REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Algébre et mathématiques discrétes

Thème

Valeure absolue sur un corps commutatif

Présentée par :
Bakhi Afaf
Rahmani Affaf

Devant le jury composé de :

Saadi Abderachid	MCA,	Université de M'sila	**Président**.
Ladjelat Lahcene	MAA,	Université de M'sila	**Encadreur.**
Dechoucha Noureddine	MAA,	Université de M'sila	**Examinateur.**

Année universitaire 2019/2020

Dédicase

Au nom d'allah le miséricordieux

Je dédie ce travail à tout personne qui m'a appris un lettre,
le succès et de la patience.
Je dédie mon travail aux esprits qui me supporte discrètement,
qui croient que nous sommes du bien pour cette terre.
A tout personne qui m'a rendu satisfait de moi.
2 éme Master Math 2020.

Remerciment

Je tiens tout d'abord à remercier **Dieu** le tout puissant qui ma donné la force et la patience pour accomplir ce travail.

En second lieu j'adresse mes remerciements à mon enseignant **Mr. Ladjelat Lahcene** qui ma guidé
dans mon travail et ma aidé pour trouver des solutions à des problèmes que j'ai rencontré

Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de mémoire.

Je tiens à exprimer tout mes respects à mes parents mon père et ma mère, à mes soeurs , qui s'ont toujours encouragé.

J'exprime ici à toute la famille et mes amies.

Je remercie tous les professeurs du département de mathématiques, sans oublier aussi mes collègues, ainsi tous ceux qui ont participé de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale **i**

1 Notions de bases **2**

1.1 Groupe 3

1.2 Anneaux 4

1.2.1 Ideaux 4

1.3 Corps 6

1.4 Intégrité 7

1.5 Caractéristique d'un corps 8

1.5.1 Extention 9

1.5.2 Corps fini 10

1.6 Corps totalement ordonné 11

2 Valeurs absolues et propriétés **13**

2.1 Valeur absolue sur $\mathbb{R}$ 14

2.1.1 Proprétés de la valure absolue 14

2.2 Valeurs absolues sur un corps commutatif 18

2.2.1 Espace métrique associé sur un corps valué 20

2.2.2 Propriétés et ses preuves 21

2.2.3 Valreure absolue p-adique 25

2.2.4 Valeurs remarquables du coeffcient d'une valeur absolue 30

3 Valeures absolues et valuation sur un corps **31**

3.1 Valeures absolues équivalentes 31
3.2 Corps complet pour une valeur absolue 33
3.3 Valuation 38

Conclusion **41**

Bibiliographie **42**

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le terme valeur absolue a commencé au XIXe siècle et le symbole a été introduit par le mathématicien allemand Karl Werstrass en 1841.

En mathématiques, la valeur absolue (parfois appelée module, c'est-à-dire mesure) d'un nombre réel est sa valeur numérique sans tenir compte de son signe.

Dans ce mémoire, on s'intéresse $\grave{a}$ l'étude de la valeure absolue sur un corps commutatif : Définition et ses propriétés ainsi que quelques aplications .

Ce travail est composé de trois chapitre : dans le premier chapitre, nous rappelons les notions de base concernat anneaux et corps commutative et le corps totalement ordonnée(on donne quelques exemples).

Dans le deuxieme chapitre, nous allons adopter une approche générale plus précisement, nous allons

1. Présenter une valeure absolue sur un corps.
2. Caractériser deux différents types de valeurs absolues (archimédienne et non-archimédienne)
3. présenté valeure absolue p-adique et Valeurs remarquables du coeffcient d'une valeur absolue .

En fin , on consacre le dernier chapitre sur les application de le valeure absolue :on détermine d'abord le valeure absolue equivalent et le complété d'un corps pour une valeur absolue et on termine par valuation sur un corps commutatif

CHAPITRE 1

NOTIONS DE BASES

Le but de ce chapitre est de rappeler quelques résultats d'algèbre utile pour aborder la suite. La plus part des énoncés sont illustrés par des exemples et sont donnés sans démonstration.

1.1 Groupe

Définition 1.1 *1. Soit G un ensemble muni d'une loi de composition interne $'*'$. On dit que cette loi détermine*

sur G une structure de groupe ou que G est un groupe si les trois axiomes suivantes sont vérifiés :

(i) La loi $'*'$ est associative. C.àd. que, $\forall x, y, z \in G, (x * y) * z = x * (y * z)$

(ii) La loi $'*'$ admet un élément neutre. C'est-à-dire. $\exists e \in G$ tel que

$$\forall x \in G, x * e = e * x = x$$

(iii) Tout élément $x \in G$ admet un symétrique $x' \in G$ pour la loi $'*'$ C àd $\forall x \in G, \exists x' \in G$ tel que $x * x' = x' * x = e$.

2. Si de plus, la loi $'*'$ est commutative c.àd. $\forall x, y \in G, x*y = y*x$, On dit que le groupe $(G, *)$ est commutatif ou abélien.

Exemple 1.1

$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R}, +)$ *et* $(\mathbb{C}, +)$ *Sont des groupes commutatifs*

$(\mathbb{C}^*, \times), (\mathbb{R}^*, \times)$ *et* $(\mathbb{Q}^*, \times)$ *Sont des groupes commutatifs.*

Remarque 1.1 *Une loi de composition interne notée T sur un ensemble E est une application de $E \times E$ dans E.*

$$E \times E \to E$$
$$(x, y) \to xTy$$

La notation (E, T) signifie que E est un ensemble muni de la loi de composition interne T

<u>Notation :</u> *Tout couple $(E, *)$ signifié que E est un ensemble et $'*'$ une loi de composition interne dans E*

cette loi est vérifier les propriétie suivants : (associativté ,commutativité ,elément neutre ,elément symétriques)

1.2 Anneaux

Définition 1.2 *Un anneau est un ensemble A muni de deux lois internes notées $'+'$ et $'\times'$, et de deux éléments notés 0 et 1, tels que :*

1. $(A;+;0)$ *est un groupe commutatif ,*
2. $\forall (a,b,c) \in A^3, (a.b).c = (b.c)$*,*
3. $\exists 1 \in A, \forall a \in Aa.1 = 1.a = a$*,*
4. *la loi* $'\times'$ *est distributive à droite et à gauche pour* $'+'$ *:* $\forall (a;b;c) \in A^3, a \times (b+c) = a \times b + a \times cet(b+c) \times a = b \times a + c \times a.$

Si de plus, la propriété suivant est vérifiée :

$$\forall (a,b) \in A^2, a.b = b.a$$

L'anneau A est dit commutatif.

Exemple 1.2 *Les ensembeles suivant sont des anneaux :*

1. $\mathbb{Z}$ *,* $\mathbb{Q}$ *,* $\mathbb{R}$ *,* $\mathbb{C}$
2. *Les anneau de polynômes* $\mathbb{Z}[X]$*,* $\mathbb{Q}[X]$*,*$\mathbb{R}[X]$

1.2.1 Ideaux

Définition 1.3 *Soit $(A,+,x)$ un anneau commutatif. Soit I une partie de A On dit que I est un idéal de A si :*

- $(I,+)$ *est un sous-groupe de* $(A,+)$
- $\forall x \in I, \forall y \in A,$ *on a :* $xy \in I$

Exemple 1.3
1. *{0} et A sont deux idéaux de A dit idéaux impropre.*
2. *Tout idéal I de A différent de {0} et A est dit idéal propre de A.*

Remarque 1.2 *Si un idéal I contient un élément inversible $x \in A$. Alors on a : $I = A$.*

Preuve :

Soit $x \in I, x^{-1} \in A$ donc $1 = xx^{-1} \in I$ Soit $a \in A$, on a : $a = \underset{a \in A}{a} \cdot \underline{1} \in I$, d'ou $A = I$

Proposition 1.1 *Soient I et J deux idéaux à droite (resp. à gauche) d'un anneau A, alors $I+J$ est un idéal à droite (resp. à gauche) de A.*

Preuve : *Soit $x, y \in I+J \Rightarrow \exists a, b \in I$ et $\exists a', b' \in J$ tel que $x = a + a'$ et $y = b + b'$*

$$x - y = (a - b) + (a' - b') \in I + J$$

D'autre part, si I et J sont deux idéaux à droite $\forall z \in A$, on a $az \in I$ et $a'z \in J$

donc $xz = (a + a')\,z = az + a'z \in I + J$, d'ou la preuve.

Proposition 1.2 *Soit A un anneau commutatif unitaire et soit I un idéal de A, alors I maximal$\Longleftrightarrow$ $\frac{A}{I}$un corps.*

***Preuve**. Voir [9]*

Sous Anneaux

Définition 1.4 *Soient $(A, +, \times)$ un anneau,B une partie de A . On dit que A est un sous-anneau de $(A, +, \times)$ si et seulement si :*

Muni des lois induites $(B, +, \times)$ possède lui-même une structure d'anneau.

Exemple 1.4

1. *$(\mathbb{Z}, +, \times)$ un sous-anneau de l'anneau $(\mathbb{Q}, +, \times)$.*
2. *$(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un sous-anneau de$(\mathbb{R}, +, \times)$.*

Proposition 1.3 *(Caractéristique d'un sous-anneau) :*

Soient $(A, +, \times)$ un anneau, B une partie de A . Pour que soit un sous-anneau de A , il faut et il suffit que :

1. *$1_A \in B$.*
2. *$\forall (a, b) \in B^2\ a - b \in B$.*
3. *$\forall (a, b) \in B^2 a.b \in B$.*

***Preuve**. Voir [6]*

Exemple 1.5

Le seul sous-anneau de $(\mathbb{Z}, +, \times)$ *est* $(\mathbb{Z}, +, \times)$ *lui-même.*

Définition 1.5 *Soit* $(A, +, \times)$ *un anneau,on dit que* A *est intégre lorsque :*

1. A *n'est pas réduit à* 0.
2. A *est commutatif.*
3. A *n'admet pas de diviseure de* 0_A *autre que* 0_A *:*

$$\forall x, y \in A, xy = 0_A \Longrightarrow X = 0_A \text{ ou } y = 0_A.$$

Homomorphismes d'anneaux

Définition 1.6 *Soient* $(A, +, \times)$ *et* $(B, +, \times)$ *deux anneaux. On note* 1_A *et* 1_B *les éléments neutres multiplicatifs. On note* 0_A *et* 0_B *les éléments neutres additifs. On dit qu'une application* $f : A \mapsto B$ *est un homomorphisme d'anneaux si :*

1. $f(1_a) = 1_b$
2. $\forall (x, y) \in A^2 : f(x + y) = f(x) + f(y)$
3. $\forall (x, y) \in A^2 : f(x.y) = f(x).f(y)$
4. *Un endomorphisme d'anneaux* $(A, +, \times)$ *est un homomorphisme d'anneaux de* $(A, +, \times)$ *dans* $(A, +, \times)$
5. *Un isomorphisme d'anneaux est un homomorphisme d'anneaux bejectif.*
6. *Un automorphisme d'anneaux* $(A, +, \times)$ *est un endomorphisme bejective dans l'anneau* $(A, +, \times)$

1.3 Corps

Définition 1.7 *Un ensemble muni de deux lois de compositions internes On dit que* $(K, +, \times)$ *un corps si :*

1. $(K, +, \times)$ *est un anneau.*
2. $0_k \neq 1_K$ *(tout corps contient* 1 *et* 0*).*
3. *Tout élément de* $K/\{0\}$ *admet un inverse pour le produit dans K.*

Si de plus, est commutatif dans K on dit que $(K, +, \times)$ est un corps commutatif.

Exemple 1.6 $(\mathbb{Q}, +, \times)$,$(\mathbb{R}, +, \times)$ *et* $(\mathbb{C}, +, \times)$ *Sont tous des corps commutatifs.*

Sous corps

Définition 1.8 *Soient $(K, +, \times)$ un corps, L une partie de K . On dit que L est un sous-corps de K si :*

— *L est un sous-anneau de K .*

— $\forall x \in L/\{0\}: \quad x^{-1} \in L.$

Autrement dit :

1. $L \neq \emptyset.$

2. $\forall x, y \in L/\{0\}: \quad xy^{-1} \in L.$

.

Exemple 1.7 $\mathbb{Q}$ *est un sous-corps de* $\mathbb{R}$ *, et* $\mathbb{R}$ *est un sous-corps de* $\mathbb{C}$ *. (Pour les lois usuelles* $'+'$ *et* $'\times'$ *) .*

Proposition 1.4 *(Caractéristique d'un sous corps) :*

L est un sous-corps de $(K, +, \times)$ si et seulement si :

1. $1 \in L.$

2. $\forall (a, b) \in L^2, a - b \in L.$

3. $\forall (a, b) \in L^2 \, avec \, b \neq 0, \; ab^{-1} \in L.$

Preuve. *Voir [6]*

1.4 Intégrité

Définition 1.9 *Soit $(A, +, \times)$ un anneau, on dit que A est intégre si lorsque :*

1. *A n'est pas réduit à* $\{0\}$.

2. *A est commutatif.*

3. *A n'admet pas de diviseur de* 0_A *autre que* 0_A *, c'est-à-dire :*

$$\forall x, y \in A \quad xy = 0_A \, ou \, y = 0_A$$

Proposition 1.5 *Tout corps est un anneau intégre.*

Preuve : *Soit* K *un corps.*
Soient $x, y \in k$ *tels que* $xy = 0$*. Si* $x \neq 0$*, alors* x *est inversible dans* K *par définition d'un corps. Donc* $x^{-1}xy = x^{-1}0$*, c'est-à-dire* $y = 0$*. De même* $y \neq 0$ *implique* $x = 0$*. En résumé l'un au moins des deux facteurs* x *et* y *est nul.* ■

Exemple 1.8 $\mathbb{Z}$ *est intégre*

Homomorphisme de corps

Définition 1.10 *Soient* $(K, +, \times)$ *et* $(L, +, \times)$ *deux corps. On dit qu'une application*

$$f : K \mapsto L$$

est un morphisme de corps si :

1. $f(1_K) = 1_L$.
2. $\forall (a, b) \in K^2 \quad , f(a + b) = f(a) + f(b)$.
3. $\forall (a, b) \in K^2 \quad , f(a.b) = f(a).f(b)$.

1.5 Caractéristique d'un corps

Si k un corps commutatif un morphisme d'anneaux cannonique ϕ :

$$\mathbb{Z} \mapsto K$$

telle que $\phi(1) = 0$, deux cas peuvent se présenté :

1. Le noyau de ϕ est l'ideal (0) , c'est-$\grave{a}$- dire : ϕ est injective, on identifie Alors $\mathbb{Z}$ et son image dans K . Le corps K contenant $\mathbb{Z}$ contient aussi sons corps des fraction $\mathbb{Q}$. On dit dans ce cas que K est de caractéristique 0.

2. Le noyau de $\mathbb{Q}$ est un ideal non nule de $\mathbb{Z}$, donc de la forme $n\mathbb{Z}$ avec $n > 0$, le morphisme ϕ se factorise en un morphisme injectif $\tilde{\phi}$:

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mapsto K$$

l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ s'identifie alors un sous anneau du corps K , ce qui implique qu'il est intégre, et donc que n est un nombre premier p . On dit dans ce cas que K est de caractéristique p.

1.5.1 Extention

Définition 1.11 *Si K et L sont deux corps tels que $K \subset L$, on dit que L est une extention de K. le corps L est alors un espace vectoriel sur K dont la dimention notée$[L : K]$, s'appelle l'ordre de l'extention. si L et L' sont deux extentions d'un même corps K, un k-morphisme $\phi : L \mapsto L'$ est un morphisme de corps ϕ tel que : ϕ/K est l'identité.*

Proposition 1.6 *Si $K \subset L \subset H$ sont des extensions de corps , on a : $[H : K] = [H : L][L : K]$.*

Preuve.

On suppose les dimension finie, sinon la propositions est triviale.

soient $(e_1, ..., e_n)$ une base de L sur K , et $(f_1, ..., f_p)$ une base de H sur L.

Nous allons montrer que les $(e_i f_j)(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p)$ forment une base de H sur K , ce qui montera la proposition.

Ces élément sont des générateurs, car si $x \in H$, on peut écrire :

$x = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j f_j$ avec $\lambda_j \in L$ chaque λ_j peut à son tour se développer sur la base (e_i) :

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} e_i$$

avec $\lambda_{ij} \in K$.on obtient alors :

$$\sum \lambda_{ij} e_i f_j.$$

On montre de même que les $e_i f_j$ forment une famille libre , *si on a une relaion linéair :*

$$\sum \lambda_{ij} e_i f_j = 0$$

On peut l'écrire

$$\sum_{j=1}^{p} f_{j(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} e_i)=0}$$

Ce qui implique $\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} e_i = 0$ *pour tout j puisque les* f_j *sont indépendants,*

Donc $\lambda_{ij} = 0$ *puisque les* e_i *sont indépendants.* ■

1.5.2 Corps fini

Définition 1.12 *Un corps fini est un corps commutatif qui est par ailleurs fini et est entièrement déterminé par son cardinal, qui est toujours une puissance d'un nombre premier, ce nombre premier étant sa caractéristique.*
Pour tout nombre premier p et tout entier non nul n, il existe un corps de cardinal p^n*, qui se présente comme l'unique extension de degré n du corps premier* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$*.*

Exemple 1.9
1. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ *est un corps si et seulment si* n *n'est pas premier*
2. p *premier* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *est un corps fini*

Remarque 1.3 *Si* K *est un corps fini, le morphisme :*

$$\phi : \mathbb{Z} \mapsto K$$

définie par $\phi(n) = n.1$ *a un noyau de la forme* $p\mathbb{Z}$*, ou* p *est un nombre premier non nul appelé la caractéristique de* K *on note* $\mathbb{F}_p$ *le corps* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *et* $|K|$ *le cardinal de* K

Lemme 1.1 *Soit K un corps finie de caractéristique p. Alors K contient un sous corps isomorphe à* $\mathbb{F}_p$*, et son cardinal est de la forme* p^n*, avec* n *entier* ≥ 1*.*

Preuve.
On a l'image de ϕ *était isomorphe à* $\mathbb{F}_p$ *. Identifions* $Im\phi$ *et* $\mathbb{F}_p$ *. Le corps K est un espace vectoriel*

sur $\mathbb{F}_p$ de dimension finie n. son cardinal $|K|$ est donc bien p^n. ■

Proposition 1.7 *Si a et b sont des éléments d'un corps K de caractéristique p, alors*

$$(a+b)^p = a^p + b^p$$

Preuve.

On a :

$(a+b)^p = \sum_{i=0}^{p} \begin{pmatrix} p \\ i \end{pmatrix} a^i b^{p-i}$

Si $1 \leq i \leq p-1$, on a $\begin{pmatrix} p \\ i \end{pmatrix} = \dfrac{p!}{i!(p-i)!} = p\dfrac{(p-1)!}{i!(p-i)!} \begin{pmatrix} p \\ i \end{pmatrix}$ *est un entier,*

Donc :

$i!(p-i)!$ divise $p! = p(p-1)!$ Or $i!(p-i)!$ est premier à p, donc divise $(p-1)!$ Donc $\begin{pmatrix} p \\ i \end{pmatrix}$ *est divisible par p, et est donc nul dans K. Il reste* $(a+b)^p = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} b^p + \begin{pmatrix} p \\ p \end{pmatrix} a^p$

1.6 Corps totalement ordonné

Définition 1.13

i) $\forall x, y \in K$, *une et une seule des relations suivantes est vérifiée :* $x < y$ $x = y$ *ou* $y < x$

ii) $\forall x, y, z \in K, x < y < z \Rightarrow x < z$

iii) $\forall x, y, z \in K, x < y \Rightarrow x + z < y + z$

iv) $)\forall x, y \in K, \quad \forall z > 0, x < y \Rightarrow xz < yz$

Définition 1.14 *On dit qu'un corps totalement ordonné ($K, <$) est archimédien si :*

$$\forall x, a \in K, a > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, x < na$$

Exemple 1.10

Si $(K, <)$ est totalement ordonné alors pour tout $0 \neq x \in K$ $0 < x$ ou $0 < -x$. On a aussi $1 > 0$ et

$\forall x \neq 0, x^2 > 0$

$\mathbb{Q}$ *est un corps totalement ordonné archimédien pour la relation* $<$ *usuelle.*

Contre-exemple : le corps des nombres complexes. En effet :

$$\exists i \in \mathbb{C}, i^2 = -1 < 0$$

CHAPITRE 2

VALEURS ABSOLUES ET PROPRIÉTÉS

Dans ce chapitre on va étudier la valeure absolue on général dans $\mathbb{R}$ avec des propriétés fondamentales de la valeure absolue

et aprés on va généralison la valeure absolue dans n'importe quel corps commutatif non nul, et aussi on va étudier les types de valeurs absolues dans le corps $\mathbb{Q}$

2.1 Valeur absolue sur $\mathbb{R}$

La valeur absolue d'un réel est associée à la structure additive et à la structure d'ordre de l'ensemble des réels, Plusieurs definitions sont possibles.

Remarque 2.1 *On not la valeur absolue par* $||$

Définition 2.1 *Pour tout réel x, la valeur absolue de x est définie par* $|x| = \max(-x, x)$

Définition 2.2 *(valeur absolue sur $\mathbb{R}$) :*

Pour tout nombre réel x, la valeur absolue de x est définie par :

- $||x| = x$, *si* $x > 0$
- $|x| = -x, \quad$ *si* $x < 0$
- $|x| = 0, \quad$ *si* $x = 0$

II faut remarquer que dans ces deux definitions, la valeur absolue apparait comme une application sur l'ensemble des réels, la différence venant du fait que dans la première definition la valeur absolue de x est déterminée par une expression unique ce qui n'est pas le cas pour la seconde définition.

L'équivalence des deux définitions se démontre à partir de la compatibilité entre I'addition et la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \forall y \forall z [x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}, x \leqslant y \Rightarrow x + z < y + z]$$

En effet, si $x \geqslant 0$ alors $x + (-x) \geqslant -x$ donc $0 \geqslant -x$ et par transitivité de la relation d'ordre $x \geqslant -x$ ce qui donne $\max(-x, x) = x$ Par contre si $x \leqslant 0, x + (-x) \leqslant -x, 0 \leqslant -x$ et $x \leqslant -x$, donc $\max(-x, x) = -x$

2.1.1 Proprétés de la valure absolue

Pour tout x et y et pour tout $u \neq 0$ et $a \geq 0$:

1. $x \leq |x|$

2. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
3. $\dfrac{|u|}{u} = 1 \text{ ou } -1$
4. $|x \times y| = |x| \times |y|$
5. $|x|^2 = x^2$
6. $|x + y| \leq |x| + |y|$
7. $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Remarque 2.2 $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ *est appelé inégalité triangulaire.*

Preuves et exemples :

1. Pour toutes valeurs de $x, x \leq |x|$

   • Par exemple : $5 \leq |5| = 5$, et $-5 \leq |-5| = 5$

2. Pour $a \geq 0$

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

   • Par exemple, pour $a = 15$, si $|x| \leq 15, x$ peut prendre toute valeur entre -15 et 15 (voir, $x = -9 \Rightarrow |x| = |-9| = 9 \leq 15$) ; par contre si

$$x = -25 \Rightarrow |x| = |-25| = 25 > 15$$

3. Pour tout $x \neq 0$

$$\frac{|x|}{x} = 1 \text{ ou } -1$$

   • Par exemple :

$$\frac{|5|}{5} = \frac{5}{5} = 1, \text{ et } \frac{|-5|}{-5} = \frac{5}{-5} = -1$$

4. Pour tout x et y

$$|x \times y| = |x| \times |y|$$

– Si $x \geq 0$ et $y \geq 0 \Rightarrow |x||y| = xy = |xy|$
– Si $x < 0$ et $y \geq 0 \Rightarrow |x||y| = -xy = -(xy) = |xy|$
– Si $x < 0$ et $y < 0 \Rightarrow |x||y| = (-x)(-y) = xy = |xy|$

Puisque nous obtenons $|xy| = |x||y|$ dans tous les trois cas on conclut que $|xy| = |x||y|$ pour tout x et y Par exemple :

- Pour $x = -2$ et $y = 3$ nous avons : $|-2||3| = 2 \times 3 = 6 = |-6| = |(-2) \times 3|$
- Pour $x = -2$ et $y = -3$ nous avons : $|-2||-3| = 2 \times 3 = 6 = |6| = |(-2) \times (-3)|$

5. Pour tout x $|x|^2 = x^2$

$-$ Si $x \geq 0, \Rightarrow |x|^2 = |x||x| = xx = x^2$

$-$ Si $x < 0, \Rightarrow |x|^2 = (-x)(-x) = xx = x^2$

Donc pour tout x, $\quad |x|^2 = x^2$

• Par exemple :

Pour $x = -5$, nous avons : $|-5|^2 = |-5||-5| = 5 \times 5 = 25 = (-5)(-5) = (-5)^2$

6. Pour tout x et y

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Soit n'importe quel nombre x et y :

$$\begin{aligned}
|x + y|^2 &= (x + y)^2 \\
&= x^2 + 2xy + y^2 \\
&\leq x^2 + |2xy| + y^2 \\
&= |x|^2 + |2xy| + |y|^2 \\
&= (|x| + |y|)^2
\end{aligned}$$

Nous pouvons conclure que

$$|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$$

Et donc

$$|x + y| \leq |x| + |y|. \text{ (Puisque, } u^2 \leq v^2 \Rightarrow u \leq v\text{)}$$

• Par exemple :

$$|-5 + 1| = |-4| = 4 \leq |-5| + |1|$$

7. Pour tout x et y

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Soient n'importe quel deux nombres x et y. Pour démontrer $||x| - |y|| \leq |x - y|$ il suffit de démontrer que

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$$

(grace à la propriété numéro 2 donnée ci-dessus.)

On voit que

$$\begin{aligned} |x| &= |x - y + y| \\ &< |x - y| + |y| \qquad \text{(Gráce à la propriété (2))} \end{aligned}$$

Donc

$$|x| - |y| \leq |x - y| (*)$$

$*$ Aussi

$$\begin{aligned} |y| &= |y - x + x| \\ &\leq |y - x| + |x| \qquad \text{(Gráce à la propriété (2))} \\ &= |x - y| + |x| \end{aligned}$$

$*$ Donc

$$|y| - |x| \leq |x - y|$$

$*$ En multipliant les deux côtés de cette inégalité par -1 (et en se rappellant que $a \leq b \Rightarrow -b \leq -a$ on obtient $-|x - y| \leq |x| - |y| (**)$

(En se rappelant que $-(b - a) = a - b$)

$*$ En faisant la combinaison des inégalités $(*)$ et $(**)$ on obtient :

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$$

$*$ Ce qui veut dire, d'après la propriété (2) que

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

2.2 Valeurs absolues sur un corps commutatif

Dans toute la suite, K est un corps commutatif non nul.

Définition 2.3 *On appelle valeur absolue sur un corps commutatif K toute application φ de K dans les réels positifs vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $\forall x \in K, \varphi(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(ii) $\forall (x, y) \in K^2, \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$

(iii) il existe un réel positif C tel que pour tout $(x, y) \in K^2, \varphi(x + y) \leq C \sup[\varphi(x), \varphi(y)]$

Exemple 2.1 *1) L'application module d'un nombre complexe, usuellement notée :*

$$| \cdot | : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$z \longmapsto |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ou $z = a + ib$ et $(a, b) \in \mathbb{R}$; est une valeur absolue sur $\mathbb{C}$ avec $C \geq 2$, c'est la valeur absolue ordinaire.

2) La restriction de la valeur absolue ordinaire sur $\mathbb{C}$ est aussi une valeur absolue sur chacun des corps commutatifs $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$.

3) Sur un corps quelconque K, on peut définir une valeur absolue comme suit :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x = 0 \\ 1 & si \quad x \in K^* = K\backslash\{0\} \end{cases}$$

Cette valeur absolue est appelée valeur absolue triviale.

Remarque 2.3 *Soit φ une valeur absolue sur un corps K*

— *L'inégalite triangulaire peut étre géníralisée à n éléments de K par* $\varphi(\sum_{i-1}^{n} x_i) \leq \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k)$

— *L'inégalité ultramétrique peut étre généralisée à n eléments de K par* $\varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i) \leq \max_{1 \leq k \leq n}(\varphi(x_k))$

— *Si l'axiome iii est remplacé par la condition la plus forte*

$$IV \ \varphi(x + y) \leq \max(\varphi(x), \varphi(y))$$

on dit que φ est une valeur absolue ***ultramétrique****.*

— *Un corps muni d'une valeur absolue s'appelle un corps valué.*

Lemme 2.1 *(Principe de Dominance)*

Soit φ une valeur absolue ultramétrique sur un corps K.

Soient x_1, x_2 deux éléments de K . Si $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$ alors $\varphi(x_1 + x_2) = \max(\varphi(x_1), \varphi(x_2))$.

Preuve.

En effet si x_1, x_2 sont deux nombres de K tels que $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ alors, d'après l'inégalité ultramétrique

On a $\varphi(x_1 + x_2) \leq \varphi(x_2) = \max(\varphi(x_1); \varphi(x_2))$ et $\varphi(x_2) \leq \max(\varphi(x_1 + x_2); \varphi(x_1))$

Donc $\varphi(x_1) \leq \varphi(x_1 + x_2)$ car $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$.Par suit$\varphi(x_2) \leq \varphi(x_1 + x_2)$.

D'ou : $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_2) = \max(\varphi(x_1); \varphi(x_2))$ ■

Maintenant, on va généralison le principe de dominance pour une suite de n éléments $x_1, x_2, ..., x_n$ de K.

Proposition 2.1 *Soit φ une valeur absolue ultramétrique sur un corps K.*

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des éléments de K. Si $\varphi(x_i) \neq \varphi(x_j)$ pour tout couple d'indices $i \neq j$ alors

$\varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i) = \max(\varphi(x_1), \varphi(x_2) \ , \ldots, \varphi(x_n))$

Preuve.

On utulise la démonstration par récurrence sur n.

En effet si la propriété est vraie pour n éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de K alors $\varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i) = \varphi(|x_k)$.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ une suite de $n + 1$ éléments de K tels que $\varphi(x_i) \neq \varphi(x_j)$ pour tout couple d'indices $i \neq j$. Donc :

$\varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i) = \max(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)) = \varphi(x_k)$ *et comme $\varphi(x_k) \neq \varphi(x_{n+1})$ alors,*

d'après Lemme 2.1 (le principe de dominance),

$\varphi(\sum_{i=1}^{n+1} x_i) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1}) = \max(\varphi(x_k), \varphi(x_{n+1})) = \max(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n), \varphi(x_{n+1}))$ ■

2.2.1 Espace métrique associé sur un corps valué

Soit E un ensemble. On rappelle qu'une distance d sur E est toute fonction

$$d(,): \quad E \times E \longmapsto \mathbb{R}^+$$

qui vérifie les trois axiomes d'une distance suivantes :

1. pour tout $x, y \in E, d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$

2. pour tout $(x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$

3. pour tout $(x, y) \in E^2$, on a l'inégalité triangulaire $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Ainsi si E est un ensemble muni d'une distance d alors (E, d) est un espace métrique. Si au lieu de l'inégalité triangulaire (l'axiome iii), la distance d satisfait l'axiome ultramétrique plus forte suivante : $d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z))$, pour tout $(x, y, z) \in E^3$ alors l'espace (E, d) est dit un espace ultramétrique.

Soit (E, d) un espace métrique. Soit a un élément de E. On appelle boule fermé de centre a et de rayon r l'ensemble

$$B_f(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) \leq r\}$$

On appelle boule ouvert de centre a et de rayon r l'ensemble

$$B_f\left(a, r^-\right) = \{x \in E \mid d(a, x) < r\}$$

On appelle sphère de centre a et de rayon r l'ensemble

$$D_f(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) = r\}$$

$\mathrm{Si}(E, d) = \mathbb{R}^2$, on dira disque au lieu de boule et circonférence au lieu de sphère.

Remarque 2.4 *Soit $|.|$ une valeur absolue ultramétrique sur un corps K.*

1) La boule fermé $B_f(a, 1)$ de centre a et de rayon 1 est un anneau commutatif local.

2) La boule ouverte $B^0(a, r)$ de centre a et de rayon r est un idéal de l'anneau $B_f(a, 1)$

3) La boule ouverte $B^0(a, 1)$ de centre a et de rayon 1 est un idéal premier de l'anneau $B_f(a, 1)$.

Exemple 2.2 — *Distance usuelle sur* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$: $d(x,y) = |x-y|$.

— *La distance triviale (ou discrète) :* $\forall x \neq y, d(x,y) = 1$

Proposition 2.2 *si* φ *est une valeur absolue sur un corps commutatif* K, *alors* φ *est un hommomorphisme du groupe multiplicatif* $(K^*, \cdot)$ *dans* $\left(\mathbb{R}_+^*, \cdot\right)$.

Preuve. *La preuve est triviale, compte tenu de la condition (ii).*

2.2.2 Propriétés et ses preuves

- $\varphi(1) = 1$,

  car : $\varphi(1) = \varphi(1.1) = \varphi(1).\varphi(1) = \varphi(1)^2$,

  d'où $\varphi(1)(1-\varphi(1)) = 0$

  et comme $\varphi(1) \neq 0$, on a $\varphi(1) = 1$

- $\varphi(-x) = \varphi(x)$,

  car : $\varphi(-x)^2 = \varphi((-x)^2) = \varphi(x^2) = \varphi(x)^2$

  D'où $\varphi(-x) = \pm\varphi(x)$

  mais $\varphi(-x) \in \mathbb{R}_+$ d'où $\varphi(-x) = \varphi(x)$

- $\varphi(n) \leqslant n$ car :$\varphi(n) = \underbrace{\varphi(1+1+\ldots+1)}_{nfois} \leq \underbrace{\varphi(1)+\ldots+\varphi(1)}_{nfois} = n$
- $\varphi(x-y) \leq \varphi(x)+\varphi(y)$ La valeur absolue φ introduit une métrique sur K. La distance entre deux éléments x, y de K dans cette métrique est $d_\varphi(x,y) = \varphi(x-y)$

  (a) $\begin{cases} d_\varphi(x,y) \in \mathbb{R}_+ \\ d_\varphi(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \end{cases}$

  (b) $d_\varphi(x,y) = d_\varphi(y,x)$

  (c) $d_\varphi(x,z) \leqslant d_\varphi(x,y) + d_\varphi(y,z)$

Définition 2.4 *Une valeur absolue constante* φ *est dit triviale ssi* $\varphi(x) = 1 \quad \forall x \in k^\times$ *et* $\varphi(0) = 0$

Il est évident qu'une valeur absolue triviale est une valeur absolue

Exemple 2.3 *(valeur absolue archimédienne sur $\mathbb{Q}$)*

La valeur absolue usuelle sur $\mathbb{Q}$ est une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$ On l'appelle valeur absolue archimédienne de $\mathbb{Q}$ et on la note desormais $|.|_\infty$

Exemple 2.4 1. *Valeur absolue naturelle sur $\mathbb{Q}$. Considerons I'application de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}_+(x \to |x|)$ définie de la manière suivante :*

$$|x| = \begin{cases} |x| = x \quad x \in \mathbb{Q}^+ \\ |x| = -x \quad x \in \mathbb{Q}^- \end{cases}$$

et on a :

$$|x| = \sup(x, 0) - \inf(x, 0)$$

Cette application est dite valeur absolue naturelle sur $\mathbb{Q}$.

On dit aussi que $|x|$ et la valcur absolue de x Cette valeur absolue possede les trois proprietés suivantes :

(a) $|x| = 0 \quad x = 0$,

(b) $|x.r| = |x| \cdot |r|$,

(c) $|x + r| = |x| + |r|$

Par exemple on va démontrons la derniére proprietée :

on a :

$$|x + r| = \sup(x + r, 0) - \inf(x + r, 0)$$

et

$$|x| + |r| = \sup(x, 0) + \sup(r, 0) - \inf(x, 0) - \inf(r, 0)$$

Alors,

$$\begin{cases} \sup(x, 0) \geqslant 0 \\ \sup(r, 0) \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \sup(x, 0) + \sup(r, 0) \geq 0$$

$$\begin{cases} \sup(x,0) \geqslant x \\ \sup(r,0) \geqslant r \end{cases} \Rightarrow \sup(x,0) + \sup(r,0) \geq x + r$$

donc :

$$\begin{cases} \sup(x,0) + \sup(r,0) \geq 0 \\ \sup(x,0) + \sup(r,0) \geq x + r \end{cases} \Rightarrow sup(x,0) + \sup(r,0) \leqslant \sup(x+r,0) \qquad (1)$$

De même,

$$\inf(x,0) + \sup(r,0) \geq \inf(x+r,0)$$

$$-\inf(x,0) - \inf(r,0) \leq -\inf(x+r,0) \qquad (2)$$

Alors,

de (1) *et* (2) *on trouve la résultat.*

2. *Pour tout réel* α, $0 < \alpha \leq 1$ *l'application* $x \mapsto |x|^\alpha$ *est une valeur absolue sur* $\mathbb{Q}$ *ou sur* $\mathbb{R}$

   avec : $|x| = \sup(x,0) - \inf(x,0)$

   On va demontrer l'inégalité triangilaire car n'est pas evident .

   on suppose que : $|x| \geq |y| > 0$, *alors On a :*

$$\begin{aligned} |x+y|^\alpha &= \left|x\left(1+\frac{y}{x}\right)\right|^\alpha \\ &= |x|^\alpha \left|1+\frac{y}{x}\right|^\alpha \\ &\leqslant |x^\alpha| \cdot \left|1+\left|\frac{y}{x}\right|\right|^\alpha \\ &\leqslant |x^\alpha| \cdot \left(1+\left|\frac{y}{x}\right|\right) \\ &\leqslant |x^\alpha| \cdot \left(1+\left|\frac{y}{x}\right|^\alpha\right) \\ &\leq |x|^\alpha + |y|^\alpha \end{aligned}$$

Définition 2.5 *Si* φ *est une valeur absolue sur un corps commutatif* K, *on appelle coefficient de* φ, *noté* C_φ, *le nombre réel positif suivant*

$$C_\varphi = \sup_{x \in K} \varphi(1+x)$$

$$\varphi(x) \leq 1$$

Proposition 2.3 *Le coefficient d'une valeur absolue définie si-dessus vérifie* $C_\varphi \geq 1$

Preuve

Le choix $x = 0$ *donne, par la proposition 2.2*

$0 = \varphi(0) \leq 1$ *et* $1 = \varphi(1 + 0) \leq C_\varphi$

Exemple 2.5

1. *La valeur absolue ordinnaire* $\varphi(x) = |x|$ *sur le corps des réels vérifie évi- dement les conditions (i), (ii), (iii), avec* $C_\varphi = 2$
2. *La valeur absolue triviale* φ *satisfait aussi* $C_\varphi = 1$, *puisque* $\varphi(1) = 1$

Proposition 2.4 *soit* R *un anneau commutatif de valeure absolue* $|.|$, *alors* R *est une intégrale domaine et la valeure absolue peuvent être étendues d'une sele maniére a une valeure absolue sur un corps des fractions de* R.

Preuve

Nous avons vu que R *doit être un dommaine intégrale ;*

soit K *un corps de fraction, pour tout* $u \in K$ *avec* $u = a.b^{-1} \quad tq : a, b \in R, b \neq 0$

alors, si $|.|$ *peut être étendue à* K

Alors puisque a=ub on a par l'axiome iii,

$$|a| = |ub| = |u| \cdot |b| \qquad (*)$$

cela montre qu'il exsisit au plus une extention,

pour montrer que l'on exsist il suffit de vérifier que $|u|$ *donné par* $(*)$ *est bien une valeure absolues.*

si aussi $u = a_1 b_1^{-1}$ *alors* $ab_1 = ba_1$

donc :

$$|a_1| \,.\, |b_1|^{-1} = |a|.|b|^{-1}$$

cela montre que $|.|$ *dons* K *est bien définie* ■

Corollaire. *Tout corps avec une valeur absolue archimédienne a une caractéristique zéro.*

Preuve

puisque le caractéristique $p \neq 0$ l'ensemble $\{|n.1| \mid n \in \mathbb{N}\}$ et finit et donc bornné ■

2.2.3 Valreure absolue p-adique

Rappel :

En mathématiques, et plus particulièrement en **théorie des nombres**, pour un nombre premier p fixé, les nombres p-adiques forment une extension particulière du corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, découverte par **Kurt Hensel** en 1897.

Définition 2.6 *Soit un nombre premier arbitraire p. On peut écrire de façon unique n'importe quel nombre rationnel x sous la forme :*

$$x = p^r.\frac{m}{n}$$

où $r \in \mathbb{Z}$ et où m et n sont premiers entre eux et premiers avec p On définit alors l'application associant à un nombre rationnel x la valeur $|x|_{v_p} = |x|_p = \sigma^r$

Avec σ nombre réel fixé satisfaisant à la condition $0 < \sigma < 1$

Remarque 2.5 *on note la valeure absolue p-adique par : $|x|_{v_p}$*

Exemple 2.6
- *on calcule $\left|\frac{18}{14}\right|_3$; on a : $p = 3$*

$$x = \frac{18}{24} = \frac{3^2 \times 2}{3 \times 8} = 3 \times \frac{2}{8}$$

donc , $|x|_3 = 3$

- *Soit p un nombre premier. On considère la fonction $||_p$ definie par*

$$\forall x \in \mathbb{Q}^{\times}, |x|_p = p^{-k} \text{ si } x = p^k\frac{a}{b} \text{ avec } (a,p) = (b,p) = 1 \text{ et } |0|_p = 0$$

où (a,b) désigne le pgcd de a et de b

Lemme 2.2 *L'application $x \mapsto |x|_p$ est une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$. Elle vérifie, en outre, I'inégalite (ultrametrique)*

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, |x+y|_p \leqslant \max\left(|x|_p, |y|_p\right)$$

Cette valeur absolue $||_p$ est appelé valeur absolue p -adique de $\mathbb{Q}$

Preuve :

on va demontrer l'inégalité triangulaire ;

soient : $x = p^r \dfrac{m}{n}$ *et* $y = p^s \dfrac{m'}{n'}$.

Supposons $|y|_p \geq |x|_p$ *, c'est-à-dire* $r \geq s$

On a :

$$x + y = p^s \frac{mn'p^{r-s} + nm'}{nn'}$$

Alors, d'aprés la définition on trouve :

$|x+y| = \sigma^t$ *avec* $s \leqslant t$ *(car* nn' *est premier avec* p*) ;*

et par suite,

$$|x+y|_p < |y|_p = \max\left[|x|_p, |y|_p\right] \leqslant |x|_p + |y|_p$$

Conclusion :

Théoreme 2.1 *(d'ostrowski)*

les seules valeures absolues sur$\mathbb{Q}$ sont :

1. *les valeures absolues p-adique*
2. *les valeures absolues* $x \mapsto |x|^\alpha$ *tq :* $0 < \alpha \leq 1$

Preuve. *Voir[3]*

Remarque 2.6

Il exsiste deux cas possibeles de la valeure absolue v non trivial de $\mathbb{Q}$

1^{ier} ***cas :*** *il exsiste au moins un entiers naturell* $a > 1$ *tel que* $|a|_v = v(a) > 1$

2^{ime} ***cas :*** *pour tout entier naturel* $v(n) \leq 1$*, considérons tout d'abord le premier cas*

Proposition 2.5 *S'il existe un nombre entier naturel a tel que* $v\ (a) > 1,$ *la valeur absolue* v *est alors du type* $v(x) = |x|^\alpha$ *avec* $0 < \alpha < 1$

Preuve

Puisque $v(n) = v(1 + 1 + \ldots + 1) \leqslant v(1) + v(1) \ldots v + (1) = n$

on peut poser $v(a) = a^\alpha$ *où* α *est un nombre réel* $0 < \alpha \leqslant 1$ *Ecrivons tout entier naturel* N *dans le système de base* a

$$N = x_0 + x_1 a + \ldots + x_{k-1} a^{k-1}$$
$$0 \leqslant x_i \leqslant a - 1; \quad (0 \leqslant i \leqslant k-1); \quad x_{k-1} = 1$$

Par suite, on a pour N *l'inégalité*

$$a^{k-1} \leqslant N < a^k$$

Les propriétés de la valeur absolue permettent d'écrire :

$$v(N) \leqslant v\left(x_0\right) + v\left(x_1\right) v(a) + \ldots + v\left(x_{k-1}\right) (v(a))^{k-1}$$

$$v(N) \leqslant (a-1)\left(1 + a^\alpha + \ldots a^{(k-1)\alpha}\right) = (a-1)\frac{a^{k^\alpha} - 1}{a^\alpha - 1}$$
$$(a-1)\frac{a^{k\alpha}}{a^\alpha - 1} = \frac{a-1}{a^\alpha - 1} a^\alpha . a^{(k-1)\alpha} \leqslant \frac{(a-1)a^\alpha}{a^\alpha - 1} N^\alpha = CN^\alpha$$

Ainsi

$v(N) < CN^\alpha \quad$ *(*C *constante indépendante de* N*)*

Remplaçons N *par* N^m *dans cette inégalité, nous obtenons pour tout* m

$$(v(N))^m = v\left(N^m\right) < CN^{m\alpha}$$

D'où

$$v(N) < \sqrt[m]{C} N^\alpha$$

Faisant tendre m *vers l'infini, nous obtenons l'inégalité*

$$v(N) \leq N^{\alpha}$$

Posons maintenant $N = a^k - b$ *avec* $0 < b < a^k - a^{k-1}$. *Nous avons*

$$v(N) \geqslant v\left(a^k\right) - v(b) = a^{ak} - v(b)$$

Mais, d'après ce qui précède,

$$v(b) = b^a < \left(a^k - a^{k-1}\right)^a$$

D'où

$$v(N) \geqslant a^{\alpha k} - \left(a^k - a^{k-1}\right)^{\alpha} = \left[1 - \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{\alpha}\right] a^{\alpha^k} = C_1 a^{\alpha k} > C_1 N^{\alpha}$$

C_1 *constante indépendante de* N. *Soit de nouveau* m *un entier naturel quelconque.*

En remplaçant N *par* N^m *dans la dernière inégalité nous obtenons*

$$v(N)^m = r\left(N^m\right) > C_1 N^m$$

D'où

$$v(N) > \sqrt[m]{C_1 N^{\alpha}}$$

Faisant tendre m *vers l'infini, nous obtenons l'inégalité*

$$v(N) \geqslant N^{\alpha}$$

Finalement, pour tout entier naturel N : $v(N) = N^{\alpha}$ *Soit maintenant* $x = \pm N_1/N_2$ *un nombre rationnel quelconque* $\neq 0\,(N_i \in \mathbb{Q})$. *Alors*

$$v(x) = v\left(N_1/N_2\right) = v\left(N_1\right)/v\left(N_2\right) = N_1^{\alpha}/N_2^{\alpha} = |x|^{\alpha}$$

Ainsi, nous avons démontré que si $v(a) > 1$ *pour au moins un entier naturel* a *alors la valeur absolue* v *est de la forme* $x \mapsto |x|^{\alpha} 0 < x < 1$.

Etudions maintenant le cas $r(n) < 1$ *pour tout entier naturel* n

Proposition 2.6 *Si pour tout entier naturel n, on a $v(n) \leq 1$, il existe un nombre premier unique p tel que $v(p) = \varrho < 1$ et la valeur absolue r coincide avec la valeur absolue p adique $v_{\ p}$ définie par $v_p(x) = \varrho^r$*

Preuve

Si nous avons $v(p) = 1$ pour tout nombre premier p, alors, selon l'axiome II, nous aurions aussi $v(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui contredit le fait que v est non triviale. Ainsi, il existe un p premier tel que $v(p) < 1$. Supposons que pour un autre nombre premier $q, q \neq p$, on ait $v(q) < 1$.

On peut alors choisir des entiers k et l tels que l'on ait les inégalités :

$$[v(p)]^k < \frac{1}{2}; \quad [v(q)]^l < \frac{1}{2}$$

Puisque p^k et q^l sont des premiers entre eux, il existe des entiers rationnels u et t tels que

$$up^k + tq^l = 1.$$

Nous avons par hypothèse $v(u) < 1$ et $\gamma(t) \leq 1$ d'où

$$\gamma(1) = 1 = v\left(up^k + tq^l\right) \leqslant v(u)[v(p)]^k + v(t)[v(q)]^l < 1/2 + 1/2$$

La contradiction obtenue montre qu'il n'existe qu'un nombre premier p tel que :

$$v(p) = \varrho < 1$$

Puisque $v(q) = 1$ pour tous les autres nombres premiers, il est clair que $v(a) = 1$ pour tout entier a relativement premier avec p.

Soit $x = p^r m/n$ un nombre rationnel non nul (m et n premiers à p). Alors

$$v(x) = v\left(p^r\right)\frac{v(a)}{v(b)} = (v(p))^r = \varrho^r$$

2.2.4 Valeurs remarquables du coeffcient d'une valeur absolue

Définition 2.7 *On dit qu'une valeur absolue φ sur un corps commutatif K est une norme si elle vérifie l'inégalité triangulaire :*

$$\forall (x, y) \in K^2, \varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$$

Exemple 2.7 1. *La valeur absolue ordinnaire sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ est une norme car $|x+y| \leq |x| + |y|$*

2. *La valeur absolue trivial est une norme. En effet, si $x \neq 0 \text{ou} y \neq 0$ alors*

$$\varphi(x+y) \leq 1 \leq \varphi(x) + \varphi(y)$$

et si $x = y = 0$, alors $x + y = 0$ et $\varphi(x+y) = 0 \leq 0 + 0 = \varphi(x) + \varphi(y)$

Théoreme 2.2 *Pour que φ soit une norme, il faut et il suffit que $C_\varphi \leq 2$.*

Exemple 2.8 1. *La valeur absolue triviale ainsi que la valeur absolue ordinnaire sur $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$ sont des normes.*

2. *Sur $\mathbb{R}$, l'application $\varphi(x) = x^2$ est une valeur absolue telle que $C_\varphi = \sup_{|x| \leq 1} (1 + x^2) = 4$ Par suite, elle n'est pas une norme.*

CHAPITRE 3

VALEURES ABSOLUES ET VALUATION SUR UN CORPS

3.1 Valeures absolues équivalentes

Définition 3.1 *Soit K un corps commutatif non nul. Deux valeurs absolues sont équivalentes s'elles définissant la même topologie sur K*

On dit alors que deux valeurs absolues sur $K|\cdot|_1$ et $|.|_2$ sont équivalents si les espaces métriques $(K, |\cdot|_1)$ et $(K, |\cdot|_2)$ sont des espace métriques équivalents.

Remarque 3.1 *Soient $|.|_1$ et $|.|_2$ deux valeurs absolues sur le corps K. On suppose que la valeur absolue $|.|$ est non triviale. Donc $|.|_1$ et $|.|_2$ sont équivalentes si et seulement si on a la relation $|x|_1 < 1$ entraine $|x|_2 < 1$, pour tout $x \in K$*

Deux corps valués $(K_1, |\cdot|_1)$ et $(K_2, |\cdot|_2)$ sont isomorphes s'il existe un isomorphisme f de K_1 dans K_2 tel que la valeur absolue $|\,.\,|_2 \circ f$ est équivalente à $|.|_1$.

Lemme 3.1 *Soit k un corps et $\|_1, \|_2$ deux valeurs absolues sur k.*

Les valeurs absolues $\|_1$ et $\|_2$ sont équivalentes ssi pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de k

$$(|x_n|_1\,, \to_{n\to+\infty} 0) \Leftrightarrow (|x_n|_2\,, \to_{n\to+\infty} 0)$$

Preuve :

Supposons que les valeurs absolues $\|_1$ *et* $\|_2$ *sont equivalentes. Soit* $(x_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite de* k *convergeant vers 0 pour la distance* d_1*. Alors, pour tout ouvert* V *de 0 (pour la distance* d_1 *), il existe un rang* n_0 *tel que* $\forall n \geqslant n_0, \quad u_n \in V$*. Or tout ouvert pour* d_2 *est un ouvert de* d_1 *donc pour tout ouvert* V *de 0 (pour la distance* d_2 *), il existe un rang* n_0 *tel que* $\forall n \geqslant n_0, \quad u_n \in V$ *ce qui demontre que* $(x_n)_n \geqslant 0$ *converge vers 0 pour la distance* d_2

Supposons que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de k $(|x_n|_1, \rightarrow_{n\rightarrow+\infty} 0) \leftrightarrow (|x_n|_2, \rightarrow \infty)$ *Démontrer que les ouverts pour* d_1 *sont les ouverts pour* d_2 *revient à démontrer que les fermés pour* d_1 *sont les fermés de* d_2 *(le complémentaire d'un ouvert est un fermé et vice-versa). La caractérisation séquentielle des fermés montre que* F *est fermé ssi pour toute suite* $(x_n)_n \geqslant 0$ *d'elements de* F *convergeante vers* x *dans* k *pour la distance* d_1 *alors* $x \in F$

Soit F *un fermé pour la distance* d_1 *et soit* $(x_n)_{n\geqslant 0}$ *une suite d'éléments de* F *convergeante vers* $x \in k$ *pour la distance* d_2*. Alors* $d_{\|_2}(x_n, x) = |x_n - x|_2 \rightarrow 0 \Leftrightarrow |x_n - x|_1 = d_{\|_1}(x_n, x) \rightarrow 0$*. On en deduit que la suite* $(x_n)_n \geqslant 0$ *converge vers* x *dans* k *pour la distance* d_1 *et, puisque* F *est fermé pour la distance* $d_1, x \in F$ *L'ensemble* F *est done fermé pour la distance* d_2*. En echangeant les róles de* d_1 *et* d_2*, on conclut.* ■

Corollaire :

Deux valeurs absolues $\|_p$ *et* $\|_l$ *sont équivalentes ssi* $p = l$

Preuve .

La réciproque est triviale. Pour l'implication directe, il suffit de considérer la suite $(p^n)_n \geqslant 0$. Elle converge vers 0 pour $\|_p$ car $|p^n|_p = p^{-n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$) et si $p \neq l$, elle ne converge pas vers 0 pour $\|_t$ car $|p^n|_t = 1 \nrightarrow 0$

Théoreme 3.1 *(D'Ostrowski)*

Toute valeur absolue non triviale $|.|$ *sur* $\mathbb{Q}$ *est équivalente soit à*$|\cdot|_p$ *pour un nombre premier* p*, soit à la valeur absolueusuelle notée* $|.|\infty$.

Preuve. *voir [10] (proposition* 3.1.3 *page*43*)*

3.2 Corps complet pour une valeur absolue

Définition 3.2 *Soit K un corps commutatif muni d'une valeur absolue φ. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d' éléments de K est de Cauchy pour φ si*

$$\forall\epsilon > 0, \exists N > 0, \forall p \geq N \text{ et } q \geq N \Rightarrow \varphi\left(x_p - x_q\right) \leq \epsilon$$

On dit que K est complet pour φ si toute suite de Cauchy pour φ converge dans K, pour φ

Théoreme 3.2 *Pour tout corps K muni d'une valeur absolue φ, il existe un corps $\widehat{K}$ muni d'une valeur absolue $\widehat{\varphi}$ ayant les proprités suivantes :*

- *$\widehat{K}$ est complet pour $\widehat{\varphi}$*
- *Il existe un isomorphisme σ de K dans $\widehat{K}$ qui est une isométrie pour φ et $\widehat{\varphi}$, c'est-à-dire :*

$$\forall x \in K, \widehat{\varphi} \circ \sigma(x) = \varphi(x)$$

$\sigma(K)$ est dense dans $\widehat{K}$ et $C_{\widehat{\varphi}} = C_{\varphi}$

Preuve.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy pour une valeur absolue φ i.e

$$\mathcal{C} = \left\{X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} / \forall n \quad x_n \in K, X \text{ de Cauchy } \right\}$$

On munit $\mathcal{C}$ d'une addition et d'une multiplication définies respectivement par l'addition et la multiplication terme à terme et on vérifie que ces opérations sont internes dans $\mathcal{C}$. Soient $X = (x_n)_n$ et $Y = (y_n)_n$ deux éléments de $\mathcal{C}$, alors on a

$$\begin{aligned} X + Y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots) \\ &= (x_n + y_n)_n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} XY &= (x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n, \ldots) \\ &= (x_n y_n)_n \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que le triplet $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ *est un anneau commutatif unitaire dont les éléments neutres pour l'addition et la multiplication sont respectivement la suite à termes tous nuls et celle à termes tous égaux à* 1; *mais* $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ *n'est pas un corps car il suffit de prendre la suite dont l'un des termes est nul est qui n'est pas inversible pour la multiplication. Soit* $\psi = \varphi^s$, *où* $s > 0$, *une norme équivalente à* φ. *D'après ce qui a précédé la définition de* $\mathcal{C}$ *ne change pas si l'on remplace* φ *par* ψ. *Pour simplifier la démonstration, on utilise parfois la norme* ψ *au lieu de la valeur absolue* φ. *Prenons la suite* $(x_n)_n = X \in \mathcal{C}$. *Alors la suite* $(\psi(x_n))_n$ *est de Cauchy dans* $\mathbb{R}$ *pour la valeur absolue ordinaire. En effet*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, \forall p, q \geq N : \psi(x_p - x_q) \leq \epsilon$$

et comme ψ *une norme on a*

$$\begin{aligned} \psi(x_p) &= \psi(x_p - x_q + x_q) \\ &\leq \psi(x_p - x_q) + \psi(x_q) \end{aligned}$$

d'où

$$\psi(x_p) - \psi(x_q) \leq \epsilon$$

De même

$$\begin{aligned} \psi(x_q) &\leq \psi(x_q - x_p + x_p) \\ &\leq \psi(x_q - x_p) + \psi(x_p) \end{aligned}$$

et donc

$$\psi(x_p) - \psi(x_q) \geq -\epsilon$$

ainsi on obtient

$$|\psi(x_p) - \psi(x_q)| \leq \epsilon$$

et la suite $(\psi(x_n))_n$ *est de Cauchy. Comme* $\mathbb{R}$ *est complet, la suite* $(\psi(x_n))_n$ *converge vers un réel noté* $\Phi(X) = \Psi^{\frac{1}{o}}(X)$ *Soit maintenant* $Y = (y_n)_n \in \mathcal{C}$. *Alors l'application* $\Phi : K \longrightarrow \mathbb{R}$ *vérifie :*

$$\Phi(XY) = \lim_{n \to +\infty} \varphi(x_n y_n) = \lim_{n \to +\infty} \varphi(x_n) \lim_{n \to +\infty} \varphi(y_n) = \Phi(X)\Phi(Y)$$

et

$$\begin{aligned} \Phi(X + Y) &= \lim_{n \to +\infty} \varphi(x_n + y_n) \\ &\leq \lim_{n \to +\infty} C_\varphi \sup[\varphi(x_n), \varphi(y_n)] \\ &\leq C_\varphi \sup[\Phi(X), \Phi(Y)] \end{aligned}$$

Par suite

$$\Psi(XY) = \Phi^s(XY) = \Phi^s(X)\Phi^s(Y) = \Psi(X)\Psi(Y)$$

et

$$\begin{aligned}\Psi(X+Y) &= \lim_{n\to+\infty} \psi\left(x_n + y_n\right) \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} \psi\left(x_n\right) + \lim_{n\to+\infty} \psi\left(y_n\right) \\ &= \Psi(X) + \Psi(Y)\end{aligned}$$

Cependant, l'existence possible de suites de Cauchy non nulle mais à limite nulle empêche Φ d'être une valeur absolue sur $\mathcal{C}$ (même si $\mathcal{C}$ n'est pas un corps), puisque l'équivalence $\Phi(X) = 0 \Longleftrightarrow X = 0$ n'est pas toujours vérifiée. Par exemple la suite X à termes tous nuls à partir d'un certain rang a pour limite $\Phi(X) = 0$ ce qui équivaut à dire $\lim_{n\to+\infty} \varphi\left(x_n\right) = 0$ par suite $\lim_{n\to+\infty} \varphi(0) = 0$ d'où $X = 0$ Soit maintenant $\mathcal{J}$ l'ensemble des suites de Cauchy de K à limite nulle, i.e,

$$\mathcal{J} = \left\{X = \left(x_n\right)_n / x_n \in K, \forall n, X \text{ de Cauchy, } \Phi(X) = 0\right\}$$

On vérifie que $\mathcal{J}$ est un idéal de $\mathcal{C}$. En effet, $\mathcal{J} \neq \varnothing$ car il contient au moins la suite nulle. Soient X et Y deux éléments de $\mathcal{J}$ c'est-à-dire $\Phi(X) = \Phi(Y) = 0$. D'après ce qui précède on a

$$\Phi(X+Y) \leq C_\varphi \sup[\Phi(X), \Phi Y)]$$

et par suite $\Phi(X+Y) = 0$, d'où $X + Y \in \mathcal{J}$ Soit X' un élément de $\mathcal{C}$. Pour montrer que $X'X \in \mathcal{J}$ i.e $\Phi\left(X'X\right) = 0$, il suffit de remarquer que

$$\Phi\left(X'X\right) = \Phi\left(X'\right)\Phi(X) = 0$$

Notons finalement que si $X \in \mathcal{C}\backslash\mathcal{J}$ les termes x_n de X sont tous non nuls à partir d'un certain rang et montrons que $\mathcal{J}$ est maximal dans $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{C}$ tel que $\mathcal{J} \nsubseteq \mathcal{I}$. Il existe donc $X \in \mathcal{I}$ tel que $X \notin \mathcal{J}$ c'est-à-dire $\Phi(X) \neq 0$ et soit $X_0 \in \mathcal{J}$ tel que $X + X_0 = Y \in \mathcal{I}$ Cette nouvelle suite est constituée de termes tous inversible dans K ce qu'il revient à dire que $1 \in \mathcal{I}$ d'où $\mathcal{I} = \mathcal{C}$. Il s'ensuit d'après la (proposition 1.2) que l'anneau quotient $\widehat{K} = \mathcal{C}\backslash\mathcal{J}$ est un corps. Soient X et X' deux éléments de $\mathcal{C}$ tels que $X' - X \in \mathcal{J}$ i.e $\Phi\left(X' - X\right) = 0$ puisque Ψ comme la norme ψ vérifie l'inégalité triangulaire on a

$$\left|\Psi\left(X'\right) - \Psi(X)\right| \leq \Psi\left(X' - X\right) = 0$$

D'où $\Psi(X')=\Psi(X)$ *et donc* $\Phi(X')=\Phi(X)$. *On définit alors deux applications* $\widehat{\varphi}$ *et* $\widehat{\psi}$ *de* $\widehat{K}$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *comme suit :* $\widehat{\varphi}(\xi)=\Phi(X)$ *où* $X\in\xi$ *et* $\widehat{\psi}(\xi)=\Psi(X)$ *d'où* $\hat{\psi}=\widehat{\varphi}^s$. *Notons que l'application* $\widehat{\varphi}$ *est bien définit, puisque pour* $\xi=\xi'$ *tel que* $X'\in\xi'=\xi$, *on a* $\hat{\varphi}(\xi)=\Phi(X)=\Phi(X')=\widehat{\varphi}(\xi')$ *et on vérifie immédiatement pour* $\eta\in\widehat{K}$ *:*

- $\widehat{\varphi}(\xi\eta)=\widehat{\varphi}(\xi)\widehat{\varphi}(\eta)$
- $\widehat{\varphi}(\xi+\eta)=\Phi(X+Y)\leq C_\varphi \sup[\Phi(X),\Phi(Y)]$

Avec $\hat{\varphi}(\xi)=0 \Longleftrightarrow \Phi(X)=0 \Longleftrightarrow X\in\mathcal{J} \Longleftrightarrow \xi=0$. *Donc* $\hat{\varphi}$ *est une valeur absolue sur* $\widehat{K}$, *de koefficient* $C_{\hat{\varphi}}\leq C_\varphi$ *et* $\widehat{\psi}$ *en est une autre de coefficient* $C_\varphi^s\leq 2$. *L'application* $\widehat{\psi}$ *est donc une norme. Soit* σ *l'application définit comme suit :*

$$\begin{aligned}\sigma: K &\xrightarrow{f} \mathcal{C} &&\xrightarrow{h} \widehat{K}\\ x &\longmapsto (x,x,\ldots,x,\ldots) &&\longmapsto \overline{(x,x,\ldots,x,\ldots)}\end{aligned}$$

où h *est la projection canonique de* $\mathcal{C}$ *dans* $\mathcal{C}\backslash\mathcal{J}$. *La suite* $(x,x,\ldots,x,\ldots)$ *est de Cauchy car pour* $\epsilon>0, \varphi(x_p-x_q)=\varphi(x-x)=\varphi(0)=0\leq\epsilon$ *pour* $p,q\geq N$. *Il est clair que* σ *est un homomorphisme d'anneaux, puisqu'il est la composition de deux homomorphismes d'anneaux.*

De plus σ *est injectif car* σ *est non nulle et* K *est un corps, on a simplement*

$$\begin{aligned}\ker\sigma &= \{x\in K/\overline{(x,x,\ldots,x,\ldots)}=\overline{0}\}\\ &= \{x\in K/(x,x,\ldots,x,\ldots)\in\mathcal{J}\}\\ &= \left\{x\in K/\lim_{n\to+\infty}\varphi(x)=0\right\}\\ &= \{0\}\end{aligned}$$

Ce qui signifie que K *est isomorphe à un sous corps de* $\widehat{K}$ *ou encore* σ *est un isomor- phisme du corps* K *dans le corps* $\widehat{K}$, *et* $\widehat{\varphi}\circ\sigma(x)=\widehat{\varphi}(\xi)=\Phi(X)=\Phi(x,x,\ldots,x,\ldots)=$

$$\lim_{n\to+\infty}\varphi(x,x,\ldots,x,\ldots)=\varphi(x)$$

Maintenant, on va montrer que $\sigma(K)$ *est dense dans* $\widehat{K}$. *Soit* $\xi\in\widehat{K}$, *tel que* $(x_n)_n\in\xi\cap\mathcal{C}$ *Alors on a* $\sigma(x_n)=(x_n,x_n,\ldots,x_n,\ldots)$ *D'où*

$$\widehat{\varphi}(\xi-\sigma(x_n))=\lim_{p\to+\infty}\varphi(x_p-x_q) \text{ pour } n \text{ fixé.}$$

Puisque $(x_n)_n$ de Cauchy, alors $\hat{\varphi}(\xi - \sigma(x_n)) < \epsilon$ pour n assez grand. Ainsi $\sigma(K)$ dense dans $\widehat{K}$. De plus :

$$C_{\widehat{\varphi}} = \sup_{\substack{\xi \in K \\ \hat{\varphi}(x) \leq 1}} \widehat{\varphi}(1+\xi) \geq \sup_{x \in K} \widehat{\varphi}(1+\sigma(x)) = \sup_{\substack{x \in K \\ \varphi(x) \leq 1}} \varphi(1+x) = C_\varphi$$

D'où en vertu de l'inégalité inverse, $C_{\hat{\varphi}} = C_\varphi$

Reste à montrer que $\widehat{K}$ est complet pour $\widehat{\varphi}$. Pour cela à toute suite de Cauchy $(\xi_n)_n$ de K associons une suite $(x_n)_n$ de K telle que, pour tout $n \geq 1, \widehat{\varphi}(\xi_n - \sigma(x_n)) \leq \frac{1}{n}$. Comme $(\xi_n)_n$ est de Cauchy , pour n assez grand, on a

$$\begin{aligned}
\varphi(x_n - x_q) &= \widehat{\varphi}(\sigma(x_n) - \sigma(x_p)) \\
&= \widehat{\varphi}\left[(\sigma(x_n) - \xi_n) + (\xi_n - \xi_p) + (\xi_p - \sigma(x_p))\right] \\
&\leq C_\varphi \sup\left[\widehat{\varphi}\left((\sigma(x_n) - \xi_n) + (\xi_n - \xi_p)\right), \widehat{\varphi}(\xi_p - \sigma(x_p))\right] \\
&\leq C_\varphi^2 \sup\left[\widehat{\varphi}(\sigma(x_n) - \xi_n), \widehat{\varphi}(\xi_n - \xi_p), \widehat{\varphi}(\xi_p - \sigma(x_p))\right] \\
&\leq C_\varphi^2 \sup\left(\frac{1}{n}, \epsilon, \frac{1}{p}\right)
\end{aligned}$$

Donc $(x_n)_n$ est bien une suite de Cauchy et pour $\xi \in \widehat{K}$, et n assez grand $\widehat{\varphi}(\xi - \sigma(x_n)) \leq \epsilon$ ce qui veut dire que $\sigma(x_n)$ converge vers ξ pour $\widehat{\varphi}$, d'où $\widehat{\varphi}(\xi_n - \xi) \leq C_\varphi^2 \sup\left(\frac{1}{n}, \epsilon\right)$ et donc la suite $(\xi_n)_n$ a pour limite ξ, ce qui achève la démonstration. ■

Définition 3.3 *Le corps $\widehat{K}$ qui vient d 'être construit sera appelé le complété de K pour φ.*

Corollaire. *Tout corps muni de la valeur absolue triviale est complet.*

Preuve.

Soit K un cors commutatif muni de la valeur absolue triviale φ. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour φ dans K. Alors par exemple si pour $\epsilon = \dfrac{1}{2}$, il existe $N > 0$ tel que pour tout $q \geq N : \varphi(x_N - x_q) \leq \frac{1}{2}$ i.e $x_q \in B\left(x_N, \frac{1}{2}\right) = \{x_{N_1}\}$ d'où pour tout $n \geq N, x_q = x_N$ et alors $(x_n)_n$ est une suite stationnaire à partir du rang N. Ainsi les suites de Cauchy sont les suites stationnaires à partir d'un certain rang, elles sont donc convergentes et dans ce cas $K = \widehat{K}$. ■

3.3 Valuation

Définition 3.4 *Une application* $v : K \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *est appelée une valuation si elle vérifie les axiomes suivantes :*

1. $v(a) = +\infty$ *si et seulement si* $a = 0$.
2. $v(a+b) \geq \inf(v(a), v(b))$ *pour tout* $(a,b) \in K^2$
3. $v(ab) = v(a) + v(b)$

Une valuation v *est dite triviale si* v *est définie par :* $\begin{cases} v(x) = 0, \text{ pour tout } x \in K^* \\ v(0) = +\infty, \end{cases}$

Exemple 3.1

1. *Soit* $|\cdot|$ *une valeur absolue ultramétrique sur un corps* K. *On pose* $v(a) = \begin{cases} -\log|a|, & \text{si } a \in K^* \\ +\infty, & \text{si } a = 0 \end{cases}$

   Alors v *est bien une valuation sur le corps* K

2. *Pour tout nombre premier* p; *on a la valuation p-adique :* $v_p(a) = r$ *si* $a = m \cdot p^r$ *et p est premier avec* m

Définition 3.5 *La valuation égale à 0 pour tout* $x \in K^*$ *est dite triviale.*

Remarque 3.2 *La valeur absolue associée a la valuation triviale est la valeur absolue triviale et inversement.*

Proposition 3.1 *(Voir [3]) Soit* $\alpha \in]0,1[$. *Soient* $\mathbf{V}(K)$ *l'ensemble des valuations* de K *et* $\mathbf{V}al^u(K))$ *l'ensemble des valeurs absolues ultramétriques de* K. *Alors la correspondance suivante :*

$$\widetilde{\alpha} : \mathbf{V}(K) \to \mathbf{V}al^u(K)$$
$$v \to ||v$$

est une bijection.

Proposition 3.2 *[Premier Principe de Dominance] Soit* v *une valuation sur un corps* K. *Soient* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *des éléments de* K. *Si* $v(x_i) \neq v(x_j)$ *pour tout couple d'indice* $i \neq j$ *alors*

$$v\left(\sum_{i=1}^{n} x_i,\right) = \operatorname{Inf}\left(v(x_1), v(x_2), \ldots, v(x_n)\right)$$

Preuve. *Par récurrence sur n comme dans le cas des valeurs absolues (voir preuve de la proposition 2.1)*

Définition 3.6 *Soit v une valuation sur K, associée à une valeur absolue φ. On appelle respectivement anneau, idéal, et groupe des unités de la valuation les ensembles*

$$A_v = v^{-1}([0, \quad +\infty]) = \varphi^{-1}([0,1])$$
$$I_v = v^{-1}(]0, \quad +\infty]) = \varphi^{-1}([0,1[)$$
$$G_v = v^{-1}(\{0\}) = \varphi^{-1}(\{1\})$$

Remarque 3.3 *On vérifie que les ensembles A_v, I_v et G_v sont respectivement un anneau, un idéal de A_v, et un groupe multiplicatif. En effet, pour tout $0 < a < 1$ on a :*

1. *A_v est un anneau :*
$$\begin{aligned}\varphi^{-1}([0,1]) &= \{x \in K/0 \leq \varphi(x) \leq 1\}\\ &= \left\{x \in K/0 \leq a^{v(x)} \leq 1\right\}\\ &= \{x \in K/v(x) \in [0,+\infty[\}\\ &= v^{-1}([0,+\infty[)\end{aligned}$$

   $0 \in A_v$ *puisque* $v(0) = +\infty$ *et si* $x, y \in A_v$ *alors* $v(xy) = v(x) + v(y) \Longrightarrow xy \in A_v$ *et* $v(x + y) \geq \inf[v(x), v(y)] \Longrightarrow x - y \in A_v;$ *donc A_v est un sous anneau de K*

2. *I_v est un idéal :*
$$\begin{aligned}\varphi^{-1}([0,1[) &= \{x \in K/0 \leq \varphi(x) < 1\}\\ &= \left\{x \in K/0 \leq a^{v(x)} < 1\right\}\\ &= \{x \in K/v(x) \in]0,+\infty]\}\\ &= v^{-1}(]0,+\infty[)\end{aligned}$$

   $0 \in I_v$ *puisque* $\varphi(0) = 0$ *et* si $x, y \in I_v$ *alors :*

   $\varphi(x - y) \leq \sup[\varphi(x), \varphi(y)] < 1 \Rightarrow x - y \in I_v$

   Enfin, si $x \in I_v$ et $y \in A_v$ alors $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) < 1$ puisque $0 \leq \varphi(x) < 1$ et $0 \leq \varphi(x) < 1$; d'où : $x, y \in I$

3.

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(\{1\}) &= \{x \in K/\varphi(x)=1\}\\ &= \left\{x \in K/a^{v(x)}=1\right\}\\ &= \{x \in K/v(x)=0\}\\ &= v^{-1}(0)\end{aligned}$$

Remarquons que $\varphi^{-1}(\{1\}) = \{x \in K^*/\varphi(x)=1\}$ *puisque* $\varphi(0)=0$.

Il est claire que $\varphi(1)=1$

et si $x \in G_v$ *alors* $x^{-1} \in G_v$ *puisque* $1=\varphi(1)=\varphi\left(xx^{-1}\right)=\varphi(x)\varphi\left(x^{-1}\right)=1\cdot\varphi\left(x^{-1}\right)=\varphi\left(x^{-1}\right)$ *et si* $x, y \in G_v$ *alors* $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)=1\cdot 1=1 \Rightarrow xy \in G_v$. *Ainsi* G_v *est un sous groupe de* K^*.

CONCLUSION

Au terme de ce travail, nous pouvons dire que la valeure absolue dans un corps commutatif sont des notions d'algébre nécessaire pour des plusieurs branches mathématiques,nous avons d'abord étudié les valeurs absolues sur un corps commutatif quelconque .Ensuite, nous avons élargi notre étude pour pouvoir inclure le complété d'un corps et la notion de valuations

De manière générale, les valeurs absolues sur les anneaux (commutatifs) et équivalent aux valeurs absolues sur les corps. Plus précisément, chaque valeur absolue sur un anneau commutatif peut être étendue à une valeur absolue sur son corps de fractions.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W.A. COPPEL, *Number theory (an introduction to mathematics)* Springer-Verlag, New York, 2005.

[2] P. COLMEZ, *Eléments d'analyse et d'algèbre,* Edition de l'cole polythéchnique, 2011.

[3] R. DESCOMBES *Eléments de Théorie des nombres* DUNOD, (1986).

[4] H.D. Ebbinghaus, Numbers, English transl. of 2nd German ed. by H.L.S, Springer- Verlag, New York, 1990.

[5] O. F. G. SCHILLING *The Theory of Valuations, Math. surveys 4*, Amer. Math. Soc. Providence, R.I, (1950).

[6] JEAN. JASQUES RISLER PASCAL BOYER,*algebre pour la lissence 3 groupe,anneaux,corps.*

[7] S. LANG, *Algèbre cours et exercices, 3ème ed., Dunod*, Paris, 2004.

[8] JEAN.PIERRE SERRE , *Corps locaux, première page du chapitre II.*

[9] J. QURRÉ ,*Cours D'algébre* masson1976.

[10] F. Q.*Gouvêa*, *p-adic Numbers, an introduction.*Springer verlang Berlin Heidelberg,(1993).

[11] G. SKANDALIS, *Topologie et analyse 3e année, Dunod,* Collection Sciences Sup, (2001).

[12] K. ZIZI, *Algèbre et analyse, 3ème ed.*, Alger, Office des publications universitaires, 1981.

ملخص

في هذه المذكرة حاولنا شرح بعض المفاهيم العامة حول القيمة المطلقة في الحقل التبديلي، قمنا اولا بالتذكير حول خصائص البنية الجبرية : الزمرة ، الحلقة، الحقل وكذلك القيمة المطلقة في الاعداد الحقيقية ثم حاولنا تعميم مفهوم لقيمة المطلقة في الحقل التبديلي ودراسة خصائصها وانهينا عملنا بالتقييم في الحقل التبديلي مع اعطاء بعض الامثلة للتوضيح اكثر.

كلمات مفتاحية

الحقل التبديلي ، القيمة المطلقة، التقييم

Abstract

In this memory, we try to explain some general of concepts about absolute values in commutatif field , First of all, we recalled the proprerties of algebraic structure :group, ring field and absolute values in real numbers , then we tried to generalize the concept of absolute value in the field also we study their characteristics , then we finish our work by fields with valuation and we give some examples their better understanding.

Key words :

Commutative fields, absolute values,valuation

Résumé

Dans ce mémoire on a essayée d'expliquer quelques consepts généraux sur la valeure absolue dans le corps commutatif, Tout d'abord, nous avons rappelé les propriétés de la structure algebrique : groupe,anneaux,corps et la valeure absolue sur l'ensemble des nombres réel R, puis nous avons essayé de généralises le consepte de valeure absolue dans un corps et d'étudier ses propriétés, et nous avons termine par valuation sur un corps commutatif On a donné quelques exemples pour mieu les comprendres.

Mot-clés :

Corps commutatif,valeur absolue,valuation