



**UNIVERSITE DE M'SILA**  
**FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE**

**Département De Mathématiques**

**MEMOIRE DE FIN D'ETUDE**

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière** : Mathématiques

**Option** : Fondamentales et Appliquées

**par**

**ALOUACHE Keltoum**

**Sujet**

**Résolution des équations intégrales par polynômes de  
Legendre**

**Devant le jury composé de :**

RAHMOUNE Azedine	M.C.A	Univ.BBA	Président
NADIR Mostefa	Prof	Univ.M'sila	Rapporteur
LAKEHALI Belkacem	M.A.A	Univ.M'sila	Co-Rapporteur
DJaidja Noui	M.A.A	Univ.M'sila	Examineur

**Promotion : 2014/2015**

---

# Notations

$\Omega$	Ensemble compact
$C(\Omega)$	L'espace des fonctions continue sur l'ensemble compact $\Omega$
$H$	Espace de Hilbert
$\omega(x)$	Fonction de poids
$P_n$	Polynômes orthogonaux
$L_n$	Polynômes de Legendre
$A$	Opérateur intégrale compact
$I$	Opérateur d'identité
$K(x, y)$	Noyau de l'équation intégral
$T$	Opérateur linéaire compact où $T = I - A$
$\mathcal{N}(T)$	Le noyau de l'opérateur $T$
$\mathcal{R}(T)$	L'image de l'opérateur $T$
$T^{-1}$	L'inverse de l'opérateur $T$
$\varphi$	La fonction inconnue dans l'équation intégrale (Solution exacte)
$\tilde{\varphi}$	Solution approchée

## Liste des tableaux

Tableau (1)	page 31
Tableau (2)	page 32
Tableau (3)	page 34
Tableau (4)	page 36
Tableau (5)	page 36
Tableau (6)	page 38
Tableau (7)	page 39

## Liste des figures

Figure (a)	page 11
Figure (b)	page 12
Figure (1)	page 32
Figure (2)	page 33
Figure (3)	page 35
Figure (4)	page 37
Figure (5)	page 38
Figure (6)	page 40

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Rappels d'Analyse fonctionnelle et Numérique</b>	<b>3</b>
1.1 Notions d'analyse fonctionnelle . . . . .	3
1.1.1 Espace normé . . . . .	3
1.1.2 Espace de Banach . . . . .	4
1.1.3 Espace de Hilbert . . . . .	4
1.1.4 Espace $L_2(a, b)$ . . . . .	4
1.2 Polynômes orthogonaux . . . . .	6
1.2.1 Définitions . . . . .	6
1.2.2 Relation de récurrence . . . . .	6
1.2.3 Zéros de polynômes orthogonaux . . . . .	7
1.2.4 Equation différentielle . . . . .	7
1.3 Les polynômes orthogonaux de Legendre . . . . .	7
1.3.1 Quelques propriétés . . . . .	8
1.4 Développement d'une fonction en série de Legendre . . . . .	11
1.5 Méthodes de quadrature de Gauss . . . . .	12
1.5.1 Méthode de Gauss -Legendre . . . . .	13
1.5.2 Formules de Newton-Côtes . . . . .	14
<b>2 Théorie des opérateurs et équations intégrales</b>	<b>15</b>
2.1 Notions fondamentales et définitions . . . . .	15
2.1.1 Compacité dans $C(G)$ . . . . .	15

2.1.2	Opérateurs compact . . . . .	16
2.1.3	Opérateurs intégraux compacts sur $C [I]$ . . . . .	16
2.2	Équations intégrales et leurs classifications . . . . .	17
2.2.1	Équations intégrales de Fredholm . . . . .	18
2.2.2	Équations intégrales de Volterra . . . . .	18
2.2.3	Équations intégrales d'Abel . . . . .	19
2.3	Théorie de Riesz . . . . .	20
2.4	Alternative de Fredholm . . . . .	21
2.5	Méthodes d'approximation pour les équations intégrales . . . . .	22
2.5.1	Méthodes du noyau dégénéré . . . . .	22
2.5.2	Méthodes de projection . . . . .	24
2.5.3	Méthode de Nyström . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Analyse numérique des équations intégrales</b>	<b>28</b>
3.1	Résolution de l'équation de Fredholm par polynôme de Legendre . . . . .	28
3.1.1	Discretisation d'équation intégrale . . . . .	28
3.2	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte . . . . .	31
	<b>Conclusion</b>	<b>41</b>
	<b>bibliography</b>	<b>42</b>

# Introduction

Une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnue, généralement une fonction d'une ou plusieurs variables, s'apparaît sous le signe intégral ( $\int$ ).

Les premières équations intégrales furent obtenues par **Daniel Bernoulli** vers **1730** dans l'étude des oscillations d'une corde tendue. Après l'introduction du noyau de Green, il fallut attendre les dernières années du **XIX<sup>e</sup> siècle**, avec les travaux de **H. A. Schwarz**, de **H. Poincaré**, de **V. Volterra** et sur tout ceux de **I. Fredholm**, pour disposer de résultats généraux en liaison étroite avec les premiers développements de l'analyse fonctionnelle. Quelques années plus tard, l'étude des équations intégrales conduisit **D. Hilbert** à définir l'espace qui porte son nom et à poser les premières bases de la "théorie spectrale".

Les équations intégrales sont le modèle mathématique de beaucoup des problèmes de biologie, de chimie, et elles sont aussi importantes dans plusieurs domaines physiques par exemple les équations de Maxwell sont probablement leurs plus célèbres représentants. Elles apparaissent dans des problèmes des transferts d'énergie radiative et des problèmes d'oscillations d'une corde, d'une membrane ou d'un axe. Ainsi que les équations intégrales ont joué un rôle historique important dans l'élaboration des principaux concepts de l'analyse contemporaine.

L'étude de ce sujet a été répartie sous forme de trois chapitres qui présentent respectivement :

- Le premier chapitre est consacré à une introduction sur l'Analyse fonctionnelle et l'Analyse numérique. On va définir les Polynômes orthogonaux, et les polynômes de Legendre, et l'approximation par série de Legendre, et méthode quadrature de Gauss, Gausse Legendre.
- Le deuxième chapitre présente une introduction à la théorie des operateurs (Compact, intégraux), équations intégrales ainsi que leur classification avec un intérêt particulier pour la théorie de Riesz et l'alternative de Fredholm puis on définit quelques méthodes d'approximation pour ces équation intégrales.
- Le troisième chapitre représente le but de ce mémoire, c'est-à-dire on va résoudre

numériquement des équations intégrales de Fredholm de *2<sup>ème</sup>* espèce par polynôme de Legendre et on va faire une comparaison entre les solutions exactes et les solutions approchés.

# Chapitre 1

## Rappels d'Analyse fonctionnelle et Numérique

### 1.1 Notions d'analyse fonctionnelle

Il est commode dans cette partie d'introduire brièvement les notions des espaces fonctionnels. On vise essentiellement à rappeler quelques définitions et propriétés de base dont nous aurons besoin dans la suite de ce travail.

L'étude de diverse classe des équations intégrales nécessite l'utilisation des espaces fonctionnels, tels que les espaces de *Banach* ou de *Hilbert*.

#### 1.1.1 Espace normé

**Définition 1.1.1** Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $E$  est dit espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme  $\| \cdot \|$  définie sur  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  telle que  $\forall x, y \in E$  et  $\forall \lambda \in \mathbb{k}$  la fonction  $\| \cdot \|$  vérifie les relations suivant :

$$(a). \quad \| x \| > 0 \text{ et } \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(b). \quad \| \lambda x \| = |\lambda| \| x \|$$

$$(c). \quad \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$$

### 1.1.2 Espace de Banach

**Définition 1.1.2** Une suite  $(x_k)_k$  d'éléments d'un espace normé  $E$  est dite suite de

Cauchy si :

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N \geq 1), \forall p, q \geq N \implies \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon.$$

**Définition 1.1.3** On dit qu'un espace normé est complet si pour toute suite de Cauchy est convergente.

**Définition 1.1.4** On appelle espace de Banach tout espace normé complet.

### 1.1.3 Espace de Hilbert

#### ♠ Produit scalaire

**Définition 1.1.5** On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel  $E$  (réel ou complexe) une application :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C} \text{ telle que pour tout } x, y, z \in E \text{ et } \lambda \in \mathbb{k}$$

1.  $\langle x, x \rangle \geq 0$
2.  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
3.  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
4.  $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
5.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$

**Définition 1.1.6** un espace de Hilbert  $E = H$  est un espace complet par rapport à la norme induite par le produit scalaire. En d'autres termes un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme induite par un produit scalaire.

### 1.1.4 Espace $L^2(a, b)$

L'espace  $L^2(I, \mathbb{R})$  des fonctions de carré intégrables défini par :

$$L^2(I, \mathbb{R}) = \left\{ f; \int_I |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

où l'intégrale est prise au sens de Lebesgue, muni de la norme

$$\|f\|^2 = \int_I |f(t)|^2 dt$$

induite par le produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(x) g(x) dx$$

**Remarque 1.1.1**  $L^2(I, \mathbb{R})$  est le seul espace qui est de Hilbert dans l'espace de  $L^p(I, \mathbb{R})$ .

### ♠ Orthogonalité

**Définition 1.1.7** (Vecteurs orthogonaux)

On dit que deux vecteurs  $x$  et  $y$  d'un espace de Hilbert  $H$  sont orthogonaux si :

$$\langle x, y \rangle = 0. \text{ On note } x \perp y$$

### ♠ Base hilbertiennes

**Définition 1.1.8** Une partie  $G$  de  $H$  est dite dense dans  $H$  si :

$$\forall h \in H, \forall \varepsilon > 0, \exists g \in G; \|g - h\| < \varepsilon$$

Ou de manière équivalente si tout  $h$  de  $H$  est limite d'une suite d'éléments  $g_n$  de  $G$  :  $\|g_n - h\| \rightarrow 0$ .

**Définition 1.1.9** Soit  $H$  un espace de Hilbert sur le corps  $\mathbb{k}$  et  $F = (e_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs. On dit que  $F$  est une base de Hilbert (Ou bien base hilbertienne) de  $H$  si :

(1)  $F$  est une famille orthonormée de  $H$ , c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \forall (i, j) \in I^2 \ i \neq j \implies \langle e_i, e_j \rangle = 0 \\ \forall i \in I \ \langle e_i, e_i \rangle = \|e_i\|^2 = 1 \end{cases}$$

(2) La famille  $F$  est de plus complète ou total, c'est-à-dire :

$H = \overline{\text{vect}e_i} \iff$  l'ensemble des combinaisons linéaires finies des éléments de  $F$  est dense dans  $H$ .

## 1.2 Polynômes orthogonaux

Le domaine des polynômes orthogonaux à été développé durant le **XIX<sup>e</sup>** par **Stieltjes**, comme outil de multiples applications en ont découlé en mathématique et en physique.

### 1.2.1 Définitions

Notons  $I$  un intervalle fermé ou non, borné ou non et soit  $\omega : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, strictement positive ( $\omega(x) > 0$  pour tout  $x \in I$ ) est dit fonction de poids telle que l'application

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_p[X]^2 \quad \langle P, Q \rangle = \int_a^b P(x)Q(x)\omega(x)dx$$

défini un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_p[X]$ .

**Définition 1.2.1** On appelle polynômes orthogonaux associés à la fonction poids  $\omega$  sur l'intervalle  $I$ , la suite des polynômes  $p_n = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots$ , obtenus par orthogonalisation de Gram-Schmidt de la suite des monômes  $x^n$ ,  $n \geq 0$ .

**Définition 1.2.2** On dit que la famille de polynômes  $(P_i)_{i \geq 0}$  est une famille de polynômes orthogonaux si :

- a) Le degré de  $P_i$  est  $i$  pour tout entier  $i$ .
- b)  $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2 \quad i \neq j \implies \langle P_i, P_j \rangle = 0$ .

### 1.2.2 Relation de récurrence

Pour toute suite de polynômes orthogonaux, il existe une relation de récurrence relativement à trois polynômes consécutifs

$$P_{n+1} = (x - a_n)P_n - b_n P_{n-1}$$

Avec

$$a_n = \frac{\int_a^b x P_n^2(x) \omega(x) dx}{\int_a^b P_n^2(x) \omega(x) dx}, \quad b_n = \frac{\int_a^b x P_n(x) P_{n-1}(x) \omega(x) dx}{\int_a^b P_{n-1}^2(x) \omega(x) dx}$$

### 1.2.3 Zéros de polynômes orthogonaux

Les zéros de polynômes orthogonaux jouent un rôle fondamental dans les méthodes spectrales. Par exemple, ils sont choisis comme nœuds de Gauss-type quadratures.

Soit  $\{P_n\}$  une suite de polynômes orthogonaux avec  $\omega(x)$  fonction de poids dans  $[a, b]$ , Le résultat important au sujet des zéros de polynômes orthogonaux est comme suit :

**Théorème 1.2.1** *Tout polynôme  $P_n$  avec  $n \geq 1$ , admet  $n$  racines distinctes, qui sont toutes réelles, simples et situées à l'intérieur de l'intervalle d'intégration  $]a, b[$ .*

**Preuve.** Voir Ref.[7] ■

### 1.2.4 Equation différentielle

Il est possible de définir certaines familles de polynômes orthogonaux par une équation différentielle, pour tout entier  $n$ ,  $P_n$  est une solution d'un équation différentielle de la forme

$$Q(x)P'' + L(x)P' + \lambda P = 0$$

Où  $Q$  est une polynôme quadratique à deux racines réelles distincts et  $L$  un polynôme linéaire à une racine située entre les deux racine de  $Q$  et les termes de plus haut degré de  $Q$  et  $L$  ont le même signe, la fonction  $P$  est inconnue, et  $\lambda$  est un paramètre.

## 1.3 Les polynômes orthogonaux de Legendre

**Définition 1.3.1** *On appelle **polynôme de Legendre** de degré  $n$ , le polynôme défini par la relation de récurrence*

$$\begin{cases} L_0(x) = 1, L_1(x) = x \\ (n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x), \forall n > 0 \end{cases}$$

et constituent l'exemple le plus **simple** d'une suite de polynômes orthogonaux.

### 1.3.1 Quelques propriétés

(1) Les polynômes de Legendre sont solutions de l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

(2) Formule de Rodrigues

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^n, \forall n > 0.$$

(3) Majorations

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1, +1], |L_n(x)| &\leq 1 \\ \forall x \in [-1, +1], |L'_n(x)| &\leq \frac{n(n+1)}{2} \\ \forall x \in [-1, +1], |L_n(x)| &\leq \frac{1}{\sqrt{8\pi n(1-x^2)}} \\ \frac{1-L_n^2(x)}{(2n-1)(n+1)} &\leq L_n^2(x) - L_{n-1}(x)L_{n+1}(x) \leq \frac{2n+1}{3n(n+1)} \end{aligned}$$

(4) Parité

Les polynômes de Legendre suivent la parité de  $n$ , on peut exprimer cette propriété par

$$L_n(-x) = (-1)^n L_n(x). \text{ (en particulier, } L_n(-1) = (-1)^n \text{ et } L_{2n+1}(0) = 0)$$

(5) Orthogonalité

Les polynômes de Legendre sont des polynômes orthogonaux par rapport au produit scalaire défini sur  $\mathbb{R}[X]$ , relativement à la fonction de poids  $\omega(x) = 1$  sur l'intervalle  $[-1, +1]$

$$\int_{-1}^{+1} L_n(x)L_m(x)dx = \gamma_n\delta_{n,m}, \quad \gamma_n = \frac{2}{2n+1}, \quad \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

En particulier, Le carré de la norme, dans  $L_2([-1, 1])$ , est

$$\|L_n\|_2 = \left( \int_{-1}^{+1} L_n^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

(6) Le coefficient du monôme de degré  $n$  est  $a_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$ , celui du monôme de degré  $n-1$  est  $b_n = 0$ .

(7) Relations de récurrence dérivées :

$$(2n+1)L_n(x) = L'_{n+1}(x) - L'_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

$$L'_n(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ k+n \text{ impair}}}^{n-1} (2k+1)L_k(x)$$

$$L''_n(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ k+n \text{ impair}}}^{n-1} \left(k + \frac{1}{2}\right)(n(n+1) - k(k+1))L_k(x)$$

$$(1-x^2)L'_n(x) = \frac{n(n+1)}{2n+1}(L_{n-1}(x) - L_{n+1}(x))$$

(8) Les valeurs limites des dérivés :

$$L'_n(\pm 1) = \frac{1}{2}(\pm 1)^{n-1}n(n+1),$$

$$L''_n(\pm 1) = (\pm 1)^n(n-1)n(n+1)(n+2)/8.$$

♠ Quelques polynômes

Les premiers polynômes de Legendre sont :

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = x$$

$$L_2(x) = (3x^2 - 1)/2$$

$$L_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$$

$$L_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$$

$$L_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8$$

$$L_6(x) = (231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)/16$$

$$L_7(x) = (429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)/16$$

$$L_8(x) = (6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)/128$$

$$L_9(x) = (12155x^9 - 25740x^7 + 18018x^5 - 4620x^3 + 315x)/128$$

$$L_{10}(x) = (46189x^{10} - 109395x^8 + 90090x^6 - 30030x^4 + 3465x^2 - 63)/256$$

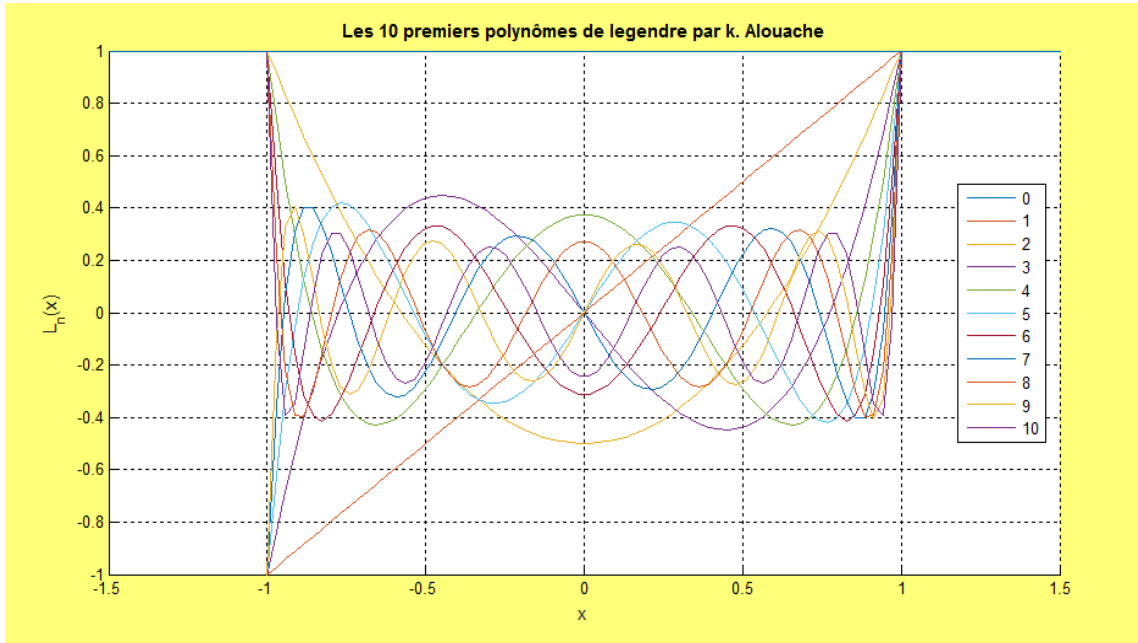


Figure (a)

## 1.4 Développement d'une fonction en série de Legendre

Pour une fonction  $f \in L^2(-1, 1)$ , on définit la série de Legendre

$$\mathcal{L}(f) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j L_j$$

où les coefficient  $c_j$  sont donnés par

$$c_j = \frac{2j+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) L_j(x) dx$$

On définit une approximation de la fonction  $f$  par sa série tronquée à l'ordre  $n$

$$\mathcal{L}(f) = \sum_{j=0}^n c_j L_j$$

Cette approximation est exacte pour les polynômes de degré inférieurs à  $n$  puisque les  $(L_j)_{j=0}^n$  forment une base orthogonale de  $P_n$ . Le calcul des coefficients  $c_j$  doit se faire par une formule de quadrature approchée.

**Exemple 1.4.1** *Combinaison linéaire des polynômes de Legendre*

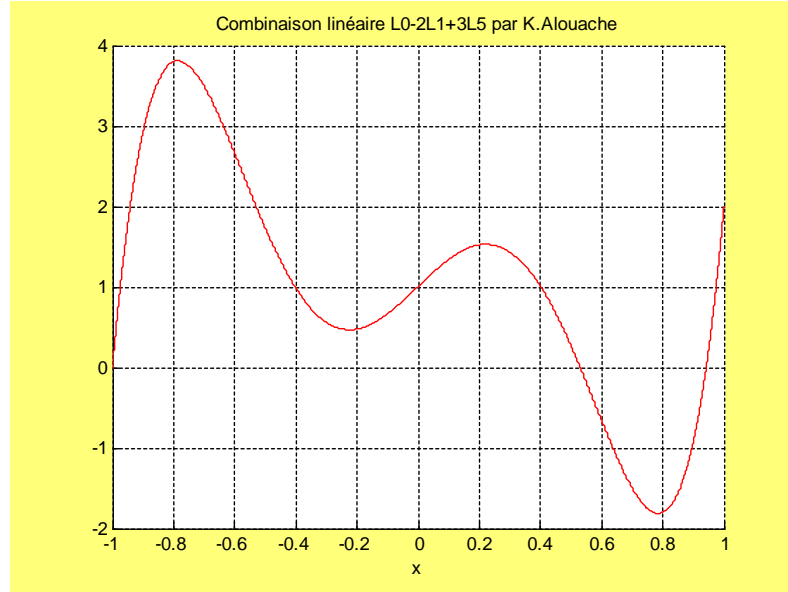


Figure (b)

## 1.5 Méthodes de quadrature de Gauss

Dans le domaine mathématique de l'Analyse numérique, les méthodes de quadrature sont des approximations d'une intégrale. En général, on remplace l'intégrale par une somme pondérée prise en un certain nombre de points du domaine d'intégration Voir Ref.[6]

**Définition 1.5.1** *La méthode de quadrature de Gauss du nom de **Carl Friedrich Gauss**, est une méthode de quadrature exacte pour un polynôme de degré  $2n - 1$  avec  $n$  point pris sur le domaine d'intégration si ce dernier est  $[a, b]$ , les méthodes sont de la forme*

$$I = \int_a^b f(x)\omega(x)dx \simeq \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i)$$

Où

- a)  $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de pondération, qui peut assurer l'intégrabilité de  $f$ .
- b) Les  $\omega_i$  sont appelées les coefficients de quadrature (ou poids).
- c) Les points  $x_i$  ou (nœuds), sont réels, distincts, uniques qui sont les racines des polynômes orthogonaux, les poids et les nœuds sont choisis de façon à obtenir des degrés d'exactitude les plus grand possibles.

### 1.5.1 Méthode de Gauss -Legendre

Afin de calculer numériquement l'intégrale d'une fonction sur l'intervalle  $[-1, 1]$ , l'une des méthodes le plus populaires est la méthode de quadrature de Gauss-Legendre fondée sur les propriétés des polynômes de Legendre. Elle prend la forme :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \simeq \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i)$$

Avec

- $(x_i)_{i \leq n}$  l'ensemble des zéros du polynômes de Legendre  $P_n$
- $(\omega_i)_{i \leq n}$  les poids respectifs :  $\omega_i = \frac{-2}{(n+1)L'_n(x_i)L_{n+1}(x_i)} = \frac{-2}{(1-x_i^2)L'_n(x_i)^2}$

**Théorème 1.5.1** On peut obtenir  $\omega_i$  et  $x_i$  à partir de la décomposition en valeurs propres de la matrice symétrique, tri diagonale de Jacobi .

$$J_n = \begin{pmatrix} a_0 & \sqrt{b_1} & & & \\ \sqrt{b_1} & a_1 & \sqrt{b_2} & & \\ & \sqrt{b_2} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-2} & \sqrt{b_{n-1}} \\ & & & \sqrt{b_{n-1}} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Où le  $a_n$  et  $b_n$  sont comme dans la Relation de récurrence de trois termes dans les polynômes orthogonaux.

**Preuve.** Voir Ref.[7] ■

### 1.5.2 Formules de Newton-Côtes

Ce sont formules de quadrature de type interpolation avec **subdivision régulière**.

- Si les deux extrémités de l'intervalle sont des points d'interpolation il s'agit de Newton-Côtes fermé (méthodes des trapèzes, de Simpson...)
- Si les deux bornes de l'intervalle d'intégration ne sont pas des points d'interpolation il s'agit de Newton-Côtes ouvert (méthode de Poncelet...)

La régularité de la subdivision permet d'obtenir des formules qui sont très générales.

Le dispositif important de la quadrature de Gauss est qu'il est exact pour des fonctions de base  $2n$ .

La quadrature d'ordinaire est exacte seulement pour la fonction de base de  $n$ .

# Chapitre 2

## Théorie des opérateurs et équations intégrales

### 2.1 Notions fondamentales et définitions

#### 2.1.1 Compacité dans $C(G)$

**Théorème 2.1.1 (Arzela-Ascoli)**

Un ensemble  $G \subset C(\Omega)$  avec  $\Omega$  est compact et  $C(\Omega) = \{f \text{ continus dans } \Omega\}$  muni par la norme  $\|f\|_\infty = \max_{x \in \Omega} |f(x)|$  est relativement compact si :

1)  $G$  est borné :

$$\forall \varphi \in G, \forall x \in \Omega, \exists M > 0 \text{ tel que } |\varphi(x)| < M.$$

2)  $G$  est équicontinue :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ avec } |x - y| < \delta \implies |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon, \forall x, y \in \Omega, \forall \varphi \in G.$$

**Preuve.** voir Ref.[11] ■

### 2.1.2 Opérateurs compact

**Définition 2.1.1** Soit  $A$  un opérateur linéaire d'un espace normé  $E$  dans un espace normé  $F$ .  $A$  est dit opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné dans  $E$  un ensemble relativement compact dans  $F$ . Ou bien si pour toute suite bornée  $\{\varphi_n\}$  de  $E$ , la suite  $\{A\varphi_n\}$  contient une sous suite convergente dans  $F$ .

#### ♠ Propriétés des opérateurs compacts

**Théorème 2.1.2** Une combinaison linéaire  $A = \alpha A_1 + \beta A_2$  des opérateurs compacts est un opérateur compact.

**Théorème 2.1.3** Le produit  $AB$  de deux opérateurs bornés  $A$  et  $B$  est compact si l'un des opérateurs  $A$  ou  $B$  est compact.

**Corollaire 2.1.1** Soit  $(A_n)$  une suite d'opérateurs continus de rangs finis de  $X$  dans  $Y$  et soit  $A$  un opérateur linéaire tel que  $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ . Alors  $A$  est un compact.

Le problème de l'approximation concerne la réciproque de ce corollaire. Etant donné un opérateur compact, existe-t-il une suite  $(A_n)$  d'opérateurs de rang finis telle que

$$\|A_n - A\| \rightarrow 0 ?$$

La réponse est affirmative dans un espace de Hilbert.

**Théorème 2.1.4** L'opérateur identique  $I$  de  $X$  dans  $Y$  est compact si et seulement si  $X$  de dimension finie.

### 2.1.3 Opérateurs intégraux compacts sur $C[I]$

Dans l'espace des fonctions continues  $C(I)$  où  $I$  est fermé borné, une classe importante d'opérateurs compacts est formée par les opérateurs qui peuvent être représentés sous la forme :

$$A : \varphi \in C(I) \rightarrow A\varphi \in C(I)$$

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy$$

Où  $\varphi \in C[I]$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , et  $K : C[I] \times C[I] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue est dite le **noyau** de l'opérateur  $A$ .

$A$  est un opérateur compact de  $C[I]$  dans  $C[I]$ .

Pour prouver la compacité de l'opérateur  $A$  il suffit de vérifier le théorème (2.1.1).

## 2.2 Équations intégrales et leurs classifications

Les équations intégrales sont a priori moins simples à résoudre que les équations algébriques ou les équations différentielles. Nous allons voir dans ce partie que pour des équations intégrales linéaires, une fois réalisée la discrétisation de ces équations, on se ramène au problème de la recherche de solutions d'un système linéaire.

Le but de cette partie est d'introduire les équations de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_E K(x, y)\varphi(y)dy = f(x) \forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (2.2.1)$$

**Définition 2.2.1** *On appelle équation intégrale toute équation de la forme (2.2.1) avec,  $f(x)$ ,  $K(x, y)$  des fonctions connues,  $\lambda$  un paramètre numérique et  $\varphi(x)$  la fonction inconnue.  $E$  est un ensemble borné fermé d'un espace euclidien à  $n$  dimensions ( $x$  et  $y$  des points de cet espace).*

Avec toutes ces données, notre problème est de chercher la fonction  $\varphi$  qui satisfait l'équation (2.2.1).

On peut être écrite cette équation sous forme d'opérateur

$$\varphi - A\varphi = f \quad (2.2.2)$$

Une importante classification des équations intégrales existe, elles peuvent se mettre en première espèce comme en seconde espèce, homogène ou non homogène, aussi elles peuvent être de Fredholm ou bien de Volterra.

### 2.2.1 Équations intégrales de Fredholm

On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce non homogène une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x) \quad (2.2.3)$$

Si  $f(x) = 0$  l'équation intégrale (2.2.3) s'écrit

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = 0 \quad (2.2.4)$$

Et on dit équation intégrale linéaire homogène de Fredholm de seconde espèce

Une équation intégrale de la forme

$$\int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x) \quad (2.2.5)$$

Où la fonction inconnue  $\varphi(y)$  n'intervient que sous le signe d'intégration, s'appelle équation intégrale de Fredholm non homogène de première espèce.

Si  $f(x) = 0$  cette équation est dit équation intégral homogène de Fredholm de première espèce.

### 2.2.2 Équations intégrales de Volterra

Les équations de Volterra sont des cas particuliers de ceux de Fredholm dans tes quelle le noyau  $K$  est tel que

$$K(x, y) = 0, \text{ pour } y > x$$

On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce non homogène une équation, à inconnue  $\varphi(x)$  de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy = f(x) \quad (2.2.6)$$

Si  $f(x) = 0$  l'équation intégrale (2.2.6) s'écrit

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy = 0$$

Et s'appelle équation intégral homogène de Volterra de seconde espèce.

Une équation, à inconnue  $\varphi(x)$  de la forme

$$\int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy = f(x) \quad (2.2.7)$$

Est appelée équation intégrale de Volterra de première espèce.

Si  $f(x) = 0$  cette équation est dit équation intégral homogène de Volterra de première espèce.

### 2.2.3 Équations intégrales d'Abel

On appelle équation intégrale d'Abel une équation de la forme

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}} dy = f(x) \quad (2.2.8)$$

Où  $\varphi(x)$  est la fonction inconnue et  $f(x)$  une fonction donnée, c'est une équation intégrale de Volterra de première espèce

On appelle également équation d'Abel une équation plus générale :

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)}{(x-y)^a} dy = f(x) \quad (2.2.9)$$

Où  $a$  est une constant,  $0 < a < 1$  (équation d'Abel généralisée).

La fonction  $f(x)$  sera supposée possédant une dérivée continue sur un segment  $[0, a]$ .  
 Pour  $a \geq \frac{1}{2}$  le noyau de l'équation (2.2.9) n'est pas dans l'espace  $L_2$ .

On a plusieurs équation intégral on ne peut pas voir pour voir Ref.[3]

## 2.3 Théorie de Riesz

### Théorème 2.3.1 (Riesz)

Soit  $A$  un opérateur compact dans  $X$  un espace normé de  $X$ . Alors  
 l'opérateur  $T = I - A$  a les propriétés suivantes :

(a) Le noyau de l'opérateur  $T$

$$\mathcal{N}(T) = \{\varphi \in X : T\varphi = 0\}$$

est un sous espace de dimension finie.

(b) L'image de l'opérateur  $T$

$$\mathcal{R}(T) = \{T\varphi : \varphi \in X\}$$

est un sous espace fermé.

(c) Il existe un entier positif non nul  $r$ , appelé **nombre de Riesz** de l'opérateur  $A$  tel que

$$\begin{aligned} \{0\} &= \mathcal{N}(T^0) \subset \mathcal{N}(T^1) \subset \dots \subset \mathcal{N}(T^r) = \mathcal{N}(T^{r+1}) = \dots \\ E &= \mathcal{R}(T^0) \supset \mathcal{R}(T^1) \supset \dots \supset \mathcal{R}(T^r) = \mathcal{R}(T^{r+1}) = \dots \end{aligned}$$

Et on a la somme directe

$$X = \mathcal{N}(T^r) \oplus \mathcal{R}(T^r)$$

C'est-à-dire, pour tout  $\varphi \in X \exists! \psi \in \mathcal{N}(T^r), \exists! \mathcal{X} \in \mathcal{R}(T^r)$  tels que  $\varphi = \psi + \mathcal{X}$ .

## 2.4 Alternative de Fredholm

Le théorème de *Riesz* est un théorème très puissant, nous permet de donner une caractérisation, qui gouverne, les solutions de l'équation intégrales de *Fredholm* de seconde espèce dite *alternative de Fredholm*.

Soit  $A : X \rightarrow X$  un opérateur linéaire compact. Alors  $I - A$  est injectif si et seulement s'il est surjectif. En d'autre terme si  $I - A$  est injectif (donc bijectif), alors l'opérateur  $(I - A)^{-1} : X \rightarrow X$  existe et borné.

**Preuve.**

D'après le premier résultat du théorème de Riesz (a) l'injectivité de  $I - A$  est équivalente à  $r = 0$ , et d'après (b) du même théorème, la surjectivité de  $I - A$  est aussi équivalente à  $r = 0$ . Par conséquent l'injectivité de  $I - A$  et la surjectivité de  $I - A$  sont équivalentes.

Il reste à montrer que  $T^{-1}$  est borné si  $T = I - A$  est injectif. Supposons que  $T^{-1}$  n'est pas borné. Alors il existe une suite  $(f_n)$  dans  $X$  avec  $\|f_n\| = 1$  telle que  $\|T^{-1}f_n\| \geq n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Soient

$$g_n = \frac{f_n}{\|T^{-1}f_n\|}, \quad \varphi_n = \frac{T^{-1}f_n}{\|T^{-1}f_n\|}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Alors  $g_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , et  $\|\varphi_n\| = 1$  pour tout  $n$ . Comme  $A$  est compact, on peut choisir une sous suite  $(\varphi_{n_k})$  telle que  $A\varphi_{n_k} \rightarrow \varphi \in X, k \rightarrow \infty$ . Alors, comme

$$\varphi_n - A\varphi_n = g_n$$

On remarque que  $\varphi_{n_k} \rightarrow \varphi, k \rightarrow \infty$  et  $\varphi \in \mathcal{N}(T)$ . Par conséquent  $\varphi = 0$ , et ceci contredit  $\|\varphi_n\| = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . ■

**Corollaire 2.4.1** (*Alternative de Fredholm*)

Soit  $A$  un opérateur compact défini de l'espace normé  $E$  dans lui-même alors, l'équation non homogène suivant :

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = f \tag{2.4.1}$$

Admet une solution unique  $\varphi \in E, \forall f \in E$ , si et seulement si l'équation homogène suivant :

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = 0 \quad (2.4.2)$$

Admet uniquement la solution triviale  $\varphi = 0$ .

**Théorème 2.4.1** *Soit  $A$  un opérateur compact d'un espace normé  $E$  dans lui même, alors pour que l'équation homogène*

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = 0$$

Admet un nombre fini des solutions linéairement indépendantes  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  alors l'équation non-homogène

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = f$$

Admet une solution  $\varphi \in E$  de la forme

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x)$$

Où  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  sont arbitraires et  $\varphi_0(x)$  une solution particulière de l'équation non-homogène.

## 2.5 Méthodes d'approximation pour les équations intégrales

Un grand nombre de méthodes fondées sur des principes différents ont été proposées et sont pratiquement utilisées pour la résolution approchée des équations intégrales. Dans ce partie je défini quelques méthodes d'approximation.

### 2.5.1 Méthodes du noyau dégénéré

Soit  $A$  l'opérateur intégral défini sur l'espace  $C[a, b]$  muni du même produit scalaire. La méthode du noyau dégénéré correspond à approximer le noyau  $K$  par une suite de noyaux dégénérés  $K_n$  de la forme :

$$K_n(x, y) = \sum_{j=1}^n p_j(x)q_j(y) \quad \forall x, y \in [a, b] \quad (2.5.1)$$

Où  $(p_j)_{1 < j < n}$  et  $(q_j)_{1 < j < n}$  sont des familles d'éléments de  $C[a, b]$ , avec de plus la famille  $(p_j)_{1 < j < n}$  est linéairement indépendante. Dans ce cas l'opérateur intégral  $A$  est approximer par une suite d'opérateurs  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la forme :

$$A_n \varphi = \sum_{j=1}^n \langle \varphi, q_j \rangle p_j \quad (2.5.2)$$

Et par conséquence, l'équation (2.2.1) avec  $\lambda = 1$  sera elle aussi approximer par

$$\varphi_n(x) - \sum_{j=1}^n z_j p_j(x) = f(x) \quad (2.5.3)$$

Où

$$z_j = \int_a^b q_j(y) \varphi(y) dy, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.5.4)$$

Aussi, on peut écrire :

$$z_i = \int_a^b q_i(x) \varphi(x) dx = \int_a^b q_i(x) f(x) dx + \sum_{j=1}^n \left( \int_a^b q_i(x) p_j(x) dx \right) z_j. \quad (2.5.5)$$

Posons

$$c_i = \int_a^b q_i(x) f(x) dx, \quad a_{ij} = \int_a^b q_i(x) p_j(x) dx \quad (2.5.6)$$

On obtient

$$z_i = c_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.5.7)$$

Finalement, on a le théorème suivant :

**Théorème 2.5.1** *Les solutions de l'équation :*

$$\varphi_n(x) - \sum_{j=1}^n \langle \varphi, q_j \rangle p_j = f \quad (2.5.8)$$

Ont la forme :

$$\varphi_n = f + \sum_{j=1}^n z_j p_j \quad (2.5.9)$$

Où les coefficients  $z_1, z_2, \dots, z_n$  sont solution du système (2.5.7) i.e

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad z_i - \sum_{j=1}^n \langle p_j, q_i \rangle z_j = \langle f, q_i \rangle \quad (2.5.10)$$

## 2.5.2 Méthodes de projection

**Définition 2.5.1** Soit  $X$  un espace vectoriel normé,  $U \subset X$  un sous espace non trivial. Un opérateur borné  $P : X \rightarrow Y$  est appelé projecteur s'il vérifie :

$$\forall \varphi \in U, \quad P\varphi = \varphi \quad (2.5.11)$$

**Définition 2.5.2** (Méthodes de projection)

On se donne  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach, ainsi que  $A : X \rightarrow Y$  un opérateur borné injectif. Pour  $f \in A(X) \subset Y$ , on cherche à approximer la solution du problème :

$$\text{trouver } \varphi \in X \text{ tel que } A\varphi = f \quad (2.5.12)$$

Pour se faire, on se donne une suite de sous espaces vectoriels  $X_n \subset X$  et  $Y_n \subset Y$  de dimension finie  $n$ , ainsi que des projecteurs  $P_n : Y \rightarrow Y_n$ .

On considère le problème approché :

$$\text{trouver } \varphi_n \in X_n \text{ tel que } P_n A \varphi_n = P_n f \quad (2.5.13)$$

Cette méthode de projection est dite convergente s'il existe un rang  $n_0$  à partir du quel pour tout  $f \in A(X)$ , l'équation approché (2.5.13) admet une unique solution  $\varphi_n \in X_n$  et que cette solution converge vers la solution  $\varphi$  de (2.5.12), i.e  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  si  $n \rightarrow +\infty$ .

Cette condition de convergence peut s'exprimer simplement en fonction de l'opérateur  $A_n = P_n A : X_n \rightarrow Y_n$ . Elle signifie simplement qu'à partir d'un certain rang, cet opérateur est inversible, et que de plus, on a une convergence ponctuelle :

$$A^{-1}(P_n f) = A^{-1}(P_n(A\varphi)) = (p_n A)^{-1} P_n A \varphi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi \quad (2.5.14)$$

**Théorème 2.5.2** (de Banach - Steinhaus)

Soit  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'opérateurs bornés  $A_n : X \rightarrow Y$  entre deux espaces de Banach  $X$  et  $Y$ . On suppose que la suite est bornée ponctuellement, i.e. que pour tout  $\varphi \in X$ , il existe une constante  $C_\varphi$  telle que  $\|A_n \varphi\|_Y \leq C_\varphi$ . Alors, la suite est bornée uniformément en norme, i.e. il existe une constante  $C$  telle que  $\|A_n \varphi\|_Y \leq C$ .

### Méthode de collocation

Généralement, le principe de la méthode de collocation appliqué à la résolution approchée d'opérateur équation

$$\varphi - A\varphi = f \quad (2.5.15)$$

Consiste à chercher une solution approchée dans un sous espace de dimension finie, en exigeant que l'équation (2.5.15) soit vérifiée seulement sur un nombre fini de points appelés points de collocation.

En pratique, nous choisissons une suite de sous espaces  $X_n \subset X$ ,  $n \geq 1$  de dimension finie, généralement des sous espaces de  $C(G)$  ou de  $L_2(G)$ . Soit  $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$  une base de  $X_n$ . On cherche une fonction  $\varphi_n \in X_n$ , de la forme

$$\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^n c_j \psi_j(x), \quad x \in G \quad (2.5.16)$$

Pour déterminer les coefficients  $(c_j)$ , on substituant, cette fonction dans l'équation (2.5.15), et on exigeant que l'équation soit exacte dans le sens où **le résidu**

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \varphi_n(x) - \int_G k(x, y) \varphi(y) dy - f(x) \\ &= \sum_{j=1}^n c_j \left\{ \psi_j(x) - \int_G k(x, y) \psi_j(y) dy \right\} - f(x), \quad x \in G \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

soit nul sur un système de noeuds  $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$ , (i.e, aux points de collocation)

Ce qui conduit systématiquement à la résolution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \psi_j(x_i) - \int_G k(x_i, y) \psi_j(y) dy \right\} c_j = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.5.18)$$

de la forme  $\Psi_n X = f_n$ . Évidemment, ce système admet une solution unique si le  $\det \Psi_n$  est non nul, ce qui dépend d'ailleurs du choix des points de collocation.

### 2.5.3 Méthode de Nyström

Les méthodes de Nyström est une méthode de quadrature utilisant les formules des quadratures consistant à construire la solution d'une équation intégrale en se basant sur remplacer l'équation intégrale par un système algébrique d'équations linéaires moyennant une formule de quadrature.

Soit donnée l'équation

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = f(x) \quad (2.5.19)$$

On souhaite approximer l'opérateur intégral  $A$  défini par :

$$\forall x \in [a, b], (A\varphi)(x) = \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy \quad (2.5.20)$$

Pour ce faire, on se donne des règles de quadrature ( $Q_n$ ) pour calculer l'intégrale à noyau via des noeuds  $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ , ainsi que des poids  $(\omega_i)_{1 \leq i \leq n}$ , d'où l'introduction d'un nouvel opérateur  $A_n$  défini par :

$$\forall x \in [a, b], (A_n \varphi)(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i K(x, y_i) \varphi(y_i) \quad (2.5.21)$$

Alors, on va approcher la solution  $\varphi$  de l'équation  $\varphi - A\varphi = f$  par la solution  $\varphi_n$  du problème  $\varphi_n - A\varphi_n = f$  c'est à dire trouver  $\varphi_n$  tel que :

$$\varphi_n(x) - \sum_{i=1}^n \omega_i K(x, y_i) \varphi_n(y_i) = f(x) \quad (2.5.22)$$

Ceci nous amène à une seconde discrétisation, mais cette fois-ci sur les  $x$ , donc pour  $x = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$  et avec les notations suivantes :

- $\varphi(y_j) = \varphi_j, j = 1, \dots, n$
- $f(y_j) = f_j, j = 1, \dots, n$
- $K(y_j, y_i) = K_{ji}, i, j = 1, \dots, n$

On obtient, le système algébrique de  $n$  équations linéaires :

$$\varphi_j - \sum_{i=1}^n \omega_i K_{ji} \varphi_i = f_j, j = 1, \dots, n \quad (2.5.23)$$

Où  $K_{ji}, \omega_i, f_j$  considérer comme quantités connues et  $\varphi_j$  comme inconnues.

La matrice associée à ce système est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 - \omega_1 K_{11} & -\omega_1 K_{21} & \cdots & -\omega_n K_{n1} \\ -\omega_1 K_{12} & 1 - \omega_1 K_{11} & \cdots & -\omega_n K_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\omega_1 K_{1n} & -\omega_{i2} K_{2n} & & 1 - \omega_{in} K_{nn} \end{pmatrix}$$

Et il existe d'autres méthodes d'approximation voir Ref.[3]

# Chapitre 3

## Analyse numérique des équations intégrales

La résolution des équations intégrales est très difficile, donc on doit résoudre numériquement. L'objectif est de trouver une solution approchée à la solution exacte. Dans ce chapitre on va résoudre numériquement des équations intégrales de Fredholm de 2<sup>ème</sup> espèce par polynôme de Legendre et on va faire un comparaison entre les solutions exactes et les solutions approchés.

### 3.1 Résolution de l'équation de Fredholm par polynôme de Legendre

#### 3.1.1 Discrétisation d'équation intégrale

Dans cette partie, nous voulons à l'équation de Fredholm de 2<sup>ème</sup> espèce qui défini par :

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = f(x), \quad x \in [a,b], \quad \lambda = 1 \quad (3.1.1)$$

Où  $f(x)$  est une fonction continue dans  $[a,b]$ ,  $K(x,y)$  fonction continue  $\forall(x,y) \in [a,b]^2$ .

Nous convertissons cette équation en système des équations linéaires. Pour ce résultat, nous avons besoin de quelques fonctions de base pour estimes la solution de équation in-

tégrale. De sorte que, nous choisissons des polynômes de Legendre comme les fonctions de base.

Maintenant, nous estimons la fonction inconnue  $\varphi(x)$  comme suit

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n a_i L_i(x) \quad (3.1.2)$$

Où  $L_i$  polynôme de Legendre et  $a_i, i = 0, 1, \dots, n$  sont des réels inconnus, on remplace ceci dans l'équation (3.1.1), on trouve

$$\sum_{i=0}^n a_i L_i(x) - \int_a^b K(x, y) \sum_{i=0}^n a_i L_i(y) dy = f(x) \quad (3.1.3)$$

Ainsi nous définissons l'équation résiduelle comme

$$R_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i L_i(x) - \int_a^b K(x, y) \sum_{i=0}^n a_i L_i(y) dy - f(x) \quad (3.1.4)$$

Pour déterminer les coefficient inconnus  $a_i$  nous choisissons quelques points (Racines des polynôme de Legendre) tel que

$R_n(x_j) = 0, j = 0, 1, \dots, n$  et les  $x_j$  sont des racines  $j^{\text{ème}}$  de polynôme de Legendre, avec  $x_j \in ]-1, 1[$ , alors

$$\sum_{i=0}^n a_i L_i(x_j) - \int_{-1}^1 K(x_j, y) \sum_{i=0}^n a_i L_i(y) dy = f(x_j), j = 0, 1, \dots, n \quad (3.1.5)$$

En utilisant la méthode de Gauss-Legendre pour approches l'intégrale par une somme finie, c'est-à-dire

$$\int_a^b K(x_j, y) \sum_{i=0}^n a_i L_i(y) dy \approx \sum_{k=0}^n \omega_k K(x_j, y_k) \sum_{i=0}^n a_i L_i(y_k) \quad (3.1.6)$$

On remplace (3.1.6) dans l'équation (3.1.5) on obtient

$$\sum_{i=0}^n a_i L_i(x_j) - \sum_{k=0}^n \omega_k K(x_j, y_k) \sum_{i=0}^n a_i L_i(y_k) = f(x_j), j = 0, 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \left[ L_i(x_j) - \sum_{k=0}^n \omega_k K(x_j, y_k) L_i(y_k) \right] = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n$$

On pose  $x_i = y_i$

$$\sum_{i=0}^n a_i \left[ L_i(x_j) - \sum_{k=0}^n \omega_k K(x_j, x_k) L_i(x_k) \right] = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (3.1.7)$$

On simplifie cette formule, on trouve

$$\sum_{i=0}^n a_i \left[ L_{ij} - \sum_{k=0}^n \omega_k K_{jk} L_{ik} \right] = f_j, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

Notons que  $L_i(x_j) = L_{ij}$ ,  $f(x_j) = f_j$ ,  $K(x_i, x_j) = K_{ij}$ .

Ainsi cette équation intégrale peut être convertie un système d'équation linéaire

$$AX = b$$

Où

- $A = \left[ L_{ij} - \sum_{k=0}^n \omega_k K_{jk} L_{ik} \right]_{j=0}^n, \quad i = 0, 1, \dots, n$
- $b = (f_j), \quad j = 0, 1, \dots, n$
- $X^t = (a_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$

## 3.2 Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte

### Exemple 3.2.1

Soit l'équation de Fredholm suivant

$$\varphi(x) - \int_{-1}^1 \frac{(x-y)^3}{x^2(1+y^2)} \varphi(y) dy = \sqrt{1+x^2} - \frac{3(\sqrt{2} - \arcsin h(1))}{x} - 2x \arcsin h(1)$$

La solution exacte de cette équation est  $\varphi(x) = \sqrt{1+x^2}$ .

La solution approché  $\tilde{\varphi}(x)$  de la solution exacte  $\varphi(x)$  est obtenu par la solution du système des équations linéaires pour  $n = 10$

Points de $x$	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
-0.97390652851717	1.39588463931958	1.39588462869867	1.0620910151360e-008
-0.86506336668898	1.32224605440412	1.32224603984410	1.4560019856447e-008
-0.67940956829902	1.20896540955325	1.20896538744616	2.2107090158485e-008
-0.43339539412925	1.08987685893978	1.08987682365201	3.5287770039361e-008
-0.14887433898163	1.01102105260337	1.01102099139940	6.1203970114221e-008
0.14887433898163	1.01102105260337	1.01102114055849	8.7955119854044e-008
0.43339539412925	1.08987685893978	1.08987685617587	0.2763909989767e-008
0.67940956829902	1.20896540955325	1.20896538846691	2.1086340007415e-008
0.86506336668898	1.32224605440412	1.32224602441899	2.9985129934573e-008
0.97390652851717	1.39588463931958	1.39588460493613	3.4383450087105e-008

Tableau (1)

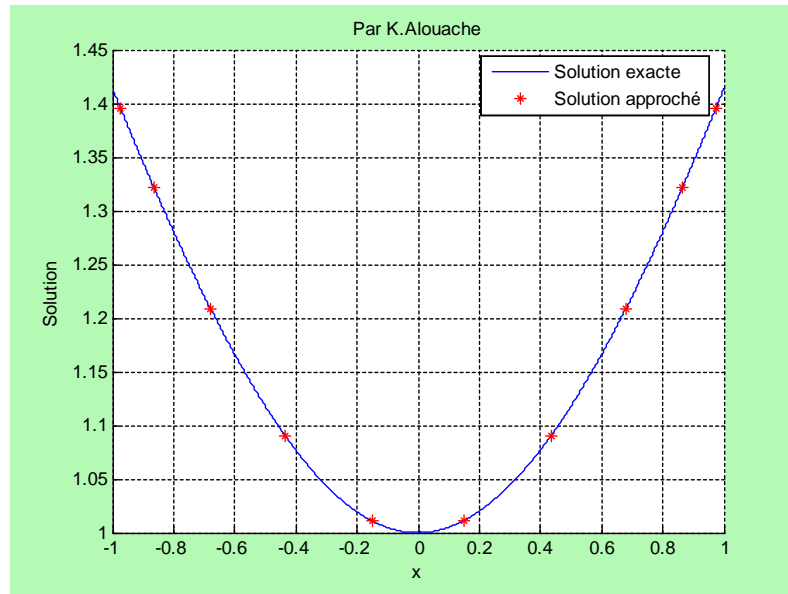


Figure (1)

**Exemple 3.2.2**

Soit l'équation de Fredholm suivant

$$\varphi(x) - \int_{-1}^1 xy\varphi(y)dy = x$$

La solution exacte de cette équation est  $\varphi(x) = 3x$ .

La solution approché  $\tilde{\varphi}(x)$  de la solution exacte  $\varphi(x)$  est obtenu par la solution du système des équations linéaires pour  $n = 4$

Points de $x$	Solution exacte	Solution approché	Erreur
-0.86113631159405	-2.58340893478215	-2.58340893478211	3.9968028886506e-014
-0.33998104358486	-1.01994313075458	-1.01994313075457	0.9992007221626e-014
0.33998104358486	1.01994313075458	1.01994313075457	0.9992007221626e-014
0.86113631159405	2.58340893478215	2.58340893478211	3.9968028886506e-014

Tableau (2)

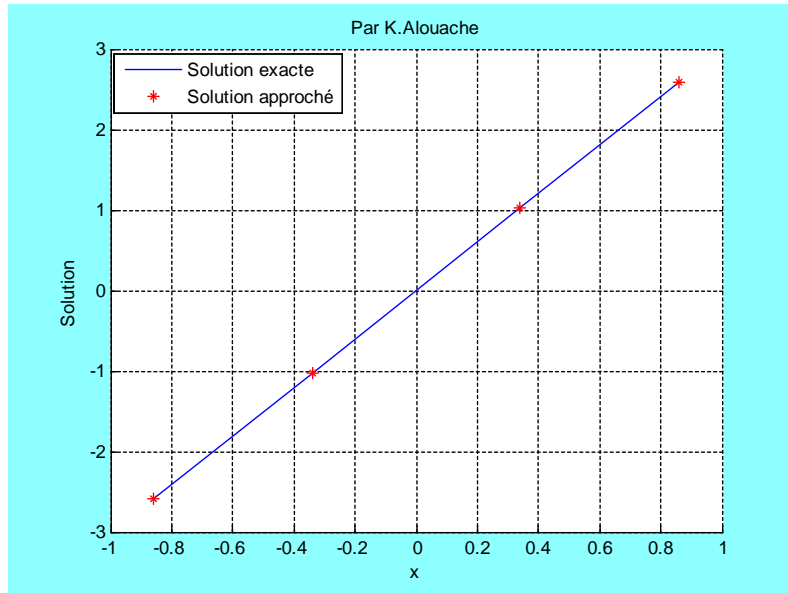


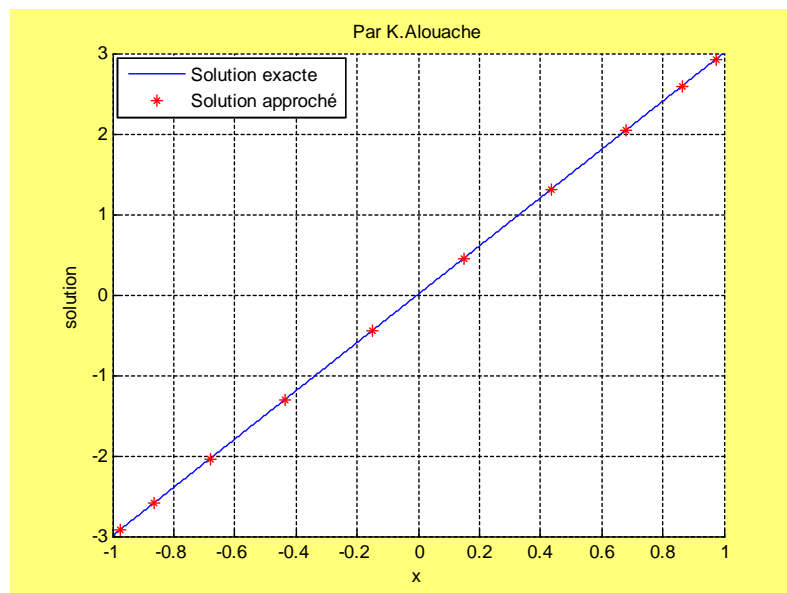
Figure (2)

### 3.2. Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte

★ Pour  $n = 10$

Points de $x$	Solution exacte	Solution approché	Erreur
-0.97390652851717	-2.92171958555151	-2.92171958555149	1.9984014443253e-014
-0.86506336668898	-2.59519010006694	-2.59519010006692	1.9984014443253e-014
-0.67940956829902	-2.03822870489706	-2.03822870489705	0.9769962616701e-014
-0.43339539412925	-1.30018618238775	-1.30018618238774	0.9992007221626e-014
-0.14887433898163	-0.44662301694489	-0.44662301694489	0
0.14887433898163	0.44662301694489	0.44662301694489	0
0.43339539412925	1.30018618238775	1.30018618238774	0.9992007221626e-014
0.67940956829902	2.03822870489706	2.03822870489705	0.9769962616701e-014
0.86506336668898	2.59519010006694	2.59519010006692	1.9984014443253e-014
0.97390652851717	2.92171958555151	2.92171958555149	1.9984014443253e-014

**Tableau (3)**



**Figure (3)**

**Exemple 3.2.3**

Soit l'équation de Fredholm suivant

$$\varphi(x) - \int_{-1}^1 xy\varphi(y)dy = e^{-x^2}$$

La solution exacte de cette équation est  $\varphi(x) = e^{-x^2}$ .

La solution approché  $\tilde{\varphi}(x)$  de la solution exacte  $\varphi(x)$  est obtenu par la solution du système des équations linéaires pour  $n = 6$

Points de $x$	Solution exacte	Solution approché	Erreur
-0.93246951420315	0.41916133102673	0.41916133102673	0
-0.66120938646626	0.64584363682847	0.64584363682847	0
-0.23861918608320	0.94465158181378	0.94465158181378	0
0.23861918608320	0.94465158181378	0.94465158181378	0
0.66120938646626	0.64584363682847	0.64584363682847	0
0.93246951420315	0.41916133102673	0.41916133102673	0

**Tableau (4)**

★ Pour  $n = 10$

Points de $x$	Solution exacte	Solution approché	Erreur
-0.97390652851717	0.38732392277763	0.38732392277763	0
-0.86506336668898	0.47315387399802	0.47315387399802	0
-0.67940956829902	0.63027606226995	0.63027606226995	0
-0.43339539412925	0.82875428450737	0.82875428450737	0
-0.14887433898163	0.97808023854837	0.97808023854837	0
0.14887433898163	0.97808023854837	0.97808023854837	0
0.43339539412925	0.82875428450737	0.82875428450737	0
0.67940956829902	0.63027606226995	0.63027606226995	0
0.86506336668898	0.47315387399802	0.47315387399802	0
0.97390652851717	0.38732392277763	0.38732392277763	0

Tableau (5)

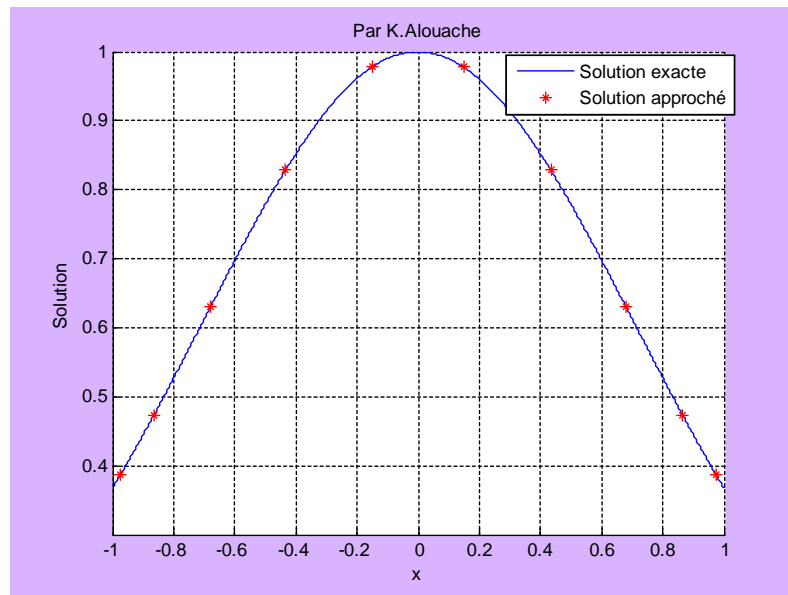


Figure (4)

Exemple 3.2.4

Soit l'équation de Fredholm suivant

$$\varphi(x) - \int_{-1}^1 \exp(2x - \frac{5}{3}y)\varphi(y)dy = \exp(2x)(1 - 3\exp(\frac{1}{3}) + 3\exp(-\frac{1}{3}))$$

La solution exacte de cette équation est  $\varphi(x) = \exp(2x)$ .

La solution approché  $\tilde{\varphi}(x)$  de la solution exacte  $\varphi(x)$  est obtenu par la solution du système des équations linéaires pour  $n = 10$ .

Points de $x$	Solution exacte	Solution approché	Erreur
-0.97390652851717	0.14258555734321	0.14258555734321	0
-0.86506336668898	0.17726194354140	0.17726194354140	0
-0.67940956829902	0.25696403729106	0.25696403729106	0
-0.43339539412925	0.42029821318769	0.42029821318769	0
-0.14887433898163	0.74248791987722	0.74248791987722	0
0.14887433898163	1.34682325897687	1.34682325897687	0
0.43339539412925	2.37926302949434	2.37926302949434	0
0.67940956829902	3.89159514514993	3.89159514514993	0
0.86506336668898	5.64136881285221	5.64136881285221	0
0.97390652851717	7.01333303760170	7.01333303760170	0

**Tableau (6)**

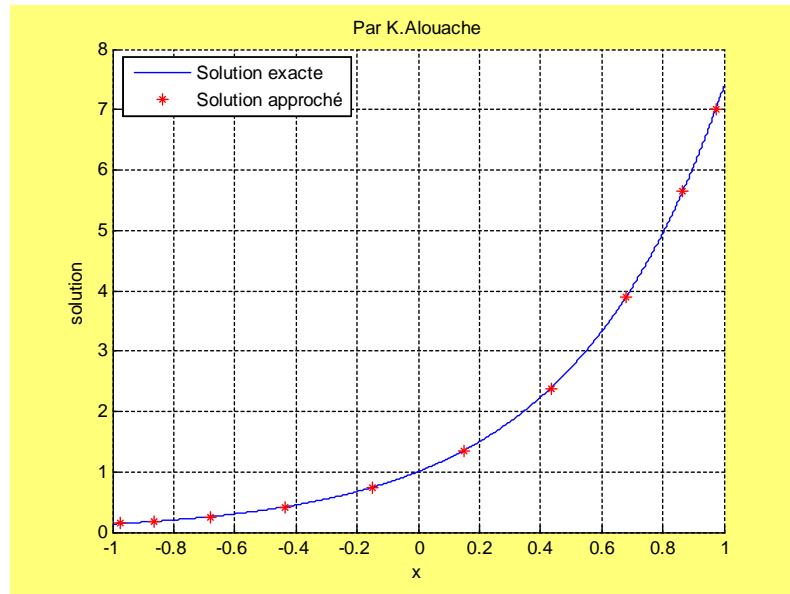


Figure (5)

**Exemple 3.2.5**

Soit l'équation de Fredholm suivant

$$\varphi(x) - \int_{-1}^1 \varphi(y)dy = \sin(2x)$$

La solution exacte de cette équation est  $\varphi(x) = \sin(2x)$ .

La solution approché  $\tilde{\varphi}(x)$  de la solution exacte  $\varphi(x)$  est obtenu par la solution du système des équations linéaires pour  $n = 10$

Points de $x$	Solution exacte	Solution approché	Erreur
-0.97390652851717	-0.92976705724769	-0.92976705724769	0
-0.86506336668898	-0.98733374047570	-0.98733374047570	0
-0.67940956829902	-0.97761683842403	-0.97761683842403	0
-0.43339539412925	-0.76225561972721	-0.76225561972721	0
-0.14887433898163	-0.29336868947320	-0.29336868947320	0
0.14887433898163	0.29336868947320	0.29336868947320	0
0.43339539412925	0.76225561972721	0.76225561972721	0
0.67940956829902	0.97761683842403	0.97761683842403	0
0.86506336668898	0.98733374047570	0.98733374047570	0
0.97390652851717	0.92976705724769	0.92976705724769	0

**Tableau (7)**

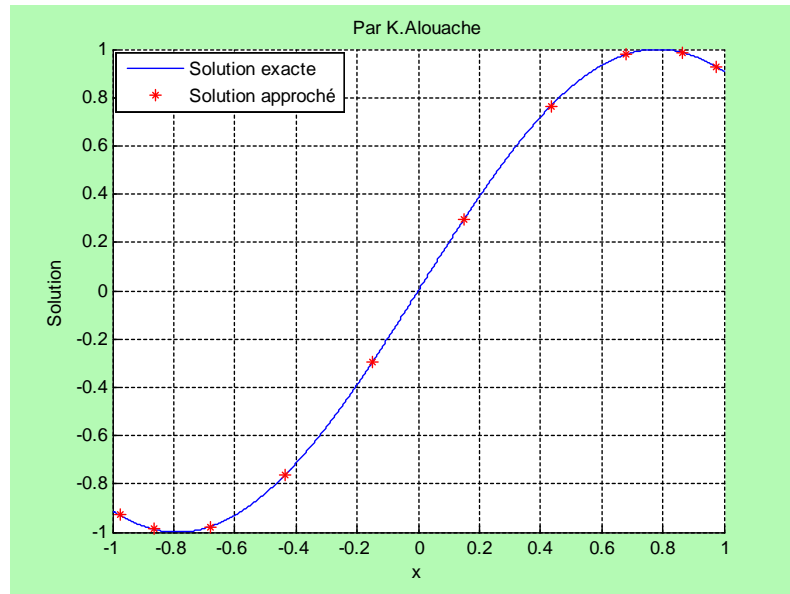


Figure (6)

## Conclusion

La résolution numérique d'équation intégrale est très souvent nécessaire, faute de l'existence de solutions analytiques.

Les méthodes de résolution numérique des équations intégrales jouent un rôle très important dans divers domaines scientifiques. Avec l'avantage des machines de calcul numérique, notamment les ordinateurs, ces méthodes sont devenues aujourd'hui un outil essentiel pour l'investigation dans les différents problèmes fondamentaux dans les assimilations des phénomènes scientifiques qui sont difficiles à réaliser, voir impossible à résoudre.

Dans ce travail, nous avons étudié la résolution numérique des équations intégrales de type "Fredholm de 2<sup>ème</sup> espèce" par "les polynômes de Legendre" et on a choisie les nœuds comme les "racines de polynôme de Legendre". Ces nœuds jouent un rôle important dans la convergence des solutions approchées vers la solution exacte.

# Bibliographie

- [1] Aminsadrabad.S, *Numerical Solution of Integral solutions with Legendre Basis*, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. **6**, no.**23**, **1131 – 1135**.
- [2] Andrei. D, Polyanin Alexander, Manzhirov. V, *Hand book of Integral Equation*, CRC Press, Boca Ration **1998**.
- [3] Atkinson. K.E, *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, Cambridge University Press.
- [4] Atkinson. A.E. and Weimin. H, *Theoretical Numerical Analysis, A Functional analysis Framework*, Springer-Verlag, New Yourk **2001**.
- [5] Canuto. C, Hussaini. M.Y, Quarteroni. A, Zang. T.A, *Spectral Methods on Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, **1988**.
- [6] Franck Jedrzejewski, *Introduction aux méthodes numériques Deuxième édition*, Springer-Verlag France, Paris **2005**.
- [7] Jie Shen, Tao Tang, Li-Lian Wang, *Spectral Methods*, Springer Heidelberg Dordrecht London New York.
- [8] Kolmogorov. K et Fomine. S, *Eléments de la théorie des fonctions et de l'ana-lyse fonctionnelle*, Edition Mir, **1973**.
- [9] Kress. R, *Linear Integral Equations*, Springer-Verlag, New york, **1998**.

- [10] Maleknejad. K, Nouri. K, Yousefi. M, *Discussion on convergence of Legendre polynomial for numerical solution of integral equation*, Applied Mathematics and Computation **193(2007)355 – 339**.
- [11] NADIR. M, *Cours d'analyse fonctionnelles*, université de M'sila **2004**.
- [12] NADIR. M, *Cours sur les équations intégrales*, université de M'sila.
- [13] NADIR, M, *Solving Fredholm integral equations with application of the four Chebyshev polynomials*, Journal of Approximation Theory and Applied Mathematics, **2014** Vol.4.
- [14] RAHMOUN, A, *Sur la Résolution Numérique des Équations Intégrales en utilisant des Fonctions Spéciales*, Thèse de Docteur en Sciences, Université de Batna 2011.
- [15] Yucheng Liu, *Application of Legendre Polynômials in Solving Volterra Integral Equations of Second Kind*, Applied Mathematics **2013, 3(5) : 175 – 159**.