MINISTERE DE L′ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE M′SILA MOHAMED BOUDIAF
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET D′INFORMATIQUES
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de fin d′étude présenté pour l′obtention du diplôme de

∗ ∗ ∗ ∗ ∗ Master ∗ ∗ ∗ ∗ ∗

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Fonctionnelle

Rédige Par

THEME

Devant de jury :

Prof	**Président**	**Univ de M′sila**
MC/A	**Encadreur**	**Univ de M′sila**
MA/A	**Examinateur**	**Univ de M′sila**

Année : 2016/2017

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions Dieu le tout puissant, de nous avoir donné le courage, la santé et la patience durant tout le temps que nous avons consacré à la réalisation de ce travail

Nous voudrons tout d'abord adresser toutes nos gratitudes au

Dr. ARIOUA Yacine

du Pôle universitaire MOHAMMED BOUDIAF de M'SILA pour nous avoir guider et conseiller tout au long de ce travail et pour son soutien scientifique et humain, et la confiance qu'il nous a accordée pour mener ce travail.

Nous désirons aussi remercier le professeur

Dr. BENHAMIDOUCHE Nouredine

pour avoir accepté de juger ce travail et de présider le jury.

Nous tiendrons également à remercier Monsieurs

Dr. SANGOUGA Abd El Mehcine

pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail, en acceptant de l'examiner.

Nos remerciements vont également à tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin à l'aboutissement de ce modeste travail.

Enfin, nous n'oublions pas d'adresser nos vifs remerciements à toute nos familles, qui nous a accompagné tout au long de nos études par leurs amours inconditionnelset leur soutien constant.

Merci

Table des matières

Introduction

La question des dérivés fractionnaires est abordée dès 1695 par Leibnitz dans une lettre de L'Hospital, mais lorsque celui-ci lui demande quelle pourrait être la dérivée d'ordre un demi de la fonction f, Leibnitz répond que cela même à un paradoxe dont on tirera un jour d'utiles conséquences. Plus de 300 ans après, on commence seulement à venir à bout des difficultés.

De nombreux mathématiciens se sont penchés sur cette question, en particulier Euler (1730), Fourier (1822), Abel (1823), Liouville (1832), Riemann (1847), etc. . . Différentes approches ont été utilisées pour généraliser la notion de dérivation aux ordres non-entiers.
- La limite du taux d'accroisement d'une fonction se généralise sous la forme de la formule de Grunwald-Letnikov, trés utile numériquement,
- L'intégration, opération inverse, via la formule intégrale de Liouville, mène aux formules de Riemann-Liouville et de Caputo et de Hadamard.

Le calcul fractionnaire est une généralisation du calcul différentiel. C'est Lacroix (1879) qui montre que pour $f(t) = t^a$ et $a > 0$,

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}} f(t) = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)} t^{a-\frac{1}{2}}$$

Ensuite, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Weyl, Riez, Marchaud et Caputo, entre autres, ont contribué au développement du calcul fractionnaire dans lequel on définit les dérivées et intégrales non entières.

Dans ce cadre et pour notre support bibliographique nous nous sommes appuyés principalement sur les ouvrages de Samko, Kilbas et Marichev ([8], 1993), celui de Rubin ([7], 1996) ainsi que Kilbas, Srivastava et Trujillo ([2], 2006).

Les dérivées fractionnaires sont utilisées par exemple dans certains domaines de la physique faisant intervenir des phénomènes de diffusion comme l'électromagnétisme, l'acoustique ou la thermique.

On propose dans ce travail, de faire une synthèse de certains travaux sur le calcul fractionnaire.

Le premier chapitre sera consacré aux notions de base et des résultats fondamentaux de la théorie de l'analyse fonctionnelle, un rappel et quelques concepts préliminaires seront introduits comme la fonction Gamma, la fonction Bêta, et la fonction de Mittag-Leffler qui joue un rôle important dans la théorie de calcul fractionnaire.

Dans le second chapitre, nous nous intéressons aux définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul fractionnaire telles que : l'intégration fractionnaire, la dérivation fractionnaire au sense Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov et celle de Hadamard, qui sont les plus utilisées.

Dans le troisième chapitre de notre travail, nous présentons une généralisation récente introduite par Udita Katugampola (2011) est la suivante, qui généralise l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et l'intégrale fractionnaire de Hadamard. L'intégrale est connue sous le nom de l'intégrale fractionnaire de Katugampola. En outre, la dérivée fractionnaire de type Katugampola et Caputo-Katugampola, qui généralise les dérivés fractionnaires de Riemann-Liouville et Hadamard et Caputo.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre constitue une partie préliminaire dans la quelle on rappelle des notions et des résultats fondamentaux de la théorie de l'analyse fonctionnelle. Nous présentons également les fonctions Gamma, Beta, Mittag-Leffler, qui seront utilisées dans les autres chapitres. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.1 Espaces d'intégration, et fonctions absolument continues

Dans cette section, nous présentons des définitions d'espaces des fonctions p-intégrables, absolument continues, et les fonctions continues et leurs modifications pondérées. Nous donnons également les caractérisations de ces espaces modifiés qui seront utilisés plus tard.

Soit $\Omega = [a, b]$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$. Nous désignons par $L^p(a, b)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ l'ensemble des fonctions mesurables f sur Ω avec $\|f\| < +\infty$, où

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 < p \leq +\infty$$

et

$$\|f\|_\infty = ess \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)| \, .$$

Maintenant soit $[a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$. Nous désignons par $AC[a, b]$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$, où

$$f(t) \in AC[a, b] \Leftrightarrow f(t) = c + \int_a^t \varphi(\tau) \, d\tau, \ \varphi(\tau) \in L(a, b),$$

et donc une fonction absolument continue $f(t)$ a une dérivée $f^{'}(t) = \varphi(t)$ presque partout sur $[a, b]$, et $f(a) = c$.

Pour $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ on note $AC^n[a, b]$ l'espace des fonctions $f(t)$ ayan des dérivées continues jusqu'à l'ordre $n - 1$ sur $[a, b]$ tel que

$f^{n-1} \in AC[a, b]$:

$$AC^n[a, b] = \left\{ f : [a, b] \to \mathbb{R} / \ f^{n-1}(t) \in AC[a, b] \right\}$$

En particulier, $AC^1[a, b] = AC[a, b]$.

Nous utilisons également une modification pondérée de l'espace $AC^n[a, b]$, dans laquelle la dérivée usuelle $D = \dfrac{d}{dt}$ est remplacée par la dérivée dite $\delta-$dérivée, définie par $\delta = tD = t\dfrac{d}{dt}$.

Nous désignons par $AC^n_{\delta,\mu}[a, b]$, $(n \in \mathbb{N},\ \mu \in \mathbb{R})$, l'espace des fonctions mesurables g sur (a, b) telles que $t^{\mu}g(t)$ a une $\delta-$dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$ sur $[a, b]$ et $\delta^{n-1}[t^{\mu}g(t)]$ est absolument continu sur $[a, b]$:

$$AC^n_{\delta,\mu}[a, b] = \left\{ f : [a, b] \to \mathbb{R} / \ \delta^{n-1}[t^{\mu}g(t)] \in AC[a, b] \right\}.$$

En particulier, lorsque $\mu = 0$, l'espace $.AC^n_{\delta}[a, b] = AC^n_{\delta,0}[a, b]$ est défini par :

$$AC^n_{\delta}[a, b] = \left\{ f : [a, b] \to \mathbb{R} / \ \delta^{n-1}g(t) \in AC[a, b] \right\}.$$

Si $\mu = 0$ et $n = 1$, l'espace $AC^n_{\delta,\mu}[a, b]$ coïncide avec $AC[a, b]$.

Enfin, considérons l'espace $X^p_c(a, b)$, $(c \in \mathbb{R},\ 1 \leq p \leq \infty)$ des fonctions mesurables f sur (a, b) pour $\|y\|_{X^p_c} < \infty$, défini par la norme,

$$\|f\|_{X^p_c} = \left(\int_a^b |s^c f(s)|^p \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,\ \text{pour } 1 \leq p < \infty,$$

et pour le cas $p = \infty$,

$$\|f\|_{X^{\infty}_c} = \operatorname{ess} \sup_{a \leq t \leq b} [t^c |f(t)|], \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Définition 1.1.1 *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ continue par mourceaux. On appelle transformé de laplace de f définie par*

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

1.2 Fonctions Spéciales

1.2.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 1.2.1 *On appelle Gamma la fonction définie par*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt, \quad (z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 0).$$

avec $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$.

Exemple 1.2.1

1. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1.$
2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-\tau^2}d\tau = \sqrt{\pi}$ *(posant le changement de variable* $t = \tau^2$*).*

Lemme 1.2.1 *la fonction Gamma est une fonction de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}_+^*$, (*resp.holomorphe sur le demi plan* $z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 0$) *et*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*.\forall z \in \mathbb{R}_+^* \ (resp.\ z \in \mathbb{C},\ \ \mathrm{Re}(z) > 0);\ \Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{z-1}e^{-t}dt.$$

Lemme 1.2.2 *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$\begin{array}{rrcl} 1. & \Gamma(z+1) & = & z\Gamma(z). \\ 2. & \Gamma(n) & = & (n-1)!. \\ 3. & \Gamma(n+\frac{1}{2}) & = & \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}. \end{array}$$

Preuve.

1. Représentons $\Gamma(z+1)$ par l'intégrale d'Euler et intégrons par parties:

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} t^z e^{-t}dt = [-t^z e^{-t}]_0^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \\ &= z\Gamma(z). \end{aligned}$$

2. Il suffit d'appliquons 1 pour $z = n-1$.

3. Nous allons démontrer la formule $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \dfrac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

   -Pour $n = 0$, on a $\Gamma(0+\dfrac{1}{2}) = \dfrac{(0)!\sqrt{\pi}}{4^0 0!} = \sqrt{\pi}.$

-Supposons que la formule est démontrer la formule est vérifiée pour $(n-1)$ et considérons n.C-à-d que supposons que $\Gamma((n-1)+\frac{1}{2})=\frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!}$, vérifié. Alors

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+\frac{1}{2}) &= (n-\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2}) = (n-\frac{1}{2})\frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!} \\
&= \left(\frac{2n-1}{2}\right)\frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!} \\
&= \frac{2n}{2n}\frac{(2n-1)}{2}\frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!} \\
&= \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Donc la formule est vériffiée pour n.

■

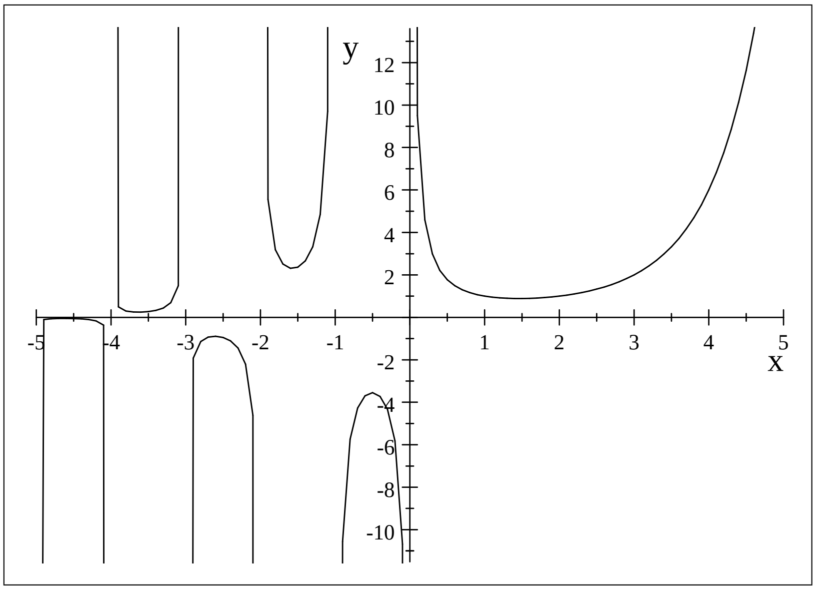
Remarque 1.2.1 *La détermination de la fonction Gamma pour les valeur négatifs non entière par la formule* $\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+1)}{z}$, *et La transition d'un intervalle à un autre* $(-1,0),(-2,-1),(-3,-1)$

La fonction Gamma n'existe pas pour les valeur négatifs entiers.

Exemple 1.2.2 *1)* $\Gamma(-\frac{1}{2})=\frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{-\frac{1}{2}}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}}=-2\sqrt{\pi}$.

2) $\Gamma(-\frac{3}{2})=\frac{\Gamma(-\frac{3}{2}+1)}{-\frac{3}{2}}=\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{-\frac{3}{2}}=\frac{-2\sqrt{\pi}}{-\frac{3}{2}}=\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$.

Graphe de la fonction $\Gamma(z)$.



Graphe de la fonction Γ *d'Euler*

Proposition 1.2.1 *Pour tout $p > 0$, on a*

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^p n!}{p(p+1)(p+2)......(p+n)}.$$

Preuve. Considérons la fonction

$$f(n,p) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{p-1}dt.$$

On peut facilement voir que

$$\lim_{n\to+\infty} f(n,p) = \Gamma(p).$$

D'une autre part, par l'intégration par parties on obtient

$$\begin{aligned} f(n,p) &= \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{p-1}dt = \left[\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \frac{t^p}{p}\right]_0^n + \frac{1}{p}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} t^p dt \\ &= \frac{1}{p}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} t^p dt. \end{aligned}$$

Encore fois, en inyégrant par parties

$$\begin{aligned} f(n,p) &= \frac{1}{p}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} t^p dt \\ &= \frac{1}{p}\left[\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \frac{t^{p+1}}{p+1}\right]_0^n + \frac{(n-1)}{np(p+1)}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2} t^{p+1}dt \\ &= \frac{n(n-1)}{n^2 p(p+1)}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2} t^{p+1}dt. \end{aligned}$$

Aprés l'intégration par parties n fois, on obtient

$$\begin{aligned} f(n,p) &= \frac{n(n-1)...[n-(n-1)]}{n^n p(p+1)...[p+(n-1)]}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-n} t^{p+(n-1)}dt \\ &= \frac{n!}{n^n p(p+1)...[p+(n-1)]}\left[\frac{t^{n+p}}{n+p}\right]_0^n \\ &= \frac{n!n^p}{p(p+1)...(p+n)}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^p}{p(p+1)(p+2)...(p+n)}.$$

■

1.2.2 La fonction Beta

Définition 1.2.2 *La fonction de Beta est un type d'intégrale d'Euler définie par*

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt, \qquad (p,q\in\mathbb{C},\ \operatorname{Re}(p)>0,\ \operatorname{Re}(q)>0).$$

pour tout $p,q\in\mathbb{C}$, *avec* $\operatorname{Re}(p)>0$, $\operatorname{Re}(q)>0$, *on a*

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Soit $D=(0,+\infty)\times(0,+\infty)$, *on a*

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx\right)\left(\int_0^{+\infty} y^{q-1}e^{-y}dy\right)\\ &= \int\int_D x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}dxdy.\end{aligned}$$

En utilisant un changement de cordonnée, considérons les nouvelles cordonnées :

$$\begin{cases} u=x+y\\ v=\frac{x}{x+y}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=uv\\ y=u(1-v)\end{cases},$$

et

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} v & u\\ 1-v & -u\end{vmatrix}=-uv-u(1-v)=-u$$

De même que le domaine D' *correspondant à* D *dans les cordonnées* u, v *est*

$$D'=\{(u,v)\,/u\geq 0, 0\leq v\leq 1\}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int\int_D x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}dxdy &= \int\int_{D'} (uv)^{p-1}(u(1-v))^{q-1}e^{-u}|-u|dudv\\ &= \int\int_{D'} u^{p+q-1}v^{p-1}(1-v)^{q-1}e^{-u}dudv\\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^1 u^{p+q-1}v^{p-1}(1-v)^{q-1}e^{-u}dudv\\ &= \left(\int_0^{+\infty} u^{p+q-1}e^{-u}du\right)\int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}dv\\ &= \Gamma(p+q)B(p,q).\end{aligned}$$

par conséquent

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

1.2.3 Fonction de Mittag-Leffter

Définition 1.2.3 *La fonction de Mittag -Leffter est définie par*

$$E_\alpha(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{\Gamma(\alpha k+1)},\qquad \alpha>0.$$

et la fonction de Mittag -Leffter généralisée est défine par

$$E_{\alpha,\beta}(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\qquad (\alpha,\ \beta)>0.$$

Exemple 1.2.3 *1.*

$$E_1(t)=E_{1,1}(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{\Gamma(k+1)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}=e^t.$$

2.

$$E_2(t)=E_{2,1}(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{\Gamma(2k+1)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{(2k)!}=\cosh\sqrt{t}.$$

3.

$$E_{1,2}(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{\Gamma(k+2)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{(k+1)!}=\frac{1}{t}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{1}{t}\left(e^t-1\right).$$

4.

$$E_{1,3}(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{\Gamma(k+3)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{(k+2)!}=\frac{1}{t^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^{k+2}}{(k+2)!}=\frac{1}{t^2}\left(e^t-1-t\right).$$

Théorème 1.2.1 *Pour* $\alpha=n\in\mathbb{N},\ \lambda\in\mathbb{R},$ *on a*

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}\right)^n E_\alpha(\lambda t^n) &= \lambda E_n(\lambda t^n).\\ \left(\frac{d}{dt}\right)^n t^{\beta-1}E_{n,\beta}(\lambda t^n) &= \lambda t^{\beta-n-1}E_n(\lambda t^n).\end{aligned}$$

Proposition 1.2.2 *Pour* $\alpha,\beta>0,\ \lambda\in\mathbb{R}$ *on a*

$$\mathcal{L}\left[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)\right](s)=\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha-\lambda}, s>0, |\lambda s^\alpha|<1.$$

Preuve. Grâce à la définition de transformée de Laplace, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(\lambda t^{\alpha}\right)\right](s) &= \int_0^{+\infty} t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(\lambda t^{\alpha}\right)e^{-st}dt \\
&= \int_0^{+\infty} t^{\beta-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(\lambda t^{\alpha}\right)^k}{\Gamma\left(\alpha k+\beta\right)}e^{-st}dt \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma\left(\alpha k+\beta\right)}\int_0^{+\infty} t^{\alpha k+\beta-1}e^{-st}dt.
\end{aligned}$$

Posons le changement de variable $st=\tau$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(\lambda t^{\alpha}\right)\right](s) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k s^{-\alpha k-\beta}}{\Gamma\left(\alpha k+\beta\right)}\int_0^{+\infty}\tau^{\alpha k+\beta-1}e^{-\tau}d\tau \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k s^{-\alpha k-\beta}}{\Gamma\left(\alpha k+\beta\right)}\Gamma\left(\alpha k+\beta\right) \\
&= s^{-\beta}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\lambda s^{-\alpha}\right)^k.
\end{aligned}$$

et pour $|\lambda s^{\alpha}|<1$, on a $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\lambda s^{-\alpha}\right)^k=\dfrac{1}{1-\lambda s^{-\alpha}}$, donc

$$\mathcal{L}\left[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(\lambda t^{\alpha}\right)\right](s)=\frac{s^{-\beta}}{1-\lambda s^{-\alpha}}=\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-\lambda}.$$

■

Chapitre 2

Éléments de calcul fractionnaire

Ce chapitre sera consacré aux définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul fractionnaire telles que : l'intégration fractionnaire de Riemann Liouville et l'intégration fractionnaire de Hadamard, la dérivation fractionnaire au sense Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov, et Hadamard, qui sont les plus utilisées.

2.1 L'intégrale de Riemann-Liouville

Fonctions définies sur $[a, b]$.

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $[a, b]$.

Notons par $\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)$ la primitive de f qui s'annule en a:

$$\forall t \in [a, b]\,; \quad \left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)(t) = \int_a^t f(\tau)\, d\tau.$$

L'itération de $\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)$ permet d'obtenir la primitive seconde de f qui s'annule en a et dont la dérivée s'annule en a. De plus , d'aprés le théoréme de Fubini.

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)^2(t) &= \left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right) \circ \left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right) = \int_a^t \left(\int_a^u f(\tau)\, d\tau\right) du \\ &= \int_a^t (t - \tau) f(\tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En notant $\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)^n$ la nième itération de $\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)$, une récurrence directe montre que

$$\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)^n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau.$$

Si on note $g = \left(\mathcal{I}^1_{a^+} f\right)^n$, g est donc l'unique fonction vérifiant

$$\forall\ 0 \leq k \leq n-1,\ \ g^{(k)}\left(a\right) = 0,\ \ g^{(n)} = f.$$

L'égalité $g^{(n)} = f$ justifie la définition suivante:

Définition 2.1.1 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'intégrale à gauche d'ordre n de f , que l'on note $\left(\mathcal{I}^n_{a^+} f\right)$ est définie par :*

$$\left(\mathcal{I}^n_{a^+} f\right)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau.$$

Grâce à la fonction Gamma d'Euler que nous avons définie précédemment.
C'est la propriété $\Gamma(n+1) = n!, \forall\ n \in \mathbb{N}$, qui permet de généraliser la définition 2.1.1 de la manière suivant:

Définition 2.1.2 *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $\alpha > 0$ de f est définie par :*

$$\forall\ t \in [a,b]\,;\ \ \left(\mathcal{I}^\alpha_{a^+} f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau.$$

De méme manière on définit l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre $\alpha > 0$ est définie par :

$$\forall\ t \in [a,b]\,;\ \ \left(\mathcal{I}^\alpha_{b^-} f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau.$$

Fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}$.

Il est naturel d'étendre la définition 2.1.2 aux axes $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}$. Notons ces opérateurs $\left(\mathcal{I}^\alpha_{0^+} f\right)$ et $\left(\mathcal{I}^\alpha_{+} f\right)$:

$$\begin{aligned} \forall t &\in \mathbb{R}^+;\ \ \left(\mathcal{I}^\alpha_{0^+} f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau. \\ \forall t &\in \mathbb{R};\ \ \left(\mathcal{I}^\alpha_{+} f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

Proposition 2.1.1 *[5] Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$, on a*

1. $\left(\mathcal{I}^\alpha_{a^+} (t-a)^{\beta-1}\right)(t) = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (t-a)^{\alpha+\beta-1}$.
2. $\left(\mathcal{I}^\alpha_{b^-} (b-t)^{\beta-1}\right)(t) = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (b-t)^{\alpha+\beta-1}$.

Preuve.

1.

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-a)^{\beta-1}d\tau, \text{ posons } \tau-a=s(t-a) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 ((t-a)-s(t-a))^{\alpha-1}(s(t-a))^{\beta-1}(t-a)\,ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta), \qquad \left| B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right| \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}.
\end{aligned}$$

2. Méme ideé (le chengement de variable est $b-\tau=s(b-t))$.

■

Théorème 2.1.1 *[5] Si $f\in L^1([a,b])$, alors $\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f$ existe pour tout $\alpha>0$ et $\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f\in L^1([a,b])$.*

Proposition 2.1.2 *[5] Soit $\alpha>0$, $\beta>0$, et $f\in L^1([a,b])$. Alors*

$$\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\mathcal{I}_{a^+}^{\beta}f(t)=\mathcal{I}_{a^+}^{\beta}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f(t)=\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha+\beta}f(t).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\mathcal{I}_{a^+}^{\beta}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^{\tau}(\tau-s)^{\beta-1}f(s)ds\right)d\tau, \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^{\tau}(t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-s)^{\beta-1}f(s)dsd\tau, \left|\begin{array}{c}\text{changement de l'ordre}\\ \text{d'intégration}\end{array}\right| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(s)\int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-s)^{\beta-1}d\tau ds,
\end{aligned}$$

Posons $u=\dfrac{\tau-s}{t-s}$, alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\mathcal{I}_{a^+}^{\beta}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha+\beta-1}\left(\int_s^t (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}du\right)ds,\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta)\,duds, \left|B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right|\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha+\beta-1}ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1}f(s)ds\\
&= \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha+\beta}f(t).
\end{aligned}$$

■

Lemme 2.1.1 *[5] Soit* $\alpha>0$, $f\in L^1([0,b])$, $b>0$. *Alors la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville* $\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}f$ *est :*

$$\mathcal{L}(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}f)(s)=s^{-\alpha}\mathcal{L}(f)(s).$$

Preuve. On oeut écrire l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville $\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}f$ comme convolution de deux fonction $g(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}$ et $f(t)$, C-à-d

$$\begin{aligned}
(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)\,d\tau\\
&= \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}\right)*f(t)\\
&= g(t)*f(t).
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}f)(s) &= \mathcal{L}(g*f)(s)\\
&= \mathcal{L}(g)(s)\times\mathcal{L}(f)(s)\\
&= \mathcal{L}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}\right)(s)\times\mathcal{L}(f)(s)\\
&= s^{-\alpha}\mathcal{L}(f)(s).
\end{aligned}$$

■

2.2 L'intégrale fractionnaire de Hadamard

Soit $[a, b]$ un intervale fini ou infinie telle que $(0 \leq a < b < +\infty)$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Définition 2.2.1 *[5] Soit $\alpha > 0$. L'integrale fractionnaire de Hadamard à gauche (resp. à droit) d'ordre α de f est définie par :*

$$\left(\mathcal{J}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau.$$

(resp.

$$\left(\mathcal{J}_{b^-}^{\alpha} f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \left(\log \frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau.$$

Si $a = 0$ et $b = \infty$, ces définitions sont données par :

$$\left(\mathcal{J}_{0^+}^{\alpha} f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left(\log \frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau, \quad (x > 0).$$

et

$$\left(\mathcal{J}_{-}^{\alpha} f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty \left(\log \frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau, \quad (x > 0).$$

Proposition 2.2.1 *[5] Si $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $(0 < a < b < +\infty)$, on a*

1. $$\left(\mathcal{J}_{a^+}^{\alpha} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta+\alpha-1}.$$
2. $$\left(\mathcal{J}_{b^-}^{\alpha} \left(\log \frac{b}{t}\right)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \left(\log \frac{b}{t}\right)^{\beta+\alpha-1}.$$

Preuve. On a

$$\left(\mathcal{J}_{a+}^{\alpha} f\right)(t) = \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau.$$

$$\left(\mathcal{J}_{a^+}^{\alpha} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} \frac{\left(\log \frac{\tau}{a}\right)^{\beta-1}}{\tau} d\tau,$$

Posons $\left(\log\frac{\tau}{a}\right) = s\left(\log\frac{t}{a}\right)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 \left(\log\frac{t}{a\left(\frac{t}{a}\right)^s}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{a}e^{-s\log\frac{t}{a}}\left[s\log\frac{t}{a}\right]^{\beta-1} a\log\left(\frac{t}{a}\right)e^{s\log\frac{t}{a}}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^1 s^{\beta-1}(s-1)^{\alpha-1}\left[\log\left(\frac{t}{a}\right)\right]^{\beta+\alpha-1} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\log\left(\frac{t}{a}\right)\right]^{\beta+\alpha-1} B(\alpha,\beta), \qquad \left|B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right|. \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left[\log\left(\frac{t}{a}\right)\right]^{\beta+\alpha-1}.
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.2.2 *[5] Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $1 \leq p \leq \infty$.*
Si $0 < a < b < +\infty$, et $f \in L^p(a,b)$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}^{\alpha}_{a^+}\mathcal{J}^{\beta}_{a^+}f &= \mathcal{J}^{\alpha+\beta}_{a^+}f, \quad (c \leq 0). \\
\mathcal{J}^{\alpha}_{b^-}\mathcal{J}^{\beta}_{b^-}f &= \mathcal{J}^{\alpha+\beta}_{b^-}f, \quad (c \geq 0).
\end{aligned}$$

2.3 Dérivées fractionnaires

Il existe plusieurs définition de dérivées fractionnaires, nous présentons dans cette section les définitions des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville, Caputo ainsi que Grunwald-letnikov, Hadamard et Caputo-Hadamard qui sont les plus utilisées et nous donnons certaines de leurs propriétés.Telle que:

- La dérivée aux sens de Riemann-Liouville est définie à partir de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.
- Caputo a défini un opérateur de dérivation modifié ; une dérivée fractionnaire qui est plus restrictive que celle de Riemann-Liouville.
- Les formules de Grünewald-Letnikov pour représenter la dérivée fractionnaire font intervenir des limites de diférences finies d'ordre fractionnaire. Cette approche est importante pour la discrétisation des opérateurs d'ordre non entier.

2.3.1 Dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville

Ces approche dites encore à partir des primitives est sont basé sur l'intégration afin de définir la dérivation non entière.

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. En s'inspirant de la relation classique $\frac{d}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \circ_a \mathcal{I}_t^1$, on peut définir une dérivée fractionnaire d'ordre $0 \leq \alpha < 1$ par :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d}{dt} \circ_a \mathcal{I}_t^{1-\alpha}.$$

Plus généralement, si $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$ on peut poser:

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d^n}{dt^n} \circ_a \mathcal{I}_t^{1-\alpha}.$$

On obtient exactement la dérivée de Riemann-Liouville à gauche.

Définition 2.3.1 *Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha]+1$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α de f est définie par :*

$$\forall t \in [a, b], \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) \, d\tau.$$

De plus on a vu que la définition 2.3.1 d'intégrale à droite était associée à $\frac{-d}{dt}$. Le raisonnement précédent conduit donc à la définition suivante :

Définition 2.3.2 *Soit $\alpha > 0$,et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α de f est définie par:*

$$\forall t \in [a, b], \ \mathrm{D}_{b^-}^\alpha f(t) = \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) \, d\tau.$$

Si maintenant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, les définitions précédentes se généralisent directement et sont appelées dérivées de Liouville.

Définition 2.3.3 *Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Liouville à gauche d'ordre α de f est définie par :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \mathcal{D}_+^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_+^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) \, d\tau.$$

De plus, on a vu que la définition 2.3.3 d'intégrale à droite était associée à $\frac{-d}{dt}$. Le raisonnement précédent conduit donc à la définition suivante :

Définition 2.3.4 *Soit $\alpha > 0$,et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Liouville à droite d'ordre α de f est définie par :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{D}_{-}^{\alpha} f(t) = \left(-\frac{d}{dt}\right)^{n} \circ \mathcal{I}_{-}^{n-\alpha} f(t) = \frac{(-1)^{n}}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^{n}}{dt^{n}} \int_{t}^{+\infty} (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau.$$

Remarque 2.3.1 *1. Pour $\alpha = 0$ et $n = 1$. On a*

$$\mathcal{D}_{a^{+}}^{0} f(t) = \frac{d}{dt}\left(\mathcal{I}_{a^{+}}^{1} f\right) = f(t).$$

2. Tout ces dérivées coïncident avec les dérivées usuelles pour les ordres entiers:

$$\forall n \in \mathbb{N}^{*}; \begin{cases} \mathcal{D}_{a^{+}}^{n} f(t) = \mathcal{D}_{+}^{n} f(t) = \dfrac{d^{n}}{dt^{n}} f(t) \\ \mathcal{D}_{b^{-}}^{n} f(t) = \mathcal{D}_{-}^{n} f(t) = (-1)^{n} \dfrac{d^{n}}{dt^{n}} f(t) \end{cases}.$$

Proposition 2.3.1 *[5] Pour $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$ et $\beta - \alpha > 0$. On a*

$$1. \quad \left(\mathcal{D}_{a^{+}}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}.$$

$$2. \quad \left(\mathcal{D}_{b^{-}}^{\alpha} (b-t)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}.$$

Preuve.

1. Posons $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$, d'aprés la définition 2.3.1 et proposition 2.1.1 on a

$$\left(\mathcal{D}_{a^{+}}^{\alpha} f\right)(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{n} \circ \mathcal{I}_{a^{+}}^{n-\alpha} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{n} \left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)} (t-a)^{n-\alpha+\beta-1}\right),$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n} (t-a)^{n-\alpha+\beta-1} &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2) \\ &\quad \ldots (n-\alpha+\beta-1-(n-1))(t-a)^{-\alpha+\beta-1} \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\ldots(\beta-\alpha)(t-a)^{\beta-\alpha-1}, \end{aligned}$$

et d'autre coté

$$\begin{aligned} \Gamma(n-\alpha+\beta) &= (n-\alpha+\beta-1)\Gamma(n-\alpha+\beta-1), \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\Gamma(n-\alpha+\beta-2), \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\ldots(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)}(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\ldots(\beta-\alpha)(t-a)^{\beta-\alpha-1} \\
&= \frac{(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\ldots(\beta-\alpha)\Gamma(\beta)}{(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\ldots(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1} \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1}.
\end{aligned}$$

2. De même manière.

■

Remarque 2.3.2 *[5] Pour $\lambda = \beta - 1,\ a = 0,$ on a*

$$\left(\mathcal{D}_{0^+}^{n} t^{\lambda}\right)(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha}, & si \quad \alpha-\lambda \notin \{1,2,...,n\} \\ 0, & si \quad \alpha-\lambda \in \{1,2,...,n\} \end{cases}, \ \lambda > -1.$$

Si $\alpha - \lambda \in \{1,2,...,n\} \Rightarrow \alpha - \lambda = m \Longrightarrow \lambda = \alpha - m,\ m \in \{1,2,...,n\}$.

C-à-d

$$\left(\mathcal{D}_{0^+}^{n} t^{\alpha-m}\right)(t) = 0, \quad m \in \{1,2,...,n\}$$

Proposition 2.3.2 *[5] Soit $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ n = [\alpha]+1,\ (1 \leq p \leq \infty),$ on a les propriétés suivantes:*

1. *Si $f(t) \in L^p([a,b]),$ alors*

$$\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = f(t) \qquad et \quad \left(\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha} f\right)(t) = f(t).$$

2. *Si $\alpha > \beta$ et $f(t) \in L^p([a,b]),$ alors*

$$\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\beta}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = \left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha-\beta} f\right)(t) \quad et \quad \left(\mathcal{D}_{b^-}^{\beta}\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha} f\right)(t) = \left(\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha-\beta} f\right)(t).$$

3. *Si $f(t) \in L^1([a,b]),\ \left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha-\beta} f\right) \in AC^m([a,b]),$ alors*

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) &= f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} f\right)^{(n-k)}(a)}{\Gamma(\alpha-k+1)}(t-a)^{k}. \\
\left(\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f\right)(t) &= f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}\left(\mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha} f\right)^{(n-k)}(b)}{\Gamma(\alpha-k+1)}(b-t)^{k}.
\end{aligned}$$

4. *Si $f(t) \in C^q([a,b]),\ q = [\alpha+\beta]+1,$ alors*

$$\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\mathcal{D}_{a^+}^{\beta} f\right)(t) = \left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha+\beta} f\right)(t) \quad et \quad \left(\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}\mathcal{D}_{b^-}^{\beta} f\right)(t) = \left(\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha+\beta} f\right)(t).$$

2.3.2 Dérivées fractionnaires de Caputo

Cette définition se base sur l'interversion des compositions dans la formule de définition 2.1.1 semble aussi raisonnable pour définir une dérivée fractionnaire appelée dérivée de Caputo.

Définition 2.3.5 *Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α de f est définie par :*

$$\forall\ t \in [a,b]\,,\ {}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\left(t\right) = \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dt}\right)^{n} f\left(t\right) = \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)} \int_a^t \left(t-\tau\right)^{n-\alpha-1} f^{(n)}\left(\tau\right) d\tau.$$

Définissons aussi son analogue à droite.

Définition 2.3.6 *Soit $\alpha > 0$,et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre α de f est définie par:*

$$\forall\ t \in [a,b]\,,\ {}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f\left(t\right) = \mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha} \circ \left(-\frac{d}{dt}\right)^{n} f\left(t\right) = \frac{\left(-1\right)^{n}}{\Gamma\left(n-\alpha\right)} \int_t^b \left(t-\tau\right)^{n-\alpha-1} f^{(n)}\left(\tau\right) d\tau.$$

Remarque 2.3.3 *[5] Par contre, de telles définitions ne se recollent pas correctement aux dérivée classique:*

$$\forall n \in \mathbb{N}^{*},\ \left\{ \begin{array}{rcl} {}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{n} f(t) & = & f^{(n)}(t) - f^{(n)}\left(a\right) \\ {}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{n} f(t) & = & \left(-1\right)^{n}\left(f^{(n)}(t) - f^{(n)}\left(b\right)\right) \end{array} \right. .$$

Le résultat suivant montre qu'elles approchent les dérivées classiques par limite inférieure.

Lemme 2.3.1 *[5] Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+} - \mathbb{N}$ et $n = [\alpha] + 1$.* Si $f \in AC^{n}\left([a,b]\right)$, *alors*

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{\alpha \to n^-} {}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\ f(t) & = & f^{(n)}(t). \\ \lim\limits_{\alpha \to n^-} {}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}\ f(t) & = & \left(-1\right)^{n} f^{(n)}(t). \end{array}$$

Proposition 2.3.3 *[5] Pour $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$ on a*

1. $$\left({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \left(t-a\right)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma\left(\beta\right)}{\Gamma\left(\beta-\alpha\right)} \left(t-a\right)^{\beta-\alpha-1},\ \beta > \alpha.$$
2. $$\left({}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} \left(b-t\right)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma\left(\beta\right)}{\Gamma\left(\beta-\alpha\right)} \left(b-t\right)^{\beta-\alpha-1},\ \beta > \alpha.$$

Preuve.

1. Posons $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$, d'après la définition et proposition on a :

$$\left({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau.$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{\beta-1} &= (\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-1-(n-1))(t-a)^{\beta-1-n} \\ &= (\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-n)(t-a)^{\beta-n-1} \end{aligned}$$

d'où

$$\left({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = \frac{(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-1-n}\, d\tau,$$

posons $\tau - a = s(t-a)$

$$\begin{aligned} &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n-1} ds \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} B(n-\alpha, \beta-n) \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-n)\,\Gamma(n-\alpha)\,\Gamma(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)\,\Gamma(\beta-n)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \left| B(n-\alpha, \beta-n) = \frac{\Gamma(n-\alpha)\,\Gamma(\beta-n)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \right| \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned}$$

2. De même manière.

■

Remarque 2.3.4 *[5] Pour $\lambda = \beta - 1$, $a = 0$, on a*

$$\left({}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} t^{\lambda}\right)(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha}, \; si \; \lambda \notin \{0,1,2,\ldots,n-1\} \\ 0, \qquad si \quad \lambda \in \{0,1,2,\ldots,n-1\} \end{cases}, \;\; \lambda > -1$$

C-à-d

$$\left({}^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} t^{m}\right)(t) = 0, \;\; m \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}.$$

Théorème 2.3.1 *[5] Soient $\alpha \geq 0$ et $n = [a] + 1$. Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, si f possède $(n-1)$ dérivées en a et $\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)$ existe. Alors*

$$\left({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right].$$

presque pour tout $t \in [a, b]$.

Preuve. On a par définition

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] \\
&= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left[f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(\tau-a)^k\right] d\tau.
\end{aligned}$$

En utilisant l'integration par partie

$$\begin{aligned}
g(\tau) &= f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(\tau-a)^k &\longrightarrow \quad & \tfrac{d}{d\tau}\left[f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(\tau-a)^k\right]. \\
& \tfrac{(t-\tau)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} &\longrightarrow \quad & -\tfrac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)}
\end{aligned}$$

On obtient:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}[g(t)] &= \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left[f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(\tau-a)^k\right] d\tau \\
&= \left[\frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} g(\tau)\right]_a^t - \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \frac{d}{d\tau} g(\tau)\, d\tau.
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}[g(t)] = \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha+1} \frac{d}{dt} g(t).$$

De même façon pour n-fois,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}[g(t)] &= \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha+n} \frac{d^n}{dt^n} g(t) \\
&= \mathcal{I}_{a^+}^{n} \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} g(t) \\
&= \mathcal{I}_{a^+}^{n} \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] \\
&= \mathcal{I}_{a^+}^{n} \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} f(t), \qquad \frac{d^n}{dt^n}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] = 0.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right] \\
&= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}[g(t)] \\
&= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \mathcal{I}_{a^+}^{n}\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}f(t) \\
&= \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}f(t) \\
&= \left({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f\right)(t).
\end{aligned}$$

■

Corollaire 2.3.1 *[5] Soient $\alpha \geq 0$, $n = [\alpha]+1$ et $\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f\right)(t)$, $\left({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f\right)(t)$ sont existent, on suppose que $f^{(k)}(a)=0$ pour $k=0,1,...,n-1$. Alors*

$$\left({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f\right)(t) = \left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f\right)(t).$$

Proposition 2.3.4 *[5] Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $n = [\alpha]+1$, on a les propriétés suivant:*
1. Si $f(t) \in C^q([a,b])$, $q = [\alpha+\beta]+1$, alors

$$\left({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\ {}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\beta}\ f\right)(t) = \left({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha+\beta}f\right)(t),\ \ et\ \left({}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}\ {}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\beta}\ f\right)(t) = \left({}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha+\beta}f\right)(t),$$

2. Si $f(t) \in C^m([a,b])$, ou $f(t) \in AC^m([a,b])$, alors

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\ {}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\ f\right)(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\tfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k. \\
\left(\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}\ {}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}\ f\right)(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\tfrac{(-1)^{n-k}f^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^k.
\end{aligned}$$

2.3.3 Dérivées fractionnaires de Grünwald-Letnikov

L'idée de cette approche est de généraliser la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraires.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, pour $h > 0$ on a:

$$f'(t) = \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\left[f(t)-f(t-h)\right].$$

et la dérivée seconde:

$$\begin{aligned}
f''(t) &= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\left[f'(t)-f'(t-h)\right] \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{h}\left(f(t)-f(t-h)\right)-\frac{1}{h}\left(f(t-h)-f(t-2h)\right)\right] \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h^2}\left[f(t)-2f(t-h)+f(t-2h)\right].
\end{aligned}$$

plus généralement, la dérivée $n^{ième}$de f et donnée par:

$$f^{(n)}(t)=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n f(t-kh),$$

où

$$C_k^n=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!}.$$

Il est possible d'étendre C_k^n à $k>n$, en posant $C_k^n=0$. La formule (1.45) devient alors:

$$f^{(n)}(t)=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^\alpha f(t-kh).$$

Là encore, on peut généraliser le terme de droite grâce à la fonction Gamma, en posant pour $\alpha\in\mathbb{R}^+-\mathbb{N}$, et $k\in\mathbb{N}$,

$$C_k^\alpha=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\alpha-k+1)}.$$

Notons cette fois que $C_k^\alpha\neq 0$ même si $k>n$,

Définition 2.3.7 *Soit $\alpha>0$, La dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov à gauche d'ordre α est définie par:*

$$\forall t\in\mathbb{R},{}^{GL}\mathcal{D}_+^\alpha f(t)=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^\alpha f(t-kh).$$

Définissons aussi son analogue à droite.

Définition 2.3.8 *Soit $\alpha>0$, La dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov à droite d'ordre α est définie par:*

$$\forall t\in\mathbb{R},{}^{GL}\mathcal{D}_-^\alpha f(t)=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^\alpha f(t+kh).$$

La dérivée de Grünwald-Letnikov présente un intérêt numérique évident. Si h est assez petit, L'évaluation discrète de $\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}C_{k}^{\alpha}f(t-kh)$ permet d'approximation la dérivée fractionnaire de Liouville sur $\mathbb{R}$.

Remarque 2.3.5 ***(Linéarité)***
La diffiérentiation et l'intégration fractionnaires sont des opérateur linéaires:

$$\mathcal{D}^{\alpha}(\lambda f(t)+\mu g(t))=\lambda\mathcal{D}^{\alpha}f(t)+\mu\mathcal{D}^{\alpha}g(t),$$

pour n'importe quelle approche de dérivation.

2.3.4 Dérivées fractionnaires de Hadamard

Soit $[a,b]$ un intervale de $\mathbb{R}$, et on a la fonction $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ et $\left(\delta=t\dfrac{d}{dt}\right)$ le $\delta-$*dérivé*. et

$$AC_{\delta}^{n}[a,b]=\{g:[a,b]\to C:\delta^{n-1}g(t)\in AC[a,b],\delta=t\frac{d}{dt}\}.$$

Définition 2.3.9 [5] *Soit* $\alpha>0$ *et* $n=[\alpha]+1$. *Les dérivées fractionnaires de Hadamard à gauche et à droite d'ordre* α *de* f *sont définies par :*

$$\begin{aligned}\left({}^{H}\mathcal{D}_{a^{+}}^{\alpha}f\right)(t) &= \delta^{n}\left(\mathcal{J}_{a^{+}}^{n-\alpha}f\right)(t) \\ &= \left(t\frac{d}{dt}\right)^{n}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}\left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{n-\alpha+1}\frac{f(\tau)}{\tau}d\tau, \qquad (t>a).\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

et

$$\begin{aligned}\left({}^{H}\mathcal{D}_{b^{-}}^{\alpha}f\right)(t) &= (-\delta)^{n}\left(\mathcal{J}_{b^{-}}^{n-\alpha}f\right)(t) \\ &= \left(-t\frac{d}{dt}\right)^{n}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{t}^{b}\left(\log\frac{\tau}{t}\right)^{n-\alpha+1}\frac{f(\tau)}{\tau}d\tau, \qquad (t<b).\end{aligned}$$

respectivement.

Proposition 2.3.5 *[5] Si* $\alpha>0$, $\beta>0$, *alors*

1. $\left({}^{H}\mathcal{D}_{a^{+}}^{\alpha}\left(\log\dfrac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(t)=\dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(\log\dfrac{t}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}, \qquad \beta>\alpha.$
2. $\left({}^{H}\mathcal{D}_{b^{-}}^{\alpha}\left(\log\dfrac{b}{t}\right)^{\beta-1}\right)(t)=\dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(\log\dfrac{b}{t}\right)^{\beta-\alpha-1}, \qquad \beta>\alpha.$

En particulaire, si $\beta = 1,$ *on a*

$$1.\quad \left({}^{H}\mathcal{D}_{a^{+}}^{\alpha}1\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{-\alpha}.$$
$$2.\quad \left({}^{H}\mathcal{D}_{b^{-}}^{\alpha}1\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\log\frac{b}{t}\right)^{-\alpha}.$$

Lemme 2.3.2 *[5] Soit* $\alpha > 0$ *et* $n = [\alpha] + 1,$ *si* $f \in AC_{\delta}^{n}[a,b],$ *alors*

$$\left({}^{H}\mathcal{D}_{a^{+}}^{\alpha}f\right)(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^{k}f\right)(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}\left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{n-\alpha-1}(\delta^{n}f)(\tau)\,d\tau.$$

et

$$\left({}^{H}\mathcal{D}_{b^{-}}^{\alpha}f\right)(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k}\left(\delta^{k}f\right)(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}\left(\log\frac{b}{t}\right)^{k-\alpha} + \frac{(-1)^{n}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{t}^{b}\left(\log\frac{\tau}{t}\right)^{n-\alpha-1}(\delta^{n}f)(\tau)\,d\tau.$$

En particulaire, si $0 < \alpha < 1,$ *alors pour* $f \in AC[a,b],$

$$\left({}^{H}\mathcal{D}_{a^{+}}^{\alpha}f\right)(t) = \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{a}^{t}\left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{-\alpha}\frac{f'(\tau)}{\tau}d\tau.$$

et

$$\left({}^{H}\mathcal{D}_{b^{-}}^{\alpha}f\right)(t) = \frac{f(b)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\log\frac{b}{t}\right)^{-\alpha} - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t}^{b}\left(\log\frac{\tau}{t}\right)^{-\alpha}\frac{f'(\tau)}{\tau}d\tau.$$

Proposition 2.3.6 *[5] Soit* $\alpha > 0,$ *et* $\beta > 0.$

Si $1 \le p \le \infty,$ *alors, pour* $f \in L^{p}(a,b)$

$${}^{H}\mathcal{D}_{a^{+}}^{\beta}\,\mathcal{J}_{a^{+}}^{\alpha}f = \mathcal{J}_{a^{+}}^{\alpha-\beta}f \quad \text{et} \quad {}^{H}\mathcal{D}_{b^{-}}^{\beta}\,\mathcal{J}_{b^{-}}^{\alpha}f = \mathcal{J}_{b^{-}}^{\alpha-\beta}f\ .$$

En particulaire, si $\beta = m \in \mathbb{N},$ *alors*

$${}^{H}\mathcal{D}_{a^{+}}^{m}\,\mathcal{J}_{a^{+}}^{\alpha}f = \mathcal{J}_{a^{+}}^{\alpha-m}f \quad \text{et} \quad {}^{H}\mathcal{D}_{b^{-}}^{m}\,\mathcal{J}_{b^{-}}^{\alpha}f = \mathcal{J}_{b^{-}}^{\alpha-m}f.\ .$$

Proposition 2.3.7 *[5] Soit* $\alpha > 0,$ *et* $1 \le p \le \infty,$ *alors, pour* $f \in L^{p}(a,b)$

$$\begin{aligned}{}^{H}\mathcal{D}_{a^{+}}^{\alpha}\,\mathcal{J}_{a^{+}}^{\alpha}f &= f \qquad (c \le 0);\\ {}^{H}\mathcal{D}_{b^{-}}^{\alpha}\,\mathcal{J}_{b^{-}}^{\alpha}f &= f \qquad (c \ge 0).\end{aligned}$$

Théorème 2.3.2 *[5] Soit* $\alpha > 0,$ *et* $f \in L(a,b)$ *et* $\left(\mathcal{J}_{a^{+}}^{n-\alpha}f\right)(t) \in AC_{\delta}^{n}[a,b].$ *Alors*

$$\left(\mathcal{J}_{a^{+}}^{\alpha}\ {}^{H}\mathcal{D}_{a^{+}}^{\alpha}f\right)(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\delta^{n-k}\left(\mathcal{J}_{a^{+}}^{n-\alpha}f\right)\right)(a)}{\Gamma(\alpha-k+1)}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\alpha-k}.$$

En particulaire, si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ *et* $f \in AC_{\delta}^{n}[a,b],$ *alors*

$$\left(\mathcal{J}_{a^{+}}^{n}\ {}^{H}\mathcal{D}_{a^{+}}^{n}f\right)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\delta^{k}f\right)(a)}{k!}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{k}.$$

2.3.5 Dérivées fractionnaires de Caputo-Hadamard

On définie les modification du type Caputo des dérivés fractionnaire de Hadamard comme suite :

Définition 2.3.10 *Soit $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$, si $f \in AC_\delta^n$, Les dérivées fractionnaires de Caputo-Hadamard à gauche et à droite d'ordre α de f sont définies par :*

$$\begin{aligned} \left({}^{CH}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) &= \mathcal{J}_{a^+}^{n-\alpha} \delta^n f(t). \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{\tau}\right)^{n-\alpha+1} \left(\tau \frac{d}{d\tau}\right)^n f(\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \qquad (t > a), \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

et

$$\begin{aligned} \left({}^{CH}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f\right)(t) &= (-1)^n \mathcal{J}_{b^-}^{n-\alpha} \delta^n f(t). \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \left(\log \frac{\tau}{t}\right)^{n-\alpha-1} \left(\tau \frac{d}{d\tau}\right)^n f(\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \qquad (t < b). \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

respectivement.

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors

$${}^{CH}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f(t) = \delta^n f(t) \quad \text{et} \quad {}^{CH}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f(t) = (-1)^n \delta^n f(t).$$

Théorème 2.3.3 *[3] Soit $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$, si $f \in AC_\delta^n$. Alors*

$${}^{CH}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f(t) = {}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^k f(a)}{k!} \left(\log \frac{t}{a}\right)^k \right](t).$$

et

$${}^{CH}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f(t) = {}^{H}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \delta^k f(a)}{k!} \left(\log \frac{b}{t}\right)^k \right](t).$$

En particulaire, si $0 < \alpha < 1$, on a

$${}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f(t) = {}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \left[f(t) - f(a)\right](t).$$

et

$${}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f(t) = {}^{H}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} \left[f(t) - f(b)\right](t).$$

Lemme 2.3.3 *[3] Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$ et $f \in C[a, b]$.*
(i) Si $\alpha \neq 0$ ou $\alpha \in \mathbb{N}$, alors

$$^{CH}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \left(\mathcal{J}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = f(t), \quad ^{CH}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} \left(\mathcal{J}_{b^-}^{\alpha} f\right)(t) = f(t).$$

(ii) Si $\alpha \in \mathbb{N}$ et $\alpha \neq 0$, alors

$$^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \left(\mathcal{J}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = f(t) - \frac{\mathcal{J}_{a^+}^{\alpha+1-n} f(a)}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{n-\alpha}.$$

$$^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} \left(\mathcal{J}_{b^-}^{\alpha} f\right)(t) = f(t) - \frac{\mathcal{J}_{b^-}^{\alpha+1-n} f(b)}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\log \frac{b}{t}\right)^{n-\alpha}.$$

Lemme 2.3.4 *[3] Soit $\alpha > 0$, et $f \in AC_{\delta}^{n}[a, b]$ ou $C_{\delta}^{n}[a, b]$. Alors*

$$\mathcal{J}_{a^+}^{\alpha} \left({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\delta^k f(a)}{k!} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{k}.$$

$$\mathcal{J}_{b^-}^{\alpha} \left({}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f\right)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \delta^k f(b)}{k!} \left(\log \frac{b}{t}\right)^{k}.$$

Proposition 2.3.8 *[3] Soit $\alpha \geq 0$, $n = [\alpha] + 1$et $\beta > 0$. Alors*

$$\begin{aligned} ^{CH}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}, \quad \beta > \alpha. \\ ^{CH}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} \left(\log \frac{b}{t}\right)^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \left(\log \frac{b}{t}\right)^{\beta-\alpha-1}, \quad \beta > \alpha. \end{aligned}$$

et

$$^{CH}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{k} = 0 \quad et \quad ^{CH}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} \left(\log \frac{b}{t}\right)^{k} = 0, \qquad (k = 0, 1, ..., n-1).$$

Les dérivés fractionnaire de type Caputo-Hadamard peut être définie sur le demi-axe positif $\mathbb{R}^+$ par remplaçant a par 0 dans la formule (2.3.2) et b par ∞ dans la formule (2.3.3) à condition que $f(t) \in AC_{\delta}^{n}(\mathbb{R}^+)$ ou $f(t) \in C_{\delta}^{n}(\mathbb{R}^+)$, on a

$$\begin{aligned} ^{C}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \left(\log \frac{t}{\tau}\right)^{n-\alpha-1} \delta^n \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau. \\ ^{C}\mathcal{D}_{-}^{\alpha} f(t) &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^{\infty} \left(\log \frac{\tau}{t}\right)^{n-\alpha-1} \delta^n \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Chapitre 3

Généralisation de dérivée fractionnaire de Katugampola

Dans ce chapitre , nous présentons une généralisation récente introduite par Udita Katugampola (2011 [6]), qui généralise l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et l'intégrale fractionnaire de Hadamard. L'intégrale est connue sous le nom de l'intégrale fractionnaire de Katugampola. et en présentons aussi la dérivée fractionnaire de type Katugampola, qui généralise les dérivés fractionnaires de Riemann-Liouville et Hadamard.

3.1 L'intégrale fractionnaire de Katugampola

Soit $[a, b]$, $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini sur $\mathbb{R}$.

Définition 3.1.1 *[4] Soit $\rho > 0$. L'intégrale fractionnaire généralisée ${}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} f$ d'ordre $\alpha > 0$ est définie par :*

$$ {}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} f(t) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t^{\rho} - \tau^{\rho})^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} f(\tau)\, d\tau, \ t > a $$

Cette intégrale est appelée l'intégrale fractionnaire à gauche.

De même façons on peut définie l'intégrale fractionnaire à droite par ${}^{\rho}\mathcal{I}_{b}^{\alpha} f$

$$ {}^{\rho}\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha} f(t) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau^{\rho} - t^{\rho})^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} f(\tau)\, d\tau, \ t < b. $$

Théorème 3.1.1 *[4] Soient $\alpha > 0$, $1 \leq p \leq \infty$. Alors l'opérateur ${}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}$ est borné dans $X_c^p(a,b)$ et*

$$\left\|{}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} f\right\|_{X_c^p} \leq k \left\|f\right\|_{X_c^p}, \ \rho \geq c$$

où

$$k = \frac{b^{\alpha\rho-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\frac{b}{a}} u^{c-\alpha\rho-1} \left(\frac{u^{\rho}-1}{\rho}\right)^{\alpha-1} du.$$

Preuve.

1. Pour $1 \leq p \leq \infty$.

$$\text{si } f(t) \in X_c^p(a,b) \Rightarrow t^{c-\frac{1}{p}} f(t) \in L^p(a,b)$$

d'où l'inégalité de Minkowsky, on a

$$\begin{aligned}
\left\|{}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} f\right\|_{X_c^p} &= \left(\int_a^b t^{cp} \left|\frac{1}{\rho^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t^{\rho}-\tau^{\rho})^{\alpha-1} \tau^{\rho-1} f(\tau)\, d\tau\right|^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_a^b \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t t^{c-\frac{1}{p}} \tau^{\alpha\rho-1} \left(\frac{\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\rho}-1}{\rho}\right)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_a^b \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\frac{t}{a}} t^{c-\frac{1}{\rho}} \left(\frac{t}{u}\right)^{\alpha\rho-1} \left(\frac{u^{\rho}-1}{\rho}\right)^{\alpha-1} f\left(\frac{t}{u}\right) t\frac{du}{u^2}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \int_1^{\frac{b}{a}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{u^{\rho}-1}{\rho}\right)^{\alpha-1} . \frac{1}{u^{\alpha\rho}} \left(\int_{at}^b t^{cp} \left|f\left(\frac{t}{u}\right)\right|^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} du.b^{\alpha\rho-1} \\
&= \int_1^{\frac{b}{a}} \frac{b^{\alpha\rho-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{u^{\rho}-1}{\rho}\right)^{\alpha-1} \frac{u^c}{u^{\alpha\rho+1}} \left(\int_a^{\frac{b}{u}} |\tau^c f(\tau)|^p \frac{d\tau}{\tau}\right)^{\frac{1}{p}} du.
\end{aligned}$$

donc

$$\left\|{}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} f\right\|_{X_c^p} \leq k \left\|f\right\|_{X_c^p}. \tag{3.1.1}$$

Où

$$k = \frac{b^{\alpha\rho-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\frac{b}{a}} u^{c-\alpha\rho-1} \left(\frac{u^{\rho}-1}{\rho}\right)^{\alpha-1} du, \ 1 \leq p \leq \infty, \tag{3.1.2}$$

2. Pour $p = \infty$, d'aprés

$$\left\|f\right\|_{X_c^{\infty}} = ess \sup_{a \leq t \leq b} \left[t^c \left|f(t)\right|\right], \quad (c \in \mathbb{R}). \tag{3.1.3}$$

et

$${}^{\rho}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} f(t) = \frac{\rho^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t^{\rho}-\tau^{\rho})^{\alpha-1} \tau^{\rho} f(\tau)\, d\tau.$$

on a

$$\begin{aligned} \left|t^{c}\left({}^{\rho}\mathcal{I}_{a+}^{\alpha}f\right)(t)\right| &\leq \frac{1}{\rho^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{t}\left(t^{\rho}-\tau^{\rho}\right)\tau^{\rho}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{c}\left|\tau^{c}f(\tau)\right|d\tau \\ &= \frac{b^{\alpha\rho-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_{1}^{\frac{b}{a}}u^{c-\alpha\rho-1}\left(\frac{u^{\rho}-1}{\rho}\right)^{\alpha-1}du, \end{aligned}$$

on pose $u=\dfrac{t}{\tau}$. C'est équivalent à (3.1.2).

■

Corollaire 3.1.1 *Soient $\alpha>0$, $1\leq p\leq\infty$. Alors l'opérateur ${}^{\rho}\mathcal{I}_{a+}^{\alpha}$ est borné dans $L^{p}(a,b)$ et*

$$\left\|{}^{\rho}\mathcal{I}_{a+}^{\alpha}f\right\|_{X_{c}^{p}}\leq \mathrm{k}\left\|f\right\|_{X_{c}^{p}},\quad \rho\geq\frac{1}{p},$$

où k *est donné par (3.1.2) avec $c=\dfrac{1}{p}$.*

Théorème 3.1.2 *Soient $\alpha>0$, $1\leq p\leq\infty$,et $\rho\geq c$. Pour $f(t)\in X_{c}^{p}(a,b)$ on a*

$$ {}^{\rho}\mathcal{I}_{a+}^{\alpha}\,{}^{\rho}\mathcal{I}_{a+}^{\beta}f={}^{\rho}\mathcal{I}_{a+}^{\alpha+\beta}f\ . \tag{3.1.4}$$

Preuve. En utilisant la définition .. et théorème de Fubinis on a

$$ {}^{\rho}\mathcal{I}_{a+}^{\alpha}\,{}^{\rho}\mathcal{I}_{a+}^{\beta}f(t)=\frac{1}{\rho^{\alpha+\beta-2}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{a}^{t}\tau^{\rho}f(\tau)\int_{\tau}^{t}\left(t^{\rho}-s^{\rho}\right)^{\alpha-1}\left(s^{\rho}-\tau^{\rho}\right)^{\beta-1}s^{\rho}dsd\tau. \tag{3.1.5}$$

par le changement de variable $y=\dfrac{\left(s^{\rho}-\tau^{\rho}\right)}{\left(t^{\rho}-\tau^{\rho}\right)}$:

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{t}\left(t^{\rho}-s^{\rho}\right)^{\alpha-1}\left(s^{\rho}-\tau^{\rho}\right)^{\beta-1}s^{\rho}dsd\tau &= \frac{\left(t^{\rho}-\tau^{\rho}\right)^{\alpha+\beta-1}}{\rho}\int_{0}^{1}(1-y)^{\alpha-1}y^{\beta-1}dy, \quad (3.1.6)\\ &= \frac{\left(t^{\rho}-\tau^{\rho}\right)^{\alpha+\beta-1}}{\rho}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

Selon la formule de la fonction beta [5, 6]. Par (3.1.6) et(3.1.5) on obtient

$$\begin{aligned} {}^{\rho}\mathcal{I}_{a+}^{\alpha}\,{}^{\rho}\mathcal{I}_{a+}^{\beta}f(t) &= \frac{\rho^{1-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_{a}^{t}\left(t^{\rho}-\tau^{\rho}\right)^{\alpha+\beta-1}\tau^{\rho}f(\tau)\,d\tau \\ &= {}^{\rho}\mathcal{I}_{a+}^{\alpha+\beta}f(t)\ . \end{aligned}$$

Si $\rho\geq c$, alors les opérateurs ${}^{\rho}\mathcal{I}_{a+}^{\alpha}$,${}^{\rho}\mathcal{I}_{a+}^{\beta}$ et ${}_{a}^{\rho}\mathcal{I}_{t}^{\alpha+\beta}$ sont bornées dans l'espace $X_{c}^{p}(a,b)$, donc la relation (3.1.4) est vrai pour $f\in X_{c}^{p}(a,b)$. ■

Théorème 3.1.3 *[4] Soient $\alpha > 0$ et $\rho > 0$. Alors $t \in (0, T)$,*

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho \to 1} \left({}^{\rho}\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} f \right)(t) &= \left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} f \right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau, \\
\lim_{\rho \to 0} \left({}^{\rho}\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} f \right)(t) &= \left(\mathcal{J}_{a^+}^{\alpha} f \right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau.
\end{aligned}$$

3.2 La dérivée fractionnaire de Katugampola

Définition 3.2.1 *La dérivée fractionnaire généraliser de Katugampola ${}^{\rho}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f$ à gauche d'ordre $\alpha > 0$, est défini par :*

$$\begin{aligned}
\left({}^{\rho}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f \right)(t) &= \left(t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n \circ \left({}^{\rho}\mathcal{I}_{\alpha^+}^{n-\alpha} f \right)(t) \\
&= \frac{\rho^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{\tau^{\rho-1} f(\tau)}{(t^{\rho} - \tau^{\rho})^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad t > a,
\end{aligned}$$

De même façons on peut définie la dérivée fractionnaire Katugampola à droite ${}^{\rho}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f$ par

$$\begin{aligned}
\left({}^{\rho}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f \right)(t) &= \left(-t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n \circ \mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha} f(t) \\
&= \frac{(-1)^n \rho^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n \int_t^b \frac{\tau^{\rho-1} f(\tau)}{(\tau^{\rho} - t^{\rho})^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad t < b,
\end{aligned}$$

Proposition 3.2.1 *Pour $\alpha, \rho > 0$, et $\lambda > -\rho$, on a :*

$${}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} t^{\lambda} = \frac{\rho^{\alpha-1} \Gamma\left(1 + \frac{\lambda}{\rho}\right)}{\Gamma\left(1 - \alpha + \frac{\lambda}{\rho}\right)} t^{\lambda - \alpha\rho}.$$

Preuve. Pour $\alpha, \rho > 0$, et $\lambda > -\rho$, on a :

$$\begin{aligned}
{}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} t^{\lambda} &= \frac{\rho^{\alpha-n+1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n \int_0^t \tau^{\rho+\lambda-1} (t^{\rho} - \tau^{\rho})^{n-\alpha-1} d\tau \\
&= \frac{\rho^{\alpha-n}}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n t^{\lambda+\rho(n-\alpha)} \int_0^1 \tau^{\frac{\lambda}{\rho}} (1-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau \\
&= \frac{\rho^{\alpha-n}}{\Gamma(n-\alpha)} \left(t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n t^{\lambda+\rho(n-\alpha)} B\left(n-\alpha, \frac{\lambda}{\rho} + 1 \right) \\
&\quad \left| B\left(n-\alpha, \frac{\lambda}{\rho} + 1 \right) = \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma\left(1 + \frac{\lambda}{\rho}\right)}{\Gamma\left(1 + n - \alpha + \frac{\lambda}{\rho}\right)} \right. \\
&= \frac{\rho^{\alpha-n} \Gamma\left(1 + \frac{\lambda}{\rho}\right)}{\Gamma\left(1 + n - \alpha + \frac{\lambda}{\rho}\right)} \left(t^{1-\rho} \frac{d}{dt} \right)^n t^{\lambda+\rho(n-\alpha)}.
\end{aligned}$$

En particulier

$$\begin{aligned}
\left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^{n} t^{\lambda+\rho(n-\alpha)} &= \left[\lambda+\rho\left(n-\alpha\right)\right]\left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^{n-1} t^{\lambda+\rho(n-\alpha-1)} \\
&= \left[\lambda+\rho\left(n-\alpha\right)\right]\left[\lambda+\rho\left(n-\alpha-1\right)\right]\left(t^{1-\rho}\frac{d}{dt}\right)^{n-2} t^{\lambda+\rho(n-\alpha-2)} \\
&\vdots \\
&= \left[\lambda+\rho\left(n-\alpha\right)\right]\left[\lambda+\rho\left(n-\alpha-1\right)\right]\cdots\left[\lambda+\rho\left(1-\alpha\right)\right] t^{\lambda-\alpha\rho} \\
&= \rho^{n-1}\left[n-\alpha+\frac{\lambda}{\rho}\right]\left[n-\alpha+\frac{\lambda}{\rho}-1\right]\cdots\left[1-\alpha+\frac{\lambda}{\rho}\right] t^{\lambda-\alpha\rho}.
\end{aligned}$$

Enfin, nous écrivons

$${}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} t^{\lambda} = \frac{\rho^{\alpha-1}\Gamma\left(1+\frac{\lambda}{\rho}\right)}{\Gamma\left(1+n-\alpha+\frac{\lambda}{\rho}\right)}\left[n-\alpha+\frac{\lambda}{\rho}\right]\left[n-\alpha+\frac{\lambda}{\rho}-1\right]\cdots\left[1-\alpha+\frac{\lambda}{\rho}\right] t^{\lambda-\alpha\rho}.$$

Car

$$\Gamma\left(1+n-\alpha+\frac{\lambda}{\rho}\right) = \left[n-\alpha+\frac{\lambda}{\rho}\right]\left[n-\alpha+\frac{\lambda}{\rho}-1\right]\cdots\left[1-\alpha+\frac{\lambda}{\rho}\right]\Gamma\left(1-\alpha+\frac{\lambda}{\rho}\right),$$

Alors, on obtient :

$${}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} t^{\lambda} = \frac{\rho^{\alpha-1}\Gamma\left(1+\dfrac{\lambda}{\rho}\right)}{\Gamma\left(1-\alpha+\dfrac{\lambda}{\rho}\right)} t^{\lambda-\alpha\rho}.$$

■

Théorème 3.2.1 *[4] Soient $\alpha > 0$ et $\rho > 0$. Alors $t \in (0, T)$,*

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho\to 1}\left({}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} f\right)(t) &= \left(\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_0^t \left(t-\tau\right)^{n-\alpha-1} f\left(\tau\right) d\tau, \\
\lim_{\rho\to 0}\left({}^{\rho}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} f\right)(t) &= \left({}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\left(t\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_0^t \left(\log\frac{t}{\tau}\right)^{n-\alpha-1} f\left(\tau\right)\frac{ds}{\tau}.
\end{aligned}$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous présentons certains travaux sur le calcul fractionnaire telles que : l'intégration fractionnaire, la dérivation fractionnaire au sense Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov et celle de Hadamard, nous présentons également une généralisation récente introduite par Udita Katugampola (2011), qui généralise l'intégrale et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, Hadamard. Ces opérateures est connue sous le nom de l'intégrale et la dérivée fractionnaire de Katugampola.

Bibliographie

[1] R. Almeida, Agnieszka B. Malinowska and T. Odzijewicz, *Fractional differential equations with dependence on the Caputo–Katugampola derivative*, Journal of Computation and Nonlinear Dynamics, July 2016, page 1-16.

[2] P.L. Butzer, A.A. Kilbas, J.J. Trujillo, *Compositions of Hadamard-type fractional integration operators and the semigroup property*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 269, 2002, page 387–400.

[3] F. Jarad, Thabet and B. Dumitru, *Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives*, Advances in Difference Equations, 2012, page 2 - 8

[4] U. Katugampola, *New approach to a generalized fractional integral*, Applied Mathematics and Computations, October 2011, page 860-865.

[5] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier B.V, Amsterdam, Netherlands, 2006.

[6] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, California-USA, 1999.

[7] B. Rubin, *Fractional intégrais and potentials*, Harlow: Longman, 1996.

[8] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev, *Fractional intégrais and derivatives theory and applications*, Gordon and Breach, New York, 1993.