM qui engendre une augmentation du courant magnétisant, et une diminution du facteur de puissance.

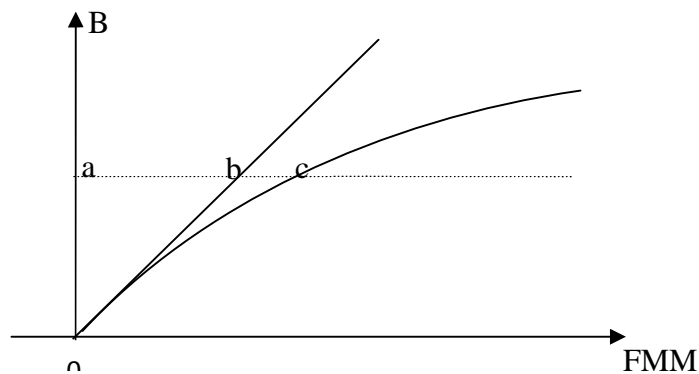


Figure 2.2 Courbe d'induction $B=f(H)$ en fonction de la FMM

Avec :

$$F_\delta = ab \quad \text{et} \quad F_{z1} + F_{z2} = bc$$

- **Coefficient de forme de la courbe d'induction**

Par définition le coefficient de forme K_f représente le rapport de la valeur efficace de l'induction dans l'entrefer $B_{\delta eff}$ à la valeur moyenne de l'induction dans l'entrefer B_δ , $K_f \geq 1$.

Le coefficient K_f augmente quand la saturation diminue, celui-ci intervient dans le calcul de la F.E.M, le coefficient d'aplatissement et le coefficient de forme respectivement α_i et K_f étant fonction de coefficient de saturation K_s , sont données par une courbe, [9]. Ces courbes ont été établies à partir d'études statistiques faites sur un grand nombre de machines asynchrones.

✓ **Facteur de carter (correction de l'entrefer)**

Dans le paragraphe précédent on a pas tenu compte de la présence d'encoche pour calculer le pas polaire virtuel b_i ; cette dernière est prise en compte en remplaçant l'entrefer δ par un entrefer fictif δ' tel que $\frac{\delta}{\delta'} = K_c > 1$.

K_c Est appelé facteur de carter.

Carter a démontré que :

$$\begin{cases} K_c = \frac{\tau_z}{\tau_z - \gamma_B \cdot \delta} \\ \gamma_B = \frac{4}{\pi} \left(\frac{s}{2\delta} \operatorname{artg} \frac{s}{2\delta} - \ln \sqrt{1 - \left(\frac{s}{\delta}\right)^2} \right) \end{cases} \quad (2.25)$$

En pratique on prend : $\gamma_B = \frac{\left(\frac{s}{\delta}\right)^2}{5 + \frac{s}{\delta}}$

s Ouverture de l'encoche ;

τ_z Pas dentaire ;

δ Entrefer.

Lorsque les deux parties de la machine (stator et rotor) sont dotées d'encoches, on calcule :

K_{c1} Pour un stator lisse ;

K_{c2} Pour un rotor lisse.

$K_c = K_{c1} \cdot K_{c2}$: Ou K_c représente le facteur total de carter.

D'où :

$$F_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0} \cdot K_c \cdot \delta = \frac{\phi_\delta}{S_\delta \cdot \mu_0} \cdot K_c \cdot \delta \quad (2.27)$$

2.5.1.2 Chute de potentiel magnétique dans les dents

Lorsque la saturation dans les dents n'est pas forte on peut admettre que, avec suffisamment d'exactitude, tout le flux correspondant à un pas dentaire passe par la dent, Dans ce cas B_{hz} l'induction dans la dent doit être inférieure à 1.8T.

Lorsque l'induction est très grande $B_{z1} > 1,8T$, le calcul précédent n'est plus valable. Dans ce cas on considère qu'une partie seulement du flux correspondant à un pas dentaire passe par l'encoche.

Dans le cas général de calcul des machines électriques, on n'a pas intérêt d'avoir une saturation très forte qui augmenterait le courant à vide et provoquerait un échauffement exagéré de la machine, on a intérêt à avoir $B_{zy} < 1,8T$. On supposerait dans ces conditions que tout le flux passe par la dent, pour calculer le champ magnétique dans cette dernière, on doit la diviser en plusieurs sections, déterminer le champ dans chaque section et faire la somme des chutes de potentiels magnétiques:

$$F_z = \int_0^{h_z} H_{zy} \cdot dl_z \quad (2.28)$$

Cependant dans la pratique, on utilise la règle de **Simpson** qui donne des résultats meilleurs. Sachant qu'on subdivise la dent en trois parties, l'intensité moyenne du champ est calculée comme suit :

$$H_{z,moy} = \frac{1}{6} (H_{z,min} + 4 \cdot H_{z,med} + H_{z,max}) \quad (2.29)$$

$H_{z,min}$ La valeur du champ minimum dans la dent;

$H_{z,med}$ La valeur du champ médian;

$H_{z,max}$ La valeur du champ maximum.

La valeur de la chute de potentiel magnétique dans la dent est :

$$F_z = h_z \cdot H_{z,moy} \quad (2.30)$$

Ce résultat est valable aussi bien pour le rotor que pour le stator. On refait les mêmes calculs pour les deux parties tout en considérant les caractéristiques de chacune d'elles.

2.5.1.3 Chute de tension magnétique dans la culasse

Pour calculer la chute de tension magnétique dans la culasse, on suppose que le flux est uniformément réparti dans la section droite de celle-ci. Si l'on considère ϕ le flux

pénétrant dans la culasse, le flux traversant la section droite est égale à $\frac{\phi}{2}$, on peut alors écrire :

$$B_{ji} = \frac{\phi}{2 \cdot K_{fe} \cdot L_{fe} \cdot h_{ji}} \quad (2.31)$$

B_{ji} Induction dans la culasse statorique $i = 1$ ou rotorique $i = 2$;

h_{ji} Epaisseur de la culasse.

✓ Ligne de parcours moyenne pour les lignes d'induction dans les culasses

• Rotorique

On prend pour la ligne de parcours moyenne :

$$h_{z2} = \frac{D - 2\delta - 2pt - h_{j2}}{2p} \cdot \pi \quad (2.32)$$

h_{j2} Epaisseur de la culasse rotorique ;

h_{z2} Profondeur de l'encoche rotorique ;

pt Pont rotorique.

• Statorique

$$l_{j1} = \frac{D + 2h_{z1} + h_{j1}}{2p} \cdot \pi \quad (2.33)$$

h_{z1} Profondeur (ou hauteur) de l'encoche statorique ;

h_{j1} Epaisseur de la culasse statorique.

La chute de potentiel magnétique dans la culasse rotorique ou statorique serait alors égal à :

$$F = H_{ji} \cdot l_{ji} \quad (2.34)$$

La valeur de H_{ji} est tirée de la caractéristique magnétique du fer utilisé après avoir calculer B_{ji} ;

2.5.2 Correction des valeurs d'induction - calcul de la FMM et du courant magnétisant

2.5.2.1 Calcul du nombre de spires N_1 par phase du primaire

La relation entre la F.E.M induite par phase E et le flux ϕ dans le cas d'une induction sinusoïdale est :

$$E = 4 \cdot K_f \cdot f_1 \cdot N_1 \cdot K_{w1} \phi \quad (2.35)$$

Le facteur de saturation K_s pour les machines asynchrones est pris en première approximation entre 1,1 et 1,4. On peut écrire pour une phase du primaire.

$$N_1 = \frac{E_1}{4 \cdot K_r \cdot f_1 \cdot K_{w1} \cdot \phi} \quad (2.36)$$

La F.C.E.M induite E_1 par phase est toujours inférieure à la tension V aux bornes de la machine d'une quantité ΔV définie comme étant la chute de tension provoquée en grande partie, par la réactance de fuite $X_{\sigma 1}$ par phase du primaire, avec le courant magnétisant I_m pratiquement égal à I_0 courant à vide.

Dans ce cas on a :

$$E_1 = V_1 - X_{\sigma 1} \cdot I_0 \approx V_1 - X_{\sigma 1} \cdot I_m \quad (2.37)$$

$$E_1 = V_1 \left(1 - \frac{X_{\sigma 1} \cdot I_m}{V_1} \right) = V_1 \cdot \frac{1}{1 + \sigma_{H1}} \quad (2.38)$$

D'où l'on peut écrire :

$$N_1 = \frac{V_1 \cdot \frac{1}{1 + \sigma_{H1}}}{4 \cdot K_f \cdot f_1 \cdot K_{w1} \cdot \phi} \quad (2.39)$$

Le coefficient σ_{H1} est obtenu à partir d'un diagramme, [8]. Dont on remarque sur ce diagramme que l'augmentation du nombre de paire de pôles engendre une augmentation de dispersion.

2.5.2.2 Correction de l'induction dans les dents et la culasse du stator

Ayant déterminé un coefficient de dispersion σ_{H1} par diagramme, ce qui correspond à une réactance de fuite du primaire $X_{\sigma 1}$, le flux correspondant à cette réactance de fuite $\phi_{\sigma 1}$ passe partiellement par la culasse et les dents du stator. Donc les inductions magnétiques doivent être augmentées d'une quantité proportionnelle au flux de fuite dans le calcul de la chute de tension magnétique.

Dans le calcul, on prend avec une approximation suffisante:

$\phi (1 + \sigma_{H1})$ Flux dans la culasse et au pied de la dent ;

$\phi \left(1 + \frac{2}{3} \sigma_{H1} \right)$ Flux à la mi-hauteur de la dent ;

$\phi \left(1 + \frac{1}{3} \sigma_{H1} \right)$ Flux à la tête de la dent.

Les valeurs des inductions corrigées dans chaque partie de la machine avec l'induction dans l'entrefer: ϕ_δ sont :

$$B_\delta = \frac{\phi_\delta}{\alpha_i \tau_p l_i} \quad (2.40)$$

• **Pour l'induction dans le stator**

$$B_{z1p} = \frac{l_i}{K_{fe} \cdot L_{fe}} \cdot \frac{\tau_{z1}}{Z_{1p}} \cdot B_\delta (1 + \sigma_{H1}) \quad (2.41)$$

B_{z1p} Induction au pied de la dent ;

τ_{z1} Pas dentaire statorique ;

Z_{1p} Largeur de la dent au pied de celle-ci.

$$B_{z1m} = \frac{l_i}{K_{fe} \cdot L_{fe}} \cdot \frac{\tau_{z1}}{Z_{1m}} \cdot B_\delta \left(1 + \frac{2}{3} \sigma_{H1}\right) \quad (2.42)$$

B_{z1m} Induction à mi- hauteur de la dent ;

Z_{1m} Largeur de la dent à mi-hauteur de celle-ci.

$$B_{z1t} = \frac{l_i}{K_{fe} \cdot L_{fe}} \cdot \frac{\tau_{z1}}{Z_{1t}} \cdot B_\delta \left(1 + \frac{1}{3} \sigma_{H1}\right) \quad (2.43)$$

B_{z1t} Induction à la tête de la dent ;

Z_{1t} Largeur de la dent à la tête de celle-ci ;

$$B_{ji} = \frac{\phi_\delta}{2 \cdot K_{fe} \cdot L_{fe} \cdot h_{ji}} (1 + \sigma_{H1}) \quad (2.44)$$

• **Pour l'induction dans le rotor**

$$B_{z2p} = \frac{l_i}{K_{fe} \cdot L_{fe}} \cdot \frac{\tau_{z2}}{Z_{2p}} \cdot B_\delta \quad (2.45)$$

$$B_{z2m} = \frac{l_i}{K_{fe} \cdot L_{fe}} \cdot \frac{\tau_{z2}}{Z_{2m}} \cdot B_\delta \quad (2.46)$$

$$B_{z2t} = \frac{l_i}{K_{fe} \cdot L_{fe}} \cdot \frac{\tau_{z2}}{Z_{2t}} \cdot B_\delta \quad (2.47)$$

$$B_{j2} = \frac{\phi_\delta}{2 \cdot K_{fe} \cdot L_{fe} \cdot h_{j2}} \quad (2.48)$$

Après le calcul des inductions, on déduit les valeurs des champs magnétiques relatifs à chaque tronçon, ce qui nous permet de calculer les chutes de potentiel magnétique :

$$F_\delta = 2 \cdot K_c \cdot \delta \cdot \frac{B_\delta}{\mu_0} \quad (2.49)$$

$$F_{z1} = 2 \cdot H_{z1} \cdot h_{z1} \quad (2.50)$$

$$F_{z2} = 2 \cdot H_{z2} \cdot h_{z2} \quad (2.51)$$

$$F_{j1} = H_{j1} \cdot l_{j1} \quad (2.52)$$

$$F_{j2} = H_{j2} \cdot l_{j2} \quad (2.53)$$

La F.M.M totale est égale à la somme des chutes de potentiel magnétique:

$$F_{tot} = F_{\delta} + F_{z1} + F_{z2} + F_{j1} + F_{j2} \quad (2.54)$$

Avant de déterminer la chute de potentiel dans les culasses, il faut calculer la valeur de K_s , et la comparer avec la valeur de K_s celle choisi au préalable. Si ces valeurs sont différentes, on prend la valeur intermédiaire moyenne et on refait les calculs jusqu'à l'égalité des deux valeurs, ce qui permet d'avoir les trois coefficients:

K_s, K_f et α_i , coefficients qui seront utilisés par la suite dans nos calculs.

2.5.3 Courant magnétisant

L'équation (2.54) permet de calculer le courant magnétisant

$$I_m = \frac{P \cdot F_{tot}}{0.9 \cdot m_1 N_1 K_{w1}} \quad (2.55)$$

2.6 Courant de barre et anneau de court-circuitage

La tension induite dans une barre rotorique est égale à la F.E.M du primaire rapportée au secondaire, [8].

$$E_2 = \frac{V_1}{1 + \sigma_{H1}} \cdot \frac{N_2 \cdot K_{w2}}{N_1 \cdot K_{w1}} \quad (2.56)$$

Finalement le courant I_2 est calculé à partir de la puissance mécanique:

$$P_{mec} = P_u + P_{ft+vt} + P_{sup} \quad (2.57)$$

P_u Puissance utile à l'arbre ;

P_{ft+vt} Pertes par frottement et ventilation ;

P_{sup} Pertes superficielles et par pulsation du flux dans la dent.

Si l'on suppose que ces pertes à vide et en charge égales, on peut écrire :

$$m_2 I_2 E_2 (1 - g) = P_{mec} = P_u + P_{ft+vt} + P_{sup}$$

D'où on déduit I_2 :

$$I_2 = \frac{P_u + P_{ft+vt} + P_{sup}}{m_2 I_2 E_2 (1 - g)} \quad (2.58)$$

- g Etant le glissement estimé ;
 m_2 Nombre de phase du secondaire.

Ainsi le courant d'anneau est :

$$I_{\text{an}} = \frac{I_2}{2 \sin \frac{\pi \cdot p}{Z_2}} \quad (2.59)$$

2.7 Dispersion

Lorsque deux circuits électriques sont couplés et que l'un des deux est excité par un courant alternatif, il est le siège d'une F.E.M d'auto-induction. L'autre circuit est le siège d'une F.E.M induite. La différence entre ces deux F.E.M est appelé la F.E.M de dispersion. Le rapport du flux de dispersion au flux produit en commun entre deux circuits électrique est appelé coefficient de dispersion de **Heyland** ; qui indique le pourcentage de dispersion. Soit :

$$\sigma_{H1} = \frac{(L_1 - M) \cdot I_1}{M \cdot I_1} = \frac{L_1 - M}{M} = \frac{L_{\sigma 1}}{M} \quad (2.60)$$

$$\sigma_{H2} = \frac{(L_2 - M) \cdot I_2}{M \cdot I_2} = \frac{L_2 - M}{M} = \frac{L_{\sigma 2}}{M} \quad (2.61)$$

Le coefficient de dispersion total de **Heyland** est :

$$\sigma_H = (\sigma_{H1} + \sigma_{H2}) + (\sigma_{H1} \cdot \sigma_{H2}) \quad (2.62)$$

$\sigma = \frac{\sigma_H}{1 + \sigma_H}$: est appelé coefficient de dispersion de **Blondel** ou coefficient total de dispersion.

2.7.1 Calcul de la dispersion

Il est très difficile de calculer avec exactitude la dispersion car pour cela il faut disposer des formules qui établissent des relations exactes avec les différents paramètres. Cependant en pratique il existe des formules qui donnent des résultats proches de la réalité.

Le calcul de la dispersion peut être divisé en 4 parties :

- Flux de dispersion d'encoche ;
- Flux de dispersion différentiel ;
- Flux de dispersion des têtes de bobines ;
- Flux de dispersion des têtes de dents, [8].

La quatrième partie est négligée, puisque cette partie de la dispersion est proportionnelle à l'entrefer, or celui-ci est très réduit dans les machines asynchrones.

2.7.1.1 Dispersion d'encoche

La dispersion d'encoche est due au flux de fuite qui se ferme autour de l'encoche en traversant l'encoche, qui ne participe pas au flux commun, soit :

$$\lambda_{\sigma} = \frac{h_1}{3 \cdot b_z} + \frac{h_2}{b_z} + \frac{h_3}{b_3} + \frac{h_4}{b_4} \quad (2.63)$$

Pour une encoche trapézoïdale on prend b_z à la tête de la dent, [11,12].

Pour une encoche ronde avec remplissage uniforme, on obtient :

$$\lambda_{\sigma} = 0,66 + \frac{h_4}{b_4} \quad (2.64)$$

Dans le cas de l'encoche ronde fermée $\lambda_{\sigma} = 0,66$

2.7.1.2 Réactance de fuite différentielle

Pour pouvoir déterminer la réactance de fuite différentielle, il faut sommer l'influence des harmoniques supérieures d'ordre ν , pour un enroulement statorique à m phases et q encoches par pôle et par phase.

$\sum \left(\frac{K_{w\nu}}{\nu} \right)^2$ Est donné par un tableau en fonction du raccourcissement du pas $\frac{C}{\tau_p}$ et de q .

Pour le rotor en court circuit, la réactance de fuite différentielle correspondant au flux de fuite dû aux harmoniques dans le rotor est :

$$\Lambda_{\sigma d 2} = \mu_0 \cdot \frac{Z_2}{2 \cdot m_1 \cdot p} \cdot \frac{m_1}{\pi^2} \cdot \frac{\tau_p \cdot l_i}{K_c \cdot K_s \cdot \delta} \cdot \sum_{\nu} \left(\frac{1}{(2 \cdot Z_2 \cdot \frac{\nu}{2p}) + 1} \right)^2 \quad (2.65)$$

La valeur du facteur $\sum_{\nu} \frac{1}{2 Z_2 \cdot \frac{\nu}{2p}}$ est donnée par un tableau, [10].

2.7.1.3 Réactance de fuite des têtes de bobines

Le calcul de la dispersion des têtes de bobines est fait d'une manière très approximative, les lignes de parcours du flux sont très compliquées. Il y a une grande influence entre les têtes de bobines et la masse de fer voisine, [11,12].

On a :

$$X_{\sigma b} = 12,56 \cdot f \cdot \frac{N^2}{p} \cdot \Lambda_{\sigma b} \quad (2.66)$$

Le calcul de la perméance est en fonction des dimensions des têtes de bobines.

$$\Lambda_{b1} = 1,13 \cdot \mu_0 \cdot K_{wp}^2 \cdot (d_{21} + 0,5 \cdot d_{31}) \quad (2.67)$$

La signification de d_{21} et d_{31} est donnée au référence.

Pour déterminer les deux dimensions d_{21} et d_{31} , il faut calculer la longueur d'un conducteur pour une petite machine, [10].

$$L_c = L_a + 1,3 \tau_p \cdot \left(\frac{C}{\tau_p} \right) + 5 \text{ cm} \quad (2.68)$$

$$L_{tête} = 1,3 \cdot \tau_p \cdot \left(\frac{C}{\tau_p} \right) + 5 \text{ cm} \quad (2.69)$$

La longueur d_{31} peut être calculée, si on impose la longueur d_{21} , [10].

$$d_{31}^2 = d_{21}^2 - \left(\frac{\tau_p}{2} \left(\frac{C}{\tau_p} \right) \right)^2 \quad (2.70)$$

$$X_{\sigma b2} = 12,56 \cdot \frac{f}{2 \cdot p} \cdot \Lambda_{\sigma b2} \quad (2.71)$$

$$\Lambda_{\sigma b2} = \mu_0 \cdot \frac{Z_2}{2 \cdot m_1 \cdot p} \cdot \tau_p \cdot g_v \quad (2.72)$$

g_v Est un facteur qui dépend de la distance entre la tête de bobine du primaire et l'anneau de court-circuitage, des dimensions de l'anneau et du pas polaire τ_p .

$g_v = f\left(\frac{\tau_p}{d_e}, \frac{d_e}{e}\right)$; La distance d_e est déduite du schéma, [10].

D'où :

$$X_{\sigma b2} = 12,56 \cdot \frac{f}{2 \cdot p} \cdot \mu_0 \cdot \frac{Z_2}{2 \cdot m_1 \cdot p} \cdot \tau_p \cdot g_v \quad (2.73)$$

L'inclinaison des encoches du rotor, visa a des harmoniques de denture, provoque une augmentation de la réactance de fuite différentielle: soit τ_{z2} le pas dentaire du secondaire, B l'induction de l'encoche, on admet un facteur de correction pour la perméance de fuite différentielle, $\left(1 + \left(\frac{B}{\tau_{z2}}\right)^2\right)$.

$$X_{\sigma b2} = 12,56 \cdot \frac{f}{2 \cdot p} \cdot (\Lambda_{\sigma b2} + \Lambda_{\sigma z2} + \Lambda_{\sigma d2}) \quad (2.74)$$

Le facteur de réduction au primaire pour les résistances et les réactances, est égale à :

$$K = \frac{m_1}{m_2} \cdot \left(\frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{K_{w1}}{K_{w1}} \right)^2 \quad (2.75)$$

La présence du pont rotorique, pour l'encoche rotorique, provoque des fuites supplémentaires par le pont. En supposant une induction dans le pont, le cas le plus défavorable $B_{\text{pont}} = 2 \text{ T}$.

On admet une perméance de pont :

$$\Lambda = \frac{B_{\text{pont}} \cdot 2K_{fe} \cdot l_{fe} \cdot p_{t2}}{2,84 \cdot I_{\text{bardema}} \cdot Z_{z2}} \quad (2.76)$$

I_{bardema} Courant de la barre au démarrage.

2.7.2 Calcul des coefficients de dispersion

$$\sigma_{H1} = \frac{X_{\sigma1}}{X_m} = \frac{X_{\sigma1} \cdot I_m}{V_1 - X_{\sigma1} \cdot I_m} \quad (2.77)$$

$$\sigma_{H2} = \frac{X_{\sigma2}}{X_{\sigma1}} \sigma_{H1} \quad (2.78)$$

2.8 Les pertes

Les pertes dans une machine électrique peuvent être divisées en trois parties:

- Les pertes par effet Joule ou pertes dans le cuivre;
- Les pertes dans le fer (Hystérésis, courant de Foucault et pulsation du flux);
- Les pertes par frottement et ventilation, qui sont très petites par rapport aux autres pertes.

2.8.1 Pertes dans le cuivre ou pertes joules de la machine

- **Dans le stator**

Les pertes par effet Joule dans les enroulements du stator sont :

$$P_{cu1} = m_1 \cdot R_1 \cdot I_1^2 \quad (2.79)$$

Le calcul de la résistance statorique est rapporté à la température 75° c.

La longueur du conducteur est :

$$L_{co} = L_a + 1,3 \cdot \tau_p \left(\frac{C}{\tau_p} \right) + 5 \text{ cm} \quad (2.80)$$

La longueur totale de l'enroulement pour une phase est :

$$L_{tot} = 2 \cdot N_1 \cdot L_{co} \quad (2.81)$$

La résistance statorique par phase est :

$$R_1 = \rho \cdot \frac{L_{tot}}{S} = \frac{2N_1 \cdot L_{co} \rho}{S} \quad (2.82)$$

- **Dans le rotor**

Les pertes dans le cuivre pour le secondaire sont :

$$P_{cu2} = m_2 \cdot R_2 \cdot I_2^2 \quad (2.83)$$

R_2 Représente la résistance totale d'une phase du secondaire (résistance d'une barre et résistance d'anneau rapportée au courant de la barre).

- Résistance d'une barre

$$R_{bar} = \rho \cdot \frac{L_{bar}}{S_{bar}} \quad (2.84)$$

- Résistance de l'anneau :

$$R_{an} = \rho \cdot \frac{L_{an}}{S_{an}} \quad (2.85)$$

Pour pouvoir sommer les résistances de l'anneau et de la barre il faut ramener la résistance de l'anneau au courant de la barre le facteur de réduction, comme nous l'avons vu est :

$$R_{an} = R_{an} \cdot \left(\frac{I_{an}}{I_2} \right)^2 = \frac{R_{an}}{4 \cdot \sin^2 \frac{\pi \cdot p}{Z_2}} \quad (2.86)$$

A chaque barre correspond deux anneaux, nous aurons alors :

$$R_2 = R_{bar} + \frac{2 \cdot R_{an}}{4 \cdot \sin^2 \frac{\pi \cdot p}{Z_2}} \quad (2.87)$$

$$R'_2 = \left(\frac{m_1}{m_2} \right) \cdot \left(\frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{K_{w1}}{K_{w2}} \right)^2 \cdot R_2 \quad (2.88)$$

2.8.2 Pertes dans le fer

Les pertes dans le fer se composent principalement des pertes par Hystérésis et des pertes par courants de Foucault.

- **Pertes par Hystérésis**

Les pertes par Hystérésis représentent l'énergie nécessaire à l'aimantation cyclique alternative du fer.

Les pertes par Hystérésis sont proportionnelles à :

- L'aire du cycle d'Hystérésis ;
- Aux nombres de cycles d'aimantation.

L'équation de **RICHTER** nous permet de calculer ces pertes.

$$P_h = a \cdot b \cdot \hat{B} + b \cdot f \cdot \hat{B}^2 \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{kg}} \right] \quad (2.89)$$

En pratique on néglige souvent le premier terme en puissance devant le terme en puissance deuxième.

On peut ainsi écrire avec suffisamment d'exactitude.

$$P_h = K_H \cdot f \cdot \hat{B}^2 \cdot 10^2 \quad (2.90)$$

- **Pertes par courants de Foucault**

L'aimantation cyclique alternative engendre des courants induits dans le fer, ces courants sont appelés courants de Foucault, pour réduire les pertes engendrées par ces courants, on utilise des tôles feuilletées isolées les unes des autres, disposées parallèlement aux lignes d'induction. Les pertes par courants de Foucault peuvent être calculées par l'équation.

$$P_w = K_w \cdot (S_t \cdot f \cdot \hat{B})^2 \cdot 10^2 \quad (2.91)$$

S_t Désigne l'épaisseur de tôles du fer ;

Les pertes par Hystérésis et par courants de Foucault sont transformées en chaleur, la somme des pertes par seconde dans un kg de fer est:

$$P_{h+w} = K_H \cdot f \cdot B^2 \cdot 10^{-2} + K_w \cdot (S_t \cdot f \cdot \hat{B})^2 \cdot 10^2 \quad (2.92)$$

Les constantes K_H, K_w pour les différents matériaux sont données par des tableaux, [8].

- **Pertes superficielles par pulsation du flux dans les dents**

Les pertes superficielles par pulsation du flux dans les dents sont faibles dans les petites machines a faible puissance, elles dépendent de l'ouverture d'encoche des deux parties de la machine et sont estimées à 0,5% de P_u .

2.8.3 Pertes dans la culasse statorique

Les formules générales, pour le calcul des pertes par Hystérésis, ne tiennent pas compte de l'influence de la répartition du champ dans la culasse. Pour tenir compte de ce phénomène, on multiplie la formule des pertes par Hystérésis par un coefficient K_j .

$$P_{hj} = K_H \cdot f \cdot B_j^2 \cdot m_j \cdot K_j \cdot 10^{-2} \quad (2.93)$$

Le coefficient K_j est représenté par un diagramme en fonction du paramètre $\frac{D}{D_e}$

pour différentes paires de pôles, [8].

- D Diamètre à l'alésage ;
 D_e Diamètre extérieur de la culasse ;
 m_j La masse de la culasse.

Pour les mêmes considérations de calcul des pertes par courants de Foucault, la formule générale est multipliée par un coefficient K_{wj} pour tenir compte de la répartition du champ dans la culasse.

K_{wj} est donné par un diagramme en fonction de $\frac{D}{D_e}$ pour différentes paires de pôles.

$$P_{wj} = K_w \cdot (S_t \cdot f \cdot B_j)^2 \cdot m_j \cdot K_{wj} \cdot 10^2 \quad (2.94)$$

2.8.4 Pertes dans les dents

Les pertes par hystérésis dans la zone dentaire statorique des machines électriques sont égales à :

$$P_{hz} = K_w \cdot f \cdot B^2 \cdot m_z \cdot 10^{-2} \quad (2.95)$$

- m_z Masse des dents ;
 B_z Valeur moyenne des inductions au pied, au milieu et à la tête de la dent.

Les pertes par courants de Foucault dans les dents s'écrivent :

$$P_{wz} = K_w \cdot (S_t \cdot f \cdot B)^2 \cdot m_z \cdot 10^2 \quad (2.96)$$

Toute fois cette équation n'est valable que pour des inductions sinusoïdales dans les dents. Pour tenir compte de l'effet des harmoniques supérieures, il suffit de modifier le chiffre des pertes en fonction de la fréquence et de prendre, [8].

$$P_{(h+w)z} = P_{fe}^- \cdot B_{zm}^- \quad (2.97)$$

2.9 Détermination des paramètres de marche à vide de la machine

- Courant de marche à vide I_0 ;
- Facteur de puissance $\cos \varphi_0$.

Le courant de marche à vide I_0 caractérise le courant magnétisant et les pertes à vide de la machine, [8].

$$I_0 = I_{m0} + I_{0a} \quad (2.98)$$

puisque l'on considère $I_m = \text{cte}$ on peut écrire que $I_m = I_{m0}$

I_{0a} Courant watté ;

I_m Courant déwatté.

$$I_{0a} = \frac{P_{fe} + P_{vt+ft}}{m_1 \cdot V_1} \quad (2.99)$$

$$\begin{cases} I_0^2 = I_{0a}^2 + I_m^2 \\ \cos \varphi_0 = \frac{I_{0a}}{I_0} \end{cases} \quad (2.100)$$

2.10 Calcul des paramètres de marche en court circuit

- Courant de court-circuit I_{cc} ;
- Facteur de puissance de court-circuit $\cos \varphi_{cc}$.

avec :

$$I_{cc} = \frac{V_1 \cdot (1 + \sigma_{H1})}{\sqrt{(X_{\sigma tot})^2 + (R_{tot})^2}} \quad (2.101)$$

$$X_{\sigma tot} = X_{\sigma 1} + [(1 + \sigma_{H1}) \cdot X_{\sigma 2}^-] \quad (2.102)$$

$$R_{\sigma tot} = R_1 + [(1 + \sigma_{H1}) \cdot R_2'] \quad (2.103)$$

Le coefficient de dispersion de Heyland dans la formule est un facteur de correction, pour tenir compte de la branche du courant magnétisant.

$$\cos \varphi_{cc} = \frac{R_{tot}}{\sqrt{(X_{\sigma tot})^2 + (R_{tot})^2}} \quad (2.104)$$

2.11 Paramètres du schéma équivalent de la machine

$$L_s = \frac{Q_0}{3 \cdot \omega_s \cdot I_0^2} = \frac{3 \cdot V \cdot I_0 \cdot \sin \varphi_0}{3 \cdot \omega_s \cdot I_0^2} \quad (2.105)$$

$$L_s - l_{fs} = M \quad (2.106)$$

$$L_r' = M + l_{f2}' \quad (2.107)$$

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_r' \cdot L_s} \quad (2.108)$$

2.12 Programme développé

Selon l'organigramme de la **Figure 2.1**, un programme sous **MATLAB** a été développé. La première étape du programme de conception consiste à définir le cahier des charges en déterminant les différents points de fonctionnements. Le choix de la structure de la machine dépend du cahier des charges et de l'application à laquelle est destinée cette machine. On calcule les dimensions géométriques des machines à l'aide des lois de conservation du flux dans différentes parties de la machine en utilisant des équations analytiques.

Luis votre cas la méthode de conception est un processus itératif qui sert à comparer les différentes solutions possibles. Dans la deuxième étape on estime le niveau de saturation des circuits magnétiques du moteur et les inductions dans les différentes parties pour calculer les pertes magnétiques et les pertes par effet Joule.

Ensuite les paramètres du schéma équivalent sont calculés. Ceci permet d'obtenir le couple que le moteur peut fournir et le courant qu'il peut absorber. Enfin on peut ainsi évaluer le rendement dans toutes les conditions de fonctionnement.

Cette procédure est appliquée sur une machine asynchrone type ELPROM, A0-112 M-2B3T-11 dont les caractéristiques sont données sur le **Tableau. 2.1**.

Tableau.2.1 Plaque signalétique de la machine étudiée

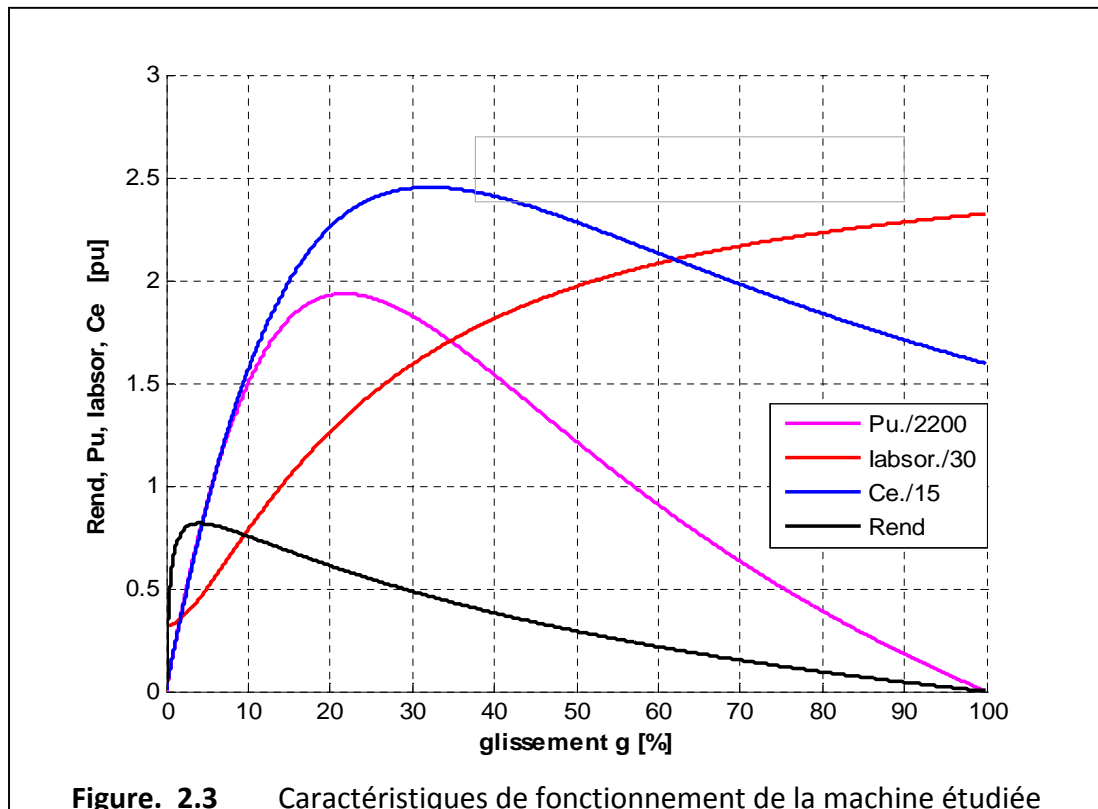
P_U	Puissance utile	2.2	kW
V_s	Tension nominale	220	V
p	Nombre de paires de pôles	2	---
m_1	Nombre de phases de la machine	3	---
f_s	Fréquence	50	Hz
$\cos \varphi$	Facteur de puissance	0.82	---
η	Rendement	0.80	---
I_s	Courant absorbé	5.3	
n_r	Vitesse	1400	tr/min

Certains résultats obtenus d'après le programme de conception, sont représentés dans le **Tableau 2.2**

Tableau. 2.2 Résultats du programme de conception

Abrév.	Paramètres	Valeurs	Abrév.	Paramètres	Valeurs
$D (mm)$	Diamètre d'alésage	99	$R_s (\Omega)$	Résistance - phase enroulement .stator	2.962
$Mt (kG)$	Poids de la machine	21.253	$I_o (A)$	Courant à vide	3.5
$M (H)$	Inductance mutuelle stator - rotor	0.11	$P_{f+vt} (W)$	Pertes frottement /ventilation	15.40
$R_r' (\Omega)$	Résistance - rotor ramenée au stator	2.258	$Z_{rt} (mm)$	Largeur de la dent rotorique	3.509
$l_{\sigma r}' (H)$	Inductance de fuite rotor ramenée au stator	0.0107	$h_{rt} (mm)$	Hauteur de la dent rotorique	9.0
$l_{\sigma s} (H)$	Inductance de fuite stator	0.01086	$\delta (mm)$	Epaisseur de l'entrefer	0.33
$D_{er} (mm)$	Diamètre extérieur rotorique	98.3	$B_{hj2} (T)$	Induction - culasse Rotor	1.32
$B_{hj1} (T)$	Induction - culasse statorique	1.30	$B_{t2} (T)$	Induction - tête dent rotor	2.07
$B_{t1} (T)$	Induction -tête dent stator	1.74	Ratio	Nombre encoches / Nombre de bars	36/48
$B_{\delta} (T)$	Induction dans l'entrefer	0.85	η	Rendement calculé	0.8008
$\cos \varphi$	Facteur de puissance	0.813	T_{dem} / T_n	-----	2.014

Les paramètres obtenus sont utilisés dans un autre programme, qui est basé sur le schéma équivalent à fuites partielles. Ainsi l'exécution de ce programme permet de tracer les caractéristiques de la machine étudiée.



- **Interprétation des caractéristiques**

- **Caractéristique** $I_1 = f(g)$

Part d'une valeur I_{10} relativement forte (plus de 50% du courant nominal), il augmente au fur et à mesure que le glissement augmente. A l'arrêt il est voisin de I_{1cc} .

- **Caractéristique** $\eta = f(g)$

Le rendement croît avec le glissement et prend une valeur proche de celle du rendement nominal. Il diminue ensuite de plus en plus rapidement pour redevenir nul à l'arrêt.

- **Caractéristique** $P_u = f(g)$

P_u part d'une valeur très faible et augmente d'abord à peu près linéairement en fonction de g . après le passage au point où le couple utile est maximum, elle décroît rapidement pour atteindre évidemment 0 à l'arrêt.

- **Caractéristique** $C_e = f(g)$

Croît à peu près proportionnellement quand g est faible. Il passe par son maximum pour un glissement un peu plus fort que celui donnant $P_{u\max}$, puis diminue pour arriver au couple de démarrage lorsque g égale 1.

Conclusion

Ce chapitre est consacré à l'exposition de la méthode de calcul des machines asynchrone. Qui inclut tous calcul électrique, magnétique et mécanique. Notant que, la détermination successive des paramètres, est basée sur des formules empiriques et des courbes prises lors de plusieurs expériences.

Dans le prochain chapitre, on présentera une synthèse des méthodes d'optimisation.

Chapitre 03

Synthèse

des

Méthodes

d'Optimisation

Introduction

L'optimisation est une branche des mathématiques, cherchant à analyser et à résoudre analytiquement ou numériquement les problèmes qui consistent à déterminer le meilleur élément d'un ensemble, au sens d'un critère quantitatif donné. Ce mot vient du latin optimum qui signifie le meilleur.

Sachant que le système étant représenté par un modèle mathématique décrivant son état ou son contrôle à l'aide de variables (inconnues liées par des équations), le problème consiste à trouver des solutions satisfaisant un objectif quantitatif tout en respectant d'éventuelles contraintes.

L'optimisation joue un rôle important en recherche opérationnelle (donc en économie et microéconomie), dans les mathématiques appliquées (fondamentales pour l'industrie et l'ingénierie), en analyse et en analyse numérique, en statistique pour l'estimation du maximum de vraisemblance d'une distribution, pour la recherche de stratégies dans le cadre de la théorie des jeux, ou encore en théorie du contrôle et de la commande.

Aujourd'hui, tous les systèmes susceptibles d'être décrits par un modèle mathématique sont optimisés. La qualité des résultats et des prédictions dépend de la pertinence du modèle, de l'efficacité de l'algorithme et des moyens pour le traitement numérique.

En pratique, quel que soit l'arsenal mathématique sous-jacent, on ne fera pas l'économie de l'intuition, du bon sens, de l'esprit critique et de l'expérience. Leurs domaines d'application, ils sont extrêmement variés : optimisation d'un trajet, de la forme d'un objet, d'un prix de vente, d'une réaction chimique, du contrôle aérien, du rendement d'un appareil, du fonctionnement d'un moteur, de la gestion des lignes ferroviaires, du choix des investissements économiques, de la construction d'un navire, etc. L'optimisation de ces systèmes permet de trouver une configuration idéale, d'obtenir un gain d'effort, de temps, d'argent, d'énergie, de matière première, ou encore de satisfaction.

Puisque une CAO optimisée est constituée par un outil ou un modèle d'analyse du dispositif à concevoir et un algorithme d'optimisation.

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux algorithmes d'optimisation et surtout plus, aux programmations linéaire (PL), programmation quadratique, programmation non linéaire et programmation dynamique.

3.1 Méthodes d'optimisation

L'optimisation est l'étude des problèmes qui sont de la forme :

Tant donné : une fonction $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ d'un ensemble A dans l'ensemble des nombre réels.

Rechercher : un élément x_0 de A tel que $f(x_0) \geq f(x)$ pour tous les x en A (« maximisation ») ou tel que $f(x_0) \leq f(x)$ pour tous les x en A (« minimisation »).

Les éléments de A sont appelés les solutions admissibles, la fonction f est la fonction objectif et x_0 est la (une) solution optimale.

Puisque la minimisation de f est équivalente à la maximisation de $(-f)$ une méthode pour trouver le minimum (ou le maximum) suffit à résoudre le problème d'optimisation.

Le plus souvent, A est un sous-ensemble de l'espace euclidien \mathbb{R}^n . Lorsqu'il est constitué des vecteurs dont les coordonnées satisfont un certain nombre de contraintes (de type égalité ou inégalité). On parle d'optimisation combinatoire lorsque A est un sous-ensemble de \mathbb{N}^n ou de $\mathbb{N}^q \times \mathbb{R}^q$.

Un maximum local x^* est défini comme un point de A pour lequel il existe un voisinage V de x^* tel que pour tout $x \in V \cap A$, $f(x) \leq f(x^*)$; dans ce voisinage de x^* , les valeurs de la fonction dominent la valeur en ce point. Lorsque A est un sous-ensemble de \mathbb{R}^n , ou plus généralement d'un espace vectoriel normé, la définition est équivalente à l'existence d'un $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in A$ satisfaisant $\|x - x^*\| \leq \delta$, on a $f(x) \leq f(x^*)$. Un minimum local est défini semblablement.

Il est en général facile de déterminer numériquement des maxima locaux (ils peuvent être nombreux). Pour vérifier que la solution trouvée est un maximum global, il est parfois possible de recourir à des connaissances additionnelles sur le problème. Selon la nature de A et/ou de la fonction f , divers théorèmes (principe du maximum) assurent des propriétés particulières de la solution optimale qui simplifient sa recherche.

3.1.1 Notation

Les problèmes d'optimisation sont souvent exprimés avec une notation spéciale. Par exemples :

$$\text{Min}_{x \in \mathbb{R}} x^2 + 1 \quad (3.1)$$

On cherche la valeur minimale pour l'expression $x^2 + 1$, où x s'étend sur les nombres réels \mathbb{R} . La valeur minimale dans ce cas est 1, s'occasionnant à $x = 0$.

$$\max_{x \in \mathbb{R}} 2x \quad (3.2)$$

On cherche la valeur maximale pour l'expression $2x$, où x s'étend sur les réels. Dans ce cas, il n'y a pas de tel maximum puisque l'expression n'est pas bornée, donc la réponse est « l'infini » ou « indéfini ».

$$\arg \min_{x \in]-\infty, -1]} x^2 + 1 \quad (3.3)$$

On cherche la ou les valeurs de x dans l'intervalle $] -\infty, -1]$ qui minimise l'expression $x^2 + 1$ (la valeur minimale véritable de cette expression n'est pas importante). Dans ce cas, la réponse est $x = -1$.

$$\arg \max_{x \in [-5, 5], y \in \mathbb{R}} x \cos(y) \quad (3.4)$$

On cherche la ou les paires (x, y) qui maximisent la valeur de l'expression $x \cos(y)$, avec la contrainte ajoutée que la valeur absolue de x ne peut excéder 5 (à nouveau, la valeur maximale véritable de l'expression n'est pas importante). Dans ce cas, les solutions sont les paires de la forme $(5, 2k\pi)$ et $(-5, (2k+1)\pi)$, où k s'étend sur tous les entiers.

3.2 Méthodes numériques

Une technique de résolution d'un problème d'optimisation mathématique désigne ici :

- Transformation du problème d'origine en un problème équivalent ;
- Méthode théorique dont la description permet l'élaboration d'un algorithme numériquement applicable.

Le choix d'une technique appropriée dépend de :

- Nature de la fonction objectif f , de sa régularité (continuité, dérivabilité), de propriétés spécifiques (parité, convexité), de la connaissance de voisinages de ses extrema ;
- Contraintes caractérisant l'ensemble A des solutions admissibles.

3.2.1 Simplifications

Le problème d'origine est remplacé par un problème équivalent. Par exemple un changement de variables permettant de décomposer le problème en sous-problèmes ou la substitution d'inconnues permettant d'en réduire le nombre.

La technique du multiplicateur de Lagrange permet de s'affranchir de certaines contraintes (de type égalité) ; cette méthode revient en effet à introduire des pénalités croissantes à mesure que la solution se rapproche des contraintes. Un algorithme dû à Hugh Everett permet de mettre à jour de façon cohérente les valeurs des multiplicateurs à chaque itération pour garantir la convergence.

Celui-ci a également généralisé l'interprétation de ces multiplicateurs pour les appliquer à des fonctions qui ne sont ni continues, ni dérivables. Le lambda exprime un coefficient de pénalité (notion de coût marginal d'une contrainte en économie).

3.2.2 Recherche des zéros du gradient

De nombreuses méthodes et algorithmes permettent de trouver un zéro de la dérivée de f (certains sont spécifiques aux fonctions d'une variable) ou de son gradient ∇f . Elles s'appliquent valablement dans des situations où les contraintes sur A restent peu actives.

Toutes ces méthodes se développent dans le cadre d'un procédé itératif.

Ces approches peuvent souffrir de quelques défauts :

- La fonction doit être assez régulière (au moins localement) pour être dérivable (ou encore deux fois dérivable pour accéder à la matrice hessienne ou une approximation de celle-ci) ;
- Il n'est pas toujours possible d'exprimer explicitement le gradient de la fonction objectif ;
- Des conditions de départ doivent être fixées avant d'amorcer le processus itératif. Le choix initial peut considérablement influencer le résultat (divergence du procédé itératif). Les méthodes à convergence rapide sont en général plus sensibles de ce point de vue ;
- Dans certains cas, la vitesse de convergence peut se révéler désastreuse : les itérations successives cheminent laborieusement (stagnation) le long d'une vallée étroite (fonction de Rosenbrock) ;
- Si la solution obtenue est bien un extremum (après vérification qu'il ne s'agisse pas d'un point selle), celui-ci peut s'avérer être local.

3.3 Optimisation combinatoire

L'optimisation combinatoire est une branche de l'optimisation en mathématiques appliquées et en informatique, également liée à la recherche opérationnelle, l'algorithmique et la théorie de la complexité. On parle également d'optimisation discrète.

Dans sa forme la plus générale, un problème d'optimisation combinatoire (on dit aussi d'optimisation discrète) consiste à trouver dans un ensemble discret un parmi les meilleurs sous-ensembles (ou solutions) réalisables, la notion de meilleure solution étant définie par une fonction objectif. Formellement, étant donné :

- Ensemble discret N ;
- Fonction d'ensemble : $2^N \rightarrow \mathbb{R}$, dite fonction objectif ;
- Ensemble \mathcal{R} de sous-ensembles de N , dont les éléments sont appelés les solutions réalisables.

Un problème d'optimisation combinatoire consiste à déterminer :

$$\max_{S \in \mathcal{R}} \{f(S) : S \in \mathcal{R}\} \quad (3.5)$$

L'ensemble des solutions réalisables ne saurait être décrit par une liste exhaustive car la difficulté réside ici précisément dans le fait que le nombre des solutions réalisables rend son énumération impossible, ou bien qu'il est NP-complet de dire s'il en existe ou non. La description de \mathcal{R} est donc implicite, il s'agit en général de la liste, relativement courte, des propriétés des solutions réalisables.

La plupart du temps on est dans les cas particuliers suivants :

- $N = \{1, 2, \dots, n\}$ et $\mathcal{R} = \{X \cap \mathbb{Z}^n : X \subset \mathbb{R}^n\}$ et la cardinalité de \mathcal{R} est exponentielle en n ;
- $\mathcal{R} = \text{conv}(\mathcal{R}) \cap \mathbb{Z}^n$ donc les propriétés de \square se traduisent en contraintes linéaires, c'est-à-dire que X est un polyèdre de \mathbb{R}^n ;
- $f(S) = \sum_{s \in S} f(s)$.

3.3.1 Résolution

Trouver une solution optimale dans un ensemble discret et fini est un problème facile en théorie : il suffit d'essayer toutes les solutions, et de comparer leurs qualités pour voir la meilleure. Cependant, en pratique, l'énumération de toutes les solutions peut prendre trop de temps ; or, le temps de recherche de la solution optimale est un facteur très important et c'est à cause de lui que les problèmes d'optimisation combinatoire sont réputés

si difficiles. La théorie de la complexité donne des outils pour mesurer ce temps de recherche.

De plus, comme l'ensemble des solutions réalisables est défini de manière implicite, il est aussi parfois très difficile de trouver ne serait-ce qu'une solution réalisable.

Quelques problèmes d'optimisation combinatoire peuvent être résolus (de manière exacte) en temps polynomial par exemple par un algorithme glouton, un algorithme de programmation dynamique ou en montrant que le problème peut être formulé comme un programme linéaire en variables réelles.

Dans la plupart des cas, le problème est NP-difficile et, pour le résoudre, il faut faire appel à des algorithmes de branch and bound, à la programmation linéaire en nombres entiers ou encore à la programmation par contraintes. En pratique, on se contente très souvent d'avoir une solution approchée, obtenue par une heuristique ou une métaheuristique. Pour certains problèmes, on peut prouver une garantie de performance, c'est-à-dire que l'écart entre la solution obtenue et la solution optimale est borné.

3.4 Quelques classes de problèmes

- L'optimisation linéaire étudie le cas où la fonction objectif et les contraintes caractérisant l'ensemble A sont linéaires. C'est une méthode très employée pour établir les programmes des raffineries pétrolières, mais aussi pour déterminer la composition la plus rentable d'un mélange salé, sous contraintes, à partir des prix de marché du moment;
- L'optimisation linéaire en nombres entiers étudie les problèmes d'optimisation linéaire dans lesquels certaines ou toutes les variables sont contraintes de prendre des valeurs entières. Ces problèmes peuvent être résolus par différentes méthodes : séparation et évaluation, méthode des plans sécants;
- L'optimisation quadratique étudie le cas où la fonction objectif est une forme quadratique (avec contraintes linéaires pour A) ;
- L'optimisation non-linéaire étudie le cas général dans lequel l'objectif ou les contraintes (ou les deux) contiennent des parties non-linéaires, éventuellement non-convexes;
- L'optimisation stochastique (en) étudie le cas dans lequel certaines des contraintes dépendent de variables aléatoires.

La programmation dynamique utilise la propriété qu'une solution optimale se compose nécessairement de sous-solutions optimales (attention : le contraire n'est pas vrai en général) pour décomposer le problème en évitant l'explosion combinatoire.

Elle est utilisable lorsque la fonction objective est une somme de fonctions monotones croissantes dont les arguments sont des inconnues distinctes.

C'est la programmation dynamique qui permet par exemple :

- aux avionneurs de trouver les plans de décollage optimaux de leurs engins;
- aux ingénieurs de bassin de répartir la production minière entre leurs différents puits ;
- aux producteurs d'électricité de planifier la marche des usines hydroélectriques ;
- aux media planners de répartir efficacement un budget de publicité entre différents support.

3.4.1 Programmation linéaire

En mathématiques, les problèmes de programmation linéaire (PL) sont des problèmes d'optimisation où la fonction objectif et les contraintes sont toutes linéaires. Néanmoins, la plupart des résultats présentés ici sont également vrais si l'objectif est une fonction monotone croissante de chaque variable considérée. La programmation linéaire désigne également la manière de résoudre les problèmes linéaires.

- La programmation linéaire est un domaine central de l'optimisation, car les problèmes de PL sont les problèmes d'optimisation les plus faciles - toutes les contraintes y étant linéaires. Beaucoup de problèmes réels de recherche opérationnelle peuvent être exprimés comme un problème de PL. Pour cette raison un grand nombre d'algorithmes pour la résolution d'autres problèmes d'optimisation sont fondés sur la résolution de problèmes linéaires ;
- Le terme programmation linéaire suppose que les solutions à trouver doivent être représentées en variables réelles. S'il est nécessaire d'utiliser des variables discrètes dans la modélisation du problème (contraintes dites d'intégrité), on parle alors de programmation linéaire en nombres entiers (PLNE). Il est important de savoir que ces derniers sont nettement plus complexes à résoudre que les PL à variables continues.

3.4.1.1 Algorithmes de la programmation linéaire

L'algorithme du simplexe permet de résoudre les problèmes de PL en construisant tout d'abord une solution réalisable qui est un sommet du polytope puis en se déplaçant selon les arêtes du polytope pour atteindre des sommets pour lesquels la valeur de l'objectif est de plus en plus grande, jusqu'à atteindre l'optimum. Bien que cet algorithme soit efficace en pratique et qu'il soit assuré de trouver l'optimum, son comportement dans le pire cas peut être mauvais. Il est ainsi possible de construire un PL pour lequel la méthode du simplexe requiert un nombre d'étapes exponentiel en la taille du problème.

Ainsi, pendant plusieurs années, savoir si la PL était un problème NP-complet ou polynomial est resté une question ouverte. Le premier algorithme polynomial pour la PL a été proposé par Leonid Khachiyan en 1979. Il est basé sur la méthode de l'ellipsoïde en optimisation non linéaire précédemment proposée par Naum Shor.

Cette méthode est elle-même une généralisation de la méthode de l'ellipsoïde en optimisation convexe due à Arkadi Nemirovski (Prix John von Neumann 2003), et à David B. Yudin. Cependant, l'efficacité pratique de l'algorithme de Khachiyan est décevante : l'algorithme du simplexe est pratiquement toujours plus performant.

En revanche, ce résultat a encouragé la recherche dans les méthodes de point intérieur. Par opposition à l'algorithme du simplexe qui considère uniquement la frontière du polytope définie par les contraintes, les méthodes de point intérieur évoluent à l'intérieur du polytope.

En 1984, N. Karmarkar propose la méthode projective. C'est le premier algorithme efficace à la fois en théorie et en pratique. Sa complexité dans le pire cas est polynomiale et les expérimentations sur les problèmes pratiques montrent que la méthode peut raisonnablement être comparée à l'algorithme du simplexe.

Depuis lors, plusieurs méthodes de point intérieur ont été proposées et étudiées. Une des méthodes les plus célèbres est la méthode prédictive/corrective qui fonctionne très bien en pratique même si son étude théorique est encore imparfaite

3.4.1.2 Implémentations en pratique

Pour la résolution pratique de problèmes de PL ordinaires, il est commun de considérer comme équivalents les (bons) codes basés sur les méthodes dérivées du simplexe ou du point intérieur.

De plus, pour la résolution de problèmes de grande taille, une technique comme la génération de colonnes peut se révéler extrêmement efficace.

Les solveurs basés sur la PL sont de plus en plus utilisés pour l'optimisation de divers problèmes industriels tels que l'optimisation des flux de transports ou la planification de la production. Toutefois, les modèles de PL se révèlent insuffisants pour représenter de nombreux problèmes.

Une extension possible est alors la programmation linéaire en nombres entiers (PLNE), qui permet de modéliser un grand nombre de problèmes supplémentaires, notamment les problèmes NP-complets. On retrouve des solveurs de PL dans de nombreux outils comme MATLAB, SAGE ou Excel.

3.4.2 Programmation linéaire en nombres entiers

Un problème de programmation linéaire en nombres entiers (PLNE) n'est pas un programme linéaire dans le sens où son domaine de réalisabilité n'est pas un polyèdre mais un ensemble discret de points. Pourtant, on peut le décrire comme un PL auquel on ajoute la contrainte supplémentaire que certaines variables ne peuvent prendre que des valeurs entières. On distingue le programme linéaire mixte avec variables entières et continues du programme entier avec toutes ses variables entières.

La PLNE est un problème NP-complet car de nombreux problèmes NP-complets peuvent être exprimés comme des PLNE (par exemple trouver un stable dans un graphe $G = (V, E)$ revient à trouver un vecteur $x \in \{0, 1\}^E$ satisfaisant $x_u + x_v \leq 1$ pour tout arête $uv \in E$).

Les Algorithmes décrits ci-dessus pour la PL ne résolvent pas les problèmes de PLNE. Algorithmiquement donc, la résolution d'un PLNE est autrement plus difficile celle d'un PL qui joue pourtant un rôle crucial quant à leur résolution, principalement pour deux raisons.

Premièrement, la relaxation continue d'un PLNE (c'est le PLNE sans les contraintes d'intégrité) est un PL qui peut être résolu efficacement et fournir ainsi une borne duale (dans le sens non-réalisable). Les algorithmes de résolution de PLNE, tels que les algorithmes par séparation et évaluation se basent sur cette relaxation continue pour diminuer au maximum l'énumération des solutions.

Deuxièmement, le théorème Optimisation/Séparation de Grötschel, Lovasz et Schrijver permet de résoudre en pratique par la PL les problèmes entiers dont on connaît une bonne description polyédrale (c'est-à-dire dont on peut séparer les contraintes en temps polynomial). C'est le principe de fonctionnement de la méthode des plans sécants.

3.4.2.1 Applications

La programmation linéaire est essentiellement appliquée pour résoudre des problèmes d'optimisation à moyen et long terme (problèmes stratégiques et tactiques, dans le vocabulaire de la recherche opérationnelle).

Les domaines d'application de ces problèmes sont très nombreux aussi bien dans la nature des problèmes abordés (planification et contrôle de la production, distribution dans des réseaux) que dans les secteurs d'industrie : industrie manufacturière, énergie (pétrole, gaz, électricité, nucléaire), transports (aériens, routiers et ferroviaires), télécommunications, industrie forestière, finance.

3.4.3 Programmation quadratique

Les problèmes de programmation quadratique sont des problèmes d'optimisation où la fonction objective est quadratique et les contraintes sont linéaires. On inclut parfois le cas où les contraintes sont quadratiques.

Formalisme : (Soit ; $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$)

Il s'agit de minimiser une fonction objective de la forme suivante :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (3.6)$$

Sous les contraintes :

$$g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \leq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad (3.7)$$

Ce problème s'exprime sous forme matricielle :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} + \mathbf{c}^T \mathbf{X} \quad (3.8)$$

Sous les contraintes :

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \quad (3.9)$$

Avec :

- * $\mathbf{x} = [x_i]_{i=1, \dots, n}$,
- * $\mathbf{Q} = [q_{ij}]_{i=1, \dots, n}$,

Et :

$$* A = [a_{ij}]_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}.$$

Q est une matrice symétrique. Dans le cas où elle est semi-définie positive, la fonction f est convexe et le problème a au moins une solution (s'il existe un point satisfaisant les contraintes).

Si Q est définie positive, f est strictement convexe et il existe une unique solution.

3.4.3.1 Conditions de Kuhn-Tucker

En mathématiques, les conditions de Kuhn-Tucker ou conditions de Karush-Kuhn-Tucker permettent de résoudre des problèmes d'optimisation sous contraintes non-linéaires d'inégalité.

Soient $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonction pseudo-concave de n variables (fonction objective) et $\mathbb{R} g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonction quasi-concave (m représente le nombre de contraintes).

On note $\mathbf{g}(X) = (g_i(X))_{1 \leq i \leq m}$ la fonction g résume les m contraintes g_i .

On suppose que la fonction f et les fonctions g_i admettent des dérivées partielles par rapport à chaque variable.

L'objectif est de trouver $X^* \in \mathbb{R}^n$ qui maximise f(x) sous contrainte $\mathbf{g}(x) \geq 0$, c'est-à-dire résoudre :

$$X^* \in \arg \max_{X \in \mathbb{R}^n} f(x).$$

Sous contrainte $\mathbf{g}(x) \geq 0$

Première étape : multiplicateurs de Lagrange

Soit $\lambda = (\lambda_i)_{1 \leq i \leq m} \in \mathbb{R}_+^m$ un vecteur de m réels positifs ou nuls.

On appelle le Lagrangien la fonction :

$$L(X, \lambda) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(X) \quad (3.10)$$

Les λ_i sont appelés multiplicateurs de Lagrange associés à la i-ième contrainte

Deuxième étape : conditions de premier ordre

On considère L comme fonction objective d'un problème de maximisation (en fonction de X) sans contrainte.

On écrit les conditions de premier ordre (conditions nécessaires) pour maximiser L en fonction de X :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x}(X) = 0 \quad (3.11)$$

Où l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x}$ est le gradient.

Troisième étape : conditions supplémentaires

On écrit les conditions de relâchement supplémentaires ("complementary slackness conditions") et les conditions de positivité (conditions suffisantes) :

$$\forall_i \in \{1, \dots, m\}, \min[\lambda_i, g_i(X)] = 0$$

Remarques :

- La troisième étape implique que: $g_i(x) > 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$ si la contrainte i n'est pas saturée, le multiplicateur de Lagrange associé à cette contrainte est nul ;
- Les conditions de premier ordre et les conditions de relâchement supplémentaires sont appelées conditions de Kuhn-Tucke.
- Théorème.

$$X^* \in \operatorname{argmax}_{X \in \mathbb{R}^N} f(x)$$

Sous contrainte :

$$g(X) \geq 0$$

Si et seulement si (X^*, λ^*) est solution des conditions de Kuhn-Tucke.

3.4.3.2 Multiplicateur de Lagrange

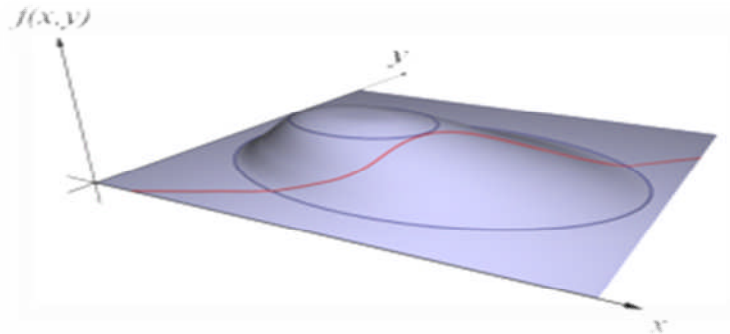


Figure 3.1 Principe de multiplication de Lagrange

La méthode des multiplicateurs de Lagrange permet de trouver un optimum, sur la figure le point le plus élevé possible, tout en satisfaisant une contrainte, sur la figure un point de la ligne rouge.

En mathématiques, et plus particulièrement en analyse, la méthode des multiplicateurs de Lagrange permet de trouver les points stationnaires (maximum, minimum...) d'une fonction dérivable d'une ou plusieurs variables, sous contraintes, [13].

On cherche à trouver l'extremum, un minimum ou un maximum, d'une fonction φ de n variables à valeurs dans les nombres réels, ou encore d'un espace euclidien de dimension n , parmi les points respectant une contrainte, de type $\psi(x) = 0$ où ψ est une fonction du même ensemble de départ que φ . La fonction ψ est à valeurs dans un espace euclidien de dimension m .

Elle peut encore être vue comme m fonctions à valeurs réelles, décrivant m contraintes. Si l'espace euclidien est de dimension 2 et si la fonction ψ est à valeurs dans \mathbb{R} , correspondant à

Une contrainte mono-dimensionnelle, la situation s'illustre par une figure analogue à celle de droite. La question revient à rechercher le point situé le plus haut, c'est-à-dire le maximum de φ , dans l'ensemble des points rouges, c'est-à-dire ceux qui vérifient la contrainte.

Le théorème clé se conçoit aisément dans l'exemple de dimension 2. Le point recherché est celui où la courbe rouge ne monte ni ne descend. En termes plus techniques, cela correspond à un point où la différentielle de ψ possède un noyau orthogonal au gradient de φ en ce point.

Le multiplicateur de Lagrange est une méthode offrant une condition nécessaire. Les fonctions φ et ψ sont différentiables et leurs différentielles continues, on parle de fonction de classe C^1 . On considère λ un vecteur pris dans l'ensemble d'arrivée de ψ et la fonction L définie par :

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = \varphi(\mathbf{x}) + \lambda \cdot \psi(\mathbf{x}) \quad (3.11)$$

L'opérateur représenté par un point est le produit scalaire. Si x_0 est une solution recherchée, il existe un vecteur λ_0 tel que la fonction L admet une différentielle nulle au point (x_0, λ_0) . Les coordonnées du vecteur λ_0 sont appelées multiplicateurs de Lagrange. Cette technique permet de passer d'une question d'optimisation sous contrainte à une optimisation sans contrainte, celle de la fonction L , dans un espace de dimension $n + m$.

La méthode se généralise aux espaces fonctionnels. Un exemple est donnée par la question de la chaînette, qui revient à rechercher la position que prend au repos, une chaînette attachée à ses deux extrémités.

L'optimisation correspond à la position offrant un potentiel minimal, la contrainte est donnée par la position des extrémités et la longueur de la chaînette, supposée fixe. Cette méthode permet de trouver des plus courts chemins sous contrainte, ou encore des géodésiques.

Le principe de Fermat ou celui de moindre action permet de résoudre de nombreuses questions à l'aide de cette méthode. Hugh Everett généralise la méthode aux fonctions non-dérivables, souvent choisies convexes. Pour une résolution effective, il devient nécessaire de disposer d'un algorithme déterminant l'optimum (ou les optima) d'une fonction.

Dans le cas non dérivable, on utilise souvent une heuristique adéquate.

3.4.3.3 Dimension fini

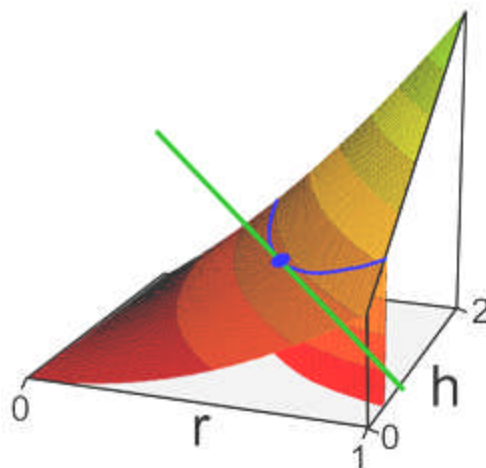


Figure 3.2 Notion de dimension fini

La nappe correspond à la surface du cylindre, la courbe bleue aux points de volume égal à v_0 , choisi dans la représentation égal à 1.

Soit v_0 un nombre strictement positif, l'objectif est de trouver la portion de cylindre de rayon r et de hauteur h de surface minimale et de volume v_0 . Pour cela on définit deux fonctions, v et s qui à (r, h) associent respectivement le volume et la surface de la portion de cylindre. On dispose des égalités :

$$\forall r, h \in \mathbb{R}_+ \quad v(r, h) = \pi r^2 h \quad \text{et} \quad s(r, h) = 2\pi(r + h) \quad (3.12)$$

La **Figure 3.2** représente la fonction s , qui à r et h associe la surface. La ligne bleue correspond aux points de volume égal à 1, l'objectif est de trouver le point bleu, de plus petite surface pour un volume égal à 1.

On définit une fonction c et L de la manière suivante :

$$\forall r, h \in \mathbb{R}_+ \quad c(r, h) = (r, h) - v_0 \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad L(r, h, \lambda) = s(r, h) + \lambda \cdot c \quad (3.13)$$

La méthode de Lagrange consiste à rechercher un point tel que la différentielle de L soit nulle. Sur un tel point, la dérivée partielle en λ est nulle, ce qui signifie que la fonction c est nulle, ou encore que la contrainte est respectée. Si l'on identifie s avec son approximation linéaire tangente, son comportement sur la contrainte, aussi identifiée à son approximation linéaire tangente est aussi nécessairement nulle.

Ce comportement est illustré par la droite en vert sur la **Figure**. Le long de cette droite, la fonction c est nulle, à l'ordre 1, la fonction s l'est alors nécessairement.

Il suffit, en conséquence, de calculer la différentielle de L , et plus précisément ses trois dérivées partielles, pour l'exemple choisi :

$$\frac{\partial L}{\partial r} = 2\pi(h + 2r + \lambda hr) = 0, \frac{\partial L}{\partial h} = \pi(2r + \lambda r^2) = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \pi r^2 h - v_0 = 0 \quad (3.14)$$

On trouve les valeurs suivantes :

$$r = -\frac{2}{\lambda} = \left(\frac{v_0}{2\pi}\right)^{1/3} \quad h = -\frac{4}{\lambda} = 2 \left(\frac{v_0}{2\pi}\right)^{1/3} \text{ et } \lambda = -2 \left(\frac{2\pi}{v_0}\right)^{1/3} \quad (3.15)$$

Deuxième exemple : l'isopérimétrie du triangle

L'exemple précédent possède l'avantage d'une représentation graphique simple, guidant l'intuition. En revanche, il est trop simple pour que la méthode du multiplicateur de Lagrange soit la meilleure dans ce cas. En effet, on peut aussi calculer la valeur de h pour que l'aire de la frontière soit égale à v_0 , on trouve :

$$h = \frac{v_0 - 2\pi r^2}{2\pi r} \quad (3.16)$$

Il devient possible d'exprimer le volume du cylindre d'aire égale à v_0 en fonction de r et le calcul revient à trouver le minimum d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Pour se convaincre de la pertinence de la méthode, on peut rechercher le triangle d'aire maximale et de périmètre p , choisi strictement positif. Si (x, y, z) est le triplet des longueurs des côtés du triangle, son aire A est égale à :

$$A = \frac{1}{4} \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^4 + y^4 + z^4)} \quad (3.17)$$

Il est plus simple de maximiser la fonction φ qui associe le quart du carré de A , la contrainte est donnée par la fonction ψ qui associe au triangle la différence du périmètre et de p :

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4} ((x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^4 + y^4 + z^4)) \quad \text{et} \quad \psi(x, y, z) = x + y + z - p \quad (3.18)$$

Un triangle n'est défini, pour un couple (x, y, z) , que si les trois coordonnées sont positives et si la somme de deux coordonnées est supérieure à la troisième. Soit D cet ensemble de points, sur la frontière de D , la fonction φ est nulle.

On cherche un point de l'intérieur de D tel que φ soit maximal dans l'ensemble des points d'image par ψ nulle. Comme l'intersection de l'image réciproque de 0 par ψ et de D est un compact, il existe au moins un maximum. On définit comme dans l'exemple précédent la fonction L par :

$$L(x, y, z, \lambda) = \varphi(x, y, z) + \lambda \psi(x, y, z)$$

Si (a, b, c) est un triangle de périmètre p et d'aire maximale, il existe une valeur λ_0 telle que la différentielle de L au point (a, b, c, λ_0) soit nulle. Un calcul de dérivée partielle montre que ce quadruplet est solution du système d'équations :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = x(-x^2 + y^2 + z^2) + \lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = y(x^2 - y^2 + z^2) + \lambda = 0 \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = z(x^2 + y^2 - z^2) + \lambda = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - p = 0 \quad (3.20)$$

On en déduit que a, b et c sont tous racines de l'équation :

$$x^3 - px + q = 0 \quad \text{avec} \quad p = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}, \quad q = -\frac{\lambda}{2} \quad (3.21)$$

Si les trois valeurs sont distinctes, elles correspondent aux trois racines de l'équation (1), leur somme est égale au coefficient de degré 2, c'est-à-dire à 0. Un tel point ne peut être dans l'intérieur de D car il est soit égal au triplet nul, soit contient une coordonnée strictement négative.

On en conclut qu'au moins deux coordonnées sont égales, par exemple b et c . On peut alors ajouter une cinquième équation aux quatre qui fournissent le calcul des dérivées partielles : $y = z$. En remplaçant z par y dans la première et deuxième équation, on obtient :

$$x(-x^2 + 2y^2) = yx^2 \quad \text{et} \quad x(x^2 + yx - 2y^2) = x(x - y)(x + 2y) = 0 \quad (3.22)$$

On trouve trois cas : $x = 0$ correspond à un point de la frontière de D et c'est un minimum de φ , $x = y$ correspond au triangle équilatéral et $x = -2.y$ est un cas impossible car a est nécessairement strictement positif. L'unique solution est le triangle équilatéral de côté $p/3$ car $a = b = c$ et la somme des trois longueurs est égale à p .

Remarque : L'objectif est ici d'illustrer la méthode du multiplicateur de Lagrange, on a trouvé le maximum d'une fonction φ dans l'intérieur de D , sous la contrainte définie par ψ . Si l'objectif est uniquement de résoudre le problème isopérimétrique pour le triangle, une solution plus simple est donnée dans l'article sur l'isopérimétrie.

3.4.3.4 Notations et interprétation

Soit E et F deux espaces vectoriels réels de dimensions respectives n et m avec n plus grand que m . Soit φ une fonction de E dans \mathbb{R} , que l'on cherche à optimiser. On cherche un point a tel que $\varphi(a)$ soit le plus petit possible.

Soit ψ une fonction de E dans F , définissant la contrainte. L'ensemble sur lequel on travaille est G , correspondant aux points x tel que $\psi(x) = 0$.

Si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , chaque point x de E s'exprime comme une combinaison linéaire des éléments de la base :

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad (3.23)$$

Cette remarque permet de voir les fonctions φ et ψ de deux manières. Elles peuvent être vues comme des fonctions d'une unique variable x de E , ce qui rend l'écriture plus concise et favorise une compréhension plus simple, mais plus abstraite des mécanismes en jeu. Les applications peuvent aussi être vues comme fonctions de n variables x_1, \dots, x_n , ce qui présente une rédaction plus lourde mais plus aisée pour les calculs effectifs. L'espace F est de dimension m , si (f_1, \dots, f_m) est une base de F , la fonction ψ peut aussi être vue comme m fonctions de n variables :

$$\forall x \in E \psi(x) = \sum_{j=1}^m \psi_j(x) f_j \text{ ou encore } \forall (x_i) \in \mathbb{R}^n \psi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^m \psi_j(x_1, \dots, x_n) f_j \quad (3.24)$$

L'ensemble G peut être vu comme une unique contrainte exprimée par une fonction à valeurs dans F ou encore comme m contraintes exprimées par les égalités $\psi_j(x) = 0$, à valeurs dans \mathbb{R} .

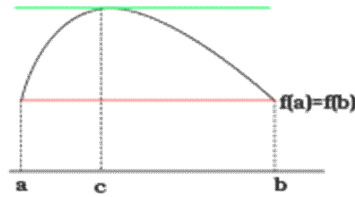


Figure 3.3 L'espace F est de dimension m

Un corollaire du théorème de Rolle indique que l'optimum est atteint en un point de différentielle nulle.

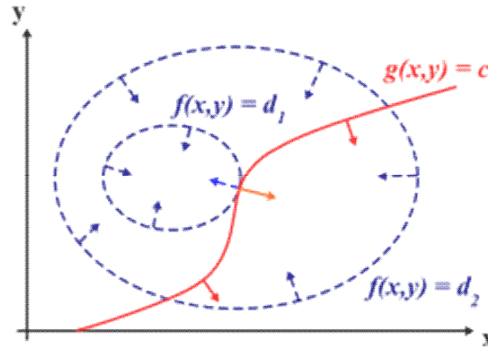


Figure 3.4 Méthode du multiplicateur de Lagrange

Le fondement théorique de la méthode du multiplicateur de Lagrange peut être vu comme analogue au théorème de Rolle.

Les fonctions φ et ψ sont de classe C^1 , ce qui signifie qu'elles sont différentiables, autrement dit, elles admettent chacune une application linéaire tangente en chaque point. Le terme C^1 signifie aussi que les applications qui, à un point associent les différentielles, soit de φ soit de ψ sont continues.

L'optimum recherché vérifie une propriété analogue à celle du théorème de Rolle. Un corollaire de ce théorème, illustré à gauche, indique que l'optimum, un maximum ou un minimum, s'il se situe dans l'intervalle ouvert $]a, b[$, possède une tangente horizontale, ce qui signifie encore que sa différentielle est nulle. C'est un résultat de cette nature qui est recherché. On peut le visualiser sur la Figure 3.4, si n et m sont respectivement égaux à 2 et à 1. On représente φ (noté f sur la Figure 3.4) en bleu par ses courbes de niveau, comme les géographes. Les flèches représentent le gradient de la fonction φ .

La différentielle de φ est une application linéaire de E dans \mathbb{R} , c'est-à-dire une forme duale.

Il est d'usage de considérer E comme un espace euclidien, de choisir la base de E orthonormale et d'identifier la différentielle avec le vecteur de E qui représente la forme duale.

Dans ce cas, l'approximation linéaire tangente s'écrit :

$$\forall (x; h) \in E \quad \varphi(x+h) = \varphi(x) + \text{grad } \varphi(x) \cdot h + o(h) \text{ avec } \text{grad } \varphi(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} e_i \quad (3.25)$$

La lettre o désigne un petit o selon la notation de Landau et le point entre le gradient de φ et h symbolise le produit scalaire. Le vecteur gradient est orthogonal à la courbe de niveau, dans le sens des valeurs croissantes de φ et de norme proportionnelle à la vitesse d'accroissement de φ dans cette direction. La contrainte vérifie une propriété analogue puisqu'elle est aussi différentiable.

L'ensemble étudié est celui des valeurs x tel que $\psi(x)$ est nul. Si x_0 est élément de G , les points voisins de x_0 dans G ont aussi une image nulle par ψ autrement dit l'espace tangent à G au point x_0 est formé par les accroissements h de x_0 qui ont une image par la différentielle de ψ nulle. La direction de l'espace tangent est le noyau de l'application différentielle de ψ .

Une analyse par les fonctions coordonnées ψ_i exprime ce résultat en indiquant que l'espace tangent est l'intersection des hyperplans orthogonaux des gradients de ψ_i .

Une analyse au point optimal x_0 recherché indique, en approximation du premier ordre, qu'un déplacement h dans la direction de l'espace tangent à G ne peut pas accroître la valeur de φ . Ceci signifie que le déplacement h est nécessairement orthogonal au gradient de φ en x_0 .

C'est ainsi que se traduit le théorème de Rolle, dans ce contexte. Géométriquement, cela signifie que la courbe de niveau bleue et la ligne rouge sont tangentes au point recherché.

Analytiquement cela se traduit par le fait que le noyau de la différentielle de ψ en x_0 est orthogonal au gradient de φ en ce point.

3.4.3.5 Théorèmes

Le problème à résoudre est de trouver le minimum suivant :

$$\forall x \in E \quad \min_{x \in G} \varphi(x) \text{ avec } G = \{x \in E, \psi(x) = 0\} \quad (3.26)$$

Les fonctions φ et ψ ne sont pas nécessairement définies sur tout E mais au moins sur des ouverts de E . De plus, le domaine de définition de φ possède une intersection non vide avec G .

La méthode des multiplicateurs de Lagrange se fonde sur un théorème :

Si le point x_0 est un extremum local de φ dans l'ensemble G , alors le noyau de la différentielle de ψ au point x_0 est orthogonal au gradient de φ en ce point.

Un corollaire met en évidence le multiplicateur. Pour cela, il est nécessaire d'équiper F du produit scalaire tel que sa base soit orthonormale, le symbole t signifie la transposée d'une l'application linéaire, elle définit une application du dual de F , ici identifié à F dans le dual de E , encore identifié à E :

✓ **Corollaire 1** — Si le point x_0 est un extremum local de φ dans l'ensemble G et si la différentielle de ψ au point x_0 est surjective, il existe un vecteur λ_0 de F tel que la somme de l'image de λ_0 par la transposée de la différentielle de ψ au point x_0 et du gradient de φ en ce point soit nulle :

$$\exists(\lambda_0) \in F \text{ grad } \varphi(x_0) + {}^t D\psi_{x_0}(\lambda_0) = 0 \quad (3.27)$$

Sous forme de coordonnées, on obtient :

$$\exists(\lambda_j) \in \mathbb{R}^m \text{ grad}\varphi(x_0) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{rgad } \psi_j(x_0) = 0 \quad (3.28)$$

Un deuxième corollaire est plus pragmatique, car il offre une méthode effective pour déterminer l'extremum. Il correspond à la méthode utilisée dans l'exemple introductif.

✓ **Corollaire 2** — Si le point x_0 est un extremum local de φ dans l'ensemble G et si la différentielle de ψ au point x_0 est surjective, alors il existe un vecteur λ_0 de F tel que la fonction L de $E \times F$ dans \mathbb{R} admet un gradient nul en (x_0, λ_0) .

$$\forall(x; \lambda) \in E \times F \quad L(x, \lambda) = \varphi(x) + \lambda \cdot \Psi(x) \quad \text{et} \quad DL_{x_0, \lambda_0} = 0 \quad (3.29)$$

Ces théorèmes possèdent quelques faiblesses, de même nature que celle du théorème de Rolle. La condition est nécessaire, mais pas suffisante. Un point de dérivée nulle pour Rolle ou vérifiant les hypothèses du théorème du multiplicateur de Lagrange n'est pas nécessairement.

Un maximum ou un minimum. Ensuite, même si ce point est un extremum, il n'est que local. Si une solution x_0 est trouvée, rien n'indique que cet extremum local est le meilleur. L'approximation linéaire ne précise pas si cet optimum est un maximum ou un

minimum. Enfin, comme pour le cas du théorème de Rolle, si les domaines de définition ne sont pas ouverts, il est possible qu'un point frontière soit un optimum qui ne vérifie pas le théorème. Ainsi, sur la figure de gauche, $f(a)$ et $f(b)$ sont des minima, mais la dérivée n'est nulle ni en a ni en b .

3.4.3.6 Écriture du problème

Si l'écriture condensée permet de mieux comprendre la structure du théorème, les notations développées sont plus utiles pour une résolution effective. Dans la pratique, on considère souvent une fonction φ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} et m fonctions ψ_j , avec j variant de 1 à m , aussi de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . L'entier m est nécessairement plus petit que n pour pouvoir appliquer les théorèmes du paragraphe précédent. On cherche à trouver un n -uplet (a_1, \dots, a_n) tel que :

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) = \min_{x_i \in G} \varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ avec } G = \{x_i \in \mathbb{R}^n, \forall j \in [1, m] \psi_j(x_1, \dots, x_n) = 0\} \quad (3.30)$$

Pour cela, on définit la fonction L de \mathbb{R}^{n+m} dans \mathbb{R} par :

$$\forall (x_i) \in \mathbb{R}^n \quad L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \varphi(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \psi_j(x_1, \dots, x_n) \quad (3.31)$$

Le deuxième corollaire indique que résoudre les équations suivantes offrent sur condition nécessaire pour élucider le problème d'optimisation (1). Le n -uplet (a_1, \dots, a_n) est une solution de (1) seulement s'il existe un m -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ tel que le $n+m$ -uplet $(a_1, \dots, a_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ soit solution des $n + m$ équations :

$$\forall i \in [1, n] \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ et } \forall j \in [1, m] \quad \psi_j(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (3.32)$$

Cette méthode peut être généralisée aux problèmes d'optimisation incluant des contraintes d'inégalités (ou non linéaires) en utilisant les conditions de Kuhn-Tucker. Mais également sur des fonctions discrètes à maximiser ou minimiser sous contraintes, moyennant un changement d'interprétation, en utilisant la méthode des multiplicateurs d'Everett (ou de Lagrange généralisés).

La méthode du multiplicateur de Lagrange permet de démontrer l'inégalité arithmético-géométrique. On définit les applications φ et ψ de \mathbb{R}_+^n dans \mathbb{R} par :

$$\forall (x_i) \in \mathbb{R}_+^n, \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i \text{ et } \psi(x_1, \dots, x_n) = (\sum_{i=1}^n x_i) - S, S \in \mathbb{R}_+^1 \quad (3.33)$$

On remarque que l'ensemble G , composé des n uplets de coordonnées positives et de somme égale à S est un compact de \mathbb{R}^n . Sur ce compact la fonction φ est continue, elle admet nécessairement un maximum.

Les deux fonctions φ et ψ sont bien de classe C^1 , il est donc possible d'utiliser le multiplicateur de Lagrange pour trouver ce maximum. Pour cela, on considère la fonction L :

$$\forall (x_i) \in \mathbb{R}_+^n, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \varphi(x_1, \dots, x_n) + \lambda \psi(x_1, \dots, x_n) \quad (3.34)$$

Une solution vérifie les équations :

$$\forall i \in [1, n] \quad \frac{\partial L}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n, \lambda) = 0 \Rightarrow \prod_{k=i}^n x_k = -\lambda \text{ et } \sum_{i=1}^n x_i = s \quad (3.34)$$

On en déduit l'existence d'une unique solution, obtenue pour tous les x_i égaux à $\frac{s}{n} = \bar{x}$ et λ égal à $-(s/n)^{n-1}$. Ce qui s'exprime, en remplaçant s par sa valeur :

$$\forall (x_i) \in \mathbb{R}^n + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (3.35)$$

La moyenne géométrique est inférieure à la moyenne arithmétique, l'égalité n'ayant lieu que si les x_i sont tous égaux.

Le multiplicateur de Lagrange offre une démonstration alternative de l'inégalité arithmético-géométrique.

3.4.3.7 Espace fonctionnel

Le Viaduc de Garabit possède une arche dont la géométrie est celle d'une chaînette. Il existe un autre contexte, qui fait appel au multiplicateur de Lagrange.

Considérons une chaînette soumise à la gravité et recherchons son équilibre statique. La chaînette est de longueur a et l'on suppose qu'elle est accrochée à deux points d'abscisses $-t_0$ et t_0 et d'ordonnée nulle en ces deux points.

Si son ordonnée est notée x , elle suit une courbe $y=x(t)$ sur l'intervalle $[-t_0, t_0]$, dont on se propose de calculer l'équation.

Dire qu'elle est à l'équilibre revient à dire que son potentiel Φ est minimal, où :

$$\Phi(x) = \int_{-t_0}^{t_0} \alpha \cdot x(t) \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt \quad (3.36)$$

Ici, α désigne une constante physique, en l'occurrence le produit de g la gravitation terrestre, par la densité linéaire de la chaînette, supposée constante. La formule donnant la longueur d'un arc en fonction d'un paramétrage est donnée dans l'article Longueur d'un arc.

La chaînette n'est pas supposée être élastique, elle vérifie donc la contrainte Ψ , indiquant que sa longueur l_0 n'est pas modifiée :

$$\Psi(x) = \int_{-t_0}^t \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt - l_0 = 0 \quad (3.37)$$

Si $C^1_K(I)$ désigne l'ensemble des fonctions de $[-t_0, t_0]$ dans \mathbb{R} , dérivables et de dérivées continues, nulles en $-t_0$ et t_0 , le problème revient à rechercher la fonction x_0 telle que :

$$\Phi(x_0) = \min_{x \in G} \Phi(x) \quad \text{Avec} \quad G = \{x \in C^1_K(I), \Psi(x) = 0\} \quad (3.38)$$

La similitude avec la situation précédente est flagrante. Pour pouvoir appliquer des multiplicateurs de Lagrange, il faut donner un sens au gradient de Φ et Ψ .

Dans le cas où il existe deux fonctions de classe C^2 de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} , notées φ et ψ telles que :

$$\Phi(x) = \int_{-t_0}^t \varphi(t, x, x') dt \quad \text{et} \quad \Psi(x) = \int_{-t_0}^t \psi(t, x, x') dt, \quad \text{avec} \quad \frac{dx}{dt}(t) = x'(t) \quad (3.39)$$

L'équation d'Euler-Lagrange affirme que :

$$\text{grad}\Phi(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'} \right) \quad \text{et} \quad \text{grad}\Psi(x) = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x'} \right) \quad (3.40)$$

Dans le cas particulier où les fonctions φ et ψ sont des fonctions de deux variables et ne dépendent pas de t , on obtient la formulation de Beltrami (cf. l'article Équation d'Euler-Lagrange):

$$\text{grad}\Phi(x) \cdot \dot{x} = \frac{d}{dt} \left(\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \dot{x} \right) = \frac{ax}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \text{grad}\Psi(x) \cdot \dot{x} = \frac{d}{dt} \left(\psi - \frac{\partial \psi}{\partial x'} \dot{x} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) \quad (3.41)$$

Dire que les deux gradients sont colinéaires revient à dire qu'il existe un réel λ , le multiplicateur de Lagrange, tel que :

$$\text{grad}\Phi(x) - \lambda \text{grad}\Psi(x) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{ax - \lambda}{\sqrt{1+x^2}} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{R}, ax - \lambda = k\sqrt{1+x^2} \quad (3.42)$$

La résolution de cette équation différentielle est une chaînette. La méthode du multiplicateur de Lagrange permet bien de résoudre la question posée.

L'exemple précédent montre que le contexte de l'équation d'Euler-Lagrange n'est pas loin de celui du multiplicateur de Lagrange. Si l'ensemble de départ de la fonction $x(t)$ recherchée est un intervalle I ouvert et borné de \mathbb{R} et l'ensemble d'arrivée E l'espace vectoriel euclidien, la généralisation est relativement aisée.

On suppose l'existence d'une fonction Φ à minimiser, son ensemble de départ est un espace fonctionnel, c'est-à-dire un espace vectoriel de fonctions, de I dans E et son ensemble d'arrivée R . La fonction Φ est construite de la manière suivante :

$$\Phi(x) = \int_I \varphi(t, x; \dot{x}) dt \quad (3.43)$$

Le point sur le x indique la fonction gradient, qui à t associe le gradient de x au point t.

La fonction φ est une fonction de $R \times E^2$ dans R de classe C^2 . L'optimisation est sous contrainte, donnée sous une forme analogue à la précédente. On suppose l'existence d'une fonction Ψ de $R \times E^2$ dans F , un espace euclidien. La fonction Ψ est encore définie à l'aide d'une fonction ψ de classe C^2 de $I \times E^2$, mais cette fois dans F un espace euclidi

$$\Psi(x) = \int_I \psi(t, x; \dot{x}) dt \quad (3.44)$$

L'ensemble G est composé de fonctions deux fois dérivables de I dans E et dont l'image par Ψ est nulle. On suppose de plus que les valeurs des fonctions de G aux bornes de I sont fixes et, quitte à opérer une translation, on peut toujours supposer, sans perte de généralités, que ces fonctions sont nulles aux bornes de I .

La seule tâche un peu délicate est de définir l'espace vectoriel $W^{2,2}(I,E)$ sur lequel opèrent Φ et Ψ . Pour définir un équivalent de gradient, cet espace comporte nécessairement un produit scalaire. Si l'on souhaite établir des théorèmes équivalents aux précédents les fonctions dérivées et dérivées seconde sont définis et l'espace est complet.

Un espace muni d'un produit scalaire et complet est un Hilbert. Sa géométrie est, de fait, suffisamment riche pour étendre les résultats précédents.

On note D l'espace des fonctions de I , à valeur dans E , de classe C^∞ et à support compact et D^* son dual topologique.

L'espace D est muni de la norme de la borne supérieure et l'espace D^* est celui des distributions.

Ce premier couple n'est pas encore satisfaisant car D est trop petit et D^* trop gros pour permettre de définir un bon produit scalaire, à l'origine d'une géométrie aussi simple que celle d'un Hilbert.

L'espace D^* contient le Hilbert des fonctions de carrés intégrables $L^2(I,E)$. En effet une fonction f de $L^2(I,E)$ agit sur D par le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ défini par l'intégrale de Lebesgue :

$$\forall_g \in D \quad \langle f, g \rangle \geq \int_I f(t) \cdot g(t) dt \quad (3.45)$$

C'est dans $L^2(I,E)$ que nous cherchons le bon espace. Dans cet espace, l'intégration par parties permet de définir la dérivée de la fonction f de $L^2(I)$. Comme g est à support

compact et que I est ouvert, aux bornes de I , la fonction g est nulle. Si f est dérivable au sens classique du terme, on bénéficie des égalités :

$$\langle \dot{f}, g \rangle_I = \int_I \dot{f}(t) \cdot g(t) dt = [f(t) \cdot f(g)]_I - \int_I f(t) \cdot \dot{g}(t) dt = - \int_I f(t) \cdot \dot{g}(t) dt \quad (3.46)$$

Si la distribution dérivée de f est encore d'un élément de $L^2(I, E)$, on dit qu'elle est dérivable au sens de Sobolev. Si cette dérivée est encore dérivable au sens précédent, on dit qu'elle est deux fois dérivable au sens de Sobolev. On note $W^{2,2}(I, E)$ le sous-espace de $L^2(I, E)$ équipé du produit scalaire suivant $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$:

$$\forall f, g \in W^{2,2}(I, E) \quad \langle f, g \rangle_W = \int_I f(t) \cdot g(t) dt + \int_I \dot{f}(t) \cdot \dot{g}(t) dt + \int_I \ddot{f}(t) \cdot \ddot{g}(t) dt \quad (3.47)$$

Les intégrales sont bien définies car elles correspondent au produit de deux éléments de $L^2(I, E)$, il est ensuite simple de vérifier que l'espace est bien complet. Enfin, si f est une fonction dérivable au sens des distributions, il existe un représentant de f continue, [15]. Ainsi tout élément de $W^{2,2}(I, E)$ admet un représentant continu et dont la dérivée admet aussi un représentant continu.

3.4.4 Équation d'Euler-Lagrange

La difficulté est maintenant d'exprimer le gradient des fonctions Φ et Ψ . L'équation d'Euler-Lagrange cherche dans un premier temps à trouver des fonctions de classe C^2 qui minimisent Φ . L'espace vectoriel sous-jacent est celui des fonctions d'un intervalle borné et de classe C^2 et nulles aux bornes de l'intervalle. Sur cet espace, le calcul du gradient de Φ n'est guère complexe, il donne aussi une idée de la solution ainsi que de la méthode pour y parvenir. En revanche, ce calcul est insuffisant dans le cas présent. Avec le bon produit scalaire, l'espace des fonctions de classe C^2 n'est pas complet, ce qui empêche de disposer de la bonne géométrie permettant de démontrer la méthode du multiplicateur de Lagrange.

L'objectif est de généraliser un peu la démonstration pour permettre de disposer de l'égalité du gradient dans l'espace complet $W^{2,2}(I, E)$.

Dans un premier temps, exprimons l'égalité qui définit la différentielle de Φ en un point x , qui représente une fonction de $W^{2,2}(I, E)$:

$$\forall h \in W^{2,2}(I, E) \quad \Phi(x+h) = \Phi(x) + D\Phi_x(h) + \mathbf{O}(h) \quad (3.48)$$

L'application $D\Phi_x$ est une application linéaire continue de $W^{2,2}(I, E)$ dans \mathbb{R} , c'est-à-dire un élément du dual topologique de $W^{2,2}(I, E)$, que le produit scalaire permet d'identifier à $W^{2,2}(I, E)$. L'égalité précédente devient :

$$\forall h \in W^{2,2}(I, E) \quad \phi(x+h) = \phi(x) + \langle \text{grad} \phi_x, h \rangle + o(h) = \int_I \text{grad} \phi_x(t) \cdot h(t) dt + o(h) \quad (3.46)$$

Autrement dit, le gradient de Φ au point x est une fonction de $L^2(I, E)$ dans \mathbb{R} . De fait, ce gradient s'exprime à l'aide de l'équation d'Euler-Lagrange :

- Le gradient de Φ au point x est la fonction de I dans E , définie par :

$$\text{grad} \phi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}} \right) \quad (3.49)$$

Si la fonction φ est en général choisie au sens usuel de la dérivation, la fonction $x(t)$ est une fonction de $W^{2,2}(I, E)$. Le symbole d/dt doit être pris au sens de la dérivée d'une distribution, qui n'est ici nécessairement une fonction de carrée intégrable, définie presque partout.

Pour Ψ , la logique est absolument identique, mais cette fois-ci, la fonction est à valeurs dans F . En conséquence, la dérivée partielle de ψ par rapport à sa deuxième ou troisième variable n'est plus une application linéaire de E dans \mathbb{R} , mais une application linéaire de E dans F . Ainsi, la différentielle de Ψ au point, une fonction x de I dans E , est une application de I dans $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F . La logique reste la même.

La différentielle de Ψ au point x est la fonction de I dans $L(E, F)$, définie par :

$$D\Psi_x = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \dot{x}} \right) \quad (3.50)$$

3.4.4.1 Théorèmes

Ce paragraphe est très proche du précédent dans le cas de la dimension finie. Le problème à résoudre est de trouver le minimum suivant :

$$\min_{x \in G} \phi(x) \text{ avec } G = \{x \in W^{2,2}(I, E), \Psi(x) = 0 \text{ et } x(a) = x(b) = 0\} \quad (3.51)$$

Théorème du multiplicateur de Lagrange — Si le point x_0 est un extremum local de Φ dans l'ensemble G , alors le noyau de la différentielle de ψ au point x_0 est orthogonal au gradient de φ en ce point, [14].

On obtient les mêmes corollaires, que l'on peut écrire :

✓ **Corollaire** — Si le point x_0 est un extremum local de Φ dans l'ensemble G et si la différentielle de Ψ au point x_0 est surjective, alors il existe un vecteur λ_0 de F tel que la fonction L de $W^{2,2}(I, E) \times F$ dans \mathbb{R} admet un gradient nul en (x_0, λ_0) :

$$\forall(x; \lambda) \in E \times F \quad L(x, \lambda) = \phi(x) + \lambda \cdot \Psi(x) \tag{3.52}$$

Cette équation s'écrit encore :

$$\exists(\lambda_j) \in \mathbb{R}^m \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial \dot{x}} \right) \tag{3.53}$$

Le signe d/dt doit être pris au sens de la dérivée des distributions. On obtient une solution faible, c'est-à-dire une fonction x définie presque partout et dérivable dans un sens faible. En revanche, si une fonction x de classe C² est solution du problème de minimisation, comme ses dérivées premières et secondes sont des représentants de ses dérivées au sens faible, L'équation précédente est encore vérifiée.

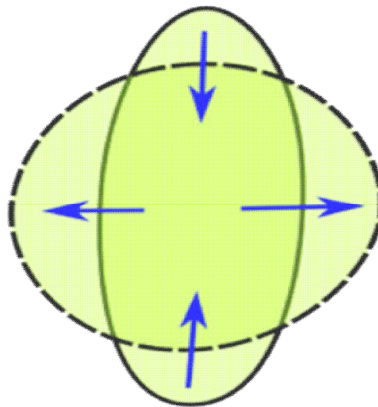


Figure 3.5 Courbure de la frontière

En répartissant uniformément la courbure de la frontière on obtient l'optimal isopérimétrique.

On recherche la surface de plus grande aire, ayant une frontière de longueur égale à 2π. On remarque que la surface est nécessairement convexe, d'intérieur non vide.

On considère une droite coupant la surface en deux. Cette droite est utilisée comme axe d'un repère orthonormal, dont les abscisses sont notées par la lettre t et les ordonnées par x. La frontière supérieure est paramétrable en une courbe x(t) et, si le repère est bien choisi, on peut prendre comme abscisse minimale -a et maximale a.

On recherche alors une courbe x, définie entre -a et a tel que l'aire A soit maximale :

$$A = \int_{-a}^a x(t) dt \tag{3.54}$$

On sait de plus que la demi-longueur de la frontière est égale à π :

$$\int_{-a}^a \sqrt{1 + \dot{x}(t)^2} dt = \pi \tag{3.55}$$

La recherche de la surface se traite aussi avec le multiplicateur de Lagrange. La même astuce que celle utilisée dans l'exemple introductif montre, avec les notations usuelles :

$$\text{grad}\Phi(x).x = \frac{d}{dt} \left(\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x} x \right) = \frac{d}{dt} x(t) \quad \text{et} \quad \text{grad}\Psi(x).x = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} x \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \quad (3.56)$$

On en déduit l'existence de valeurs λ et k tel que :

$$x - \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^2}} = k \quad (3.57)$$

En notant $u = x - k$, on obtient :

$$u^2(1+u^2) = \lambda^2 \quad (3.58)$$

On trouve l'équation d'un demi-cercle de rayon λ , la valeur λ est égale à 1 et k à 0.

3.4.5 Programmation non linéaire

En informatique, la programmation non linéaire (ou NLP, de l'anglais : non linear programming) est une méthode permettant de résoudre de nombreuses équations et inéquations dépendant d'un ensemble de paramètres - on parle de « contraintes ».

Sous la forme d'une fonction à maximiser ou à minimiser. Cette fonction ou l'ensemble de ses paramètres peuvent être non linéaire.

3.4.5.1 Formulation mathématique

On a une fonction $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, avec $X \subseteq \mathbb{R}^n$. L'objectif est de déterminer le vecteur x défini par :

$$x \in X; f(x) = \min_{y \in X} f(y) \quad (3.59)$$

De façon équivalente, on peut rechercher la valeur pour laquelle f est maximale :

$$x \in X; f(x) = \max_{y \in X} f(y) \quad (3.60)$$

3.4.5.2 Méthodes de résolution

Si la fonction est convexe ou concave, et l'ensemble des contraintes est convexe, alors il existe des méthodes spécialisées, appelées méthodes d'optimisation convexe. Sinon, il existe plusieurs solutions. Par exemple, utilisant le principe de séparation et évaluation pour diviser et traiter séparément plusieurs paramètres.

L'algorithme peut également être arrêté avant d'aboutir, si on peut prouver qu'aucune solution ultérieure ne sera meilleure à un certain seuil de tolérance près.

Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) garantissent qu'une solution ainsi obtenue est optimale.

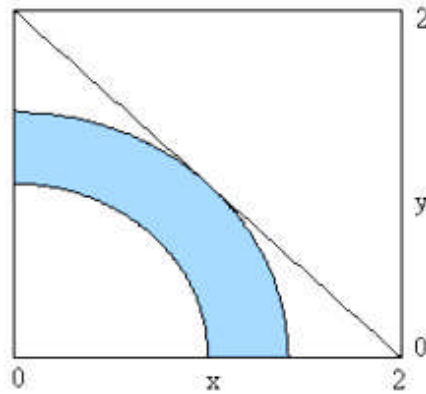


Figure 3.5 L'intersection d'une ligne avec l'ensemble des contraintes

La **Figure 3.5** représente la solution.

Un problème simple peut être posé ainsi :

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 & x_1^2 + x_2^2 &\geq 1 \\ x_2 &\geq 0 & x_1^2 + x_2^2 &\leq 2 \end{aligned}$$

Où l'on cherche à maximiser la fonction :

$$f(x) = x_1 + x_2 \quad \text{avec} \quad x = (x_1, x_2)$$

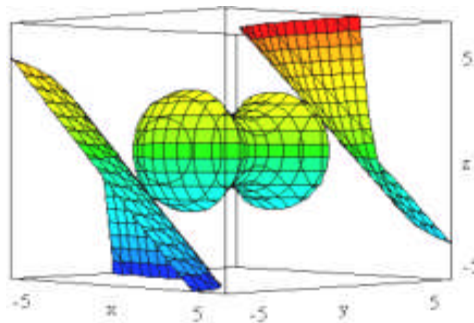


Figure 3.6 L'intersection de la surface avec l'espace des contraintes

Cette **Figure 3.6** aussi représente la solution.

3.4.6 Programmation dynamique

La programmation dynamique est une technique algorithmique pour optimiser des sommes de fonctions monotones non décroissantes sous contrainte.

Elle a été désignée par ce terme pour la première fois dans les années 1940 par Richard Bellman. Elle s'applique à des problèmes d'optimisation dont la fonction objectif se décrit comme « la somme de fonctions monotones non-décroissantes des ressources ».

Elle a d'emblée connu un grand succès, car la plupart des fonctions économiques de l'industrie étaient de ce type : maximisation du tonnage de charbon (ou de barils de pétrole) produit à partir de plusieurs puits à budget donné, par exemple

3.4.6.1 Principe

La programmation dynamique s'appuie sur un principe simple : toute solution optimale s'appuie elle-même sur des sous-problèmes résolus localement de façon optimale. Concrètement, cela signifie que l'on va pouvoir déduire la solution optimale d'un problème en combinant des solutions optimales d'une série de sous problèmes.

Les solutions des problèmes sont étudiées 'de bas en haut', c'est-à-dire qu'on calcule les solutions des sous-problèmes les plus petits pour ensuite déduire petit à petit les solutions de l'ensemble.

Par exemple pour optimiser la production de 30 puits à budget donné, on optimise la gestion de 2 puits pour tout budget inférieur ou égal, puis on considère l'ensemble comme un puits unique et on ajoute les puits suivants un par un.

Un autre exemple est le problème du sac à dos.

3.4.6.2 Utilisation

La programmation dynamique est très souvent applicable dans un cadre industriel pour deux raisons :

- la nature additive (variable extensive) de la monnaie ;
- la loi des rendements décroissants sur la plupart des postes de production.

3.4.6.3 Quelques exemples concrets

- Optimiser la production d'un bassin minier en fonction des ressources sur chaque puits ;
- Optimiser le nombre de consommateurs touchés par une campagne publicitaire en répartissant le budget sur différents médias, ou au contraire en le concentrant (média-planning).

C'est la programmation dynamique — et non des considérations de respect des riverains d'un aéroport — qui conduisit à faire monter les avions civils et militaires le plus rapidement possible jusqu'à leur altitude de croisière.

Cette technique montre en effet que c'est ce qui minimise tant la consommation générale de carburant que la rentabilisation du capital de l'appareil.

3.4.6.4 Application algorithmique

Le problème des skieurs constitue une application : il s'agit de distribuer m skis à n skieurs ($m > n$) en minimisant les écarts de taille entre les skis et les skieurs. La propriété d'optimalité des sous-structures (si une distribution est optimale, alors toute sous partie des skis et des skieurs est optimale) le rend traitable par programmation dynamique.

Le problème du sac à dos (knapsack en anglais) est un problème classique de recherche opérationnelle qui est NP-complet, mais qui est résolu de manière pseudo-polynomiale à l'aide d'un algorithme de programmation dynamique.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit les méthodes d'optimisation basées sur les métaheuristiques en les divisant en deux classes : les méthodes d'optimisation déterministes et stochastiques. Nous avons pu constater au fur et à mesure d'un court état de l'art pour chaque méthode, que leur utilisation en extraction de connaissances est relativement répandue pour les différentes tâches que nous désirons étudier : l'optimisation et l'amélioration de différents paramètres de la machine asynchrone.

Dans le prochain chapitre, on présentera une technique d'optimisation déterministe qu'on appliquera à la conception d'un moteur asynchrone triphasé

Chapitre 04

CAO

Optimisée d'une

MAS

Introduction

Dans tous les domaines d'activités industrielles, les ingénieurs sont amenés à concevoir de nouveaux dispositifs. Ce travail de conception, longtemps manuel et basé sur l'expérience et la pratique, devient de plus en plus automatisé, grâce à l'arrivée des ordinateurs. Cette démarche de conception d'un dispositif de grande performance est grandement facilitée et devient plus efficace grâce notamment aux méthodes d'optimisation automatiques. Elles doivent permettre l'obtention de la configuration optimale satisfaisant les besoins fonctionnels et économiques. Mais cette tâche est difficile, en effet, son but est de trouver un compromis entre plusieurs facteurs : besoins à satisfaire, choix entre différents concepts possibles sur la base de la faisabilité, des coûts de développement, de fabrication ou de maintenance. Il en résulte qu'une même conception peut être optimisée de différents points de vue.

Les problèmes d'optimisation présentent plusieurs difficultés liées aux besoins de l'utilisateur (solution globale, fiabilité et précision, diversité des problèmes, temps de calculs), aux caractéristiques du problème d'optimisation (non linéarité). La résolution de telles difficultés a fait l'objet de nombreux travaux en utilisant diverses méthodes d'optimisation, [16].

Les méthodes déterministes, s'appuient sur un calcul généralement lié à la dérivée de certains résultats par rapport aux paramètres de conception de dispositif. Elles ne sont réellement utilisables que dans le cas restreint où la solution cherchée est réputée proche d'une solution connue, point de départ de cette recherche. C'est pour lever cette difficulté, que nous avons choisi de nous intéresser au développement des méthodes stochastiques et d'étudier leur application aux problèmes de conception d'une machine asynchrone.

En effet, les méthodes stochastiques permettent de localiser l'optimum d'une fonction dans l'espace des paramètres sans avoir recours aux dérivées de la fonction par rapport à ces paramètres. De plus, elles ne se laissent pas piéger par un optimum local et réussissent le plus souvent à déterminer l'optimum global de la fonction considérée. Leur principe consiste à travailler avec un ensemble de solutions, puis à les faire évoluer au moyen des règles heuristiques et probabilistes.

Dans ce chapitre, premièrement on présentera un aperçu théorique concernant les réseaux de neurones qui sont utilisés pour la vérification de la saturation, puis la méthode du simplexe avec un exemple d'application.

Comme deuxième étape on appliquera la méthodologie de dimensionnement optimisé à l'amélioration d'une performance importante d'une machine asynchrone qui est le rendement tout en respectant un ensemble de contraintes structurelles et électromagnétiques. L'efficacité de la méthode du simplexe est présentée, testée et une comparaison sera effectuée.

4.1 Conception Assistée par ordinateur (CAO) – optimisée

La combinaison d'une conception assistée par ordinateur, des techniques d'optimisation constitue un outil important, en particulier dans l'ingénierie des processus de conception des performances élevées et des systèmes coûteux. Dans le domaine des machines électriques, en raison de la complexité des fonctions décrivant leurs performances, le problème d'optimisation de ces machines est un système non linéaire multi variables limitées, souvent réduite aux techniques de résolution mathématiques auxquelles sont attribués par la suite les échecs rencontrés. Or, comme pour la plupart des problèmes que l'ingénieur est amené à résoudre, l'optimisation doit faire l'objet d'une démarche systématique qui comporte les phases récapitulées dans la **Figure 4.1**, [11].

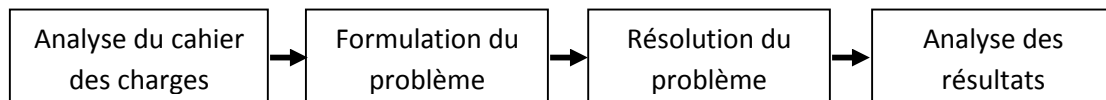


Figure 4.1 Démarche de résolution d'un problème de conception

Le cahier de charges, définit en amont, exprime les besoins des utilisateurs en termes de fonctions de service et contraintes à satisfaire.

La phase de formulation consiste à traduire le problème de conception, décrit par le cahier des charges, en un problème mathématique équivalent. C'est l'étape la plus délicate du processus de conception car, là aussi, la formulation d'un problème n'est jamais unique, en particulier la définition des fonctions caractérisant les performances du système. Elle consiste à définir de façon précise ; La fonction objective, les paramètres de conception, les éventuelles contraintes liées à la fabrication ou à l'utilisation du dispositif et donc exprimées dans le cahier des charges.

La recherche de l'optimum d'un problème (Ex. maximisation du rendement d'un moteur à induction) est réalisée à l'aide de méthodes d'optimisation.

Une fois le problème résolu, il est impératif d'évaluer la qualité de la solution et en cas d'échec de s'interroger sur les choix adoptés lors des phases précédentes. On attribue

souvent l'échec de l'optimisation à la méthode de recherche employée pour la localisation de l'optimum ou à la sensibilité des paramètres de cette méthode alors que le problème est peut-être mal formulé.

4.2 Aspect théorique

4.2.1 Réseaux de neurones

L'histoire des réseaux de neurones commence en 1943, *Mac Culloch* et *Pitts* inventèrent le premier neurone formel, qui consiste de faire un produit scalaire d'un vecteur d'entrée et un vecteur de poids, suivi d'un élément à seuil répondant 0 ou 1, selon que le résultat du produit scalaire est supérieur ou non au seuil.

En 1949, Hebb, dans une perspective psychophysiologique, souligna l'importance du couplage synaptique dans les processus d'apprentissage. C'est en 1958 que *Rosenblatt* décrit le premier modèle opérationnel de réseaux de neurones, mettant en œuvre les idées de Hebb, Mac Culloch et Pitts: La perceptron inspirée du système visuel, capable d'apprendre à calculer certaines fonctions logiques en modifiant ses connexions synaptiques.

En 1969, les mathématiciens Minsky et papert démontrèrent les limites théoriques du perceptron, l'effet de cela fut qu'immédiatement plusieurs chercheurs se désintéressèrent des réseaux de neurones pour se tourner vers les méthodes symboliques (structurelle, statistique...).

Le renouveau actuel des réseaux de neurones est dû à des contributions originales, comme celle de Hop Field en 1982, qui, en montrant analogie des réseaux de neurones avec certains systèmes physiques, permet de leur appliquer un formalisme riche et bien maîtrisé.

Plus récemment, en 1985, des nouveaux modèles mathématiques ont permis de dépasser les limites du perceptron.

Aujourd'hui, les premières applications pratiques des réseaux de neurones commencent à voir le jour, [25].

4.2.1.1 Pourquoi utiliser les réseaux neuronaux

On a recourt au réseau de neurone lorsqu'on rencontre des problèmes ayant les caractéristiques suivantes, [26] :

1. Les règles qui permettent de résoudre le problème sont inconnues, ou très difficiles à expliciter ou à formaliser. Cependant, on dispose d'un ensemble d'exemples qui correspondent à des entrées du problème et à des solutions qui leurs sont données par des experts;

2. Le problème fait intervenir des données bruitées ou incomplètes;
3. Le problème peut évoluer;
4. Le problème nécessite une grande rapidité de traitement;
5. Il n'y a pas de solutions technologiques courantes.

En se basant sur les caractéristiques des problèmes qui peuvent être résolus par les réseaux de neurones, les domaines d'utilisation apparaissent et prennent les réseaux de neurones comme un outil primordial dans leurs résolutions. Parmi les nombreux domaines, nous pouvons citer: traitement du signal, vision, parole, prévision, modélisation, aide à la décision, robotique, évaluation des écosystèmes, identification des bactéries, contrôle de processus, modélisation de systèmes physiques, reconnaissance des formes, la médecine...

4.2.1.2 Propriétés des réseaux neuronaux

L'intérêt porté aujourd'hui aux réseaux de neurones tient sa justification dans les quelques propriétés intéressantes qu'ils possèdent, et qui devraient permettre de dépasser les limitations de l'informatique traditionnelle tant au niveau programmation qu'au niveau machine.

1. Le parallélisme ;
2. La capacité d'adaptation ;
3. La mémoire distribuée ;
4. La capacité de généralisation.

4.2.1.3 L'apprentissage

C'est une phase de développement du réseau de neurones durant laquelle on calcule les poids des neurones de telle manière que les sorties du réseau soient aussi proches que possible des sorties désirées.

L'apprentissage fait appel à des exemples de comportement du processus à modéliser. Mathématiquement l'apprentissage est défini par w/t , (w est la matrice des poids).

On pourrait penser que plus le nombre de neurones est important plus le réseau est performant, ceci n'est pas certain. Lorsque le concepteur augmente le nombre de neurone, il est limité par la durée d'apprentissage.

On distingue deux types d'apprentissage :

- a. Apprentissage supervise ;
- b. Apprentissage non supervise.

4.2.1.4 Modélisation générale

D'une manière générale, on peut définir un neurone formel par les cinq éléments suivants:

1. Nature de ses entrées (E_i) $i=1\dots n$, elles peuvent être binaires ou réelles;
2. La fonction d'entrée totale H qui définit le pré-traitement effectué sur les entrées;

H peut être:

- *Booléennes* ;
- *Linéaire*: $H(E_1, E_2, \dots, E_n) = \sum_{i=1}^n W_i E_i$;
- *Affine*: $H(E_1, E_2, \dots, E_n) = \sum_{i=1}^n W_i E_i - a$.

Ces deux derniers cas sont les plus fréquents.

3. La fonction d'activation (ou état) du neurone qui définit son état interne en fonction de son entrée totale;
4. La fonction de sortie G qui calcule la sortie du neurone en fonction de son état d'activation. En générale, cette fonction est considérée comme la fonction identité ;
5. Nature de la sortie du neurone qui est $S = G(A)$. S peut être binaire ou réelle suivant le type de la fonction de seuillage choisie.

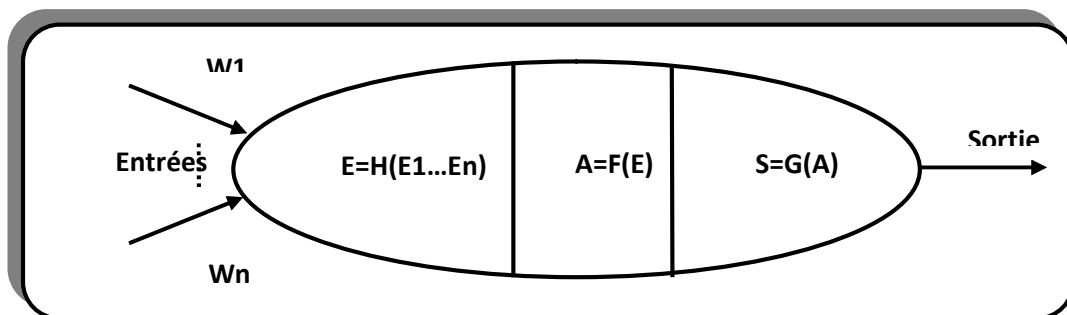


Figure 4.2 Modèle générale d'un réseau de neurone

4.2.1.5 Architecture des réseaux de neurone

Généralement, il y a deux types d'architectures de réseaux de neurones, [25] :

I. Réseaux à couches

Le réseau est composé de plusieurs couches. Les neurones de la même couche ne sont pas connectés entre eux (la connectivité n'est pas locale). Chaque neurone de chaque couche communique avec tous les neurones de la couche suivante. Chaque couche recevant de signaux de la couche précédente, et les soumis à des traitements et transmettant les résultats à la couche suivante.

Les réseaux à couches se divisent en :

1. Réseau monocouche

Ce type de réseaux se compose :

- a. D'une couche de cellules d'entrée ;
- b. D'une couche de cellules de sortie.

Il y a deux algorithmes, principalement, pour "faire apprendre" à un réseau de neurones monocouche. Le premier est la méthode simple et se nomme la **descente de gradient** et l'autre se nomme algorithme de **Widrow-Hoff** ; du nom des deux scientifiques qui ont élaboré cette technique.

Les deux méthodes consistent à comparer le résultat qui était attendu pour les exemples puis à minimiser l'erreur commise sur les exemples. Toutefois, il existe bien sûr une nuance entre les deux méthodes, qui va être expliquée plus loin.

2. Réseaux multicouches

Ils contiennent:

- a. Une couche d'entrée.
- b. Une ou plusieurs couches cachées.
- c. Une couche de sortie.

II. Réseaux entièrement connectés

Dans ce cas, une cellule est reliée à toutes les autres cellules du réseau, et possède un retour sur lui-même

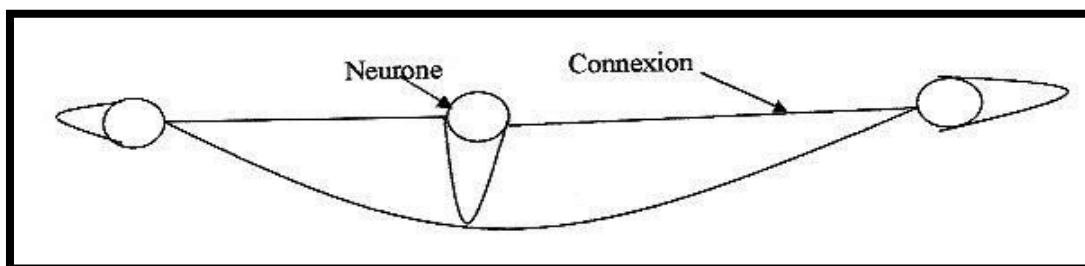


Figure 4.3 Réseau entièrement connecté

4.2.1.6 Avantages et inconvénients des réseaux de neurones

- a. Capacité de représenter n'importe quelle dépendance fonctionnelle. Le réseau découvre (apprend, modélise) la dépendance par lui-même, sans avoir besoin qu'on lui "souffle" quoique ce soit, pas besoin de postuler un modèle, de l'amender, etc.
- b. On passe directement des données au prédicteur, sans intermédiaire, sans simplification.
- c. Le réseau de neurone ne dispense pas de bien connaître son problème, de définir ses

classes avec pertinence, de ne pas oublier de variables importantes, etc.

4.2.2 Méthode du simplexe

Le simplexe est un algorithme d'optimisation de George Dantzig, c'est une technique à la fois fondamentale et très populaire pour les problèmes de programmation linéaire. Ainsi, étant donné un ensemble d'inégalités linéaires sur n variables réelles, l'algorithme permet de minimiser (ou maximiser) une fonction objectif, qui est elle aussi linéaire (l'algorithme fonctionne encore quand la fonction est croissante en chacune des n variables).

En termes géométriques, l'ensemble des inégalités linéaires définit un polytope dans l'espace à n dimensions (polygone en 2 dimensions et polyèdre en 3 dimensions) et il s'agit de trouver le sommet optimal pour la fonction de coût donnée.

En effet, la fonction que l'on cherche à minimiser étant linéaire sur le polytope, elle y est en particulier concave. Or une fonction concave et minorée sur un polytope admet un minimum en un des sommets du polytope. La recherche d'un point de minimum peut donc se restreindre aux sommets du polytope (qui peuvent être très nombreux néanmoins).

L'idée de l'algorithme consiste à partir d'un sommet quelconque du polytope et, à chaque itération, d'aller à un sommet adjacent s'il est possible d'en trouver un meilleur pour la fonction objectif. S'il n'y en a pas, l'algorithme s'arrête en concluant que le sommet courant est optimal. En général, il y a plusieurs sommets adjacents au sommet courant qui sont meilleurs pour l'objectif. Il faut en sélectionner un seul, la règle de sélection est appelée règle de pivotage. Il a été montré pour les principales règles de pivotage employées que l'algorithme du simplexe pouvait prendre un temps de calcul exponentiel. En particulier, on ne sait pas s'il existe une règle de pivotage qui assurerait que l'algorithme se termine après un nombre polynomial d'étapes.

Néanmoins, l'algorithme du simplexe est très efficace en pratique et il est implémenté dans tous les solveurs de programmes linéaires. Les autres algorithmes de résolution de programmes linéaires sont basés soit sur la méthode de l'ellipsoïde soit sur la méthode du point intérieur.

4.2.2.1 Mathématique du simplexe

Le **simplexe** est une entité mathématique, dont la définition mathématique est classique en géométrie Algébrique.

Dans un espace affiné à p dimensions, un simplexe est formé de $(p + 1)$ points M_0, M_1, \dots, M_p tels que $(\overline{M_0M_1}, \overline{M_0M_p})$ forme une base de l'espace vectoriel associé.

Un simplexe est formé par :

- Un segment de droite si $p = 1$;
- Un triangle non aplati si $p = 2$;
- Un tétraèdre de quatre points non coplanaires si $p = 3$.

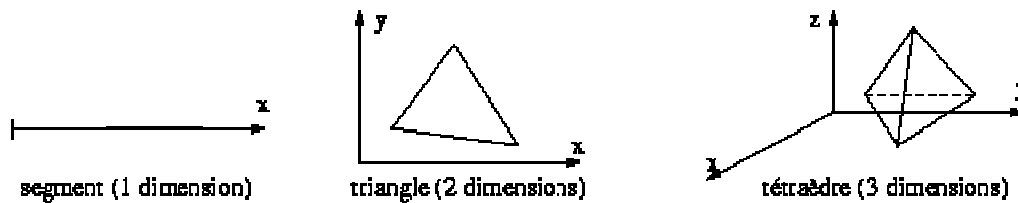


Figure 4.4 Représentations géométriques d'un simplexe

Méthode basique du simplexe

Le collectif W. Spendley, G. R. Hext et F. R. Himsforth a proposé, dans son article de 1962, d'explorer un domaine expérimental pas à pas, en définissant des simplexes successifs dans l'espace des paramètres de réglage, selon un mode d'évolution simple : à chaque étape, on cherche à remplacer le point le plus mauvais (W) par un nouveau, symétrique de W par rapport au centre des autres : on espère ainsi progresser vers l'optimum expérimental. À chaque étape, la forme géométrique du simplexe est toujours la même (aux symétries près). La progression se fait donc à pas constant. Cette méthode est appelée méthode basique du simplexe (basic simple method).

I. Méthode modifiée du simplexe

L'amélioration la plus déterminante de cette méthode est due à J. A. Nelder et R. Mead en 1965 : elle permet d'agrandir le pas lorsqu'on est loin de l'optimum et de le réduire quand on s'en rapproche. La valeur de pas est donc adaptée à chaque étape pour converger à la fois plus rapidement et plus finement vers l'optimum. La progression se fait donc à pas variable. Cette méthode est appelée méthode modifiée du simplexe (modified simplex method). Elle reste à ce jour la plus utilisée.

II. Méthodes super modifiées du simplexe

Les améliorations suivantes sont toutes orientées vers le même objectif : remplacer le pas hasardeux à l'opposé du point le plus mauvais (W) (pas constant dans la méthode basique, pas variable dans la méthode modifiée) par un pas plus intelligent (au sens propre, qui comprend la topographie de la surface de réponse), utilisant le plus possible

l'information contenue dans les valeurs du critère pour chacun des points du simplexe en cours :

La méthode du simplexe super modifiée (super modified simplex), proposée en 1977 par M. W. Routh, P. A. Swartz et M. B. Denton modélise la réponse expérimentale observée sur le simplexe en cours par une expression quadratique : dans le cas où le problème comporte une seule variable ($p + 1$), cela revient à modéliser la courbe de réponse par une parabole, dans le cas $p + 2$ la surface de réponse par une quadrique (en général, une surface dont les sections droites sont des paraboles). On cherche algébriquement les coordonnées de l'extremum de la fonction de modèle.

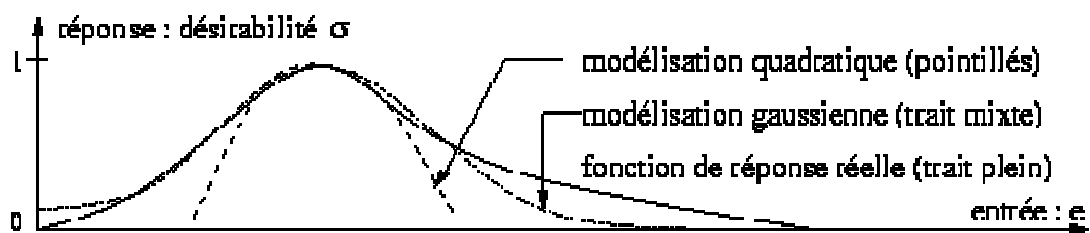


Figure 4.5 Approximations quadratique et gaussienne d'une courbe de désirabilité

Méthode centroïde pondérée

La même année, P. B. Ryan, R. L. Barr et H. D. Todd ont proposé la méthode centroïde pondérée (weighted centroid method) dans laquelle le nouveau point candidat est le symétrique de W non pas par rapport au centre géométrique (isobarycentre) des autres points, mais par rapport à leur barycentre pondéré par les valeurs du critère. Cette méthode permet une convergence plus rapide.

4.2.2.2 Procédure de test d'une méthode

Chacune de ces évolutions a donné lieu à de nombreux tests et à des améliorations ponctuelles formant des amendements plutôt que des méthodes nouvelles. Pour effectuer un test rapide d'une méthode, il est courant de travailler par simulation c'est-à-dire de se donner une fonction de réponse a priori. Un programme informatique joue alors le rôle d'une boîte noire et renvoie instantanément la valeur calculée de la réponse correspondant à un jeu de valeurs d'entrée.

4.2.2.3 Améliorations des méthodes

Nous pouvons identifier trois catégories d'améliorations de méthodes, le choix de la forme du simplexe initial, celui de son pas et les méthodes de limitation des déformations du simplexe.

I. Choix de la forme du simplexe initial

Deux formes fondamentales peuvent être données au simplexe initial :

- En coin (cornered) : le simplexe a des directions principales $\overline{M_0M_1}, \overline{M_0M_2}$, etc... parallèles aux axes (Figure 4.6 (a)) ;
- Ou tourné (tilted) : le simplexe a la forme d'un polyèdre régulier convexe (Figure 4.6(b)).

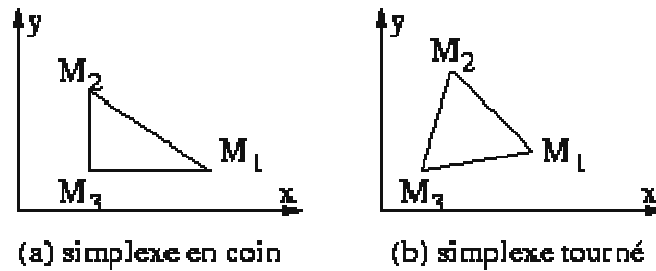


Figure 4.6 Simplexes initiaux en coin ou tourné

Le choix de la forme peut modifier la vitesse de convergence de la méthode : T. G. Öberg a montré en 1998 , sur un grand nombre de simulations, que la forme tournée conduit pratiquement toujours plus rapidement à l'optimum que la forme en coin.

II. Choix du pas du simplexe initial

Dans le cas d'une méthode basique, le choix du pas du simplexe initial permettra de converger plus vite vers l'optimum avec un pas important, mais plus précisément avec un pas plus faible (Figure 4.7).

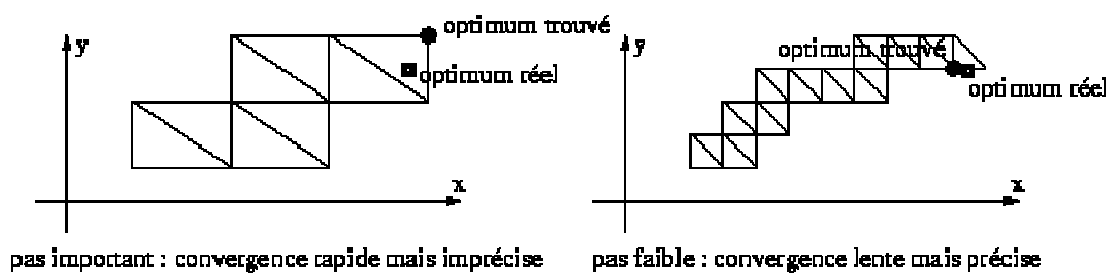


Figure 4.7 Différence de comportement selon le pas du simplexe basique

4.2.2.4 Application de la méthode du simplexe à la maximisation d'une fonction mathématique

Elle est basée sur la transformation du problème en forme standard ; où les seules contraintes que chaque variable est positive ou nulle, et des contraintes dans la forme d'équations. La transformation s'effectue en ajoutant une nouvelle variable "variable d'écart" pour chaque contrainte d'inéquation avec :

- La solution de base est représentée par m variables (variables de base) qui sont permises d'être non nulles ;
- Les variables de base (et la fonction objective) sont données par des combinaisons linéaires des variables hors base ;
- On choisit une variable qui va entrer dans la base (coefficient positif en z); c'est-à-dire qu'on a choisi une arête ;
- On choisit une variable qui va sortir de la base (qui minimise la distance parcourue avant de violer la contrainte ≥ 0) ;
- On recalcule tous les coefficients.

Pour ramener un problème linéaire à la forme canonique, on ramène les contraintes de types \geq (inégalité) à des contraintes de types \leq en multipliant par (-1) et en ajout un variable positive. Et en ajout le variable positive pour avoir une forme canonique d'égalité.

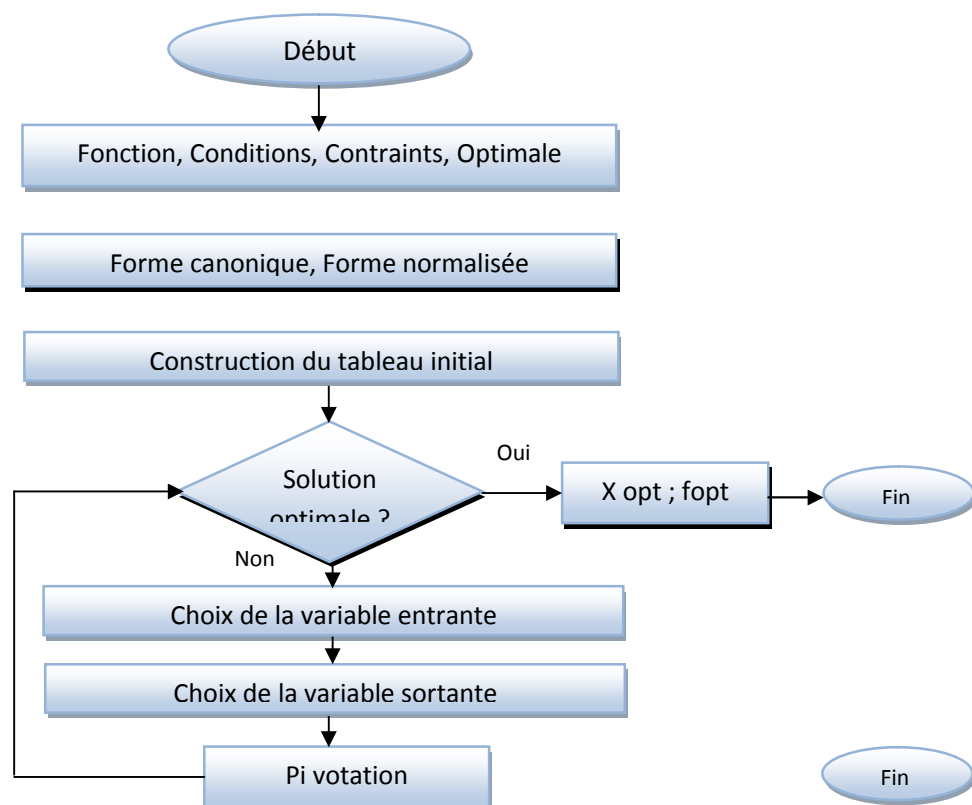


Figure 4.8 Organigramme de calcul pour la méthode du simplexe

- Concevoir le maximum d'une fonction mathématique définie par :

$$Z = 3X_1 + 5X_2$$

Sous contraintes :

$$\begin{cases} X_1 \leq 4 \\ 2X_2 \leq 12 \\ 3X_1 + 2X_2 \leq 18 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

- **Normalisation de la forme (égalité)**

$$\begin{cases} Z - 3X_1 - 5X_2 = 0 \dots\dots\dots(A) \\ X_1 + X_3 = 4 \dots\dots\dots(B) \\ 2X_2 + X_4 = 12 \dots\dots\dots(C) \\ 3X_1 + 2X_2 + X_5 = 18 \dots\dots\dots(D) \end{cases}$$

Avec :

$$X_i \geq 0 \text{ et } i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

X_3, X_4, X_5 Appelées variables d'écart ou bien variables de base ;

X_1 et X_2 Variables de hors base.

- **Choix des variables des entrants et sortants**

Dans lequel la plus grande valeur en val (abs) est (-5) ; Alors la plus grande variable est X_2 , qui considérée comme la première variable entrant.

- On pose X_1 et $X_5 = 0$ on obtient :

$$\begin{cases} 2X_2 + X_4 = 12 \dots\dots\dots(C) \\ 3X_1 + 2X_2 + X_5 = 18 \dots\dots\dots(D) \end{cases}$$

De 'D' $\Rightarrow X_2 = 9 \Rightarrow$ 'C' ; donc $X_4 = -6$ n'pas satisfisante car $X_4 \geq 0$;

De 'C' et pour $X_4 = 0$ alors $X_2 = 6$ c'est vérifié.

Donc $\max (X_2) = 6$; X_4 est le premier variable sortant ;

- **Premier changemant du système**

De 'C' ; $2X_2 + X_4 = 12$ on multiple cette équation par $1/2$.

On obtient $X_2 + 1/2X_4 = 6 \dots\dots\dots(1)$ d'où le système d'equations :

$$\begin{cases} Z - 3X_1 - 5X_2 = 0 \dots\dots\dots(A) \\ X_2 + 1/2X_4 = 6 \dots\dots\dots(1) \end{cases}$$

On multiplier (1) par 5 on obtient :

$$5X_2 + 5/2X_4 = 30 \dots\dots\dots(2) \text{ faisant la somme :}$$

$$(A) + (2) = Z - 3X_1 + 5/2X_4 = 30 \dots\dots\dots(3)$$

Et de :

$$\begin{cases} 3X_1 + 2X_2 + X_5 = 18 \dots\dots\dots(D) \\ X_2 + 1/2X_4 = 6 \dots\dots\dots(1) \end{cases}$$

On multiplier (1) par 2 on obtient :

$$2X_2 + X_4 = 12 \dots\dots\dots(4)$$

$$\text{Et } (D) - (4) = 3X_1 - X_4 + X_5 = 6 \dots\dots\dots(5)$$

Alors :

$$\begin{cases} Z - 3X_1 + 5/2X_4 = 30 \dots\dots\dots(3) \\ X_1 + X_3 = 4 \dots\dots\dots(B) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 + 1/2X_4 = 6 \dots\dots\dots(1) \\ 3X_1 - X_4 + X_5 = 6 \dots\dots\dots(5) \end{cases}$$

➤ Deuxième changement de système

La variable entrant X_1 :

$$\begin{cases} X_1 + X_3 = 4 \text{ pour } X_3 = 0 \text{ donc } X_{1\max} = 4 \\ 3X_1 - X_4 + X_5 = 6 \text{ pour } (X_4 \text{ et } X_5) \text{ donc } X_{1\max} = 2 \end{cases}$$

On prend la valeur min ($X_{1\max} = 2$) alors la deuxième variable sortant est X_5 .

On multiple (5) par (1/3)

On obtient :

$$X_1 - 1/3X_4 + 1/3X_5 = 2 \dots\dots\dots(6)$$

$$\begin{cases} X_1 + X_3 = 4 \dots\dots\dots(B) \\ X_1 - 1/3X_4 + 1/3X_5 = 2 \dots\dots\dots(6) \end{cases}$$

$$(B) - (6) = X_3 + 1/3X_4 - 1/3X_5 = 2 \dots\dots\dots(7). \text{ On multiple (6) par (3)}$$

On obtient :

$$3X_1 - X_4 + X_5 = 6 \dots\dots\dots(8)$$

$$(8) + (3) = Z + 3/2X_4 + X_5 = 36 \dots\dots\dots(9)$$

Alors le nouveau système est :

$$\begin{cases} X_3 + 1/3X_4 - 1/3X_5 = 2 \dots\dots\dots(7) \\ Z + 3/2X_4 + X_5 = 36 \dots\dots\dots(9) \\ X_1 - 1/3X_4 + 1/3X_5 = 2 \dots\dots\dots(6) \end{cases}$$

Enfin on trouve les résultats suivants :

Les variables sortants est

$$\text{Max}(X_1) = 2 ;$$

$$\text{Max}(X_2) = 6 ;$$

$$\text{Max}(Z) = 36.$$

X_3, X_4 et X_5 Applées base initial ;

X_1, X_2 Applées hors base.

4.3 Rendement des moteurs à induction

Pour les systèmes de puissance électrique le rendement est d'une très grande importance, car cela à un impact direct sur le fonctionnement de la machine et une incidence sur l'aspect économique de la consommation énergétique. Pour déterminer le rendement des moteurs électriques, il existe plusieurs méthodes, parmi ces méthodes on trouve: méthode de la plaque signalétique, méthode de glissement, méthode de courant, méthode statistique, méthode du circuit équivalent, méthode des pertes isolées ou séparées, méthode de couple d'entrefer. Et on peut les mesurer directement ou indirectement. Toutes ces méthodes déterminent le rendement (η) selon la définition donnée par l'équation (4.1).

(4.1)

En principe trois types de mesures peuvent être employés pour déterminer le rendement, comme indiqué dans la littérature, [17, 18], par la :

- a) Mesure directe de la puissance électrique d'entrée et mécanique de sortie ;
- b) Mesure directe de la somme des pertes et de la puissance d'entrée ;
- c) Mesure des différentes composantes des pertes et de la puissance d'entrée.

4.3.1 Différentes pertes dans la machine

Les différentes composantes des pertes se produisant dans un moteur sont définies, [19, 20], comme suit :

1) Pertes par effet Joule ou pertes le cuivre dans les enroulements statoriques et rotoriques

Ce sont les pertes par effet Joule dans les parties conductrices d'une machine traversée par des courants c'est à dire dans les enroulements induits et inducteurs.

2) Pertes fer

Les pertes dans le fer représentent l'énergie électrique requise pour aimanter le noyau (phénomène de l'Hystérésis magnétique) ainsi que les pertes résultant de la création de faibles courants électriques traversant le noyau (courants induits dans les parties métalliques placées dans des champs variables), [12, 13].

3) Pertes mécaniques

Ces pertes proviennent des frottements mécaniques dans les paliers et de la ventilation d'air pour le refroidissement de la machine. Des paliers améliorés et une meilleure circulation d'air permettent de réduire peu ces pertes. Une solution plus efficace consiste à utiliser un ventilateur plus petit, ce qui est possible puisque la diminution des autres pertes réduit le besoin de ventilation. Dans les petits moteurs à induction les pertes mécaniques sont habituellement environ 10% de toutes les pertes électriques.

4) Pertes additionnelles de charge

Sont les pertes non couvertes par les autres composantes des pertes, autrefois, elles sont désignées sous le nom de pertes parasites de charge ou des pertes supplémentaires. Actuellement elles sont le sujet de plusieurs travaux de recherches, [14].

4.3.2 Différentes méthodes de mesures du rendement

Pour l'évaluation du rendement, diverses méthodes sont proposées :

- a) Méthode de la plaque signalétique ;
- b) Méthode directe ;
- c) Méthode statistique ;
- d) Méthode du circuit équivalent ;
- e) Méthode des pertes séparées, [21].

Les méthodes de mesures sont décrites dans les normes IEEE 112/1991, IEC 60034-2/1972, CSA C-390/1993 et ABNT NBR 5383/1982. De ces quatre normes mentionnées ci-dessus, cinq groupes de méthodes pour déterminer le rendement de moteur peuvent être obtenus, [18, 22].

a) Méthode 1

Dans laquelle la puissance d'entrée et de sortie est directement mesurée, selon les normes d'IEEE, IEC 60034-2 et de ABNT NBR. La mesure de puissance d'entrée et de sortie, effectuée après l'élévation de la température pour le fonctionnement en charge. La

norme d'IEEE demande une correction des pertes du stator à une température indiquée avant de déterminer le rendement du moteur.

b) Méthode 2

Dans laquelle les puissances d'entrée et de sortie sont mesurées avec la séparation des pertes et la mesure indirecte des pertes parasites de charge, selon les normes d'IEEE et de CSA C-390. Les pertes parasites de charge sont définies comme toutes les pertes sans la somme des pertes conventionnelles (pertes électriques, pertes magnétiques et pertes mécaniques). Les pertes parasites de charge sont obtenues à partir des analyses d'une régression linéaire pour réduire l'effet des erreurs aléatoires dans les mesures d'essai. La méthode 2 peut fournir des résultats différents de la méthode 1, principalement en raison des ajustements des pertes parasites de charge dans lesquels toutes les erreurs de mesure d'essai sont incluses.

c) Méthode 3

Méthode dont les conditions d'essais, sont comme vu dans les normes d'IEEE, IEC 60034-2 et de ABNT NBR. Quand deux machines identiques sont couplées ensemble et alimentées à partir de deux sources d'énergie séparées. Le courant électrique dans et hors des deux machines est mesuré et la différence sont les pertes combinées des deux machines.

d) Méthode 4

Méthode avec la mesure directe des pertes parasites de charge et de la séparation des pertes, selon des normes d'IEEE, IEC 60034-2, CSA C-390 et ABNT NBR. Dans cette méthode, le rendement est indirectement calculé par la détermination de toutes les pertes (pertes électriques, pertes magnétiques et pertes mécaniques et les pertes parasites de charge). Aux normes d'IEEE et de CSA C-390 les pertes parasites de charge sont obtenues directement à partir des essais spécifiques.

e) Méthode 5

Méthode dans laquelle les paramètres du circuit équivalent sont déterminés, selon des normes d'IEEE, CSA C-390 et ABNT NBR. Le rendement des moteurs est calculé à partir des paramètres du circuit équivalent. Dans cette méthode, il est très important de prendre l'impédance du rotor aux basses fréquences. La précision de l'impédance du rotor affectera considérablement les caractéristiques sous la charge. En calculant les paramètres, les réactances sont corrigées à la fréquence et les résistances sont corrigées à une température indiquée, [19, 20, 22].

4.3.3 Normes et détermination du rendement

La comparaison du rendement des moteurs est compliquée par le fait qu'il existe plusieurs façons de mesurer le rendement. Le même moteur évalué selon différentes normes de rendement sera classé de façon différente. Les principales normes sont :

- i. CSA C390-M1985 Canadienne ;
- ii. IEEE-112B Américaine ;
- iii. IEC-34,2 Européenne ;
- iv. JEC-37 Japonaise.

Ces normes se distinguent avant tout par leur traitement des pertes supplémentaires dues à la charge. Les pertes supplémentaires dues à la charge sont les pertes autres que les pertes par ventilation et par frottement, les pertes par effet Joule statoriques et rotoriques et les pertes dans le fer. À pleine charge, les pertes supplémentaires dues à la charge peuvent varier entre 0,9 et 5 % de la puissance fournie selon le type du moteur et sa puissance nominale, [15, 16].

i. Norme de la CSA

L'association canadienne de normalisation (CSA) a mis au point une norme qui tient compte des pertes supplémentaires dues à la charge mesurées indirectement; la méthode utilisée pour les mesurer s'inspire de celle de l'IEEE. La norme de la CSA est cependant plus rigoureuse que celle de l'IEEE car elle laisse peu de place aux erreurs d'interprétation possibles lors des essais du rendement.

ii. Norme de l'IEEE

La norme de l'IEEE calcule les pertes supplémentaires dues à la charge d'une façon indirecte. Elle vient au deuxième rang pour ce qui est de la prudence des résultats.

iii. Norme de la IEC

La norme de la IEC n'est pas aussi précise que les normes de la CSA et de l'IEEE qui calculent les pertes supplémentaires dues à la charge de façon précise. Elle fixe les pertes supplémentaires dues à la charge à 0,5 % de la puissance absorbée en plus d'accorder une tolérance au rendement.

iv. Norme de la JEC

La norme de la JEC fixe à zéro les pertes supplémentaires dues à la charge et accorde une tolérance de 0,7 % au rendement déclaré. Cette méthode donne lieu à une surévaluation du rendement du moteur lorsque les pertes supplémentaires dues à la charge sont supérieures à zéro.

A cet instant, une nouvelle norme du IEC (IEC 61972), est en cours de développement et d'autres normes sont également utilisées à savoir :

1. 1359 (2000) Australienne;
2. ABNT NBR 5383/1982 Brésilienne.

En fait, Electro-Industries est leader en électrotechnique au niveau national." Aujourd'hui, l'entreprise produit son propre label après une production sous licence Siemens. Depuis le mois de mai 2004, cette EPE possède une certification ISO 9001 version 2000. Depuis sa transformation en SPA, l'entreprise a adopté une démarche qui lui assure son équilibre actuel : produits de qualité et une politique rigide de l'emploi. Cela lui permet de faire front à plusieurs défis : des approvisionnements, [16, 3].

Les produits Electro-Industries sont réalisés et contrôlés suivant les normes DIN VDE et sont conformes aux recommandations européennes IEC.

La bonne qualité des produits Moteurs, Alternateurs et Transformateurs; est en premier lieu tributaire d'une bonne qualité des matières d'achats destinées à leur confection, [16].

4.3.4 Comparaison entre différentes normes

Il est difficile de comparer deux moteurs lorsque leur rendement a été mesuré selon des normes différentes. Et même lorsque les normes sont les mêmes, il peut être difficile de comparer le rendement de deux compagnies différentes parce qu'elles peuvent bien avoir utilisé des instruments de mesure différents. Il s'ensuit donc que les rendements de moteurs déterminés selon les diverses normes ne sont pas comparables. Les différences peuvent atteindre 5 points de pourcentage ou davantage.

On considère, de façon générale, que la norme CSA C390 (IEEE 112 méthode B) constitue la méthode la plus précise. Une harmonisation future des diverses normes est probable, mais sa mise en application va demander du temps, [21].

4.3.5 Facteurs Influent sur le rendement des moteurs électriques

Il y a un nombre de facteurs relatifs au fonctionnement et à l'entretien du moteur qui ont un grand effet sur son rendement. Dans le but de maintenir et d'améliorer le rendement de fonctionnement du moteur, plusieurs facteurs peuvent être utilisés: le rendement et les techniques de commande du moteur, la qualité du système d'alimentation, le réseau de distribution, la taille des moteurs électriques, les moyens mécaniques de transmission, les problèmes d'entretien, cycles de gestion de charge...etc, [24].

i. Qualité d'alimentation en énergie

Les moteurs électriques et en particulier moteurs à induction, sont conçus pour fonctionner dans des conditions optimales, une fois alimentés par des formes d'ondes sinusoïdales triphasées symétriques avec la valeur de tension nominale. Les déviations de ces conditions idéales peuvent causer la détérioration significative du rendement et une réduction de la vie de moteur ; exemple des alimentations à travers des convertisseurs ou les formes d'ondes sont riches en harmoniques.

ii. Charge du moteur

La charge du moteur peut avoir aussi un effet significatif sur son rendement. Un moteur chargé à plus de 50% a un rendement relativement stable. A charge plus faible, le rendement diminue considérablement. Les faibles rendements sont dus aux charges inadaptées (les sur charges) ou à un fonctionnement à vide des moteurs ; de telles conditions doivent être évitées.

iii. Maintenance du moteur

Les moteurs fonctionnent plus efficacement, durent plus longtemps et nécessitent moins d'attention s'ils sont nettoyés, refroidis, séchés et lubrifiés correctement. Les moteurs installés dans un environnement sévère et exposés à une grande humidité et à un lavage fréquent ont une durée de vie largement au dessous de la moyenne. Des corps étrangers ne doivent pas bloquer les branchements corrects font prolonger la durée de vie du moteur et maintiennent un rendement optimal, [14].

iv. Plage d'utilisation des moteurs

D'une manière générale le rendement (η) des moteurs électriques prend une valeur maximal pour : $0.6 I_n \leq I_1 \leq 1.0 I_n$, car dans cette plage on considère, que le rapport des pertes à la puissance consommée est minimal. En dehors de cette plage, les pertes devenant beaucoup plus prépondérantes, entraînent la croissance de ce rapport donc une réduction du rendement (η).

4.3.6 Amélioration du rendement d'une machine asynchrone

Suivant l'augmentation continue du coût de l'énergie et de la pression causée par le souci de la protection de l'environnement, les fabricants des machines électriques ainsi que les consommateurs s'intéressent à la réduction de la consommation d'énergie des systèmes électriques. Ce qui a conduit au lancement d'importants travaux à travers le monde, particulièrement pour l'amélioration du rendement des machines. Cela est dû principalement à la place qu'elles occupent, [16].

Puisque la plupart des moteurs électriques utilisés dans l'industrie sont surdimensionnés, et un bon nombre d'entre eux sont soumis à une charge variable dans le temps. Cela signifie, dans la pratique courante qu'ils fonctionnent généralement loin de leur capacité nominale, donc loin de leur rendement optimal et que leur consommation d'électricité est excessive par rapport aux besoins réels. Pour la réduire, trois solutions sont proposées à savoir :

- a) Adapter la vitesse au besoin (lorsque le moteur a déjà été construit);
- b) Optimiser le rendement (optimisation de la conception);
- c) Réaliser des opérations de maintenance.

➤ Méthode proposée

I. Organigramme de la méthode d'optimisation proposée

Pour optimiser le rendement des machines à induction, un processus de conception associé à **la méthode du simplexe** a été mis au point dans ce travail selon la **Figure. 4.9**.

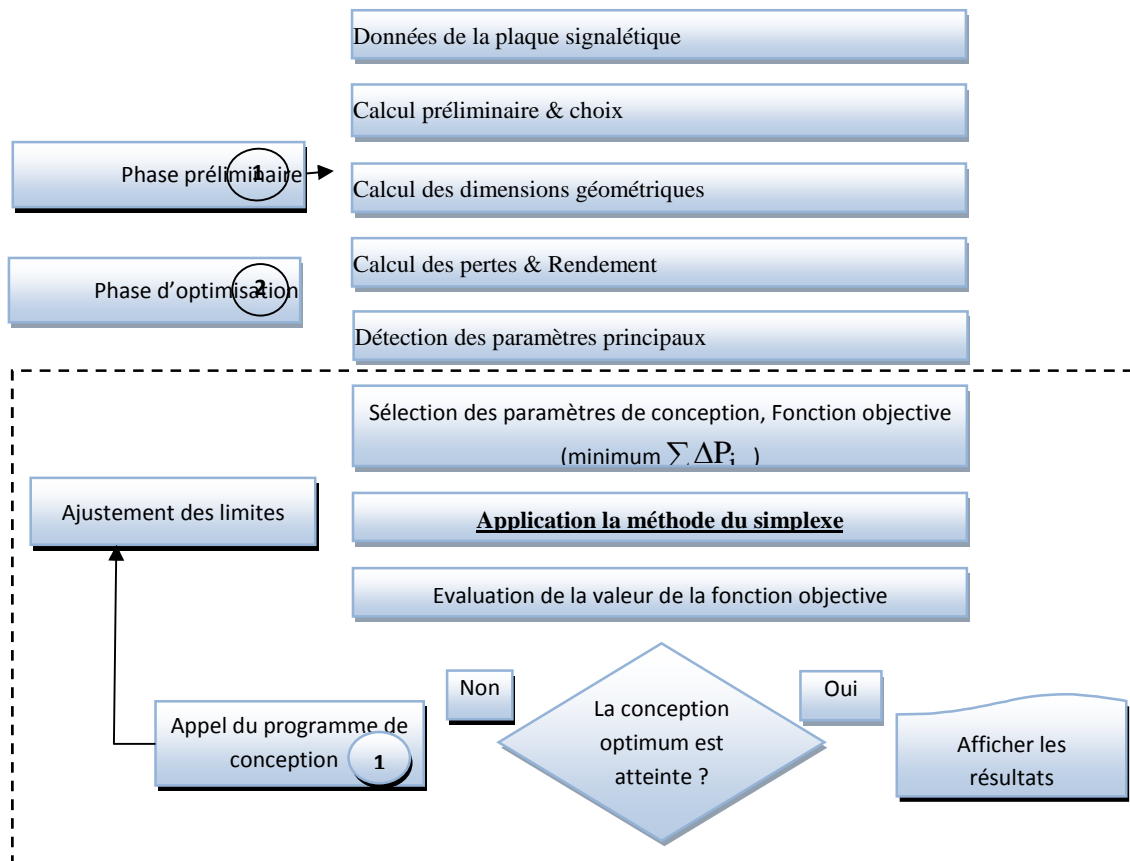


Figure 4.9 Organigramme de la méthode d'optimisation proposée

Tout d'abord, on définit la fonction fitness (ou fonction objective) qui est la fonction que nous voulons optimiser, cette dernière sera la somme des pertes, où le but essentiel est de trouver le minimum de ces pertes, [11].

Pour réaliser ce travail, on a besoins de deux programmes sous l'environnement MATLAB: le premier contient la fonction de **la méthode du simplexe** principale. Le deuxième contient la fonction fitness, c'est un programme de dimensionnement, basé sur un ensemble d'équations analytiques décrivant le fonctionnement du moteur, est construit. Ces équations sont décrites en deuxième chapitre. Elles sont rapides à résoudre et prennent en compte des phénomènes physiques de nature différente, i.e. thermique, mécanique, magnétique, électrique.

Cette procédure est appliquée sur une machine asynchrone type DIN-IEC-F, dont les indications de la plaque signalétique sont données au **Tableau 4.1**.

Tableau 4.1 Indications de la plaque signalétique de la machine étudiée

P_u	Puissance utile	1.1	kW
V_s	Tension nominale	220	V
P	Nombre de paires de pôles	2	---
m_l	Nombre de phases statoriques	3	---
f_s	Fréquence	50	Hz
$\cos\phi$	Facteur de puissance	0.81	---
η	Rendement	0.74	---
n_r	Vitesse	1400	trs/min

Les résultants de quelques paramètres obtenus après l'exécution du programme de conception utilisant trois types de matériaux ; **M1** (3.6 W/kg), **M2** (Siemens Martin) et **M3** (2.3 W/kg) sont reportés dans le **Tableau 4.2**.

Tableau 4.2 Résultats du programme de la conception

Abrev.	Paramètres	Unités	M1	M2	M3
D	Diamètre interne statorique	mm	116	116	116
Mt	Poids de la machine	kg	13.44	12.41	12.80
M	Inductance mutuelle	H	0.879	0.796	0.867
R_r'	Résistance rotorique ramenée au stator	Ω	7.914	7.914	7.914
$l_{\sigma r}'$	Inductance de fuite rotorique ramenée au stator	H	0.045	0.045	0.045
h_{t1}	Hauteur de la dent statorique	mm	12.63	12.63	12.63
B_{hj1}	Induction dans la culasse statorique	T	1.300	1.300	1.300
B_{t1}	Induction dans la dent statorique	T	1.46	1.540	1.400
B_{δ}	Induction dans l'entrefer	T	0.63	0.63	0.63
R_s	Résistance statorique	Ω	9.266	9.266	9.266
I_o	Courant à vide	A	0.768	0.842	0.776
h_{j1}	Epaisseur de la culasse statorique	mm	15.3	15.3	15.3
δ	Epaisseur d'entrefer	mm	0.3	0.3	0.3
B_{hj2}	Induction dans la culasse rotorique	T	1.1	1.053	1.257
B_{t2}	Induction dans la dent rotorique	T	1.5	1.455	1.425
η	Rendement nominal	-----	0.748	0.753	0.750
T_{star} / T_n	Couple de démarrage / Couple nominal	-----	1.696	1.741	1.949

II. Application de la méthode du simplexe à l'optimisation de la conception d'une machine asynchrone

Plusieurs facteurs peuvent influencer sur le rendement des moteurs électriques à savoir :

A) Utilisant l'interpolation linéaire (IL)

A cet effet, on propose de faire exécuter le programme de conception et optimisation pour la machine étudiée, pour des différents paramètres. Les résultats obtenus sont regroupés dans les tableaux suivants :

a.1 Effet du diamètre d'alésage D

Tableau 4.3.1 Résultats d'optimisation

Abrev.	Paramètres	Unités	Solution		
			M1	M2	M3
D	Diamètre d'alésage	mm	116.1	116.1	116.1
η_{Opt}	Rendement optimisé	-----	0.7687	0.7687	0.768

a.2 Effet du rapport géométrique (λ)

Tableau 4.3.2 Résultats d'optimisation

Abrev.	Paramètres	Unités	Solution		
			M1	M2	M3
λ	Rapport géométrique	-----	1.643	1.643	1.643
η_{Opt}	Rendement optimisé	-----	0.776	0.776	0.776

a.3 Effet de l'épaisseur de l'entrefer (δ)

Tableau 4.3.3 Résultats d'optimisation

Abrev.	Paramètres	Unités	Solution		
			M1	M2	M3
δ	Epaisseur de l'entrefer	mm	0.212	0.212	0.212
η_{Opt}	Rendement optimisé	-----	0.750	0.750	0.750

B) Utilisant l'interpolation par réseaux de neurones (RN)

De même si en utilisant l'interpolation par réseaux de neurones, on obtient les résultats suivants :

b.1 Effet du diamètre d'alésage D

Tableau 4.3.4 Résultats d'optimisation

Abrev.	Paramètres	Unités	Solution		
			M1	M2	M3
D	Diamètre d'alésage	mm	116.1	116.1	116.1
η_{Opt}	Rendement optimisé	-----	0.7687	0.7687	0.7687

b.2 Effet du rapport géométrique (λ)

Tableau 4.3.5 Résultats d'optimisation

Abrev.	Paramètres	Unités	Solution		
			M1	M2	M3
λ	Rapport géométrique	-----	1.643	1.643	1.643
η_{Opt}	Rendement optimisé	-----	0.776	0.776	0.776

b.3 Effet de l'épaisseur de l'entrefer (δ)

Tableau 4.3.6 Résultats d'optimisation

Abrev.	Paramètres	Unités	Solution		
			M1	M2	M3
δ	Epaisseur de l'entrefer	mm	0.212	0.212	0.212
η_{Opt}	Rendement optimisé	-----	0.750	0.750	0.750

L'optimisation par la méthode du simplexe devient très intéressante si on augmente le nombre de variables et considère le problème à optimiser avec contrainte. A cet effet, pour appliquer la méthode du simplexe, il est nécessaire de définir un point de départ.

III . Point de départ pour les variables de conception

Les résultats du **Tableau 4.2**, permettent de définir les points de départ pour chaque paramètre en vue d'optimiser la conception de la machine qui sont données dans le **Tableau 4.4**. La contrainte technique imposée est le poids total (Mt) qui ne doit pas excéder 15 Kg.

Tableau 4.4 Paramètres de la conception et leurs points de départ

Abrev.	Paramètres	Unités	Point de départ
D	Diamètre d'alésage	mm	100
λ	Rapport géométrique	-----	0.75
δ	Epaisseur de l'entrefer	mm	0.4
Mt	Poids de la machine	kG	20

V. Résultats d'optimisation

a) Utilisant l'interpolation linéaire (IL)

Tableau 4.5 Résultats d'optimisation

Abrev.	Paramètres	Unités	Solution		
			M1	M2	M3
D	Diamètre d'alésage	mm	119.1	119.1	119.1
λ	Rapport géométrique	-----	1.6822	1.6822	1.6822
δ	Epaisseur de l'entrefer	mm	0.2	0.2	0.2
Mt	Poids de la machine	kG	8.7070	8.7070	8.7070
η_{Opt}	Rendement optimisé	-----	0.777	0.777	0.777

Tableau 4.6 Comparaison des résultats

Machines	Matériau	Poids de la machine (kG)			Rendement (%)		
		Avant l'optimisation	Après l'optimisation	Ecart	Avant l'optimisation	Après l'optimisation	Amélioration
M1	3.6 W/kG	13.44	8.7070	-4.733	74.8	77.7	+ 2.9
M2	Siemens Martin	12.41	8.7070	-3.703	75.3	77.7	+ 2.4
M3	2.3 W/ kG	12.80	8.7070	-4.093	75.0	77.7	+ 2.7

- **Discussion**

Selon les résultats trouvés, la première conception est sélectionnée. Cependant, si le poids de la machine est utilisé comme critère de choix, le second cas est le mieux placé. Tandis que, le troisième cas est choisi, puisqu'il ouvre une solution qui est un compromis entre le rendement et le poids de la machine.

b) Utilisant l'interpolation par réseaux de neurones (RN)

Tableau 4.7 Résultats d'optimisation

Abrev.	Paramètres	Unités	Solution		
			M1	M2	M3
D	Diamètre d'alésage	mm	119.1	119.1	119.1
λ	Rapport géométrique	-----	1.6822	1.6822	1.6822
δ	Epaisseur de l'entrefer	mm	0.2	0.2	0.2
Mt	Poids de la machine	kg	8.1634	8.1634	8.1634
η_{Opt}	Rendement optimisé	-----	0.7769	0.7769	0.7769

Tableau 4.8 Comparaison des résultats

Machines	Poids de la machine (kG)			Rendement (%)		
	Avant l'optimisation	Après l'optimisation	Ecart	Avant l'optimisation	Après l'optimisation	Amélioration
M1	13.44	8.1634	-5.2766	74.8	77.69	+ 2.89
M2	12.41	8.1634	-4.2466	75.3	77.69	+ 2.39
M3	12.80	8.1634	-4.6366	75.0	77.69	+ 2.69

▪ Discussion

D'après les résultats d'optimisation, le rendement de la machine M1 a été sensiblement amélioré, passant de l'état non optimisé de (74.8 %) à l'état optimisé par la méthode du simplexe (77.69 %), sachant que le poids de la machine a été diminué de (-5.2766). En ce qui concerne la machine M2 on remarque que le rendement est a (77.69 %) accompagne d'une modification au niveau du poids (-4.24). Alors la troisième peut être sélectionne comme la meilleure solution de compromis entre le poids de la machine et son rendement.

V. Etude statistique

Pour illustrer, l'épargne d'énergie on utilise les moteurs à induction à haut rendement avec une meilleure qualité d'alimentation en énergie électrique, deux types de moteurs sont analysés dans cette partie de notre travail, le premier classique, et le deuxième est à haut rendement. Sur la base que le prix de l'énergie est de 4 DA/kWh. La période annuelle moyenne d'utilisation est de 6000 h, à 80% de la charge, ce qui est dans la gamme du rendement maximum.

Tableau 4.9 Energie et économie d'énergie

Tableau 4.9-a (IL) P=2	Moteur (1) (1.1 kW) 75.3 % E.E.I Azazga	Moteur (2) (1.1 kW) 77.7% H.E.M	Conservation d'énergie: (1) - (2)
Energie (kWh)	8764.94	8494.20	270.64
Prix (DA*10³)	35.0598	33.9768	1.083


Tableau 4.9-b (RN) P=2	Moteur (1) (1.1 kW) 75.3 % E.E.I Azazga	Moteur (2) (1.1 kW) 77.69% H.E.M	Conservation d'énergie: (1) - (2)
Energie (kWh)	8764.94	8495.3	269.64
Prix (DA*10³)	35.0598	33.9812	1.0786

Les **Tableau 4.9-a, 4.9-b**, montrent clairement les économies annuelles relatives d'énergie, pour le moteur à induction à haut rendement choisi d'une machine asynchrone type DIN-IEC-F (1,1 kW).

Avec un prix d'achat typique environ 40-50 EUR/kW ce qui est équivalent à $4.4 - 5.5 \cdot 10^3$ DA/kW en Algérie, le moteur de 1.1 kW classique (MI-Cl) vaut entre $4.8 - 6.05 \cdot 10^3$ DA. Sachant que les moteurs à inductions à haut rendement (MI-HR) sont environ 30% plus chers que les moteurs classiques (MI-Cl) ; $6.2 - 7.86 \cdot 10^3$ DA. Donc le moteur optimisé par la méthode du simplexe peut être amorti en quatre ans.

Conclusion

Le but principal de ce chapitre, est d'optimiser la conception d'une machine asynchrone en utilisant la méthode du simplexe. Les paramètres d'optimisation sont : diamètre d'alésage, épaisseur de l'entrefer, le rapport géométrique, afin de minimiser le poids de la machine et maximiser son rendement. Cela a été appliqué avec succès sur une machine type DIN-IEC-F (AZAZGA) de 1.1 kW. Les résultats de cette optimisation ont démontré clairement que le rendement de la machine a été amélioré considérablement par cette procédure d'optimisation, d'où l'intérêt de ce travail dans le domaine de la conservation d'énergie.



Conclusion générale

Conclusion Générale

Dans ce mémoire, on a voulu mettre en évidence l'intérêt d'utiliser de nouvelles techniques de CAO optimisée des machines électriques de façon générale permettant d'améliorer les performances de celles-ci. Pour s'en convaincre, essayons d'imaginer la conséquence en économie d'énergie si on arrive à améliorer le rendement de toutes les machines électriques de façon générale de 1%. Par ailleurs, bien que les stratégies de la CAO optimisée aient assuré, pour un problème donné, de trouver les meilleures solutions du point de vue mathématique, le concepteur est toujours sollicité pour faire la synthèse des calculs et interpréter les résultats obtenus.

La conception optimale des machines électriques se situe dans la parfaite adéquation entre quatre éléments :

- a) Modèles capables d'apporter des informations ou critères sur les machines électriques ;*
- b) Algorithmes d'optimisation pouvant maximiser ou minimiser ces critères ;*
- c) Formulations mathématiques dans lesquels peuvent se traduire les problèmes de conception de machine électrique ;*
- d) Démarches de résolution des problèmes de conception.*

En deuxième chapitre, les différentes formulations dans lesquelles peuvent être traduit le problème de conception ont été présentées. Suivant cette démarche un programme de conception d'une machine asynchrone de 2.2kW été développé. En suite les résultats trouvés sont analysés.

Par ailleurs, on peut regrouper les méthodes d'optimisation dans plusieurs catégories suivant leurs mécanismes de recherche et les problèmes qu'ils sont capables de résoudre :

- a) Méthodes déterministes locales ;*
- b) Méthodes déterministes globales ou exhaustives ;*
- c) Méthodes stochastiques mono-objectifs ;*
- d) Méthodes stochastiques multi-objectifs.*

En outre, ce mémoire est le premier entièrement consacré à l'optimisation par la méthode du simplexe.

Dans le dernier chapitre, une application sur la CAO optimisée d'une machine asynchrone de 1.1kW est faite. Donc le problème de conception est transformé en un problème d'optimisation, dont l'objectif est d'obtenir un moteur avec le meilleur rendement η tout en répondant à une contrainte technique ;

Les perspectives de ce travail sont multiples, on peut les situer sur deux niveaux :

- a) Les connaissances de base de conception des machines peuvent en plus mise en oeuvre pour obtenir de nouvelles applications (algorithmes hybrides), pour les utiliser comme la base d'une approche heuristique très riche des problèmes.*
- b) Malgré ces résultats encourageants, beaucoup de travail reste à faire pour améliorer les performances de telles approches. Le principal objectif consiste à obtenir une convergence plus rapide vers des solutions de qualité.*

Malheureusement, plusieurs voies de recherches sont ouvertes dans cette direction. Gardons bien l'esprit que, comme pour toute simulation, la validation par l'expérience reste indispensable.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



Bibliographie

Bibliographie

- [1] **J. Chatelain**, “Machines Electriques”, Volume X du Traité d'Electricité, d'Electronique et d'Electrotechnique, Presse Polytechnique Romande, Éd. Georgi, 1983“, (réédité par Dunod, 1993).
- [2] **J. P. Caron et J.P. Hautier**, “Modélisation et Commande de la Machine Asynchrone”, Editions Technique, Paris, 1995.
- [3] **L. BOULLAG et M. MERADI**, “La Commande Vectorielle Indirecte & Directe d'une Machine Asynchrone Alimentée en Tension “, Mémoire d'Ingénieur, Option : Réseaux Electriques, (Univ. Batna), 2001.
- [4] **C. Canudas**, “Commande des Moteurs Asynchrones : Modélisation Contrôle Vectoriel et DTC”, Vol. 1, Hermès Science publications, Paris, 2000.
- [5] **G. GRELLET et G. CLERC**, “Actionneurs Electrique, Principes Modèles Commande “, Editions eyrolles, 2000.
- [6] **A. Patrick**, “ Démarrage et Freinage des Moteurs Asynchrones Triphasés “, Editions Académie D'Aix-Marseille, Génie Électrique Électrotechnique, 2002.
- [7] **A. Fouillé**, “Électrotechnique à l'usage des Ingénieurs”, T2, Machines Electriques, Dunod, 1969.
- [8] **R. Abdessemed et M. kadjoudj**, "Modalisation des Machines Electriques", Presse de l'Université de Batna, 1997.
- [9] **N. Khenfer**, " Machine Asynchrone ses modèles, son Identification et sa Commande", Thèse de Doctorat d'Etat, Encadré par A. Rezzoug, Polytechnique d'Alger, 1993.
- [10] **M. Liwschitz**, " Calcul des Machines Electriques", Tome 1, Tome 2, Edition Dunod, Paris, France, 1967.
- [11] **S. Brisset**, “Démarches et Outils pour la Conception Optimale des Machines Electriques”, Rapport de Synthèse, Habilitation à Diriger des Recherches, Université des Sciences et Technologies de Lille, Décembre, 2007.

- [12] **T. Lecomte**, “ Conception Assistée par Ordinateur (CAO) ”, Technique D’Ingénieur, D3595, juin, 1994.
- [13] **Joseph-Louis Lagrange**. “ Manière plus Simple et plus Générale de Faire Usage de la Formule de l’Equilibre donnée dans la Section Deuxième “, Mécanique Analytique, Tome Premier, Pages 77-112.
- [14] **D. Hoareau**, “ Cauchy-Schwarz par le Calcul Différentiel “, Méga Maths sur ifrance, 2003.
- [15] **H. Brezis**, “Analyse Fonctionnelle : Théorie et applications “, Théorème, VIII.2, p 122.
- [16] **A. Benoudjit, B. Abdelhadi, N. S. Nait Said, S. Idir**, “High Efficiency Induction Motors- Impact on Energy Saving Potential in Algeria”, Conference on Electrical Engineering, CEE02, University of Batna, Algeria, pp. 01-06, 10-11 December, 2002.
- [17] **A. Boglietti, M. Lazzari**, “A Simplified Method for The Iron Losses Prediction in Soft Magnetic Materials With Arbitrary Voltage Supply ”, 4th International Symposium on Advanced Electromechanical Motion System, Bologna, Italy, 19-20 June, 2001.
- [18] **A. Boglietti, A. Cavagnino, M. Lazzari, and M. Pastorelli**, “International Standards for the Induction Motor Efficiency Evaluation - a Critical of the Stray Load Loss Determination”, *Conference Proceedings on Industry Applications*, pp. 841-848, 12-16 October, 2003.
- [19] **A. Boglietti, A. Cavagnino, M. Lazzari, and M. Pastorelli**, “Induction Motor Efficiency Measurements in Accordance to IEEE 112-B, IEC 34-2 and JEC 37 International Standards”, *Conference Proceedings on Electric Machines and Drives*, Vol. 3, pp. 1599-1605, 1- 4 June, 2003.
- [20] **A. G. Jack, B. C. Mecrow**, “Iron Loss in Machines with Powered Iron Stators”, 4th International Symposium on Advanced Electromechanical Motion System, Bologna, Italy, 19-20 June, 2001.

- [21] **R. Messaoudi, Z.Hemil**, "Contribution à L'Etude des Moteur Asynchrones à Haut Rendement (Type EEI, d'Azazga) ", Mémoire d'Ingénieur, Encadré par S. Chekroun, Université Med Boudiaf M'sila, 2005.
- [22] **F.A.M.Salotti, G. Ceragioli, O.S. Lobosco**, " Energy Saver Motor ", Institut de L'Electricité et de L'Energie, Université de Sao poulo –Brazil.
- [23] " Les Machines Asynchrones "site d'Internet " de [http:// fr.wikipedia-org / wiki / Machine Synchrone "](http://fr.wikipedia-org/wiki/Machine_Synchrone).
- [24] **J. Haataja and J. Pyrhones**, "Improving Three Phase Induction Motor – Efficiency in Europe", IEEE Trans. Industrial Electronics, Vol. E-36, No., pp. 1555- 1562, November /December, 2000.
- [25] **E. Davalo et P. Naïm**, "Des Réseaux de Neurones", Edition EYROLLES, 1993.
- [26] **J. Héraut et C. Jutten**, "Réseaux neuronaux et Traitement Signal", Edition HERMES, 1994.

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME
D'INGENIEUR D'ETAT EN GENIE ELECTROTECHNIQUE

OPTION : COMMANDE ELECTRIQUE

Année Universitaire : 2010 / 2011

Proposé et dirigé par : Monsieur : Salim CHEKROUN

Présenté par : FERHAT Charif
BAHACHE Meryem
GOUISSEM Nawale

Thème :

**CONTRIBUTION METHODOLOGIQUE APPLIQUEE A
L'AMELIORATION DES PERFORMANCES D'UNE MACHINE
ASYNCHRONE PAR OPTIMISATION
(Méthode du simplexe)**

Résumé :

L'algorithme du simplexe de George Dantzig est une technique à la fois fondamentale et très populaire pour les problèmes de programmation linéaire. Ainsi, étant donné un ensemble d'inégalités linéaires sur n variables réelles, l'algorithme permet de minimiser (ou maximiser) une fonction objectif, qui est elle aussi linéaire (l'algorithme fonctionne encore quand la fonction est croissante en chacune des n variables).

Deux buts principaux sont fixés dans ce sujet :

1. Concevoir et appliquer cet algorithme pour l'amélioration du rendement des machines asynchrones.
2. Voir et vérifier l'influence de la saturation sur le rendement de la machine asynchrone.

Mots Clés :

Optimisation, Simplexe, MAS.