



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques



## Mémoire de Master

**Domaine:** Mathématiques et Informatique

**Filière:** Mathématiques

**Option:** Analyse Mathématiques et numérique

## Thème

---

Comparison Between Touchard and Legendre Polynomials  
For Volterra Intégral Equations.

---

Présentée par:

HAMMOU HIND

Soutenu publiquement le: 28/06/2021.

Devant le jury composé de:

*Mestefa NADIR*

*Noui DJAIDJA*

*Amina KHIRANI*

Prof,

M.C.B,

M.C.A,

Université de M'sila

Université de M'sila

Université de M'sila

**Président:**

**Encadreur:**

**Examineur:**

Année universitaire 2020/2021

## ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو تقديم حلول تقريبية لمعادلات فولترا التكاملية من نوع الثاني باستخدام كثيرات الحدود من نوع توشارد و كثيرات الحدود من نوع ليجوندر مع مقارنة النتائج المحصل عليها.

**الكلمات المفتاحية :** معادلات فولترا التكاملية من نوع الثاني, كثير الحدود توشارد, كثير الحدود ليجوندر

## Abstract

The goal of this memory is consecrated to the numerical solutions of the Volterra integral equations of the second kind by applied the Touchard type Polynomial method and the Legendre type polynomial method, by making comparisons.

**Key words:** Second kind integral equation of Volterra, Touchard polynomial, Legendre polynomial.

## Résumé

Le but de ce mémoire est consacré aux solutions numériques des équations intégrales de Volterra de deuxième espèce en appliqué la méthode Polynômiale de type Touchard et la méthode Polynômiale de type Legendre, et en faisant des comparaisons.

**Mots clés :** Equation intégrale de Volterra de deuxième espèce, polynôme de Touchard, polynôme de Legendre.

# Remerciements

*Avant toute considération, je remercie **Allah**, le tout puissant, pour m'avoir donné la force et la patience.*

*Je tiens à remercier particulièrement Dr. Noui DJAIDJA pour son soutien scientifique, ainsi que pour sa compétence et les bonnes orientations, ses précieux conseils, mais aussi ses encouragements. Je lui exprime toute ma gratitude.*

*Je tiens à remercier les membres du jury: Prof. Mostefa NADIR, et DR. Amina KHIRANI, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.*

*Enfin, je remercie ma famille et toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.*

# Dédicace

*Merci Allah de m'avoir donné la capacité de surmonter les difficultés dans ma carrière d'étude.*

*Je dédie ce travail au symbole de la tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur, pour ma mère "Khadidja", elle a toujours voulu atteindre et réussir.*

*A mon père "Lmbabkhout", qui a été la cause de mon courage et qui a été mon ombre durant toutes les années de mes études.*

*A mes soeurs, A mes frères.*

*A mes amies: Nesrin, Zineb, Amina, Marieme.*

*A tous ceux que j'aime*

*Je dédie ce travail.*

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>ii</b>
<b>1 Rappels et notions fondamentales</b>	<b>1</b>
1.1 Notions sur les espaces fonctionnelles . . . . .	1
1.1.1 Espaces Normés . . . . .	1
1.1.2 Espaces de Banach . . . . .	2
1.1.3 Espaces de Hilbert . . . . .	2
1.2 Notions sur les opérateurs . . . . .	3
1.2.1 Opérateurs linéaires . . . . .	3
1.2.2 Opérateurs bornés . . . . .	4
1.2.3 Opérateur Adjoint . . . . .	4
1.2.4 Opérateur compact . . . . .	5
1.2.5 Opérateurs fermés . . . . .	5
<b>2 Opérateurs intégraux et équations intégrales</b>	<b>6</b>
2.1 Opérateurs intégraux . . . . .	6
2.2 Equations intégrales linéaires . . . . .	7
2.2.1 Equations intégrales de Fredholm	
2.2.2 Equations intégrales de Volterra . . . . .	8
2.2.3 Equations intégrales de Volterra-Fredholm . . . . .	8
2.2.4 Equations intégrales singulières . . . . .	9
2.2.5 Equations intégro-différentielle . . . . .	9
2.3 Existence et unicité de la solution de E.I.V de seconde espèce . . . . .	10

2.4	Polynomes orthogonaux . . . . .	12
2.4.1	Polynomes de Tchebyshev $T_n$ . . . . .	13
2.4.2	Polynomes d’Hermite $H_n$ . . . . .	15
2.4.3	Polynômes de Laguerre $P_n$ . . . . .	15
2.4.4	Polynômes de Legendre $L_n$ . . . . .	16
2.4.5	Polynômes de Touchard . . . . .	17
<b>3 Résolution numérique des équations intégrales de volterra de seconde espèce:</b>		<b>20</b>
3.1	Résolutions de l’équation intégrale de volterra de seconde espèce par les Polynômes de Touchard . . . . .	20
3.2	Résolutions de l’équation intégrale de volterra de seconde espèce par les Polynômes de legendre . . . . .	22
3.3	Exemples illustratifs . . . . .	24
<b>Conclusion</b>		<b>27</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>28</b>

# Introduction

En mathématique, une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnue, généralement une fonction d'une ou plusieurs variables, s'apparait sous le signe intégrale. Cette définition générale tient compte de beaucoup de différentes formes spécifiques et dans la pratique plusieurs types distincts surgissent. Pour cette raison, et afin de recouvrir les grands axes de notre thématique sans s'impliquer dans des situations particulièrement inadéquates, nous allons nous intéresser beaucoup plus aux équations intégrales linéaires de la forme

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

qui sont des exemples typiques. Dans ces équations la fonction  $\varphi$  est l'inconnue, la fonction  $k(x,t)$  qui s'appelle noyau avec le terme libre  $f$  sont données. Sous une autre forme simple en termes d'opérateurs, l'équation précédente s'écrit sous la forme

$$\varphi - A\varphi = f$$

Les équations intégrales sont une des branches les plus importantes des mathématiques, parmi lesquelles les équations intégrales linéaires de Volterra.

Ces équations apparaissent dans de nombreuses applications scientifiques comme : la biologie, la chimie quantique ou la physique.

Ce mémoire contient trois chapitres.

Le premier, contient les définitions de base et les outils mathématiques qui sont nécessaires pour une bonne compréhension de la suite des problèmes traités.

La seconde partie, traite de la résolution des équations intégrales par les Méthodes de projection :

Notre objectif dans le troisième chapitre est de rendre accessible les idées que nous avons présentées dans le chapitre précédent. Nous allons réaliser d'une manière détaillée certaines méthodes numériques: Polynômes de Touchard et Polynômes Legendre pour la résolution approchée des équations intégrales de Volterra de seconde espèce et en faisant des comparaisons.

# Chapitre 1

## Rappels et notions fondamentales

Il est commode dans ce chapitre brièvement les notions des espaces fonctionnels .Nous rapploons quelques définitions et propriétés de base dont nous aurions besoin dans la suite de ce travail.

### 1.1 Notions sur les espaces fonctionnelles

L'étude des équations intégrales nécessite l'utilisation des espaces fonctionnels, tels que les espaces de Banach ou de Hilbert.

#### 1.1.1 Espaces Normés

**Définition 1.1.1** Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $E$  est dit espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme  $\|\cdot\|$  définie sur  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  telle que  $\forall x, y \in E$  et  $\forall \lambda \in \mathbb{k}$  la fonction  $\|\cdot\|$  vérifie les relations suivantes:

- $\|x\| = 0 \implies x = 0$ ,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

### 1.1.2 Espaces de Banach

**Définition 1.1.2** Un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  est dit complet, si toute suite de Cauchy  $(x_n)$  d'éléments de  $E$  est convergente dans  $E$ .

Autrement dit:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall p, q \geq N_\varepsilon$ , on a  $\|x_p - x_q\| < \varepsilon$ , implique l'existence d'un élément  $x \in E$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

**Définition 1.1.3** On appelle espace de Banach  $(E, \|\cdot\|)$  tout espace vectoriel normé et complet.

### 1.1.3 Espaces de Hilbert

**Définition 1.1.4** (produit scalaire). On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel  $E$  une application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$  telle que pour tout  $x, y, z \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{k}$

1.  $\langle x, x \rangle \geq 0$
2.  $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$
3.  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
4.  $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
5.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

**Définition 1.1.5** Un espace de Hilbert  $H$  est un espace complet par rapport à la norme induite par le produit scalaire.

**Exemple 1.1.1** L'espace  $L^2([a, b])$  des fonctions de carré intégrables défini par

$$L^2([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(t)|^2 dt$$

induite par le produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

est un espace de Hilbert.

## Orthogonalité

**Définition 1.1.6** (Vecteurs orthogonaux) On dit que deux vecteurs  $x$  et  $y$  d'un espace de Hilbert  $H$  sont orthogonaux si:

$$\langle x, y \rangle = 0$$

On note  $x \perp y$

### Base hilbertiennes

**Définition 1.1.7** Une partie  $G$  de  $H$  est dite dense dans  $H$  si:

$$\forall h \in H, \forall \varepsilon > 0, \exists g \in G; \|g - h\| < \varepsilon$$

Ou de manière équivalente si tout  $h$  de  $H$  est limite d'une suite  $(g_n)$  d'éléments de  $G$  telle que  $\|g_n - h\| \rightarrow 0$

**Définition 1.1.8** Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $F = (e_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs. On dit que  $F$  est une base de Hilbert (Ou bien base hilbertienne) de  $H$  si:

$$1. F \text{ est une famille orthonormée de } H, \text{ c'est-à-dire: } \begin{cases} \forall (i, j) \in I^2 & \langle e_i, e_j \rangle = 0, \text{ si } i \neq j \\ & \langle e_i, e_j \rangle = 1, \text{ si } i = j \end{cases}$$

2. La famille  $F$  est de plus complète ou total, c'est-à-dire:

$H = \text{vect}(e_i) \iff$  l'ensemble des combinaisons linéaires finies des éléments de  $F$  est dense dans  $H$

## 1.2 Notions sur les opérateurs

### 1.2.1 Opérateurs linéaires

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels, une application  $A : E \rightarrow F$  est appelée opérateur linéaire si :

Pour tout  $x, y$  de  $E$  et  $\alpha, \beta$  de  $\mathbb{k}$  ( $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ )

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

Rappelons les deux espaces fondamentaux associés à un opérateur linéaire :

- Le noyau de  $A$  est le sous-espace de  $E$  :  $N(A) = \{x \in E, Ax = 0\}$
- L'image de  $A$  est le sous-espace de  $F$  :  $R(A) = \{y \in F \text{ il existe } x \in E, Ax = y\}$

Un opérateur  $A : E \longrightarrow F$  est dit de rang fini si et seulement si son image  $R(A)$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $F$ .

### 1.2.2 Opérateurs bornés

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces normés. Un opérateur linéaire  $A : E \longrightarrow F$  est continu s'il existe une constante  $C > 0$  telle que:

$$\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E, \text{ pour tout } x \text{ de } E$$

En utilisant la linéarité de l'opérateur  $A$ , il est facile de voir que  $A$  est borné si et seulement si

$$\|A\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < \infty$$

le nombre  $\|A\|$  est appelé la norme de  $A$ .

On note par  $\mathcal{L}(E, F)$  : l'espace des opérateurs linéaires bornés de  $E$  dans  $F$ .

**Remarque 1.2.1** *Si  $E$  et  $F$  deux espaces normés. L'espace  $\mathcal{L}(E, F)$  est un espace normé, de plus cet espace est de Banach si  $F$  l'est.*

**Définition 1.2.1** *Un opérateur linéaire est continu si et seulement si il est borné.*

**Remarque 1.2.2** *Tout opérateur linéaire  $A : E \longrightarrow F$  d'un espace normé de dimension finie  $E$  dans un espace  $F$  est borné.*

### 1.2.3 Opérateur Adjoint

Soit  $H_1$  et  $H_2$  deux espaces de Hilbert, soit  $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ , Alors il existe un unique opérateur  $A^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ , tel que

$$\text{pour tout } u \in H_1, v \in H_2; \langle Au, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle$$

Cet opérateur est appelé l'adjoint de  $A$ .

En dimension finie, les opérateurs auto-adjoints sont ceux qui ont une matrice symétrique.

**Définition 1.2.2** On dit que deux opérateurs  $A : C[a, b] \longrightarrow C[a, b]$  et  $B : C[a, b] \longrightarrow C[a, b]$  sont adjoints s'ils vérifient:

$$\forall(\varphi, \psi) \in C[a, b]^2, \quad \langle A\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, B\psi \rangle$$

et on note l'adjoint de  $A$  par  $A^* = B$

### 1.2.4 Opérateur compact

**Définition 1.2.3** Soit  $E$  et  $F$  deux espaces normés,  $A$  un opérateur linéaire de  $E$  dans  $F$ , on dit que  $A$  est un opérateur compact si l'image par  $A$  de la boule unité  $B(0;1)$  de  $E$  est relativement compacte dans  $F$ , i.e. si  $A(B(0;1))$  est compacte.

Autrement dit,  $A$  est compact si et seulement si pour toute suite  $(\varphi_n)$  bornée dans  $E$  la suite  $(A\varphi_n)$  admet une sous-suite convergente.

Notons par  $K(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des opérateurs linéaires compacts de  $E$  dans  $F$ .

**Remarque 1.2.3** Tout opérateur compact est borné

**Proposition 1.2.1** Le produit  $AB$  de deux opérateurs bornés  $A$  et  $B$  est compact si l'un d'eux  $A$  ou  $B$  est compact

### 1.2.5 Opérateurs fermés

Un opérateur  $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$  est dit fermé si et seulement si pour toute suite  $(\varphi_n) \in H_1$  telle que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_n) = x \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} A\varphi_n = y, \text{ on a alors } x \in H_1 \text{ et } y = Ax$$

**Théorème 1.2.1** (Théorème du graphe fermé) Si l'opérateur fermé  $A$  est défini sur tout l'espace  $H_1$ , alors  $A$  est borné.

est un opérateur intégral de noyau  $k$ .

# Chapitre 2

## Opérateurs intégraux et équations intégrales

### 2.1 Opérateurs intégraux

Les opérateurs intégraux constituent des objets fondamentaux en analyse fonctionnelle, où ils permettent notamment de transformer les équations fonctionnelles en une version plus simple afin de les résoudre facilement. Ils interviennent dans plusieurs domaines tels que les équations aux dérivées partielles, et les équations intégrales, etc ...

**Définition 2.1.1** Soit  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  un sous-ensemble compact,  $k : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. L'opérateur  $A : C(\Omega) \longrightarrow C(\Omega)$  défini par:

$$A\varphi(x) = \int_{\Omega} k(x, y)\varphi(y)dy, \quad x \in \Omega$$

est appelé opérateur intégral et  $k(x, t)$  le noyau de l'opérateur intégral.

Soit  $k$  une fonction de  $L^2([a, b] \times [c, d])$ . L'opérateur  $A : L^2([a, b]) \longrightarrow L^2([c, d])$  défini par:

$$A\varphi(x) = \int_c^d k(x, y)\varphi(y)dy, \quad x \in [a, b]$$

est un opérateur intégral de noyau  $k$ :

Soit  $k$  une fonction de l'espace  $L^2([a, b] \times [c, d])$ . L'opérateur

$$A\varphi(x) = \int_c^d k(x, y)\varphi(y)dy, \quad x \in [a, b]$$

est bien défini en tant qu'opérateur de  $L^2([a, b])$  dans  $L^2([c, d])$ .

Soit  $T$  l'opérateur intégral de noyau  $k$ . L'opérateur adjoint  $A^*$  est un opérateur intégral de noyau  $k^*$ , avec

$$k^*(x, y) = k(y, x)$$

L'opérateur intégral  $A$  de noyau  $k$  est auto-adjoint si, et seulement si, le noyau  $k$  est symétrique :

$$k(x, y) = k(y, x), \text{ pour tout } (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$$

Soit  $k$  une fonction de l'espace  $L^2([a, b] \times [c, d])$ . L'opérateur intégral  $A$  de noyau  $k$  est compact de  $L^2([a, b])$  dans  $L^2([c, d])$

## 2.2 Equations intégrales linéaires

Les équations intégrales ont un caractère fort différent des équations différentielles que l'on rencontre dans la plus part des phénomènes physiques.

Les équations intégrales linéaires les plus fréquemment utilisées sont les équations intégrales de Volterra et celles de Fredholm.

### 2.2.1 Equations intégrales de Fredholm

On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x, y)\varphi(y)dy = f(x) \tag{2.2.1}$$

où  $\varphi(x)$  est une fonction inconnue et  $k(x, t)$  et  $f(x)$  sont des fonctions connues. Une équation de la forme

$$\int_a^b k(x, y)\varphi(y)dy = f(x)$$

est appelée une équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce.

Si  $f(x) \neq 0$  l'équation (2.2.1) est dite non homogène, si non l'équation 2.2.1) est dite homogène.

## 2.2.2 Equations intégrales de Volterra

Une équation à une inconnue  $\varphi(x)$  de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x, y)\varphi(y)dy = f(x) \quad (2.2.2)$$

est appelée équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce,

Si  $f(x) = 0$ , l'équation (2.2.2) s'écrit

$$\varphi(x) - \int_a^x k(x, y)\varphi(y)dy = f(x)$$

et s'appelle équation homogène de Volterra de seconde espèce.

Une équation à une inconnue  $\varphi(x)$  de la forme

$$\int_a^x k(x, y)\varphi(y)dy = f(x)$$

est appelé équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce .

## 2.2.3 Equations intégrales de Volterra-Fredholm

Le formulaire standard de l'équation intégrale volterra-Fredholm est donné par:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x, y)\varphi(y)dy + \int_a^b k_2(x, y)\varphi(y)dy$$

où  $k_1(x, t)$  et  $k_2(x, t)$  sont les noyaux de l'équation

**Exemple 2.2.1**

$$\varphi(x) = 2x - \int_0^x (x-y)\varphi(y)dy + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\varphi(y)dy$$

$$\varphi(x) = \sin x - \cos x - \int_0^x \varphi(y)dy + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(y)dy$$

**2.2.4 Equations intégrales singulières**

Une équation intégrale singulières est défini comme intégrale avec les limites d'intégration infinies ou lorsque le noyau de l'intégrale devient sans limite à un certain point dans l'intervalle

la forme standard de cette équation est :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y)\varphi(y)dy$$

**2.2.5 Equations intégro-différentielle**

Une équation intégro-différentielle (E.I.D) est une équation composée de deux opérations- Bintégrales et différentielles dont la fonction inconnue est  $\varphi$ ,

**Equations intégro-différentielle de volterra:**

**Définition 2.2.1** On appelle équation intégro-différentielle de Volterra une équation de la forme :

$$\varphi^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,y)\varphi(y)dy$$

ou

$$\varphi^{(k)}(x) = \frac{d^k \varphi(x)}{dx^k}, k = 1, 2, 3...n$$

D'autres dérivés d'ordre inférieur peuvent apparaître avec  $\varphi^{(k)}$  sur le côté gauche

**Equation intégral-différentielle de Fredholm:**

**Définition 2.2.2** On appelle équation intégral-différentielle de Fredholm une équation de la forme :

$$\varphi^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, y)\varphi(y)dy$$

où

$$\varphi^{(k)}(x) = \frac{d^k \varphi(x)}{dx^k}, k = 1, 2, 3 \dots n$$

D'autres dérivés d'ordre inférieur peuvent apparaître avec  $\varphi^{(k)}$  sur le côté gauche.

**Equations intégral-différentielle de Volterra-Fredholm:**

$$\varphi^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k_1(x, y)\varphi(y)dy + \int_a^b k_2(x, y)\varphi(y)dy$$

où

$$\varphi^{(k)}(x) = \frac{d^k \varphi(x)}{dx^k}, k = 1, 2, 3 \dots n$$

D'autres dérivés d'ordre inférieur peuvent apparaître avec  $\varphi^{(k)}$  sur le côté gauche.

## 2.3 Existence et unicité de la solution de E.I.V de seconde espèce

Dans cette section, on étudie l'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale de volterra de seconde espèce

**Définition 2.3.1 (opérateur contractant).** Soient  $H$  est un espace de Hilbert et  $A$  un opérateur borné, l'opérateur  $A$  est dit opérateur contractant s'il existe une constante  $k$  telle que :

$$0 < k < 1, \text{ et } \| A\varphi_1 - A\varphi_2 \| \leq k \| \varphi_1 - \varphi_2 \|, \text{ pour tout } \varphi_1, \varphi_2 \in H$$

**Théorème 2.3.1** Soit  $A$  un opérateur contractant dans un espace de Hilbert  $H$ , alors l'équation

$$A\varphi = \varphi$$

admet une solution unique  $\varphi$  dans  $H$ , cette solution est le point fixe de cet opérateur.

**Preuve.** Voir [1] ■

**Théorème 2.3.2** Soit  $H$  est un espace de Hilbert et  $A$  un opérateur borné dans  $H$  avec la propriété suivante

$$\| A\varphi_1 - A\varphi_2 \| \leq k \| \varphi_1 - \varphi_2 \|$$

alors l'équation suivante

$$\varphi - \lambda A\varphi = f$$

admet une solution unique pour toute  $f \in H$  à condition que  $|\lambda|$  est petit.

**Preuve.** Voir [1] ■

**Théorème 2.3.3** [3] Pour toute fonction  $f \in C([a, b])$ , l'équation linéaire de volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) - \int_a^x k(x; y)\varphi(y)dy = f(x), \quad x \in [a, b] \quad (2.3.1)$$

avec un noyau  $k(x, y)$  continu, a une solution unique  $\varphi \in C([a, b])$ .

**Preuve.** On prolonge le noyau  $k(x, y)$  sur  $[a, b] \times [a, b]$  en posant  $k(x, y) = 0$  pour  $y > x$ .

Alors le noyau  $k(x, y)$  est continu pour  $x \neq y$  et

$$|k(x, y)| \leq M = \max_{a \leq t \leq x \leq b} |k(x, y)| \quad \text{pour } x \neq y$$

Soit  $\varphi \in C([a, b])$  une solution de l'équation homogène

$$\varphi(x) - \int_a^x k(x, y)\varphi(y)dy = 0, \quad x \in [a, b],$$

On montre que:

$$|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_\infty \frac{M^n(x-a)^n}{n!}, x \in [a, b], \text{ pour } n = 1, 2, \dots, n \quad (2.3.2)$$

Il est clair que cette inégalité est vrai pour  $n = 0$ , supposons que l'inégalité(2.3.2) est vérifiée pour  $n \geq 0$ . Alors

$$|\varphi(x)| = \left| \int_a^x k(x, y)\varphi(y)dy \right| \leq \|\varphi\|_\infty \frac{M^{n+1}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Par passage à la limite  $n \rightarrow \infty$  dans on obtient  $\varphi(x) = 0$  pour tout  $x \in [a, b]$ ,

comme l'opérateur de volterra est compact et à l'aide du théorème de Riesz alors l'équation(??) admet une solution unique. ■

## 2.4 Polynomes orthogonaux

Les Polynomes orthogonaux ont une grande importance en analyse numérique et en physique mathématique, ils ont été utilisés beaucoup plus ces derniers années à cause de leurs importance dans les applications .

Dans cette section nous rappelons quelques polynomes orthogonaux

**Définition 2.4.1** Soit  $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$  et  $w$  une fonction sur  $\mathbb{R}$  telle que l'application

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_P[X]^2, \langle P, Q \rangle = \int_a^b P(t)Q(t)w(t)dt$$

définisse un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_P[X]$

**Définition 2.4.2** (orthogonalité) On dit que la famille de polynomes  $(P_i)_{i \geq 0}$  à coefficients réels est une famille de polynomes orthogonaux sur  $[a, b]$  si

$$\langle P_i, P_j \rangle = \int_a^b P_i(x)P_j(x)dx = 0, \text{ pour tout } i \neq j$$

Généralement on dit que la famille de polynomes  $(P_i)_{i \geq 0}$  est une famille de polynomes orthogonaux sur  $[a, b]$  avec poids  $\omega$  si

$$\langle P_i, P_j \rangle = \int_a^b P_i(x)P_j(x)\omega(x)dx = 0, \quad \forall i \neq j$$

La famille  $(P_i)_{i \geq 0}$  est orthonormale si

$$\langle P_i, P_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

### 2.4.1 Polynomes de Tchebyshev $T_n$

**Définition 2.4.3** Les polynomes de Tchebyshev  $T_n(x)$  de première espèce d'ordre  $n$  donnés par la formule suivante

$$T_n(x) = n/2 \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}.$$

Les premiers polynomes sont

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T_6(x) = 32x^5 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

#### Quelques propriétés

1. Les polynomes de Tchebyshev  $T_n$  satisfait la relation de récurrence

$$\begin{cases} T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \\ T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \end{cases} \quad \forall n \geq 1$$

2. Les polynomes de Tchebyshev  $T_n(x)$  sont solutions de l'équation différentielle

$$(1 - x^2)T_n'' - xT_n' + n^2T_n = 0$$

3. Les polynômes de Tchebyshev sont des polynômes orthogonaux relativement à la fonction de poids  $w$  définie sur l'intervalle  $[-1, 1]$

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

**Définition 2.4.4** Les Polynomes de Tchebyshev de seconde espèce  $T_n$  donnés par la formule suivante

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(n-k)!}{k!n(n-2k)!} (2x)^{n-2k}$$

les premiers polynomes sont

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= 2x, \\ T_2(x) &= 4x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 8x^3 - 4x, \end{aligned}$$

### Quelques propriétés

1.  $T_n$  satisfait la relation de récurrence

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \\ T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = 2x \end{array} \right. \quad \forall n \geq 1$$

2.  $T_n(x)$  sont solutions de l'équation différentielle

$$(1 - x^2)T_n'' - 3xT_n' + n(n+2)T_n = 0$$

3. Les polynomes  $T_n$  orthogonaux sur  $L_2([-1, 1], \sqrt{1-x^2}dx)$

### 2.4.2 Polynomes d'Hermite $H_n$

**Définition 2.4.5** Les Polynomes de base d'Hermite  $H_n(x)$  de degré  $n$  sont définis sur l'intervalle  $[-1, 1]$  par

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2), n = 0, 1, 2, \dots, n$$

Les premiers polynomes d'Hermite sont les suivants

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, \\ H_1(x) &= 2x, \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2, \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12, \end{aligned}$$

**Quelques propriétés :**

1. Relation de récurrence

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

2. L'équation différentielle

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$$

### 2.4.3 Polynômes de Laguerre $P_n$

Les polynômes de Laguerre sont des polynômes orthogonaux qui sont les solutions d'une certaine équation différentielle, appelée équation de Laguerre, d'après le mathématicien français Edmond Laguerre.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k n!}{(k!)^2 (n-k)!} x^k, \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ et } x \in [0, \infty[$$

Les cinq premiers polynômes de Laguerre sont donnés par:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= -x + 1, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2!}(x^2 - 4x + 2), \\ P_3(x) &= \frac{1}{3!}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6), \\ P_4(x) &= \frac{1}{4!}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24) \end{aligned}$$

**Quelques propriétés :**

1. Relation de récurrence

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1-x)P_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

2. L'équation différentielle

$$xP_n''(x) + (1-x)P_n'(x) + nP_n(x) = 0$$

#### 2.4.4 Polynômes de Legendre $L_n$

Les polynômes de Legendre  $L_n(x)$  sont définies sur l'intervalle  $[-1, 1]$  par:

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n x}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad n \geq 0$$

Les premiers de ces polynômes sont :

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, \\ L_1(x) &= x, \\ L_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ L_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ L_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\ L_5(x) &= \frac{1}{16}(231x^5 - 315x^3 + 105x - 5), \end{aligned}$$

**Quelque propriétés :**

1. Relation de récurrence

$$(n + 1)L_{n+1}(x) = (2n + 1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x) \quad \forall n \geq 1$$

2. Equation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

3.

a) Les  $L_i(x)$  sont définis sur  $[-1, +1]$ .

b) Toutes les racines de  $L_i(x) \in [-1, 1]$

c) Toutes les racines sont réelles.

d) Toutes les polynomes  $L_i(x)$  sont orthogonaux deux à deux.

### 2.4.5 Polynômes de Touchard

Les polynômes de Touchard, étudiés en (1939) par Jacques Touchard, également appelés polynômes exponentiels, comprennent une séquence polynomiale de type binomial.

Les polynômes de Touchard sont définis sur l'intervalle  $[0, 1]$  par

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \left( \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k \right)$$

Les premiers polynômes de ces polynomes sont

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_2(x) = 1 + 2x + x^2,$$

$$T_3(x) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3,$$

$$T_4(x) = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4,$$

$$T_5(x) = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5,$$

### Représentation matricielle

Étant donné les polynômes de Touchard, nous pouvons écrire

$$T(x) = c_0 T_0(x) + c_1 T_1(x) + \dots + c_n T_n(x) \quad (2.4.1)$$

où  $c_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$  sont des coefficients inconnus à déterminer. Il est facile à écrire (2.4.1) sous forme de produit de deux vecteurs

$$T(x) = [T_0(x) \ T_1(x) \ T_2(x) \dots \ T_n(x)] \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} \quad (2.4.2)$$

Nous pouvons convertir l'équation (2.4.2) sous la forme

$$T(x) = XAC$$

où

$$X = [1 \ x \ x^2 \dots x^n], \quad A = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & \dots & a_{0,n} \\ 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$T(x) = [1 \ x \ x^2 \dots x^n] \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & \dots & a_{0,n} \\ 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} \quad (2.4.3)$$

où  $a_{i,j}$  sont les coefficients de la base de puissance utilisés pour déterminer les polynômes de Touchard. Nous notons que la matrice dans ce cas est triangulaire supérieure.

Dans le cas ( $n = 1$ ), la représentation matricielle est

$$T(x) = [1 \ x] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} \quad (2.4.4)$$

Dans le cas ( $n = 2$ ), la représentation matricielle est

$$T(x) = [1 \ x \ x^2] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (2.4.5)$$

Dans le cas ( $n = 3$ ), la représentation matricielle est

$$T(x) = [1 \ x \ x^2 \ x^3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (2.4.6)$$

Dans le cas ( $n = 4$ ), la représentation matricielle est

$$T(x) = [1 \ x \ x^2 \ x^3 \ x^4] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad (2.4.7)$$

Et dans le cas ( $n = 5$ ), la représentation matricielle est

$$T(x) = [1 \ x \ x^2 \ x^3 \ x^4 \ x^5] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} \quad (2.4.8)$$

# Chapitre 3

## Résolution numérique des équations intégrales de volterra de seconde espèce:

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la méthode polynomiale de type Touchard et la méthode polynomiale de type Legendre pour résoudre l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

### 3.1 Résolutions de l'équation intégrale de volterra de seconde espèce par les Polynômes de Touchard

Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k(x, y)\varphi(y)dy \quad a \leq y \leq x \leq b \quad (3.1.1)$$

où

$k(x, y)$ ,  $f(x)$  sont des fonctions données,  $\varphi(x)$  est une fonction inconnue à déterminer,

Pour déterminer une solution approximative de l'équation (3.1.1),  $\varphi(x)$  est approximée dans les polynômes de Touchard sur  $[a, b]$ .

Maintenant l'équation (2.4.1) devient

$$\varphi(x) = c_0 T_0(x) + c_1 T_1(x) + \dots + c_n T_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i T_i(x) \quad (3.1.2)$$

où  $c_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$  sont des coefficients inconnus à déterminer. Appliquons la méthode des polynômes de Touchard en substituant l'équation (3.1.2) dans l'équation (3.1.1) on trouve.

$$\sum_{i=0}^n c_i T_i(x) = f(x) + \int_a^x k(x, y) \sum_{i=0}^n c_i T_i(y) dy, \quad (3.1.3)$$

d'où

$$[1 \ x \ x^2 \dots x^n] \cdot \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & \dots & a_{0,n} \\ 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} \\ = f(x) + \int_a^x k(x, y) [1 \ y \ y^2 \dots y^n] \cdot \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & \dots & a_{0,n} \\ 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} dy \quad (3.1.4)$$

les  $x_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$  étant choisis comme points distincts appropriés en  $[a, b]$ , alors on a une équation linéaire avec  $n+1$  inconnus  $c_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ . Enfin l'équation (3.1.4) représente le système de  $n + 1$  équations linéaires en  $n + 1$  inconnus.

Maintenant, les inconnus  $c_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$  sont déterminés en résolvant le système (3.1.4). Remplacer ces valeurs des coefficients dans l'équation (3.1.2), on obtient la solution approximative  $\varphi(t)$ .

## 3.2 Résolutions de l'équation intégrale de volterra de seconde espèce par les Polynômes de Legendre

Notre objectif est de trouver une solution approchée à la solution exacte de l'équation de volterra de second espèce en utilisant les polynomes de Legendre

Soit l'équation de volterra de second espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x k(x, y)\varphi(y)dy, \quad 0 \leq y \leq x \leq 1], \quad (3.2.1)$$

posons

$$\varphi(x) \simeq \sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(x) \quad (3.2.2)$$

où  $L_i(x)$  sont les polynomes de Legendre et  $\alpha_i, i = 0, 1, \dots, n$  sont des inconnus à déterminer.

On remplace (3.2.2) dans l'équation (3.2.1), il vient

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(x) \simeq f(x) + \int_0^x k(x, y) \sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(y) dy$$

Posons

$$R_n(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(x) - \int_0^x k(x, y) \sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(y) dy - f(x)$$

Pour résoudre ce système, il faut déterminer les racine des  $j^{\text{ème}}$  polynomes de Legendre tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

et les  $x_j$  sont des racine de  $j^{\text{ème}}$  polynomes de Legendre alors,

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(x_j) \simeq f(x_j) + \int_0^{x_j} k(x_j, y) \sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(y) dy \quad j = 0, 1, \dots, n$$

puisque les  $x_j \in ]1, 1[$ , donc il faut utilisé un changement de variable.

On pose

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{x_j(1+t)}{2} \implies dy = \frac{x_j}{2} dt \\ y(1) &= 0, \quad y(t) = x_j \end{aligned}$$

D'après ce changement on obtient

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(x_j) \simeq f(x_j) + \frac{x_j}{2} \sum_{i=0}^n \alpha_i \int_{-1}^1 k(x_j, \frac{x_j(1+t)}{2}) L_i(\frac{x_j(1+t)}{2}) dt, \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (3.2.3)$$

En utilisant la méthode de Gauss-Legendre pour approches l'intégrale par une somme finie, c'est-à-dire

$$\int_{-1}^1 k(x_j, \frac{x_j(1+t)}{2}) L_i(\frac{x_j(1+t)}{2}) dt \simeq \sum_{k=1}^n \omega_k k(x_j, \frac{x_j(1+x_k)}{2}) L_i(\frac{x_j(1+x_k)}{2}) \quad (3.2.4)$$

On remplace (3.2.4) dans l'équation(3.2.3) on obtient

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(x_j) \simeq f(x_j) + \frac{x_j}{2} \sum_{i=0}^n \alpha_i \sum_{k=1}^n \omega_k k(x_j, \frac{x_j(1+x_k)}{2}) L_i(\frac{x_j(1+x_k)}{2}), \quad j = 0, 1, \dots, n$$

$$f(x_j) \simeq \sum_{i=0}^n \alpha_i [L_i(x_j) - \frac{x_j}{2} \sum_{k=1}^n \omega_k k(x_j, \frac{x_j(1+x_k)}{2}) L_i(\frac{x_j(1+x_k)}{2})], j = 0, 1, \dots, n$$

Notons que

$$\begin{aligned} L_i(x_j) &= L_{ij}, \quad f(x_j) = f_j, \\ k(x_j, \frac{x_j(1+x_k)}{2}) &= k_{j \frac{j(1+k)}{2}}, \\ L_i(\frac{x_j(1+x_k)}{2}) &= L_{i \frac{j(1+k)}{2}} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i [L_{ij} - \frac{j}{2} \sum_{k=1}^n \omega_k k_{j \frac{j(1+k)}{2}} L_{i \frac{j(1+k)}{2}}] \simeq f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (3.2.5)$$

Le système (??) s'écrit sous la forme

$$AX = B$$

où

$$A = [L_{ij} - \frac{j}{2} \sum_{k=1}^n \omega_k k_{j \frac{j(1+k)}{2}} L_{i \frac{j(1+k)}{2}}]_{j=0}^n, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

$$B = f_j, \quad X = \alpha_i,$$

### 3.3 Exemples illustratifs

**Exemple 1.** Considérons l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) - \int_0^x (x-y) \varphi(y) dy = 2 \exp(x) - x - 2,$$

où  $0 \leq x, y \leq 1$ , et la fonction  $f$  est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = x \exp(x).$$

**Table 1.** Nous présentons les deux solutions approchées,  $\varphi_T$  et  $\varphi_{CL}$  de la solution exacte  $\varphi_{ex}(x)$  obtenues par la méthode de Touchard et de la méthode de Collocation-Legendre respectivement, en certains points arbitraires, l'erreur est calculée pour  $N = 10$

Val de $x$	Solex $\varphi_{ex}$	Solap $\varphi_T$	Error $_T$	Solap $\varphi_{CL}$	Error $_{CL}$
0.000	0	-3.9090e-17	3.9090e-17	1.3045e-09	1.3045e-09
1.0000e-01	1.1052e-01	1.1052e-01	6.4809e-15	1.1052e-01	1.3794e-09
2.0000e-01	2.4428e-01	2.4428e-01	1.6515e-14	2.4428e-01	1.3687e-09
3.0000e-01	4.0496e-01	4.0496e-01	2.5702e-14	4.0496e-01	1.3173e-09
4.0000e-01	5.9673e-01	5.9673e-01	3.5749e-14	5.9673e-01	1.2679e-09
5.0000e-01	8.2436e-01	8.2436e-01	4.6185e-14	8.2436e-01	1.2457e-09
6.0000e-01	1.0933e+00	1.0933e+00	5.7065e-14	1.0933e+00	1.2399e-09
7.0000e-01	1.4096e+00	1.4096e+00	6.8390e-14	1.4096e+00	1.1800e-09
8.0000e-01	1.7804e+00	1.7804e+00	7.9936e-14	1.7804e+00	9.0268e-10
9.0000e-01	2.2136e+00	2.2136e+00	9.3703e-14	2.2136e+00	1.0517e-10
1.0000	2.7183e+00	2.7183e+00	1.0392e-13	2.7183e+00	1.7211e-09

**Example 2.** Considérons l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce

$$\varphi(x) - \int_0^x (x-y)\varphi(y)dy = x,$$

où  $0 \leq x, y \leq 1$ , et la fonction  $f$  est choisie de telle sorte que la solution exacte soit donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = \sin x.$$

**Table 2.** Nous présentons les deux solutions approchées,  $\varphi_T$  et  $\varphi_{CL}$  de la solution exacte  $\varphi_{ex}(x)$  obtenues par la méthode de Touchard et de la méthode de Collocation -Legendre respectivement, en certains points arbitraires, l'erreur est calculée pour  $N = 10$

---

Val de $x$	Solex $\varphi_{ex}$	Solap $\varphi_T$	Error $_T$	Solap $\varphi_{CL}$	Error $_{CL}$
0.000	0	-1.3495e-16	1.3495e-16	-3.3494e-10	3.3494e-10
1.0000e-01	9.9833e-02	9.9833e-02	5.5511e-16	9.9833e-02	2.756633e-10
2.0000e-01	1.9867e-01	1.9867e-01	9.7145e-16	1.9867e-01	1.7738e-10
3.0000e-01	2.9552e-01	2.9552e-01	1.5543e-15	2.9552e-01	5.3847e-11
4.0000e-01	3.8942e-01	3.8942e-01	1.7764e-15	3.8942e-01	8.7630e-11
5.0000e-01	4.7943e-01	4.7943e-01	2.2204e-15	4.7943e-01	2.4758e-10
6.0000e-01	5.6464e-01	5.6464e-01	2.4425e-15	5.6464e-01	4.2996e-10
7.0000e-01	6.4422e-01	6.4422e-01	3.2196e-15	6.4422e-01	6.3043e-10
8.0000e-01	7.1736e-01	7.1736e-01	3.2196e-15	7.1736e-01	8.1658e-10
9.0000e-01	7.8333e-01	7.8333e-01	3.7748e-15	7.8333e-01	9.0012e-10
1.0000	8.4147e-01	8.4147e-01	3.3307e-15	8.4147e-01	7.0216e-10

## Conclusion

Dans ce mémoire nous avons présenté la résolution numérique des équations intégrales de volterra de deuxième espèce par deux méthodes: méthode de collocation basé sur le polynôme de legendre,et le polynome de Touchard. On a illustré à la fin de notre mémoire par des exemples avec la programmation par logiciel de calcul numérique MATLAB, où on a estimé les erreurs pour les deux méthodes, et de comparer les solutions approchées avec la solution exacte.

# Bibliographie

- [1] M.NADIR.Cours d'analyse fonctionnelle ,université de M'sila Algérie 2004
- [2] N.DJAIDJA Etude des équations intégrales de volterra de première espèce en utilisant les techniques des splines,Thèse de doctorat,Université de M'sila.
- [3] R. Kress, Linear Integral Equations.3rd ed, Springer Science & Business Media, New York, 2014.
- [4] M.Nadir, Operators Theory Courses, université de M'sila, 2017.  
<http://www.mostefanadir.com/Operators%20Theory.ht>
- [5] M.Nadir, Functional Analysis Courses, université de M'sila, 2017.  
<http://www.mostefanadir.com/Functional%20Analysis.htm>
- [6] Abdullah 2020 J. Phys. Conf. Ser. 1591 012047, Laguerre and Touchard Polynomials for Linear Volterra Integral and Integro Differential Equations
- [7] M.Sc Jalil Talab Abdullah, A numerical Solution of the Integral Equations, Article-March 2016
- [8] Prem K. Kythe, Pratap Puri (auth.) - Computational Methods for Linear Integral Equations-Birkhäuser Basel (2002)
- [9] W,Abdul.Majid. A first course in integral equations,second edition,World Scientific,2015.
- [10] Abdul.MajidWazwaz, linear and Nonlinear intégral équations Méthods and Applications, Higher Education press, Beijin and springer-Verlag Berlim Heidelberg 2011.

- [11] A. Rahmoune, Sur la Résolution Numérique des Équations Intégrales en utilisant des Fonctions Spéciales, Thèse de Doctorat, Université de M'sila, 2011
- [12] MIMOUNE Khaoula, Equations Intégrales Linéaires de Volterra de Seconde Espèce et Méthode de Galerkinge, Mémoire de Master, Université de Biskra, 2019.