Table des matières

NOTATIONS

$C([a,b])$	L'espace des fonctions continue sur l'intervalle $[a,b]$
$[a,b]$	Intervalle réel
φ	Fonction inconnue
φ^*	Solution approximée
A	Opérateur linéaire
H	Espace de Hilbert
X	Espace normé
I	Opérateur d'identité
$K(x,y)$	Noyau de l'intégrale
T	Opérateur linéaire compact
$KerT$	Le noyau de l'opérateur T, $KerT = \{\varphi/\ T\varphi = 0\}$
$\operatorname{Im} T$	L'image de l'opérateur T, $\operatorname{Im} T = \{\psi/\ \psi = T\varphi\}$
T^{-1}	L'inverse de l'opérateur
T	Opérateur Linéaire ou $T = I - A$.

REMERCIEMENTS

Premièrement et particulièrement, je tiens à remercier vivement mon promoteur ***Mr Mostefa NADIR*** *pour sa guidance et son soutient indéfectible durant la préparation de ce mémoire, dès le début sa confiance à mon égard et à mon travail m'a donnée une énergie et une inspiration de soulever toutes les difficultés.*

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

Par ailleurs, mes remerciements s'adressent aussi à de nombreux professeurs qui ont eu pour moi, une importance certaine de ma formation et à tous les membres du département des mathématiques.

Je remercie également ceux qui m'ont aidé de près ou loin à réaliser ce travail.

0.1 Introduction générale

Dans ce mémoire on va traiter les équations intégrales linéaires de Volterra, où on va démontrer l'existence et l'unicité de la solution de ces équations et parmi les meilleures méthodes d'approximation.

On a commencé dans le premier chapitre par une introduction sur les opérateurs compacts, dans les espaces des fonctions continues et quelques propriétés.

Le deuxième chapitre présente une introduction sur les équations intégrales,et on va les traiter dans les espaces de dimension finie.

Le dernier chapitre représente le but de ce mémoire consiste à la Résolution des équations intégrales a l'aide des résolvantes des équations intégrales linéaires de Volterra de deuxième espèce tel que le noyau est continu, en appliquant le théorème classique du point fixe pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution.

Rappel

Définition(espace de Hilbert)

Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel. On appelle produit scalaire, on note $\langle .,. \rangle$ une forme bilinéaire de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ dans $\mathbb{R}$, symétrique et définie positive :

$$\forall u \in \mathcal{H} \quad \langle u,u \rangle \geq 0 \ et \ \langle u,u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0.$$

On dit que $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert s'il est muni un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et s'il est complet pour la norme associée au produit scalaire : $\forall u \in \mathcal{H} \ \ |u| = \langle u,u \rangle^{\frac{1}{2}}$.

Définition(espace de Banach)

On appelle espace de Banach $(E, \|.\|)$ tout espace vectoriel normé (e.v+norm) et complet pour la distance déduite de la norme.

Théorème (de Bolzano-Weierstrass)

Un espace métrique (E, d) est compact si et seulement si toute suite d'éléments de E admet une sous-suite convergente.

Théorème (de Banach-Steinhaus)

Soient E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications de $\mathcal{L}(E,F)$. On suppose que pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{T_i(x) \ | \ i \in I\}$ est borné dans F.

Alors il existe $M \geq 0$ tel que

$$\forall i \in I \ ; \ \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq M.$$

Théorème (de Hahn-Banach)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{N}$ une semi-norme définie sur E. Soit f_0 une fonctionnelle linéaire définie sur un sous espace vectoriel F de E, telle que

$$f_0(x) \leq \mathcal{N}(x), \qquad \forall x \in F.$$

alors, il existe une fonctionnelle linéaire f, défini sur E tout entier prolongeant la fonctionnelle f_0 et vérifiant sur l'espace E la condition

$$f(x) \leq \mathcal{N}(x), \qquad \forall x \in E.$$

Chapitre 1

INTRODUCTION A LA THEORIE DES OPERATEURS COMPACTS

Ce chapitre aborde une introduction à la théorie des opérateurs compacts, dans les espaces des fonctions continues et on a pris un cas spécial les opérateurs intégraux avec la méthode des approximations successives.

1.1 Compacité (Rappel)

Définition 1.1

Soit U un ensemble d'un espace normé X, U est dit compact si de tout recouvrement de U par des ouverts de U on peut extraire un sous recouvrement fini i.e :

$\forall V_J$; $j \in J$ *(ouverts) tels que* $U \subset \bigcup\limits_{j \in J} V_J$, $\exists V_{J(k)}, j(k) = 1, 2, ..., n$

tel que $U \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} V_{J(k)}$

Définition 1.2

Un ensemble U est dit séquentiellement compact si pour toute suite d'éléments dans U contient une sous suite converge vers un élément dans U.

Théorème 1.3

Un sous ensemble d'un espace normé est compact si et seulement si il est séquentiellement compact.

Définition 1.4

Un sous ensemble d'un espace normé est dit relativement compact si son adhérence est compacte.

Théorème 1.5

Tout ensemble borné et de dimension finie d'un espace normé est relativement compact.

1.2 Compacité dans C(G)

Dans cette partie, l'espace des fonctions continues définies dans $C(G)$ est muni de la norme maximum

$$\|\varphi\|_\infty = \max_{x\in G} |\varphi(x)|$$

Théorème 1.6 (Arzela-Ascoli)

Un ensemble $U \subset \mathcal{C}(G)$ est relativement compact si et seulement si il est borné et équicontinu i.e. S'il existe une constante M tel que

$$|\varphi(x)| \leq M \quad \textit{pour tout} \quad x \in G \quad \textit{et} \quad \varphi \in U$$

Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon \qquad \textit{pour tout } x, y \in G \textit{ et pour tout } \varphi \in U$$

1.3 Opérateurs compacts

Définition 1.7

Soit $\mathcal{A}$ un opérateur linéaire d'un espace normé X dans un espace normé Y , on dit que $\mathcal{A}$ est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné un ensemble relativement compact dans Y.

Théorème 1.8

Un opérateur $\mathcal{A}$ de X dans Y est compact si et seulement si pour toute suite bornée $\{\varphi_n\}$de X, la suite $\{\mathcal{A}\varphi_n\}$ contient une sous suite convergente dans Y.

Théorème 1.9

Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.

Théorème 1.10

Une combinaison linéaire $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.

Théorème 1.11

Le produit $\mathcal{AB}$ de deux opérateurs bornés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est compact si l'un des opérateurs $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ est compact.

Théorème 1.12

Soient X un espace normé et Y un espace de Banach, et soit $\{\mathcal{A}_n\}$ une suite d'opérateurs compacts de X dans Y, convergente en norme vers l'opérateur linéaire $\mathcal{A}$ de X dans Y.

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\| = 0$$

alors $\mathcal{A}$ est compact.

Théorème 1.13

Soit $\mathcal{A}$ un opérateur borné de X dans Y à image $\mathcal{A}(X)$ de dimension finie. Alors $\mathcal{A}$ est compact.

Théorème 1.14

L'opérateur identique $\mathcal{I}$ de X dans X est compact si et seulement si X est de dimension finie.

Théorème 1.15

L'opérateur intégral $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}(G)$ dans $\mathcal{C}(G)$ à noyau continu est un opérateur compact.

Preuve. *En effet,soit E un ensemble borné de $C(G)$,($\|\varphi\| \leq M$) ,pour tout $\varphi \in E$.De plus,on a*

$$|\mathcal{A}\varphi(x)| \leq M|G| \max_{x,y\in G} |k(x,y)| \quad , \quad \forall x \in G \text{ et} \forall \varphi \in E$$

D'où l'ensemble $\mathcal{A}(E)$ est borné. D'autre part, le noyau Kest uniformément continu sur le compact $G \times G$

alors pour tout x, y et z de G , on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que } |x-y| < \delta \Longrightarrow |k(x,z) - k(y;z)| < \frac{\varepsilon}{M|G|}$$

d'où

$$|\mathcal{A}\varphi(x) - \mathcal{A}\varphi(y)| < \varepsilon \text{ pour tout } \varphi \in E \text{ et } x, y \in G \text{ avec } |x-y| < \delta$$

Ceci exprime que l'ensemble$\mathcal{A}(E)$est équicontinu, d'où $\mathcal{A}(E)$ est relativement compact par le théorème **d'Arzelà-Ascoli**. *Alors A est compact.* ■

Théorème 1.16

L'opérateur intégral $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}(\partial G)$ dans $\mathcal{C}(\partial G)$ à noyau continu ou à noyau faiblement singulier est un opérateur compact sur $\mathcal{C}(\partial G)$ si ∂G est de classe $\mathcal{C}^1$.

1.4 Opérateurs intégraux

Théorème 1.17

Soit G un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ et soit K une fonction continue de $G \times G$ dans $\mathcal{C}$ alors l'opérateur linéaire défini de $\mathcal{C}(G)$ dans $\mathcal{C}(G)$ par

$$A\varphi(x) = \int\limits_G |k(x,y)|\, dy \qquad x \in G$$

est appelé opérateur intégral à noyau continu K cet opérateur est borné de norme $\|A\|$ donnée par

$$\|A\| = \max_{X \in G} \int\limits_G |k(x,y)|\, dy$$

Une classe particulièrement simple d'opérateurs intégraux est constituée des opérateurs à noyau dits dégénérés, c'est-à-dire de la forme

$$K(x,y) = \sum_{j=1}^{n} a_j\,(x)\, b_j\,(y)$$

Les opérateurs correspondants sont de rang fini.

Proposition 1.18

Soit $\mathcal{A}$ un opérateur intégral à noyau dégénéré. L'image de $\mathcal{A}$ est de dimension finie.

Preuve. *Nous allons montrer que l'image de A est engendrée par les fonctions a_1, ...,a_n. Sa dimension est donc majorée par p.*

Soit $\varphi \in L_2\,[a,b]$

$$T\varphi(x) = \int_a^b \sum_{j=1}^{n} a_j\,(x)\, b_j\,(y)\, \varphi(y)dy = \sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b b_j\,(y)\, \varphi(y)dy \right) a_j\,(x)$$

qui est bien un élément de l'espace vectoriel engendré par $\{a_1, ..., a_n\}$. Ce résultat sera utilisé plus loin pour démontrer la compacité de l'opérateur A. ■

Proposition 1.19

Soit $\mathcal{A}$ l'opérateur intégral de noyau K Alors l'opérateur adjoint $\mathcal{A}^*$ est un opérateur intégral de noyau $K^{\ *}$ avec

$$K^*(t,s) = K(s,t)$$

Preuve. *Il suffit de partir de la définition. Soit $\varphi, \psi L^2([a,b])$.*

$$(T\varphi,\psi) = \int_a^b (\int_a^b k\,(x,y)\,\varphi\,(y)\,dy)\psi\,(x)\,dx = \int_{[a,b]*[a,b]} k\,(x,y)\,\varphi\,(y)\,\psi\,(x)\,dydx$$

par le théorème de Fubini. En échangeant encore l'ordre d'intégration, il vient

$$(T\varphi,\psi) = \int_a^b (\int_a^b k\,(x,y)\,\psi\,(x)\,dx)\varphi\,(y)\,dy = (\varphi, T^*\psi)$$

D'après la définition de l'adjoint. En permutant le nom des variables, on obtient le résultat voulu. ■

Corollaire 1.20

L'opérateur intégral A de noyau K est auto-adjoint si, et seulement si, le noyau est symétrique

$$K(x,y) = K(y,x) \qquad\qquad \forall x,y \in [a,b]$$

Théorème 1.21

Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach E dans lui-même avec $\|A\| < 1$, et soit I l'opérateur identique dans E Alors $I - A$ admet un opérateur inverse borné, donné par la série de Neumann

$$(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k$$

de plus

$$\left\|(I-A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$$

Preuve. *De la relation* $\|A\| < 1$, *on a la convergence absolue*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A^K\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1 - \|A\|}$$

Dans l'espace de Banach $L(E)$, *par conséquent la série de Neumann converge en norme et définit un opérateur linéaire borné*

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

avec la relation

$$\|S\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}$$

de plus S *est l'inverse de* $(I - A)$

En effet, utilisons les notations ($A^0 = I$ et $A^k = AA^{k-1}$), *on peut voir que*

$$S(I - A) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A^k(I - A) = \lim_{n\to\infty} (I - A^{n+1}) = I$$

aussi

$$(I - A)S = (I - A) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} A^k = \mathop{lim}_{n\to\infty} (I - A^{n+1}) = I$$

puisque la norme

$$\left\|A^{n+1}\right\| \leq \|A\|^{n+1} \to 0, \quad \text{lorsque } n \to \infty$$

Approximation successive

Il est à remarquer que la somme partielle

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{n} A^k f$$

de la série de Neumann vérifie l'équation

$$\varphi_{n+1} = A\varphi_n + f, \ pour \ n \geq 0$$

d'où la relation directe entre la série de Neumann et la théorie des approximations successives. ■

Théorème 1.22

Soit A un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach E dans lui-même avec $\|A\| < 1$, et soit I l'opérateur identique dans E alors pour tout $f \in E$ l'approximation successive

$$\varphi_{n+1} = A\varphi_n + f \qquad\qquad pour n = 0, 1, 2...$$

avecφ_0 un vecteur arbitraire de E converge vers une solution unique φ de l'équation

$$\varphi - A\varphi = f$$

Preuve. Il est aisé devoir que de la relation précédente , ona

$\varphi_0 = f$

$\varphi_1 = A\varphi_0 + f = Af + f$

$\varphi_2 = A\varphi_1 + f = A^2f + Af + f$

.

.

$\varphi_{n+1} = A\varphi_n + f = A\sum_{K=0}^{n} A^k f + f = A^{n+1}f + \sum_{K=0}^{n} A^k f$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (A^{n+1}f + \sum_{K=0}^{n} A^k f)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{K=0}^{n} A^k f \ = \sum_{K=0}^{n} A^k f$$
$$= Sf = (I - A)^{-1} f$$

On remarque que l'application de ces résultats d'analyse fonctionnelle aux équations intégrales est évidente. ■

Corollaire 1.23

Soit K un noyau continu, vérifiant la relation

$$\max_{x\in G}\int_G |k(x,y)|\,dy < 1$$

alors pour tout $f \in C(G)$, l'équation intégrale de seconde espèce

$$\varphi(x) - \int_G k(x,y)\varphi\,(y)\,dy = f(x) \quad ,x \in G$$

admet une solution unique $\varphi \in C(G)$, de plus l'approximation successive

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_G k(x,y)\varphi_n\,(y)\,dy + f(x) \qquad n = 1, 2, ...$$

converge uniformément vers la solution φ pour tout vecteur arbitraire φ_0 de $C(G)$.

1.5 Opérateurs produits

Définition 1.24

Soient $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ deux opérateurs intégraux sur $L_p(E)$ avec les noyaux K_1, K_2 respectivement, l'opérateur produit envoie aussi $L_p(E)$ dans $L_p(E)$, où $(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)\varphi = \mathcal{T}_1(\mathcal{T}_2\varphi)$.

Si les noyaux K_1, K_2 justifient l'interchangement de l'ordre d'intégration alors, on peut déduire le noyau K du produit $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$ en fonction de K_1, K_2

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\varphi(x) &= \int K_1(x,z)\int \mathcal{T}_2\varphi\,(z)\,dz \\
&= \int K_1(x,z)\int K_2(z,y)\varphi\,(y)\,dy \\
&= \int \varphi\,(y)\,dy\int K_1(x,z)K_2(z,y)dz
\end{aligned}$$

D'où l'opérateur $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$ *est un opérateur intégral de noyau*

$$K(x,y) = \int K_1(x,z)K_2(z,y)dz$$

Notons que, si on prend $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}$, *de noyau* $K_1 = K_2 = K$, *alors l'opérateur* $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}^{\ 2}$ *admet le noyau* $K_2(x,y)$ *donné par*

$$K_2(x,y) = \int K(x,z)K(z,y)dz$$

par itération le noyau $K_n(x,y)$ *de* $\mathcal{T}^{\ n}$ *est*

$$K_n(x,y) = \int K(x,z)K_{n-1}(z,y)dz$$

Chapitre 2

EQUATIONS INTEGRALES

Dans ce chapitre, on présente la théorie des équations intégrales à noyau continus et on les traite dans les espaces de dimension finie

2.1 Classification des équations intégrales

Equations intégrales linéaires

On appelle équation intégrale une équation où la fonction inconnue φ, tell que

$$\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_T k(x,t)\varphi(t)dt \qquad (2.1)$$

avec$f(x)$ et $k(x,t)$ sont deux fonctions connus, λ un paramètre numérique et T un ensemble borné et fermé d'un espace euclidien.

a-Equations intégrales de Fredholm

1-On appelle équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \qquad (2.2)$$

2-On appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce une équation de la forme

$$f(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \qquad (2.3)$$

Remarque 2.1

i-Si $f(x) \neq 0$, l'équation (2.2) est dite non homogène.

ii-Si$f(x) = 0$, l'équation (2.2) est dite homogène.

b-Equations intégrales de Volterra

1-On appelle équation intégrale de Volterra de deuxième espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \qquad (2.4)$$

2-On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce une équation de la forme

$$f(x) = \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \qquad (2.5)$$

Remarque 2.2

L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau $k(x,t) = 0$ *pour* $x < t$

2.2 Equations intégrales non-linéaire

a-Equations intégrales non linéaire de Fredholm

1-On appelle équation intégrale non linéaire de Fredholm de deuxième espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_a^b k(x,t,\varphi(t))dt \qquad (2.6)$$

2-On appelle équation intégrale non linéaire de Fredholm de première espèce une équation de la forme

$$f(x) = \lambda \int_a^b k(x,t,\varphi(t))dt \qquad (2.7)$$

Remarque 2.3

i-Si $f(x) \neq 0$, l'équation (2.6) est dite non homogène.

ii-Si $f(x) = 0$, l'équation (2.6) est dite homogène.

b-Equations intégrales non linéaire de Volterra

1-On appelle équation intégrale non linéaire de Volterra de deuxième espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_a^x k(x,t,\varphi(t))dt \qquad (2.8)$$

2-On appelle équation intégrale non linéaire de Volterra de première espèce une équation de la forme

$$f(x) = \lambda \int_a^x k(x,t,\varphi(t))dt \qquad (2.9)$$

Remarque 2.4

i-Si $f(x) \neq 0$, l'équation (2.8) est dite non homogène.

ii-Si $f(x) = 0$, l'équation (2.8) est dite homogène.

2.3 Equation intégrale singulière et faiblement singulière

Considérons l'équation intégrale suivante :

$$\varphi(x) = g(x) + \int\limits_{T} R(x,t)k(x,t)\varphi(t)dt \tag{2.10}$$

On dit que l'équation (2.10) est singulier si $R(x,t)$ *admet une singularité ou le domaine* T *n'est pas bornée.*

a-Equations deVolterra et de Fredholm

Définition 2.5

On considère l'équation intégrale de deuxième espèce

$$\varphi(x) = g(x) + \int\limits_{a}^{x} R(x,t)k(x,t)\varphi(t)dt \qquad , \qquad a \leq x < \infty \tag{2.11}$$

où k(x,t) est faiblement singulier , en générale k(x,t) donnons par

$$k(x,t) = \begin{cases} |x-t|^{-\alpha} & 0 < \alpha < 1 \\ \log|x-t| & \end{cases}$$

Alors

i- l'équations (2.11) est de Volterra.

ii-si $x = b$ *l'équations (2.11) est de Fredholm.*

iii-Le cas ou $k(x,t) = |x-t|^{-\alpha}$ $\quad 0 < \alpha < 1$ *s'appelle singularité algébriques*

iv-Le cas ou $k(x,t) = log\,|x-t|$ *s'appelle singularité logarithmiques.*

Chapitre 3

RESOLVANTE DE L'EQUATION INTEGRALE DE VOLTERRA

Ce chapitre est la résolution des équations intégrales de volterra à l'aide des résolvantes, et consacré aux équations intégrales linéaires de Volterra de deuxième espèce tel que le noyau est continu, où on va appliquer les théorèmes classiques du point fixe pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution de cette équations.

3.1 Equations intégrales lineaires de volterra

3.1.1 Existence et unicité de la solution de l'équation de Volterra

Introduction à la théorie du point fixe

Définition 3.1

Soient H est un espace de Hilbert et U un opérateur borné, l'opérateur U est dit opérateur contractant s'il existe une constante positive k telle que : $0 < k < 1$ et

$$\|U\varphi_1 - U\varphi_2\| \leq k \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

Théorème 3.2

Soit U un opérateur contractant dans un espace de Hilbert H, alors l'équation

$$U\varphi = \varphi \qquad (1)$$

admet une solution unique φ dans H, cette solution est le point fixe de cet opérateur.

Preuve. *Pour démontrer l'existence de la solution de l'équation (1) on utilise la méthode des approximations successives, soit φ_0 une fonction arbitraire, on définit la suite (φ_n) comme suit*

$$\varphi_{n+1} = U\varphi_n \qquad n = 1, 2, ...$$

est de Cauchy et converge vers la solution de l'équation (1), en effet :

$$\begin{aligned}
\left\|\varphi_{p+1} - \varphi_p\right\| &= \left\|U\varphi_p - U\varphi_{p-1}\right\| \leq k\left\|\varphi_p - \varphi_{p-1}\right\| \\
&\leq k^2\left\|\varphi_{p-1} - \varphi_{p-2}\right\| \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&\leq k^p \ \left\|\varphi_1 - \varphi_0\right\|
\end{aligned}$$

d'autre part, pour tout $q > p$, on a

$$\begin{aligned}
\left\|\varphi_q - \varphi_p\right\| &\leq \left\|\left(\varphi_q - \varphi_{q-1}\right) + \left(\varphi_{q-1} - \varphi_{q-2}\right) + ... + \left(\varphi_{p+1} - \varphi_p\right)\right\| \\
&\leq \left\|\varphi_q - \varphi_{q-1}\right\| + \left\|\varphi_{q-1} - \varphi_{q-2}\right\| + ... + \left\|\varphi_{p+1} - \varphi_p\right\| \\
&\leq \left(k^p + k^{p+1} + ... + k^{q-1}\right)\left\|\varphi_1 - \varphi_0\right\| \\
&\leq k^p\left(1 + k + k^2 + ... + k^{\frac{q-1}{p}}\right)\left\|\varphi_1 - \varphi_0\right\| \\
&\leq \frac{k^p - k^q}{1-k}\left\|\varphi_1 - \varphi_0\right\|
\end{aligned}$$

ce qui nous montre que

$$\lim_{p,q\to\infty} \left\|\varphi_q - \varphi_p\right\| = 0$$

d'où la suite φ_n *est de Cauchy dans un espace de Hilbert donc elle converge vers la solution unique* φ *:*

En effet de la continuité de l'opérateur U *on obtient :*

$$\varphi = \lim U\varphi_{n+1} = \lim U\varphi_n = U \lim \varphi_n = U\varphi$$

Pour démontrer l'unicité, on suppose qu'il existe deux points fixes distincts φ *et* ψ *tels que :*

$$\begin{aligned} U\varphi &= \varphi \\ U\psi &= \psi \end{aligned}$$

alors on peut écrire

$$\|\varphi - \psi\| = \|U\varphi - U\psi\| \leq K \|\varphi - \psi\|$$

d'où

$$(1-k)\|\varphi - \psi\| \leq 0$$

ce qui nous donne

$$\|\varphi - \psi\| = 0 \Rightarrow \varphi = \psi. \ \blacksquare$$

Corollaire 3.3

Supposons que l'opérateur U *admet un point fixe dans l'espace de Hilbert* H *alors l'opérateur* U^n *admet le même point fixe* φ*.*

Corollaire 3.4

Soit U *un opérateur dans l'espace* H *tel que l'opérateur est un opérateur contractant, alors* U *admet un point fixe unique* φ *dans l'espace* H*.*

Théorème 3.5

Soit H est un espace de Hilbert et A un opérateur borné dans H avec la propriété suivante

$$\|A\varphi_1 - A\varphi_2\| \leq k \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

alors l'équation suivante

$$\varphi - \lambda A\varphi = f$$

admet une solution unique pour toute $f \in H$ à condition que $|\lambda|$ est petit.

Théorème 3.6

Soit $K(x,t)$ est une fonction continue pour $x, t \in [a,b]$, alors l'équation de Volterra

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \qquad a \leq x \leq b \tag{2}$$

admet une solution unique $\varphi(x)$ pour toute f dans $L_2([a,b])$et dans $\mathbb{R}$.

Preuve. *Pour l'équation intégrale de Volterra nous considérons l'opérateur*

$$T\varphi(x) = f(x) + \lambda A\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt$$

avec :

$$A\varphi(x) = \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt$$

et nous essayons de prouver que l'opérateur T^n est une contraction pour un certain $n \in N$; donc $T\varphi$ admet un point fixe, qui doit être une solution de l'équation (2)

$$\begin{aligned}
T\varphi &= f + \lambda A\varphi \\
T^2\varphi &= T(f + \lambda A\varphi) = f + \lambda A(f + \lambda A\varphi) = f + \lambda Af + \lambda^2 A^2\varphi \\
&\;. \\
&\;. \\
&\;. \\
T^n\varphi &= f + \lambda Af + \lambda^2 A^2 f + ... + \lambda^{n-1}A^{n-1}f + \lambda^n A^n\varphi
\end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
\|T^n\varphi_2 - T^n\varphi_1\| &= \|\lambda^n A^n\varphi_2 - \lambda^n A^n\varphi_1\| \\
&= |\lambda|^n \left\| \int_a^x k_n(x,t)\,(\varphi_2(t) - \varphi_1(t))\,dt \right\|
\end{aligned}$$

Rappelons que $k_n(x,t)$ est le noyau itéré d'ordre n donné par

$$k_n(x,t) = \int_t^x k(x,z)\,k_{n-1}(z,t)\,dz$$

puisque on a par hypothèse

$$|k(x,t)| \leq M$$

alors

$$|k_n(x,t)| \leq \frac{M^n (x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \qquad a \leq t \leq x \leq b \qquad (3)$$

Pour $n = 1$ l'expression (3) est évidente.

Supposons qu'elle est vraie pour $m \in N$

$$|k_m(x,t)| \leq \frac{M^m (x-t)^{m-1}}{(m-1)!}$$

alors

$$\begin{aligned} |k_{m+1}(x,t)| &= \left| \int_t^x k(x,z)\, k_m(z,t)\, dz \right| \\ &\leq \int_t^x |k(x,z)\, k_m(z,t)\, dz| \\ &\leq \frac{M^{m+1}}{(m-1)!} \int_t^x (x-z)^{m-1}\, dz \\ &\leq \frac{M^{m+1}}{m!} (x-t)^m \end{aligned}$$

tel que

$$\|T_n\varphi_2 - T_n\varphi_1\| \leq \frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!} \|\varphi_2 - \varphi_1\|$$

pour $n \in N$ *assez grand on obtient*

$$\frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!} < 1$$

ainsi que l'opérateur T^n *est contractant ce qui implique que* T *admet un point fixe, on écrit*

$$T\varphi = \varphi \Leftrightarrow \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\, \varphi(t) dt. \ \blacksquare$$

3.2 Résolution des équations intégrales a l'aide des résolvantes

Soit l'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce.

$$\varphi(x) + f(x) = \lambda \int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt \qquad (1)$$

où $k(x,t)$ *est une fonctions continue pour* $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq x$

et $f(x)$*est continue lorsque* $0 \leq x \leq a$

cherchons la solution de cette équation sous la forme d'une série entière suivant les puissances de λ :

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + ... + \lambda^n\ \varphi_n(x) + ... \qquad (2)$$

portons formellement cette série dans (1), il vient

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + ... + \lambda^n\varphi_n(x) + ... \\
&= f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)\left[\varphi_0(t) + \lambda\varphi_1(t) + ... + \lambda^n\varphi_n(t) + ...\right] dt
\end{aligned}$$

en procédant par identification nous obtenons

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= f(x) \\
\varphi_1(x) &= \int_0^x k(x,t)\varphi_0(t)dt = \int_0^x k(x,t)f(t)dt. \\
\varphi_2(x) &= \int_0^x k(x,t)\varphi_1(t)dt. = \int_0^x k(x,t)\int_0^t k(t,t_1)f(t_1)dt_1dt \qquad (3) \\
&= ....
\end{aligned}$$

Moyennant les relations (3) *on peut définir successivement les fonctions* $\varphi_n(x)$. *on montre que, sous les hypothèses faites sur* $f(x)$ *et* $k(x,t)$, *la série (2) ainsi obtenue converge uniformément en* x *et* λ *pour tout* λ *et* $x \in [0,a]$ *et que sa somme est la solution de l'équation* (1).

Ensuite , (3) entraîne

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \int_0^x k(x,t)f(t)dt \\
\varphi_2(x) &= \int_0^x k(x,t)\left[\int_0^t k(t,t_1)f(t_1)dt_1\right]dt \\
&= \int_0^x f(t_1)dt_1 \int_{t_1}^x k(x,t)k(t,t_1)dt \\
&= \int_0^x k_2(x,t_1)f(t_1)dt_1
\end{aligned}$$

où :

$$k_2(x,t_1) = \int_{t_1}^x k(x,t)k(t,t_1)dt$$

on établit de façon analogue qu'en général

$$\varphi_n(x) = \int_0^x k_n(x,t)f(t)dt \qquad (n = 1, 2, ...) \qquad (4)$$

les fonctions $k_n(x,t)$s' *appellent noyaux itérés et sont définies , on le montre aisément ,par les formules de récurrence*

$$\begin{aligned}
k_1(x,t) &= k(x,t) \\
k_{n+1}(x,t) &= \int_t^x k(x,z)k_n(z,t)dz \qquad (n = 1, 2, ...) \qquad (5)
\end{aligned}$$

compte tenu de (4) et (5) l'égalité.(2) peut s'écrire

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_0^x k_n(x,t) f(t) dt.$$

une fonction $R(x,t;\lambda)$ *définie par la série*

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n k_{n+1}(x,t) \qquad (6)$$

est la résolvante (ou le noyau résolvant) de l'équation intégrale (1) si le noyau $k(x,t)$ *est continu ,la série(6) converge absolument et uniformément.*

Les noyaux itérés et la résolvante sont indépendants de la limite inférieure de l'intégrale dans l'équation intégrale.

La résolvante $R(x,t;\lambda)$ *satisfait à l'équation fonctionnelle suivante :*

$$R(x,t;\lambda) = k(x,t) + \lambda \int_t^x k(x,s) R(s,t;\lambda) ds$$

la solution de l'équation intégrale (1) en fonction de la résolvante s'écrit comme suit :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x,t;\lambda) f(t) dt. \qquad (7)$$

Exemple 3.7

Trouver la résolvante de l'équation intégrale de volterra à noyau $k(x,t)=1$

Solution

on a

$$k_1(x,t)=k(x,t)=1$$

conformément aux formules (5)

$$\begin{aligned}
k_2(x,t) &= \int_t^x k(x,z)k_1(z,t)dz = \int_t^x dz = x-t \\
k_3(x,t) &= \int_t^x 1.(z-t)dz = \frac{(x-t)^2}{2!} \\
k_4(x,t) &= \int_t^x 1\frac{(z-t)^2}{2}dz = \frac{(x-t)^3}{3!} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
k_n(x,t) &= \int_t^x 1.k_{n-1}(z,t)dz \\
&= \int_t^x 1.\frac{(z-t)^{n-2}}{(n-2)!}dz = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}.
\end{aligned}$$

Ainsi, par définition

$$R(x,t;\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n k_{n+1}(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n(x-t)^n}{n!}=e^{\lambda(x-t)}$$

Exemple 3.8

Trouver à l'aide de la résolvante la solution de l'équation intégrale

$$\varphi(x)=e^{x^2}+\int_0^x e^{x^2-t^2}\varphi(t)dt$$

Solution

Pour $\lambda = 1$ la Résolvante relative au noyau

$$k(x,t) = e^{x^2-t^2}$$

est

$$\begin{aligned}
R(x,t;1) &= \sum_{n=0}^{\infty} k_{n+1}(x,t) \\
k_1(x,t) &= k(x,t) = e^{x^2-t^2} \\
k_2(x,t) &= \int_t^x k(x,z)k_1(z,t)dz = \int_t^x e^{x^2-z^2} e^{z^2-t^2} dz \\
&= (x-t)\, e^{x^2-t^2} \\
k_3(x,t) &= \int_t^x k(x,z)k_2(z,t)dz = \int_t^x e^{x^2-z^2}\, (z-t)\, e^{z^2-t^2} dz \\
&= \frac{(x-t)^2}{2!} e^{x^2-t^2} \\
k_4(x,t) &= \int_t^x k(x,z)k_3(z,t)dz = \frac{(x-t)^3}{3!} e^{x^2-t^2} \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
k_n(x,t) &= \int_t^x k(x,z)k_{n-1}(z,t)dz \\
&= \int_t^x e^{x^2-z^2} \frac{(z-t)^{n-2}}{(n-2)!} e^{z^2-t^2} dz = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{x^2-t^2}. \\
R(x,t;1) &= \sum_{n=0}^{\infty} k_{n+1}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-t)^n}{n!} e^{x^2-t^2} = e^{x-t} e^{x^2-t^2} \\
R(x,t;1) &= e^{x-t} e^{x^2-t^2}
\end{aligned}$$

d'après la formule (7),l'équation intégrale donnée a pour solution la fonction

$$\varphi(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x-t} e^{x^2-t^2} e^{t^2} dt = e^{x+x^2}$$

Remarque 3.9

L'unicité de la solution des équations intégrales de volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt. \tag{8}$$

est assurée dans des hypothèses sensiblement plus larges sur la fonction $f(x)$et les noyaux $k(x,t)$ que leur continuité.

Théorème 3.10

L'équation intégrale de volterra de seconde espèce (8)dont les noyaux $k(x,t)$ et la fonction $f(x)$ appartiennent respectivement à $L^2[0,a]$ et à $L^2[0,a]$ admet une solution et une seule dans $L^2[0,a]$ cette solution est donnée par la formule

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x,t;\lambda) f(t)dt$$

ou la Résolvante $R(x,t;\lambda)$ est définie par la série

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n k_{n+1}(x,t)$$

de noyaux itérés qui converge presque partout

Liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra

Soit l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_n(x)y = F(x)$$

où $a_i(x) \quad (i = 1, 2, ..., n)$ *sont des coefficients continues , avec les conditions initiales*

$$y(0) = c_0, y^{'}(0) = c_1, ..., y^{n-1}(0) = c_{n-1}$$

cette équations peut être ramenée à la résolution d'une équation intégrale de Volterra de deuxième espèce.

Exemple :

Soit l'équation différentielle du seconde ordre

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\dfrac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x) \\ y(0) = c_0 \qquad y^{'}(0) = c_1 \end{cases} \tag{1}$$

posons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x) \tag{2}$$

alors

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)dt + c_1 \Longrightarrow y = \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt \ + c_1 x + c_0 \tag{3}$$

Nous avons utilisé la formule

$$\underbrace{\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \ . \ . \ . \int_{x_0}^x}_{n} f(x)dx \ = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^x (x-z)^{n-1} f(z)dz$$

compte tenu de (2) et (3) mettons l'équation différentielle (1) *sous la forme*

$$\varphi(x) + \int_0^x a_1(x)\varphi(t)dt + c_1a_1(x) + \int_0^x a_2(x)(x-t)\varphi(t)dt + c_1xa_2(x) + c_0a_2(x) = F(x)$$

ou

$$\varphi(x)+\int_0^x [a_1(x) + a_2(x)(x-t)]\,\varphi(t)dt = F(x)-c_1a_1(x)-c_1xa_2(x)-c_0a_2(x) \qquad (4)$$

posons

$$\begin{aligned} k(x,t) &= -[a_1(x) + a_2(x)(x-t)] && (5) \\ f(x) &= F(x) - c_1a_1(x) - c_1xa_2(x) - c_0a_2(x) && (6) \end{aligned}$$

nous ramenons l'équation (4) à la forme suivante

$$\varphi(x) = \int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt + f(x) \qquad (7)$$

i.e. nous obtenons une équation intégrale de Volterra de deuxième espèce.

L'unicité de la solution de l'équation (7) résulte de l'existence de la solution du problème de Cauchy (1) pour l'équation différentielle linéaire à coefficients continus dans un voisinage du point $x = 0$.

Inversement,en résolvant l'équation intégrale (7) avec k *et* f *définis par les formules (5) et (6) puis portant* $\varphi(x)$ *obtenue dans la dernière équation (3) , nous obtenons la solution de (1) vérifiant les conditions initiales.*

Exemple :

Former l'équation intégrale correspondante a l'équation différentielle

$$y^{''} + xy^{'} + y = 0$$

et aux conditions initiales

$$y(0) = 1 \qquad y^{'}(0) = 0$$

Solution : *posons*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x) \tag{8}$$

Alors

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)dt + y^{'}(0) = \int_0^x \varphi(t)dt \qquad , \qquad y = \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + 1 \tag{9}$$

portons (8) et (9) dans l'equation différentielle donnée, il vient

$$\varphi(x) + \int_0^x x\varphi(t)dt + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + 1 = 0$$

ou

$$\varphi(x) = -1 - \int_0^x (2x-t)\varphi(t)dt$$

Bibliographie

[1] *M.NADIR , Cours d'analyse fonctionnelle, université de M'sila 2004.*

[2] *A.KHIRANI , Equations Intégrales Lineaires de Volterra .Mémoire de Magister. Université de M'sila 2011.*

[3] *B.GAGUI , Résolution Des Equations Intégrales Par Les Methodes Adaptatives Mémoire de Magister Université de M'sila 2006.*

[4] *M.NADIR. Cours sur les Equations Intégrales.Université de M'sila 2008.*

[5] *V.Smirnov .Cours De Mathématiques Supérieures.tome. IV. Premiére Partie.*

[6] *R.P.Agarwal, M.Meehan et D.O'regan, Fixed point theory and applicatiortie Cambridge tracts in mathematics 2001.*