

DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf

Institut de SETI

Département de Mathématique

These

Présenté par

M^r Chaker Mourad

**Pour obtenir le grade de Magister
Option : Mathématiques Appliquées**

Thème

Etude qualitative et
comparative d'algorithmes
d'analyse de signaux par
ondelettes

Devant le Jury composé de :

<i>Président :</i>	<i>H. Belouadah</i>	<i>Maître de conférence (M'sila)</i>
<i>Encadreur :</i>	<i>N. Benhamidouche</i>	<i>Maître de conférence (M'sila)</i>
<i>Examineurs :</i>	<i>D. Chicouche</i>	<i>Maître de conférence (Sétif)</i>
	<i>M. Bouamar</i>	<i>D' Chargé de cours (M'sila)</i>
	<i>D. Mihoubi</i>	<i>D' Chargé de cours (M'sila)</i>

Sommaire

Introduction

CHAPITRE I

La transformée de Fourier à court terme

	<i>Pages</i>
1) <i>Caractérisation d'un signal</i>	01
1.1) <i>Différents types de signaux</i>	01
1.2) <i>Notion de continuité et de discrétisation</i>	05
1.3) <i>Mesurer - Traiter - Analyser</i>	05
2) <i>La transformée de Fourier</i>	07
2.1) <i>Condition d'application</i>	09
2.2) <i>Inconvénients de l'analyse de Fourier</i>	10
2.3) <i>Principe de la représentation Temps-Fréquence</i>	11
2.4) <i>Transformée de Fourier à court terme « T.F.G »</i>	12
2.5) <i>Propriétés de la transformée de Fourier à court terme</i>	13
2.6) <i>L'inégalité d'Heisenberg</i>	16
2.7) <i>Les fenêtres</i>	20
2.8) <i>Le spectrogramme</i>	21
2.9) <i>Les limites de la transformée de Fourier à court terme</i>	21

CHAPITRE II

La transformée en ondelette

1) <i>Définition d'une ondelette</i>	24
2) <i>Propriétés des ondelettes</i>	28
3) <i>Analyse multirésolution et filtres miroirs en quadrature</i>	28
3.1) <i>Analyse multirésolution.</i>	29
3.2) <i>Construction de la base orthonormée d'ondelette.</i>	30
3.3) <i>Le calcul explicite de l'ondelette mère.</i>	31
3.4) <i>Définition d'une fonction filtre</i>	33
3.5) <i>Définition des filtres miroirs en quadrature</i>	34

4) Construction des ondelettes de Daubechies	35
5) La transformée en ondelette	44
5.1) La transformée en ondelette continue	44
5.2) La transformée en ondelette discrète	49
5.3) Frame d'ondelette	49
6) Le scalogramme	55
7) La relation entre le traitement du signal et les coefficients de la T.O	55
8) Les algorithmes de décomposition-recomposition	56
8.1) Algorithme dans le système de Haar	56
8.2) Algorithme de la transformée en ondelette rapide	58

CHAPITRE III

Etude comparative

1) Le rôle de la largeur de la fenêtre dans la T.F.C.T	60
1.1) Spectrogramme	60
2) Choix des paramètres de la transformée en ondelette	62
2.1) Nombre de voies par octave	62
2.2) La fréquence de l'ondelette	63
2.3) Le nombre de point	64
3) Comparaison entre spectrogramme et scalogramme	65
3.1) Signaux stationnaires	65
3.2) Signaux non-stationnaires	67
3.3) Les signaux bruités	68

Conclusion

Bibliographie

Annexe

Introduction

Le traitement du signal consiste à élaborer, pour une certaine classe de signaux, des algorithmes permettant d'effectuer automatiquement, l'analyse et le diagnostic, le codage, la quantification et la compression, la transmission ou l'archivage.

Dans la pratique, ces tâches sont assez délicates et aucun algorithme universel ne peut convenir à l'extrême diversité des situations rencontrées.

En traitement du signal, une description fréquentielle forme un complément indispensable à la description temporelle. Les deux descriptions sont reliées entre elles par la *transformée de Fourier* (L'outil idéal pour étudier les signaux stationnaires). En effets, l'analyse de *Fourier* permet de connaître les différentes fréquences excitées dans un signal, c'est-à-dire son spectre, mais ne permet pas de savoir à quels instants ces fréquences ont été émises. Donc Cette analyse donne une information globale et non locale. Pour localiser l'information donnée par la transformée de *Fourier*, *Gabor a* introduit la *transformée de Fourier à court terme*, en décomposant le signal à analyser en segment à l'aide d'une fenêtre temporelle. Cette transformée possède des limites dues à l'utilisation d'une fenêtre de largeur constante couvrant le domaine de représentation *temps-fréquence*. Il est souhaitable que cette fenêtre soit adaptée en fonction des irrégularités du signal. Cela a fait l'objet de notre étude dans le premier chapitre.

L'idée d'introduire un paramètre supplémentaire qui fera varier la largeur de la fenêtre par une dilatation ou une contraction, conduit à l'analyse par ondelettes (La transformée en ondelettes). La transformée en ondelettes est un outil récent en traitement du signal. Elle a été utilisée comme un outil de traitement du signal pour la première fois en 1983 par *Jean Morlet*. Elle possède des propriétés intéressantes pour le traitement du signal et permet de dépasser certaines limitations de la transformée de *Fourier* à court terme. Cela a fait l'objet de notre étude dans le deuxième chapitre.

Et enfin dans le troisième chapitre, on a argumenter avec une comparaison entre la transformée de *Fourier* à court terme et la transformée en ondelettes.

CHAPITRE I

La transformée de Fourier à court terme

1) Caractérisation d'un signal

1.1) Différents types de signaux

Il est possible de faire la distinction entre un nombre de signaux dont les deux grands groupes sont celui des signaux certains (*c'est-à-dire déterministes*) et celui des signaux aléatoires (*c'est-à-dire non-déterministes*).

L'ensemble des signaux peut être décomposé en deux grandes familles, celle des signaux déterministes (voir Fig.1) et celles des signaux non-déterministes (voir Fig.3). Les signaux pseudo-aléatoires sont constitués de signaux périodiques mais dans chaque période, il y a des phénomènes aléatoires. Parmi les signaux non périodiques, on distingue les signaux quasi-périodiques, constitués d'une superposition des signaux sinusoïdaux dont les périodes ne sont pas commensurables, et les signaux transitoires, comme les décharges de capacité par exemple.[1]

a) Les signaux certains (déterministes)

Ce sont des signaux dont le modèle mathématique est connu (voir Fig.2), donc leur évolution en fonction du temps à chaque instant peut être parfaitement prédite.

Un signal déterministe est généralement noté $s(t)$ avec $t \in \mathfrak{R}$.

Les signaux déterministes sont définis :

- Soit par des fonctions réelles ou par des fonctions complexes.
- Soit par des distributions telles que les impulsions de *Dirac*. Il s'agit de signaux déterministes idéaux qui sont utilisés comme des modèles théoriques et ne peuvent être physiquement réalisables. [2]

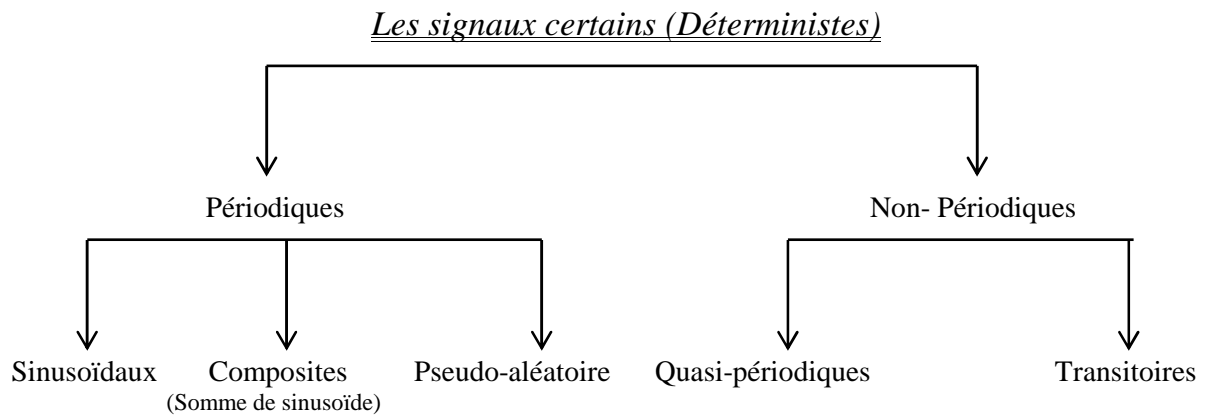


Fig. 1 : Les signaux déterministes

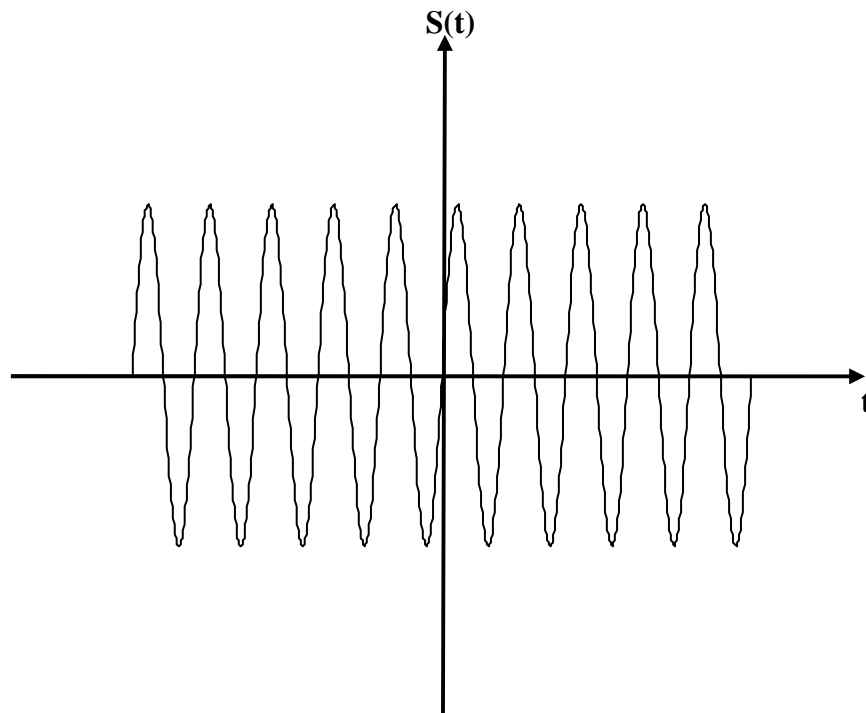


Fig.2 : Signal périodique

b) Les signaux aléatoires (non-déterministes)

Ce sont les signaux dont le modèle mathématique n'est pas connu (voir Fig.4), donc leur évolution en fonction du temps est imprévisible.

Un processus aléatoire est un phénomène physique caractérisé par des grandeurs dont les valeurs successives sont gouvernées par les lois probabilistes (c'est-à-dire *non-déterministes*). Le phénomène a une évolution imprévisible. Un signal aléatoire met en évidence un processus aléatoire. Ce sont des signaux à puissance moyenne finie.

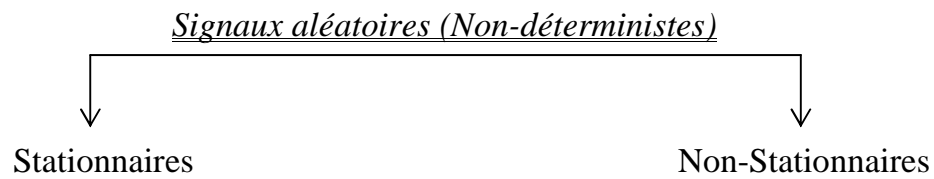


Fig. 3 : Les signaux non-déterministes

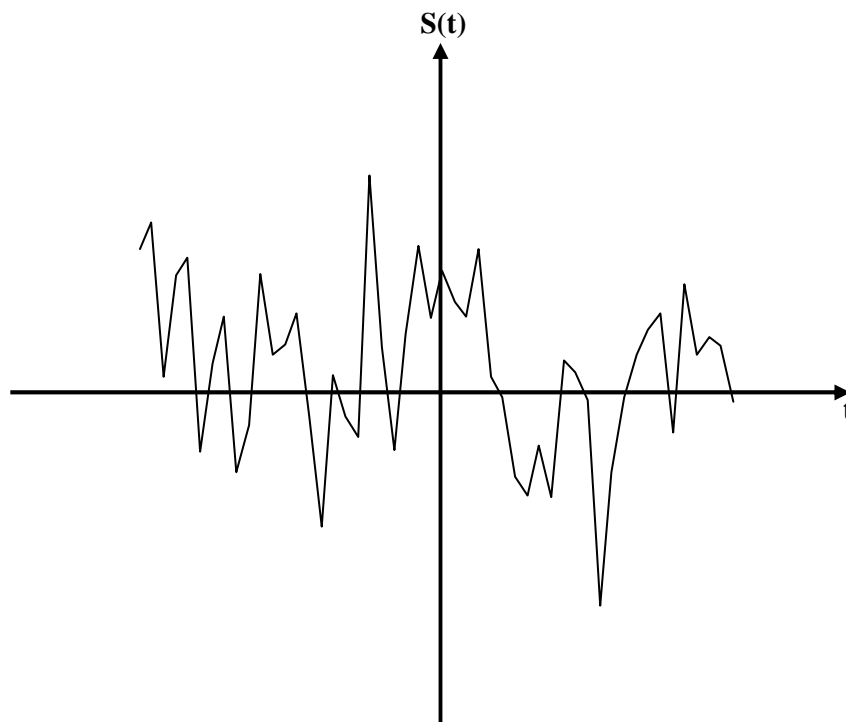


Fig.4 : Signal aléatoire

Un signal aléatoire est dit stationnaire si sa cause physique est invariante par translation dans le temps.

La stationnarité est souvent fonction de l'échelle temporelle (un signal peut être stationnaire pour des échelles de quelques minutes et ne plus l'être pour des échelles de quelques jours).

Des critères quadratiques permettent de faire une autre distinction entre les signaux :

Dans le cas d'un signal à énergie finie :

La puissance instantanée d'un signal $s(t)$ quelconque est :

$$p(t) = |s(t)|^2 = s(t) \cdot \bar{s}(t)$$

On appelle énergie normalisée d'un signal $s(t)$ dans l'intervalle $[t_1, t_2]$, l'aire décrit par la puissance instantanée :

$$E = \int_{t_2}^{t_1} |s(t)|^2 dt$$

Un signal $s(t)$ à énergie finie non nulle s'il vérifie la condition suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt < \infty$$

Si $s(t)$ est à puissance moyenne fini :

On appelle puissance moyenne d'un signal $s(t)$ dans l'intervalle $[t_1, t_2]$, l'expression :

$$P = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt$$

Un signal $s(t)$ à puissance moyenne finie non nulle s'il vérifie la condition suivante :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |s(t)|^2 dt < \infty$$

1.2) Notion de continuité et de discrétisation

Cette notion permet de caractériser la façon dont le signal nous parvient (voir Fig. 5).

- Un signal continu à temps continu est un signal analogique (Exemple Le 220V des prises électriques).

Il n'y a que l'oscilloscope qui permette de le visualiser.

- Un signal continu à temps discret est un signal qui peut admettre des variations continues.

C'est généralement le cas de toute information qui va être stockée et traitée informatiquement.

- Un signal discret à temps continu

La variation de la luminosité du soleil, puisqu'il n'est observable que le jour.

- Un signal discret à temps discret dont les valeurs successives ne peuvent pas être continues car elles varient comme des nombres entiers (Exemple : Les gains au loto).

1.3) Mesurer – Traiter – Analyser

Si l'on parle de traitement du signal c'est qu'analyse et traitement sont complémentaires et que l'un ne va pas sans l'autre.

- Analyser, c'est pouvoir dégager l'information essentielle contenue dans un signal.

La nature de l'information pertinente diffère selon la nature physique du signal. Il est ensuite possible de reconstruire le signal en ne gardant que l'information essentielle et en éliminant l'information accessoire. Cette notion est liée au concept de *traitement du signal*.

L'information accessoire se présente sous la forme du bruit lié aux mesures, bruit inhérent à chaque observation. Les incertitudes attachées aux données représentent assez bien le bruit. Cependant, elles peuvent ne pas prendre en compte tous les bruits de mesure car tous ne peuvent pas être estimés.

« Le bruit induit par les instruments de mesure ou par les conditions atmosphériques ou autre est un phénomène important qui doit être pris en compte dans l'analyse autant que possible ». [1]

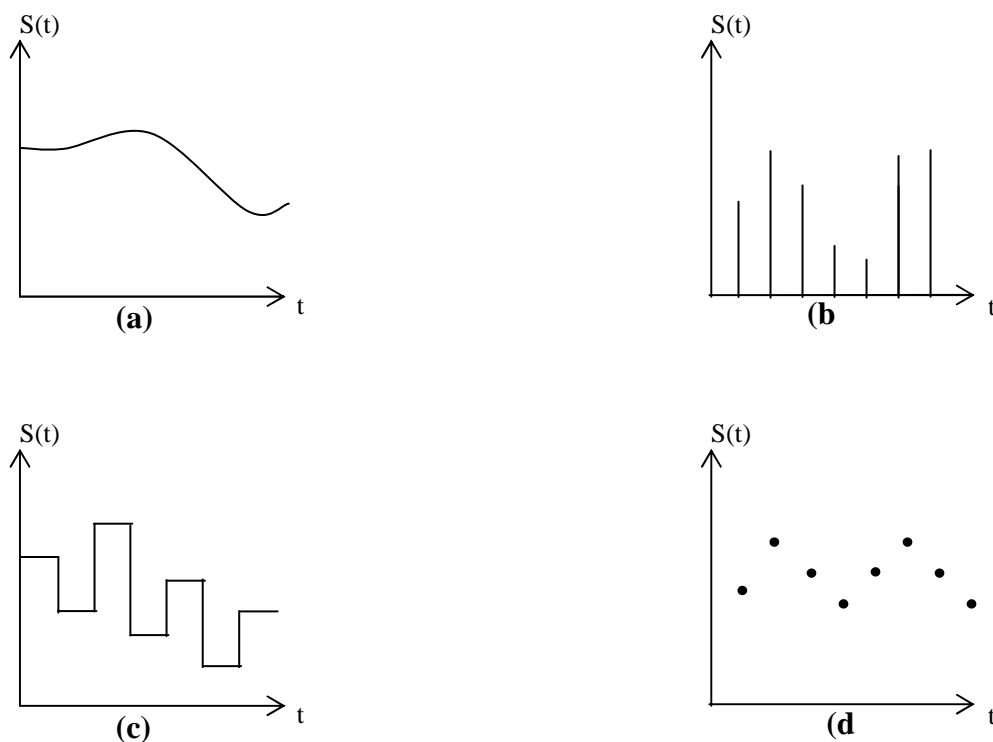


Fig. 5 : Continuité et discrétisation d'un signal

Les signaux peuvent être à temps continu (a) ou à temps discret (b), ou alors ils peuvent avoir des variations discrètes à temps continu (c), ou à temps discret (d).

2) La transformée de Fourier

L'observation de l'évolution d'un signal peut nous renseigner sur son commencement, sa fin, la durée de ses éléments caractéristiques, ses discontinuités ses changements de rythme, etc. En revanche, une représentation temporelle renseigne peu sur les périodicités présentes dans le signal.

Une technique fondamentale pour la représentation en fréquence consiste à décomposer le signal en une superposition de différentes fonctions [3]. Cette méthode fut généralisée en 1807 par *Joseph Fourier* et s'applique à l'étude de nombreux problèmes physiques.

- Les séries de *Fourier* sont utilisées pour l'étude des signaux périodiques (Exemple : les signaux carrés, rectangulaires, etc.).

Ceux-ci peuvent en effet être représentés comme une superposition d'une onde sinusoïdale fondamentale (dont la fréquence est appelée la *fréquence fondamentale*) et de divers harmoniques (de fréquences multiples de la fréquence fondamentale).[4]

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \quad (\text{I.1})$$

Les amplitudes ou coefficients de *Fourier* sont donnés par :

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (\text{I.2})$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \cos(n\omega t) dt \quad , \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \sin(n\omega t) dt$$

- Pour les phénomènes non-périodique, il est nécessaire d'avoir recours à une intégrale de *Fourier* (C'est-à-dire à une somme continue)

Cette méthode consiste à représenter le signal par une superposition d'ondes sinusoïdales de toutes les fréquences possibles. Les amplitudes associées à ces fréquences représentent, comme pour les séries de *Fourier*, les importances respectives des diverses ondes sinusoïdales. Ces amplitudes forment alors une fonction de la fréquence f appelée spectre continu des fréquences du signal : C'est la transformée de *Fourier* du signal.

Elle est calculée à l'aide de l'intégrale de *Fourier* :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-2i\pi ft} dt \quad (\text{I.3})$$

$$\cong \sum_{n=0}^N x_n \cdot e^{-2i\pi n f / N}$$

Où

N : Est le nombres de points du signal.

$X(f) = TF[x(t)]$: La transformée de *Fourier* du signal $x(t)$.

Cette transformée contient la même information que le signal temporel, mais elle diffère dans la manière de représenter cette information (voir Fig.6). [5]

La transformée de *Fourier* inverse permet de reconstruire le signal à partir des sinusoïdes qui le constituent.

Elle est donnée par :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{2i\pi ft} df \quad (\text{I.4})$$

$x(t) = TF^{-1}[X(f)]$: L'inverse de la transformée de *Fourier*.

2.1) Condition d'application

Pour que la transformée de Fourier $X(f)$ d'un signal $x(t)$ existe, le signal $x(t)$ doit être de carré sommable c'est-à-dire d'énergie finie.

Pour les signaux réels, cette condition est toujours remplie puisque la mesure est faite sur un temps fini.

L'analyse par Fourier suppose implicitement que le signal est identique à lui-même en dehors de l'intervalle de mesure. La fonction $X(f)$ étant périodique de période 1, il est d'usage de limiter son intervalle de définition à $[-1/2, 1/2]$. Dans le cas où elle est issue d'un échantillonnage, la valeur 1 de la période doit être remplacée par $1/f_e$ où f_e désigne la fréquence d'échantillonnage. [6]

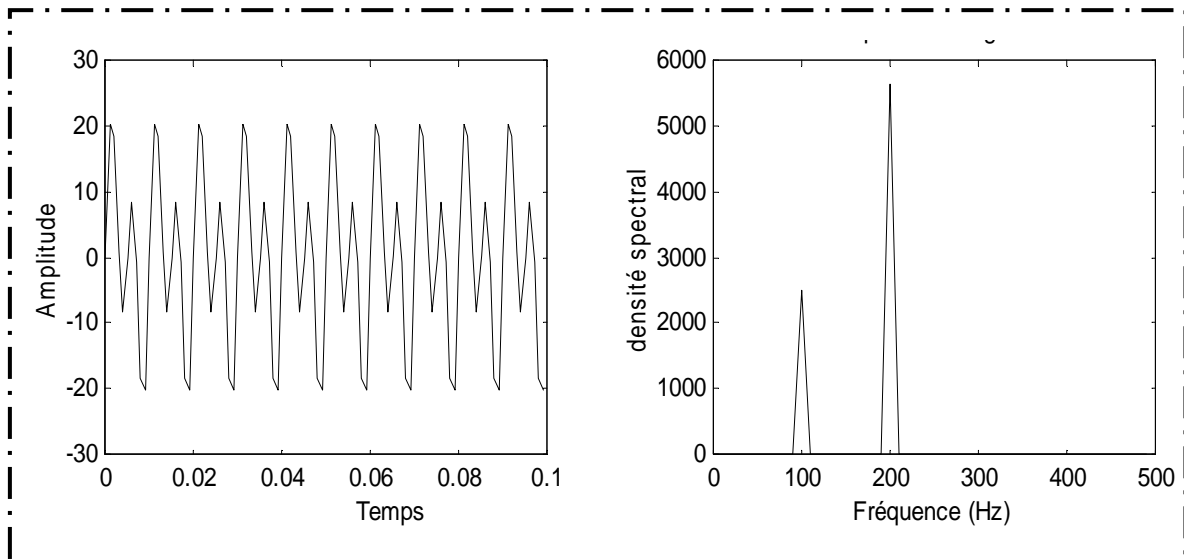


Fig. 6 : Représentation temporelle et fréquentielle d'un signal

2.2) Inconvénients de l'analyse de Fourier

Malgré son immense succès, cette technique a plusieurs défauts, en particulier son manque évident de localisation temporelle.

En effets, l'analyse de *Fourier* permet de connaître les différentes fréquences excitées dans un signal, c'est-à-dire son spectre, mais ne permet pas de savoir à quels instants ces fréquences ont été émises.

Cette analyse donne une information globale et non locale, car les fonctions d'analyse sont des sinusoides qui oscillent indéfiniment sans s'amortir. Cette perte de localité est un inconvénient pour l'étude de signaux non-stationnaires.

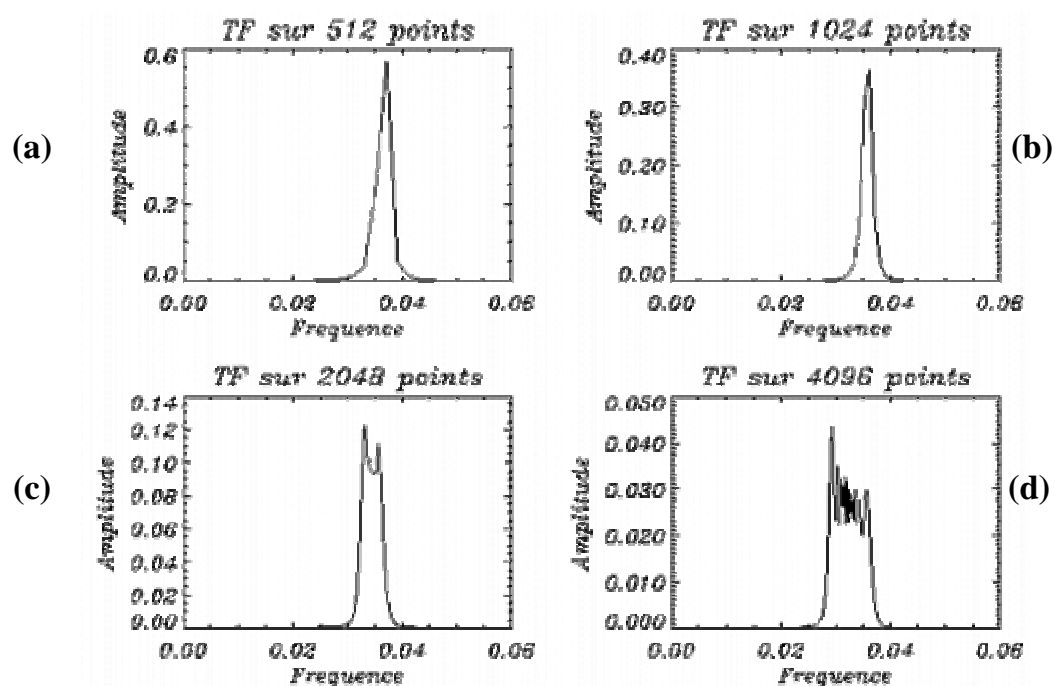


Fig. 7 : *Transformée de Fourier d'un signal à fréquence variable.*

Le signal temporel utilisé pour calculer les transformées de Fourier de la figure 7 est : $x(t) = \sin\left(2\pi t \cdot \frac{1}{27 + 0.001t}\right)$.

La fréquence de ce signal est donc variable. Les quatre dessins représentent quatre transformées de Fourier mais calculées sur les 2^9 premiers points du signal (**a**), puis sur les 2^{10} premiers points (**b**) et sur les 2^{11} premiers points (**c**) et enfin sur le 2^{12} premiers points (**d**).

La figure 7 (**a**) montre l'existence d'un pic alors que la figure (**d**) montre l'existence d'une bande de fréquence très mal définie.

De plus ainsi que cela a été vu sur la figure 7 l'analyse de *Fourier* ne permet pas l'étude de signaux dont la fréquence varie dans le temps. De tels signaux nécessitent la mise en place d'une analyse *temps-fréquence* [7] qui permettra une localisation de périodicités dans le temps et indiquera donc si la période varie d'une façon continue, si elle disparaît puis réapparaît par la suite.

2.3) Principe de la représentation Temps-Fréquence

Gabor dans les années 1940 découvre la première forme de représentation *temps-fréquence*. Sa technique consiste à découper le signal en différentes plages de longueur fixe (Voir Fig. 8). Chaque plage est alors étudiée séparément des autres par l'analyse traditionnelle de *Fourier*. L'inconvénient majeur de ce procédé est la longueur de la plage étant fixée, il n'est pas possible d'analyser simultanément des phénomènes dont les échelles de temps sont différentes.

Pour localiser l'information donnée par la transformée de *Fourier*, *Gabor* a introduit la transformée de *Fourier Glissante* en utilisant une fenêtre temporelle dans l'intégrale de *Fourier*. [8]

2.4) Transformée de Fourier à court terme «Transformée de Fourier Glissante »

On se propose de découper le signal $x(t)$ en une suite de segment de durée finie en utilisant une fonction fenêtre $g(t)$ centrée à $t = 0$, à support compact de largeur fixe.

Le produit $x(t) g(t)$ permet d'avoir accès à l'information fréquentielle du signal au voisinage de $t = 0$. Cette procédure est répétée avec des versions translatées de la fonction $g(t)$.

On remplace $x(t)$ de l'équation (I.3) par $x(t) g(t-\tau)$ qui représente une portion du signal $x(t)$ centrée autour de τ .

La transformée de *Fourier* à court terme «*T.F.C.T* » continue pour un signal $x(t)$ est définie par :

$$X_g(\tau, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot g(t - \tau) \cdot e^{-i2\pi ft} dt \quad (\text{I.5})$$

Où $g(t - \tau)$ est la fenêtre d'observation à l'instant τ , et $X_g(\tau, f)$ est la transformée de *Fourier* d'une portion du signal centré autour de τ .

Si la fonction $g(t)$, est centrée en $(0,0)$ dans l'espace *temps-fréquence*, alors on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t |g(t)|^2 dt = 0 \quad (\text{I.6})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f |G(f)|^2 df = 0 \quad (\text{I.7})$$

Alors la fonction $g_{\tau, f}(t)$ sera localisée au voisinage de (τ, f) , d'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t |g_{\tau, f}(t)|^2 dt = \tau \quad (\text{I.8})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f |G_{\tau, f}(f)|^2 df = f \quad (\text{I.9})$$

Où : $g_{\tau, f}(t) = g(t - \tau).e^{i2\pi ft}$

$G_{\tau, f}(f)$: La transformée de *Fourier* de $g_{\tau, f}(t)$

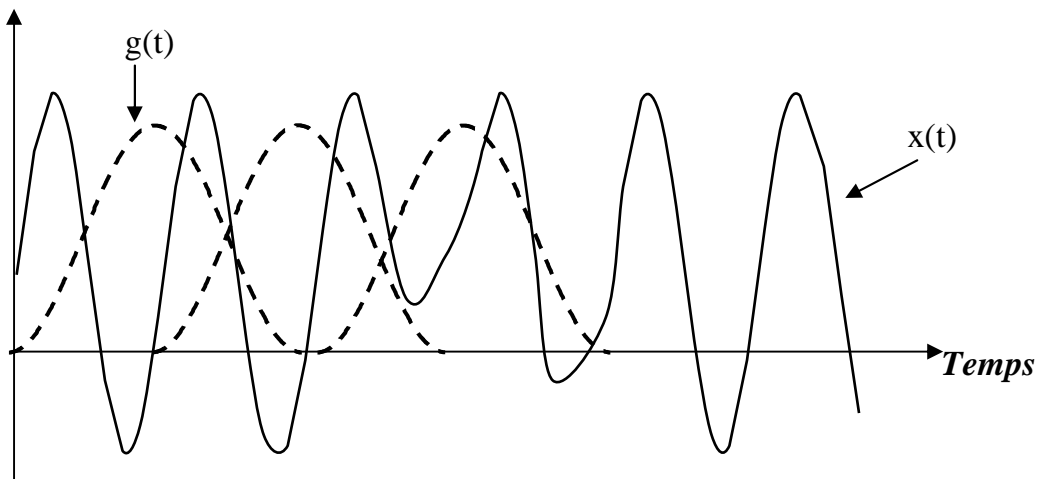


Fig. 8 : Principe de la T.F.C.T.

2.5) Propriétés de la transformée de Fourier à court terme

D'après l'équation (I.5), on remarque que la transformée de *Fourier* à court terme «T.F.C.T» transforme le signal $x(t)$ d'une seule dimension à un signal à deux dimensions qui se représente dans le plan *temps-fréquence*.

- Si la fenêtre de l'analyse $g(t)$ a une énergie normalisée égale à 1 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = 1 \quad (\text{I.10})$$

Alors la transformée de *Fourier* à court terme $X_g(\tau, f)$ est admissible

- Soit x et g deux fonctions de carrée intégrable :

$$x, g \in L^2(\mathfrak{R})$$

$$X_g(\tau, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).g(t-\tau).e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\bar{g}_{\tau, f}(t)dt = \langle x, g_{\tau, f} \rangle \quad (\text{I.11})$$

Donc la transformée de *Fourier* à court terme c'est le produit scalaire du signal $x(t)$ avec une famille de $g_{\tau, f}(t)$ générée à partir d'une seule fonction $g(t)$ de $L^2(R)$ par translation temporelle « τ » et fréquentielle « f »

a) Conservation de l'énergie

La transformée de *Fourier* à court terme $X_g(\tau, f)$ est définie par :

$$\begin{aligned} X_g(\tau, f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).g(t-\tau).e^{-i2\pi ft} dt \\ &= TF[x(t).g(t-\tau)] \end{aligned}$$

Où : « TF » est la transformée de *Fourier*.

$$\text{Alors} \quad \int_{\tau} \int_f |X_g(\tau, f)|^2 df d\tau = \int_{\tau} \left(\int_f |TF[x(t).g(t-\tau)]|^2 df \right) d\tau$$

On applique le théorème de *Parseval* :

$$\int_{\tau} \int_f |X_g(\tau, f)|^2 df d\tau = \int_{\tau} \left(\int_t |x(t).g(t-\tau)|^2 dt \right) d\tau$$

$$\int_{\tau} \int_f |X_g(\tau, f)|^2 df d\tau = \int_t |x(t)|^2 \left(\int_{\tau} |g(t-\tau)|^2 d\tau \right) dt$$

Comme l'énergie de la fenêtre $g(t)$ est normalisée :

$$\int_{\tau} |g(t - \tau)|^2 d\tau = 1$$

Alors on trouve

$$\int_{\tau} \int_f |X_g(\tau, f)|^2 df d\tau = \int_t |x(t)|^2 dt \quad (\text{I.12})$$

La relation (I.12) montre que le passage du domaine temporel au domaine fréquentiel épuise toute l'information contenue dans le signal $x(t)$ «Il n'y a pas de perte d'information».

b) Reconstruction du signal

On veut reconstruire le signal $s(t)$ à partir de sa transformée $X_g(\tau, f)$:

On a :

$$X_g(\tau, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot g(t - \tau) \cdot e^{-i2\pi ft} dt = TF[x(t) \cdot g(t - \tau)]$$

On prend $X_g(\tau, f) = TF[x(t) \cdot g(t - \tau)]$ et on applique la transformée inverse aux deux côtés, on aura,

$$TF^{-1}[X_g(\tau, f)] = x(t) \cdot g(t - \tau)$$

On multiplie les deux membres équation par $g(t - \tau)$ et en intégrant le long de tous le domaine temporel, on aura :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t - \tau)|^2 \cdot x(t) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - \tau) \cdot X_g(\tau, f) \cdot e^{i2\pi ft} df$$

$$\text{d'où } \|g\|^2 \cdot x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - \tau) \cdot X_g(\tau, f) \cdot e^{i2\pi ft} df$$

On posant :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t - \tau)|^2 d\tau = \|g\|^2 = C$$

Il vient

$$x(t) = C^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - \tau) \cdot X_g(\tau, f) \cdot e^{i2\pi ft} df$$

Comme : $g_{\tau, f}(t) = g(t - \tau) \cdot e^{i2\pi ft}$

Finalement :

$$x(t) = C^{-1} \iint g_{\tau, f}(t) \cdot X_g(\tau, f) d\tau df \quad (\text{I.13})$$

2.6) L'inégalité d'Heisenberg

Une limitation sévère pour le développement d'une analyse temps-fréquence vient du fait qu'une fenêtre ne peut avoir à la fois une dispersion temporelle et une dispersion fréquentielle arbitrairement petites [9].

D'après la figure 9, on remarque que le spectre d'une impulsion est plus large que celui d'un signal dont le temps est plus long.

Cette dualité trouve sa forme mathématique dans l'inégalité d'Heisenberg.

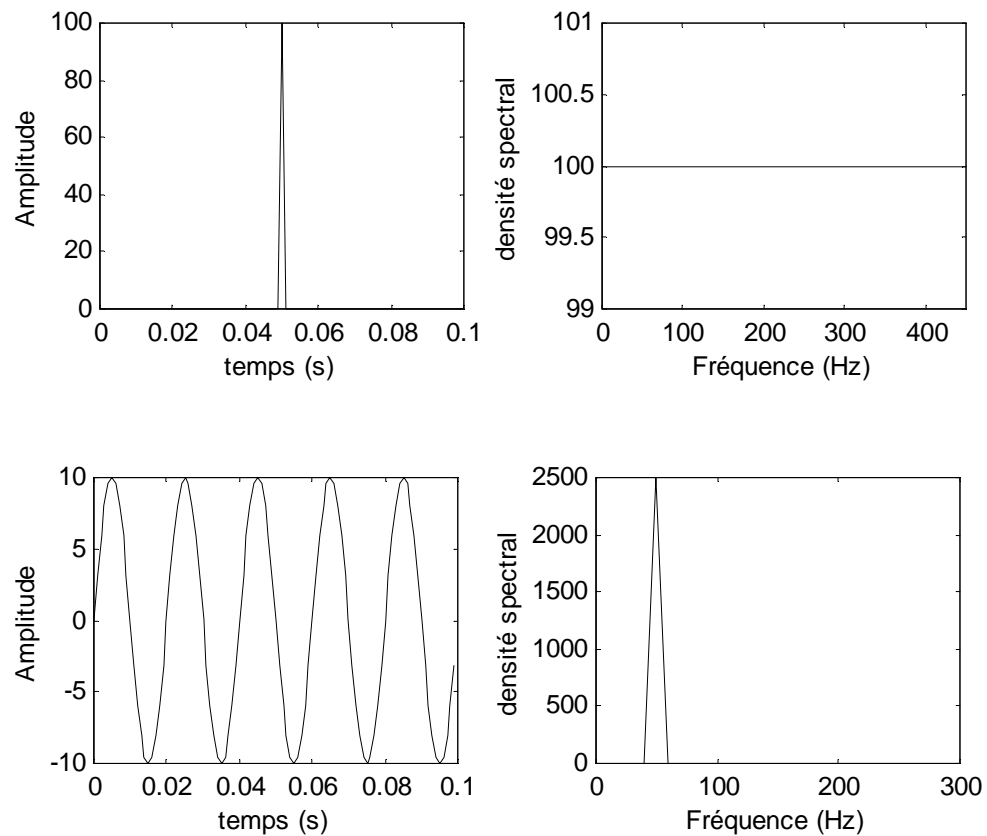


Fig. 9 : La transformée de Fourier d'une impulsion et d'une sinusoïde

Considérons un signal $x(t)$ d'énergie finie

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Une méthode simple pour définir la durée utile et la largeur de bande utile d'un signal consiste à considérer la distribution temporelle de l'énergie d'un signal en définissant le moment centré du deuxième ordre normalisé, par analogie avec la notion de moment utilisée en statistique.

[2]

La durée utile est définie par :

$$(\Delta t)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_0).x^2(t)dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt} = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_0).x^2(t)dt \quad (\text{I.14})$$

$$\text{où : } t_0 = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{+\infty} t.x^2(t)dt$$

t_0 : Est le moment centré normalisé du premier ordre.

La quantité t_0 donne la position moyenne du signal sur l'axe des temps. Δt donne une mesure de l'étendue du signal autour de t_0 .

D'une façon analogue, on peut définir la largeur de bande utile d'un signal réel en prenant comme origine des fréquences la position moyenne du signal sur l'axe des fréquences :

$$(\Delta f)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 .|X(f)|^2 df}{\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df} = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 .|X(f)|^2 df \quad (\text{I.15})$$

Propriété de dérivation de la transformée de *Fourier* :

$$\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow i2\pi fX(f)$$

En utilisant le théorème de *Parseval*, on aura :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{dx(t)}{dt} \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |i2\pi f \cdot X(f)|^2 df = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 |X(f)|^2 df$$

Pour $x(t)$ réel on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{dx(t)}{dt} \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 dt$$

$$\text{D'où : } \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 |X(f)|^2 df = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 dt$$

On porte ce résultat dans l'équation (I.15) on obtient :

$$(\Delta f)^2 = \frac{1}{4\pi^2 E} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 dt \quad (\text{I.16})$$

On applique l'inégalité de *Schwartz*, on obtient :

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_0) \cdot x(t) \cdot \frac{dx(t)}{dt} dt \right)^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_0)^2 \cdot x^2(t) dt \times \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 dt$$

En intégrant par partie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_0).x(t). \frac{dx(t)}{dt} dt = \frac{1}{2}(t - t_0).x^2(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$$

On trouve alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_0).x(t). \frac{dx(t)}{dt} dt = \frac{1}{2}(t - t_0).x^2(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2} E$$

Supposant $x^2(t)$ est à décroissance rapide

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(t - t_0).x^2(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Finalement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_0).x(t). \frac{dx(t)}{dt} dt = -\frac{1}{2} E \quad (\text{I.17})$$

En tenant compte des équations (I.14), (I.16) et (I.17), l'inégalité de Schwartz conduit à l'inégalité d'Heisenberg :

$$(\Delta t).(\Delta f) \geq \frac{1}{4\pi}.$$

On remarque ce produit est borné inférieurement.

Si ce produit est inférieur à $\frac{1}{4\pi}$, on ne peut pas capté le signal.

2.7) Les fenêtres

La fenêtre glissante $g(t)$ est une fonction symétrique qui atténue les valeurs du signal aux bords de l'intervalle d'observation. Cette fonction vaut généralement 1 au centre du domaine considéré et 0 sur les bords [5].

Il existe plusieurs types de fenêtres. Chaque fenêtre a ces avantages et ces inconvénients, donc le choix de la fenêtre se fait relativement au problème étudié. Dans notre cas la fenêtre utilisée est celle de *Hamming*.

La fenêtre de *Hamming* est définie comme suit :

$$g(k+1)=0,54-0,46\cos\left(\frac{2\pi k}{n-1}\right) \text{ avec } k=0,\dots,n-1 \quad (\text{I.18})$$

2.8) Le spectrogramme

C'est un outil très répandu dans l'analyse du signal puisqu'il fournit une distribution de l'énergie du signal dans le plan temps-fréquence.

Le spectrogramme est défini comme le module au carré de $X_g(\tau, f)$ «transformée de *Fourier* à court terme »

$$sp = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot g(t - \tau) \cdot e^{-i2\pi ft} dt \right|^2 \quad (\text{I.19})$$

En plus, le spectrogramme est une fonction bilinéaire non réversible.[10]

2.9) Les limites de la transformée de Fourier à court terme

La transformée de *Fourier* à court terme possède des limites dues à l'utilisation d'une fenêtre de largeur constante quelle que soit la fréquence à analyser.

Pour avoir une bonne résolution temporelle, on doit utiliser une fenêtre étroite, mais elle entraîne une mauvaise résolution fréquentielle.

Et pour avoir une bonne résolution fréquentielle, on doit utiliser une fenêtre beaucoup plus large, mais elle entraîne une mauvaise résolution temporelle.

La Fig. 10 représente un signal de deux sinusoides et une impulsion.

L'utilisation du spectrogramme avec une fenêtre étroite nous permet de détecté l'impulsion alors que l'utilisation d'une fenêtre très large nous permet de détecté les deux sinusoides mais l'impulsion n'est pas localisée (Fig. 11)..

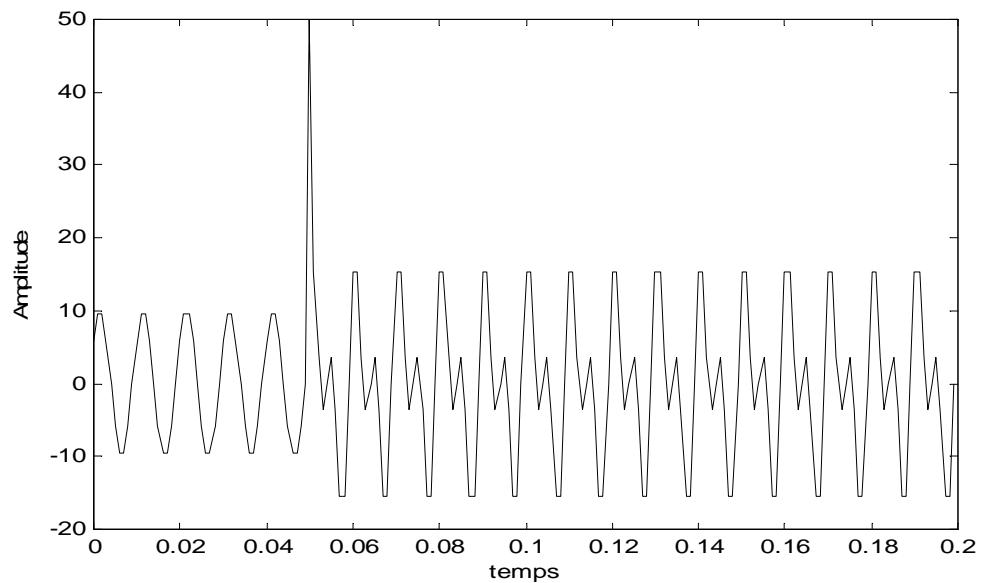


Fig. 10 : *Signal temporel de deux sinusoides et d'une impulsion*

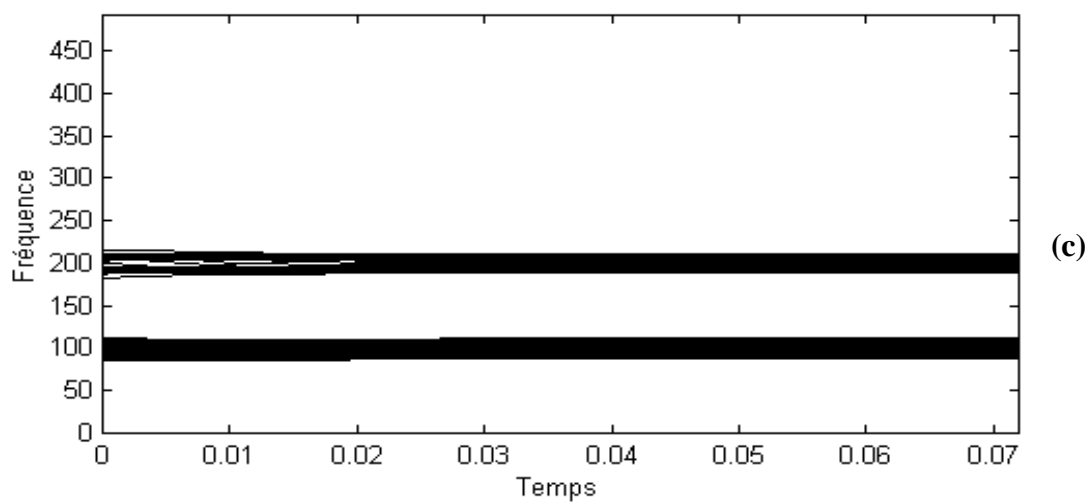
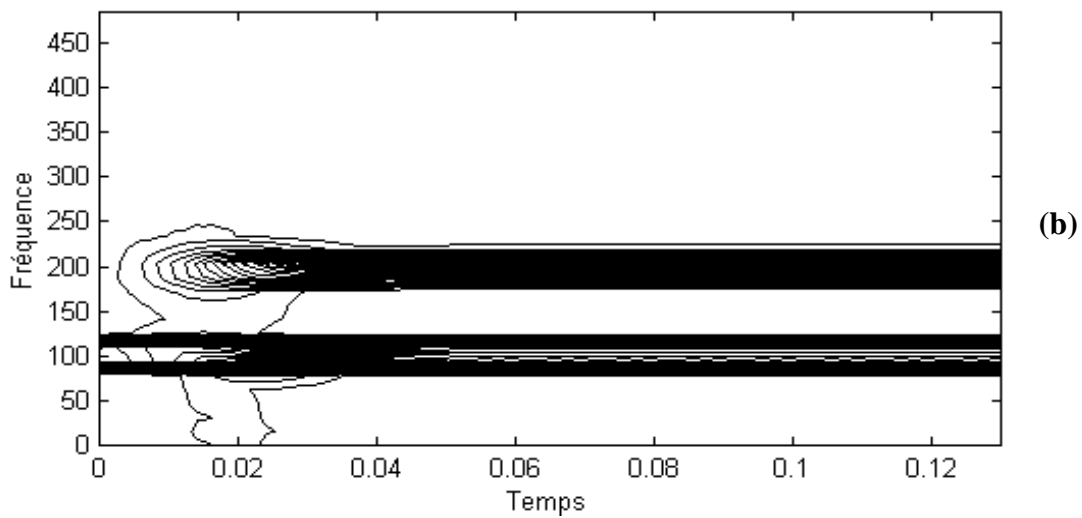
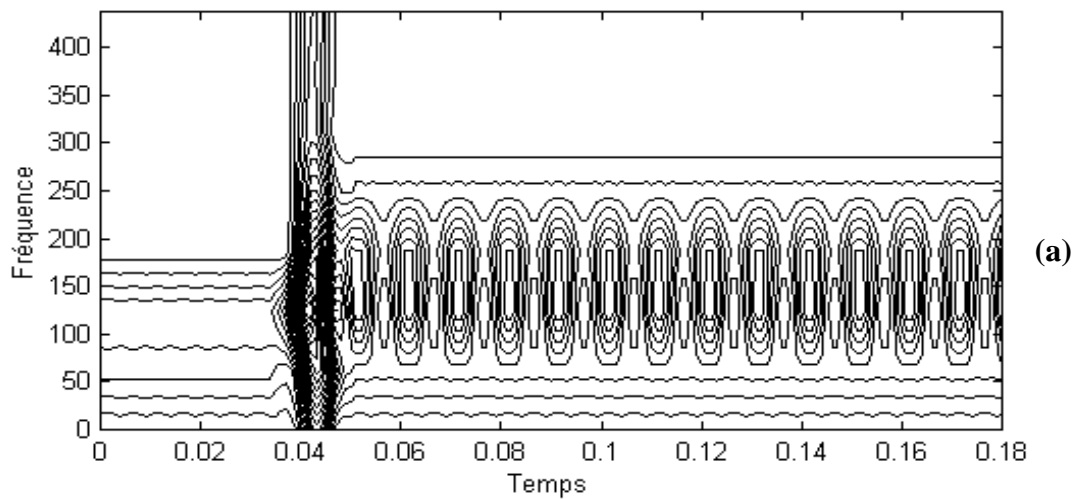


Fig. 11 : Spectrogramme «Fenêtre de Hamming »
 a) Pour 16 points b) Pour 64 points, c) Pour 128 points

CHAPITRE II

La transformée en ondelette

La transformée en ondelette est outil récent en traitement du signal. Elle a été utilisée pour la première fois en 1983 par le géophysicien *Jean Morlet* sur des applications pétrolières en réflexion sismique.[11]

L'analyse *temps-fréquence* a toujours été un enjeu en traitement du signal. Pour obtenir de l'information à la fois temporelle et fréquentielle sur un signal, il faut le décomposer sur des fonctions concentrées à la fois en temps et en fréquences [12]. Pour définir ces fonctions, il faut partir d'une fonction $\psi(t)$ appelée *Ondelette mère* si elle est bien localisée et si elle est oscillante (elle ressemble à une onde, mais étant localisée, est une *ondelette*).

1) Définition d'une ondelette

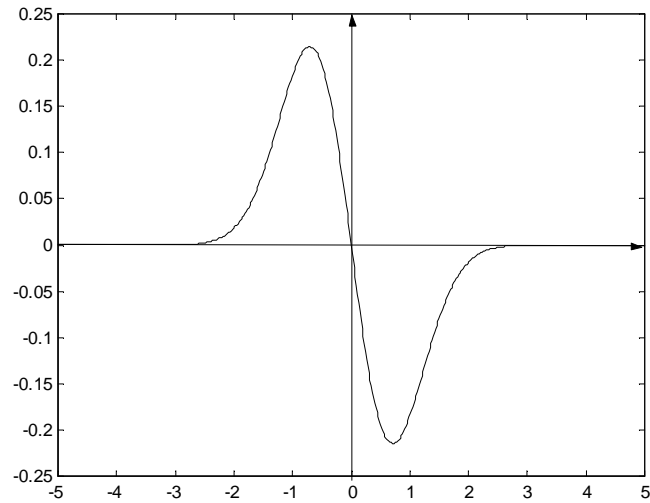
Une *ondelette* est une fonction élémentaire très particulière à valeurs réelles ou complexes, très concentrée à la fois en temps et en fréquence et vérifie les conditions suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} |t|^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \psi \in L^2 \\ |f|^\varepsilon \hat{\psi} \in L^2 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{II.1})$$

Pour $\varepsilon > 0$

Où $\hat{\psi}$ est la transformée de *Fourier* de ψ

Exemple : $\psi(t) = -t \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$



L'ondelette mère $\psi(t)$ engendre les autres ondelettes de la famille, $\psi_{a,b}(t)$, $a > 0$ et $b \in \mathfrak{R}$ par dilatation (paramètre a) et par translation dans le temps (paramètre b).

A partir de cette ondelette $\psi(t)$ vont se déduire toutes les fonctions $\psi_{a,b}(t)$ de la famille :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a > 0, b \in \mathfrak{R} \quad (\text{II.2})$$

En d'autre terme, le paramètre b positionne l'ondelette sur l'axe du temps, alors que le paramètre a contrôle la fréquence de l'ondelette (contraction : haute fréquence, dilatation : basse-fréquence).

Si $|a| \ll 1$, l'ondelette $\psi_{a,b}(t)$ est très concentrée de l'ondelette mère $\psi(t)$ et le contenu fréquentiel sera en majorité dans les hautes fréquences du plan d'analyse.

Si $|a| \gg 1$, l'ondelette $\psi_{a,b}(t)$ devient très large et le contenu fréquentiel sera en majorité dans les basses fréquences du plan d'analyse.

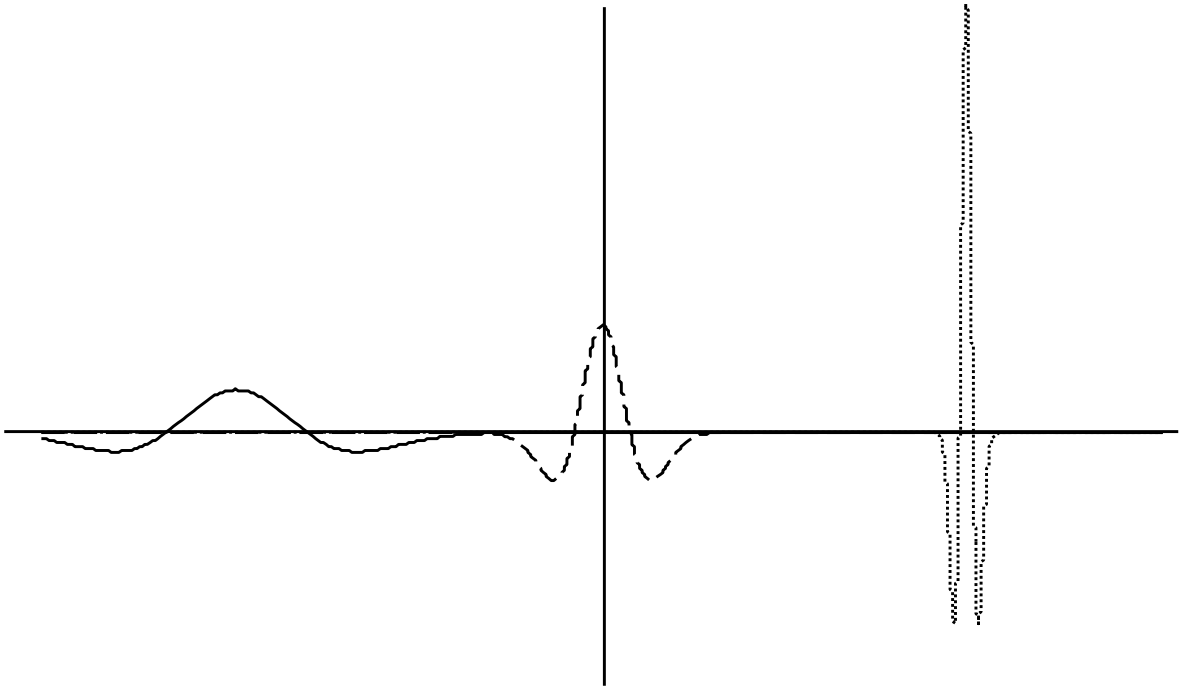


Fig. 11 : Dilatation et contraction de l'ondelette.

1) L'ondelette *Chapeau mexicain* (Fig. 11)

$$\psi(t) = \cos(5t) \cdot e^{-t^2/2}$$

2) L'ondelette de *Morlet* (Fig.12)

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} \cdot (1-t^2) \cdot e^{-t^2/2}$$

Remarque :

Si on fait varier le paramètre de dilatation a , l'ondelette gardent le même nombre d'oscillation.

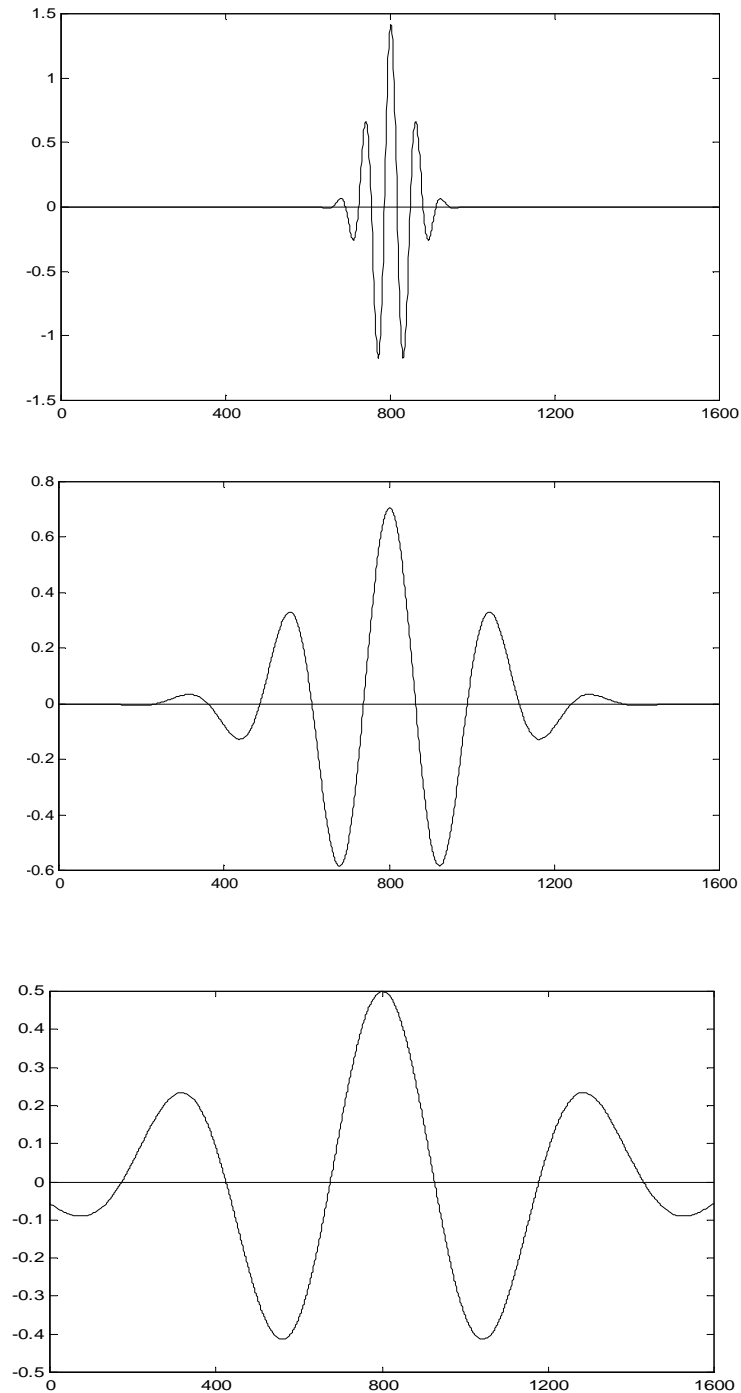


Fig. 12 : *Le nombre d'oscillation reste le même malgré la variation de (a) .*

2) Propriétés des ondelettes

Les propriétés des ondelettes sont :

L'ondelette est une fonction de carré intégrable appartenant à $L^2(\mathfrak{R})$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty \quad (\text{II.3})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = \hat{\psi}(0) = 0 \quad (\text{II.4})$$

(i.e.) La moyenne de $\psi(t)$ est nulle

L'ondelette doit satisfaire la condition d'admissibilité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f} |\hat{\psi}(f)|^2 df < \infty$$

- Les ondelettes orthogonales doivent avoir un nombre de moments nuls :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^m \psi(t) dt = \hat{\psi}^{(m)}(0) = 0$$

3) Analyse multirésolution et filtres miroirs en quadrature

Le concept d'analyse multirésolution est en fait directement lié à la théorie des filtres miroirs en quadrature. Ces filtres intervenant de façon explicite dans les algorithmes de décomposition-recomposition en ondelette.

L'analyse multirésolution consiste à utiliser une gamme étendue d'échelle pour analyser un signal. A chaque échelle, le signal sera remplacé par l'approximation la plus adéquate que l'on puisse y tracer. En allant des échelles les plus grossières vers les échelles les plus fines, on accède à des

représentations de plus en plus précises du signal donné. L'analyse s'effectue donc en calculant ce qui diffère d'une échelle à l'autre, c'est-à-dire les détails.

L'analyse multirésolution d'une fonction f consiste en une hiérarchie d'approximation f_j représentant les contributions d'échelles de f jusqu'à un certain rang j : Autrement dit, f_j va représenter la fonction f jusqu'à des détails de taille $1/2^j$ (ces approximations sont de plus en plus précises et convergent vers f quand j tend vers l'infini).[13]

3.1) Définition de l'analyse multirésolution

Une suite $\{V_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ des sous-espaces fermés $\{V_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ est une approximation multirésolution si les six (6) propriétés suivantes sont vérifiées :

$$i) \forall (j,k) \in \mathbb{Z}^2, f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(x - 2^j k) \in V_j,$$

$$ii) \forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j+1},$$

$$iii) \forall j \in \mathbb{Z}, f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1},$$

$$iv) \lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\},$$

$$v) \lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \text{Adhérence} \left(\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j \right) = L^2(\mathbb{R}).$$

vi) Il existe dans V_0 une fonction ϕ (appelée fonction d'échelle) telle que la collection des $[\phi(x - k)]_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base orthonormée de V_0 .

Soit V_0 le sous-espace vectoriel engendré par cette suite. V_j est défini à partir de V_0 par simple changement d'échelle :

$$f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j$$

Les approximations successives $f_j = P_j f$

Où P_j désigne la projection orthogonale sur V_j sont données par la formule de projection :

$$P_j f = \sum_k \langle f, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}$$

Avec $\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k)$

Car $(\phi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de V_j d'après les propriétés *iii)* et *vi)*.

3.2) Construction de la base orthonormée d'ondelette.

Les ondelettes apparaissent pour caractériser les éléments d'échelle correspondant à l'indice j dans la fonction f , soit la différence d'information entre $P_j f$ et $P_{j+1} f$

Soit W_j le complément orthogonal de V_j dans V_{j+1} :

$$W_j \oplus V_j = V_{j+1}$$

D'après les propriétés de la définition d'une analyse multirésolution, les espaces W_j vérifient :

i') $\forall j \in \mathbb{Z} \quad f(x) \in W_j \Leftrightarrow f(2^j \cdot x) \in W_0$

ii') $\forall j \in \mathbb{Z} \quad f(x) \in W_0 \Leftrightarrow f(x - k) \in W_0$

W_j orthogonal à $W_{j'}$, pour $j \neq j'$

Et $\otimes_{j \in \mathbb{Z}} (W_j) = L^2(\mathfrak{R})$

3.3) Le calcul explicite de l'ondelette mère.

Connaissant la fonction d'échelle ϕ , on peut calculer une ondelette ψ de la façon suivante :

Soit $\phi \in V_0 \subset V_1$, donc il existe des coefficients $h(n)$ (tels que :

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_n h(n) \phi(2x - n) \tag{II.5}$$

Car $\{\sqrt{2} \cdot \phi(2x - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de V_1 , et les coefficients $h(n)$ se calculent par les produits scalaires :

$$h(n) = \sqrt{2} \langle \phi(x), \phi(2x - n) \rangle \tag{II.6}$$

L'équation (II.5) s'écrit également en *Fourier*. (Voir Annexe)

$$\hat{\phi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \tag{II.7}$$

$$\text{Où } m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) e^{-2\pi i \xi n} \tag{II.8}$$

Les fonctions $\{\phi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ constituent une base orthonormée de V_0 , les relations d'orthogonalités s'écrivent (*Formule de Poisson*).

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + k)|^2 = 1 \tag{II.9}$$

ce qui est équivalent à :

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)|^2 = 1 \tag{II.10}$$

Calculer ψ sachant que $\psi \in V_1$ revient à chercher les coefficients $g(n)$ vérifiant :

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_n g(n) \phi(2x - n) \quad (\text{II.11})$$

$$\text{Avec } g(n) = \sqrt{2} \langle \psi(x), \phi(2x - n) \rangle \quad (\text{II.12})$$

S'écrit également en *Fourier* :

$$\hat{\psi}(\xi) = m_1\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (\text{II.13})$$

$$\text{Où } m_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) e^{-2\pi i \xi n} \quad (\text{II.14})$$

Les relations d'orthogonalité des fonctions ϕ et ψ sont :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + k)|^2 = 1 \quad (\text{II.15})$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}(\xi + k) \overline{\hat{\psi}(\xi + k)} = 0 \quad (\text{II.16})$$

D'où les nouvelles conditions :

$$|m_1(\xi)|^2 + |m_1\left(\xi + \frac{1}{2}\right)|^2 = 1 \quad (\text{II.17})$$

$$m_1(\xi) \overline{m_0(\xi)} + m_1\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \overline{m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)} = 0 \quad (\text{II.18})$$

3.4) Définition d'une fonction filtre

Une fonction filtre est une fonction H élément de $L^2(T)$, espace des fonctions 1-périodique de carré intégrable sur $[0,1]$.

A H est associée bijectivement une suite $h(n)$, de $L^2(Z)$ vérifiant :

$$H(\xi) = \sum_{n \in Z} h(n).e^{-2\pi i \xi n}$$

En terme de traitement du signal :

h : est la réponse impulsionnelle de la fonction filtre H

et

H : est la fonction de transfert de h

a) Définition d'un opérateur de filtrage

L'opérateur de filtrage F associé à une fonction filtre H est une opération linéaire de $L^2(Z)$ dans $L^2(2Z)$ commutant avec les translations d'entiers pairs défini par :

$$(Fa)_{2n} = \sum_{k \in Z} h(k - 2n).a_n \quad \text{si } a_n \in L^2(Z)$$

Où h est la réponse impulsionnelle de la fonction filtre H .

L'opérateur dual au sens de $L^2(Z)$ « F^* » de F est défini par :

$$\sum_{n \in Z} (F^* b)_{2n} . \bar{a}_n = \sum_{n \in Z} (b_n) . (\bar{F} a)_{2n}$$

Avec (a_n) et (b_n) sont dans $L^2(Z)$.

Donc

$$(F^* b)_{2n} = \sum_{k \in Z} \bar{h}(n - 2k).b_k = \sum_{k \in Z} h(n - 2k).b_k \quad \text{si } h(n) \text{ est réel.}$$

3.5) Définition des filtres miroirs en quadrature

Soient F_0 et F_1 deux opérateurs de filtrage.

On dit que F_0 et F_1 sont des filtres miroirs en quadrature si l'application :

$$\begin{aligned} (F_0, F_1) : L^2(Z) &\rightarrow L^2(Z) \times L^2(2Z) \\ (a_n)_n &\rightarrow [(F_0 a)_{2n}, (F_1 b)_{2n}] \end{aligned}$$

Est isométrique.

(i.e.) Pour tout $a_n \in L^2(Z)$

$$\sum_{n \in Z} |a_n|^2 = \sum_{n \in Z} |(F_0 a)_{2n}|^2 + \sum_{n \in Z} |(F_1 b)_{2n}|^2$$

Dans la pratique F_0 est un filtre passe-bas et F_1 est un filtre passe-haut.

Conditions nécessaires

Soit une analyse multirésolution de $L^2(R)$ de fonction d'échelle ϕ et d'ondelette ψ

A ϕ et ψ sont associées des fonctions filtres H et G de réponses impulsionnelles $h(n)$ et $g(n)$ telles que :

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_n h(n) \cdot \phi(2x - n) \tag{II.19}$$

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_n g(n) \cdot \phi(2x - n) \tag{II.20}$$

Les relations (II.19) et (II.20) s'écrivent en *Fourier* comme :

$$\hat{\phi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad \text{Avec } m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} H(\xi) \tag{II.21}$$

$$\hat{\psi}(\xi) = m_1\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad \text{Avec } m_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} G(\xi) \tag{II.22}$$

On dit que m_0 et m_1 sont des filtres miroirs en quadrature, s'ils vérifient les quatre conditions suivantes :

$$i) |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + 1/2)|^2 = 1$$

$$ii) |m_1(\xi)|^2 + |m_1(\xi + 1/2)|^2 = 1$$

$$iii) m_1(\xi)\overline{m_0(\xi)} + m_1(\xi + 1/2)\overline{m_0(\xi + 1/2)} = 0$$

$$iv) m_0(0) = 1, \text{ Car } \hat{\phi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\phi}(\xi) \text{ (et } \phi \text{ n'est pas identiquement nulle).}$$

On dit que $m_0(\xi)$ est une fonction filtre passe-bas (filtrant les hautes fréquences) et $m_1(\xi)$ est une fonction filtre passe-haut (filtrant les basses fréquences), si on a les relations suivantes :

$$m_0(0) = m_1(1/2) = 1$$

$$m_0(1/2) = m_1(0) = 0$$

4) Construction des ondelettes de Daubechies

Le problème de construire des ondelettes mère et père à support compact (ou encore, dans le nouveau langage, des ondelettes ψ et des fonctions échelle ϕ à support compact) se ramenait à la recherche de filtres miroirs en quadrature (à reconstruction parfaite) à réponse impulsionnelle finie. [14]

En 1987, I. Daubechies construisit des fonctions d'échelle orthonormales à support compact ($\text{supp } \phi_N = [0, 2N - 1]$) et à régularité arbitrairement

grande (ϕ_N est de classe C^{α_N} , où $N \left(1 - \frac{\log 3}{2 \log 2}\right) \alpha_N \sim$). [15]

Les bases de *Daubechies* sont maintenant largement utilisées, parce que la compacité du support de ϕ_N autorise l'usage de filtre finis dans l'algorithme rapide des ondelettes.

L'ondelette mère $\psi(t)$ et la fonction d'échelle $\phi(t)$ de *Daubechies* sont définies comme suit :

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2N-1} h(k+1) \cdot \phi(2t-k) \quad (\text{II.23})$$

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2N-1} g(k+1) \cdot \phi(2t-k) \quad (\text{II.24})$$

Avec

$$g(n) = (-1)^{n-1} \cdot h(2N-n+1) \quad (\text{II.25})$$

$$\int \phi(t) dt = 1 \quad (\text{II.26})$$

Les coefficients $\{h(n)\}_{n=0}^{2N-1}$ sont choisis tels que les fonctions :

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \cdot \psi(2^{-j}t - k + 1)$$

Forment une base orthonormée.

En plus l'ondelette mère ψ à N moment nuls

$$\int t^m \cdot \psi(t) dt = 0 \quad \text{Avec} \quad m = 0, \dots, N-1 \quad (\text{II.27})$$

a) Les coefficients des filtres de Daubechies.

	n	$h(n)$
N = 2	0	0.3415
	1	0.5915
	2	0.1585
	3	-0.0915
N = 4	0	0.1629
	1	0.5055
	2	0.4461
	3	-0.0198
	4	-0.1323
	5	0.0218
	6	0.0233
	7	-0.0075
N = 6	0	0.0789
	1	0.3498
	2	0.5311
	3	0.2229
	4	-0.1600
	5	-0.0918
	6	0.0689
	7	0.0195
	8	-0.0223
	9	0.0004
	10	0.0034
	11	-0.0008

	N	$h(n)$
N = 8	0	0.0385
	1	0.2212
	2	0.4777
	3	0.4139
	4	-0.0112
	5	-0.2008
	6	0.0003
	7	0.0910
	8	-0.0123
	9	-0.0312
	10	0.0099
	11	0.0062
	12	-0.0034
	13	-0.0003
	14	0.0005
	15	-0.0001

	n	$h(n)$
N = 10	0	0.0189
	1	0.1331
	2	0.3728
	3	0.4868
	4	0.1988
	5	-0.1767
	6	-0.1386
	7	0.0901
	8	0.0658
	9	-0.0505
	10	-0.0208
	11	0.0235
	12	0.0026
	13	-0.0076
	14	0.0010
	15	0.0014
	16	-0.0005
	17	-0.0001
	18	0.0001
	19	0.0000

Tableau 1 : Les coefficients du filtre h de Daubechies

	n	$g(n)$
N = 2	0	-0.4830
	1	0.8365
	2	-0.2241
	3	-0.1294
N = 4	0	-0.2304
	1	0.7148
	2	-0.6309
	3	-0.0280
	4	0.1870
	5	0.0308
	6	-0.0329
	7	-0.0106
N = 6	0	-0.1115
	1	0.4946
	2	-0.7511
	3	0.3153
	4	0.2263
	5	-0.1298
	6	-0.0975
	7	0.0275
	8	0.0316
	9	0.0006
	10	-0.0048
	11	-0.0011

	n	$g(n)$
N = 8	0	-0.0544
	1	0.3129
	2	-0.6756
	3	0.5854
	4	0.0158
	5	-0.2840
	6	-0.0005
	7	0.1287
	8	0.0174
	9	-0.0441
	10	-0.0140
	11	0.0087
	12	0.0049
	13	-0.0004
	14	-0.0007
	15	-0.0001

	n	$g(n)$
N = 10	0	-0.0267
	1	0.1882
	2	-0.5272
	3	0.6885
	4	-0.2812
	5	-0.2498
	6	0.1959
	7	0.1274
	8	-0.0931
	9	-0.0714
	10	0.0295
	11	0.0332
	12	-0.0036
	13	-0.0107
	14	-0.0014
	15	0.0020
	16	0.0007
	17	-0.0001
	18	-0.0001
	19	0.0000

Tableau 2 : Les coefficients du filtre g de *Daubechies*

b) Présentation graphique des filtres h , g ainsi ϕ et ψ

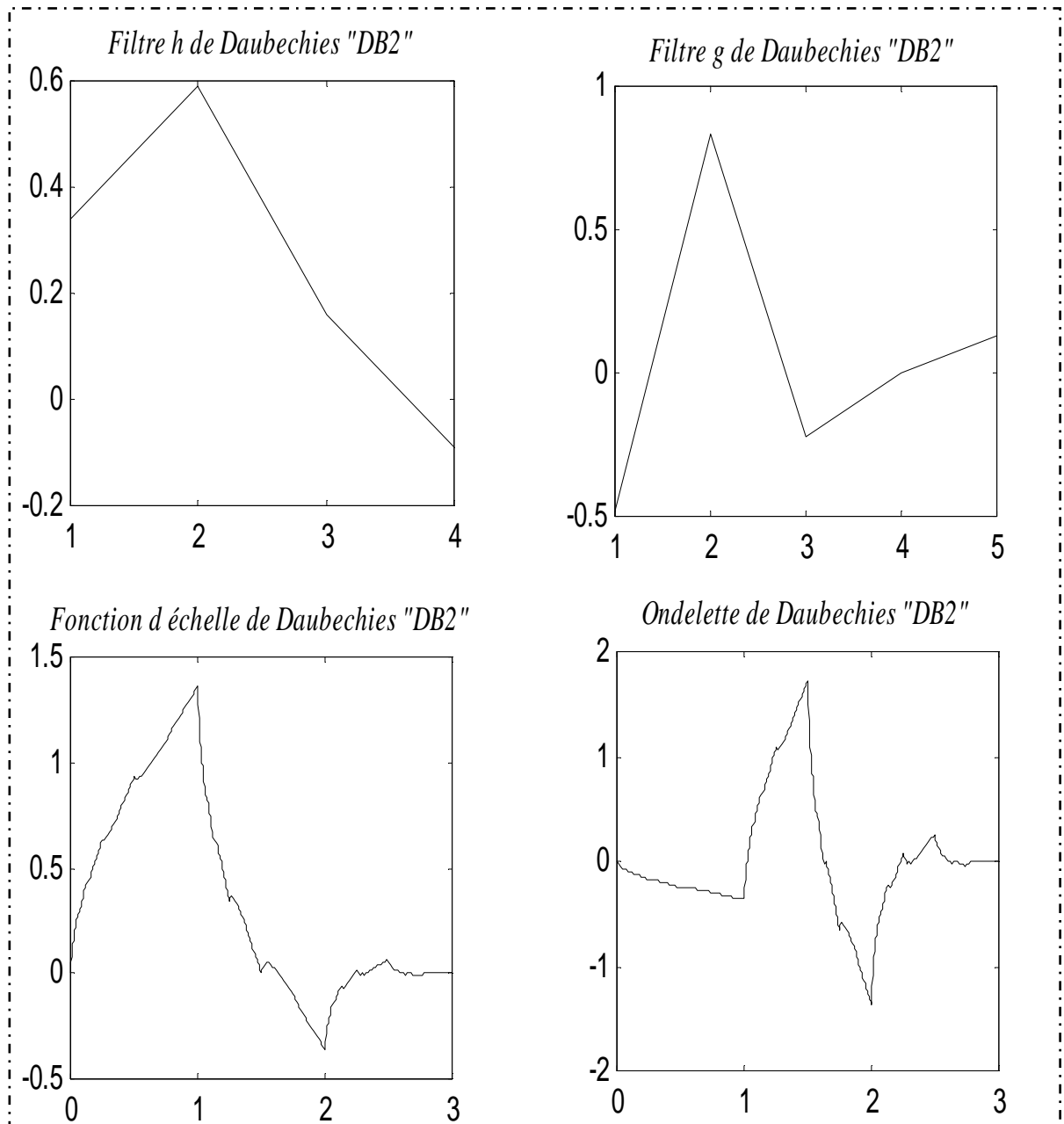


Fig. 13 : *Filtres h , g , fonction d'échelle et l'ondelette mère de Daubechies pour $N = 2$*

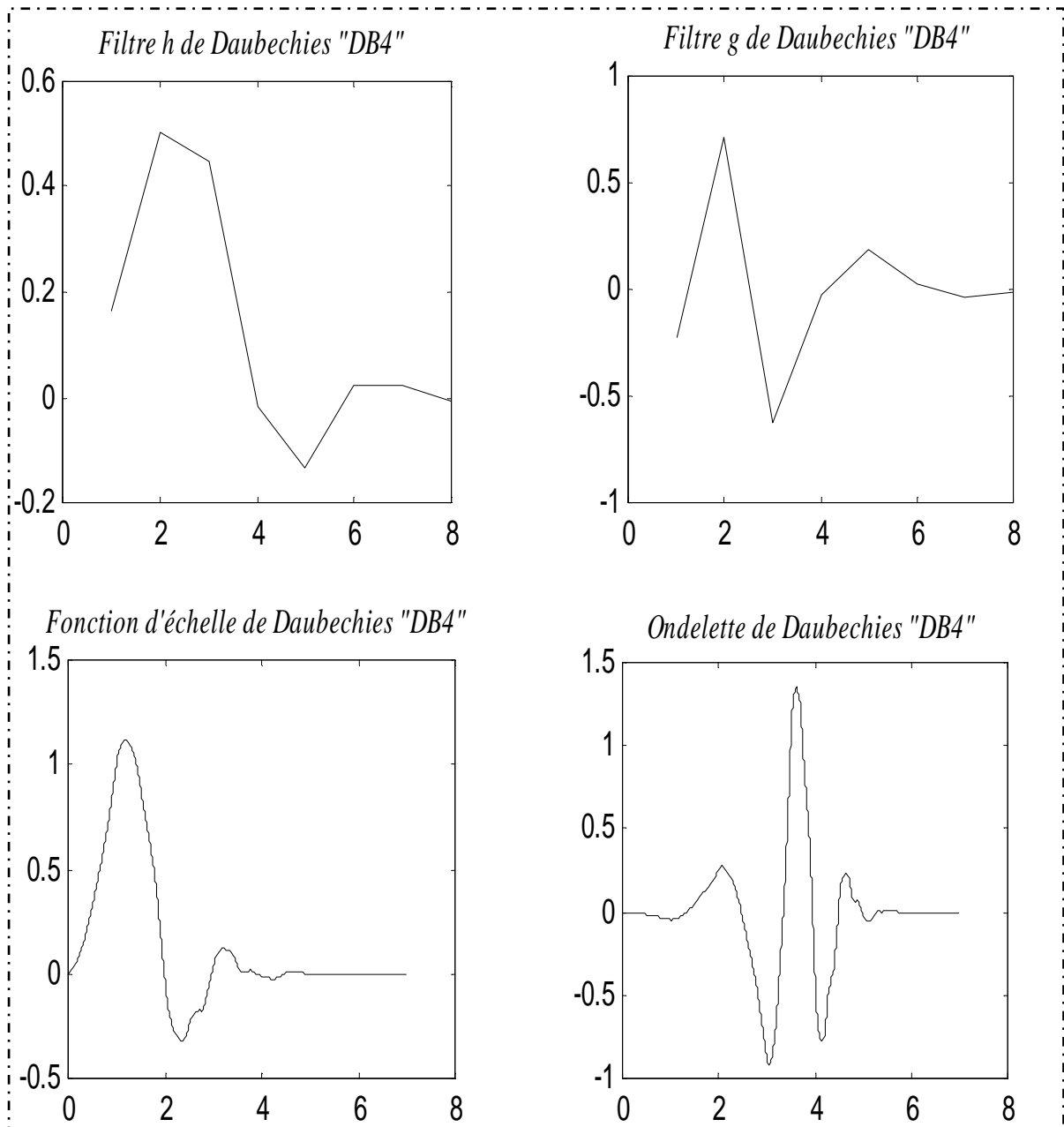


Fig. 14 : Filtres h, g, fonction d'échelle et l'ondelette mère de *Daubechies* pour $N = 4$

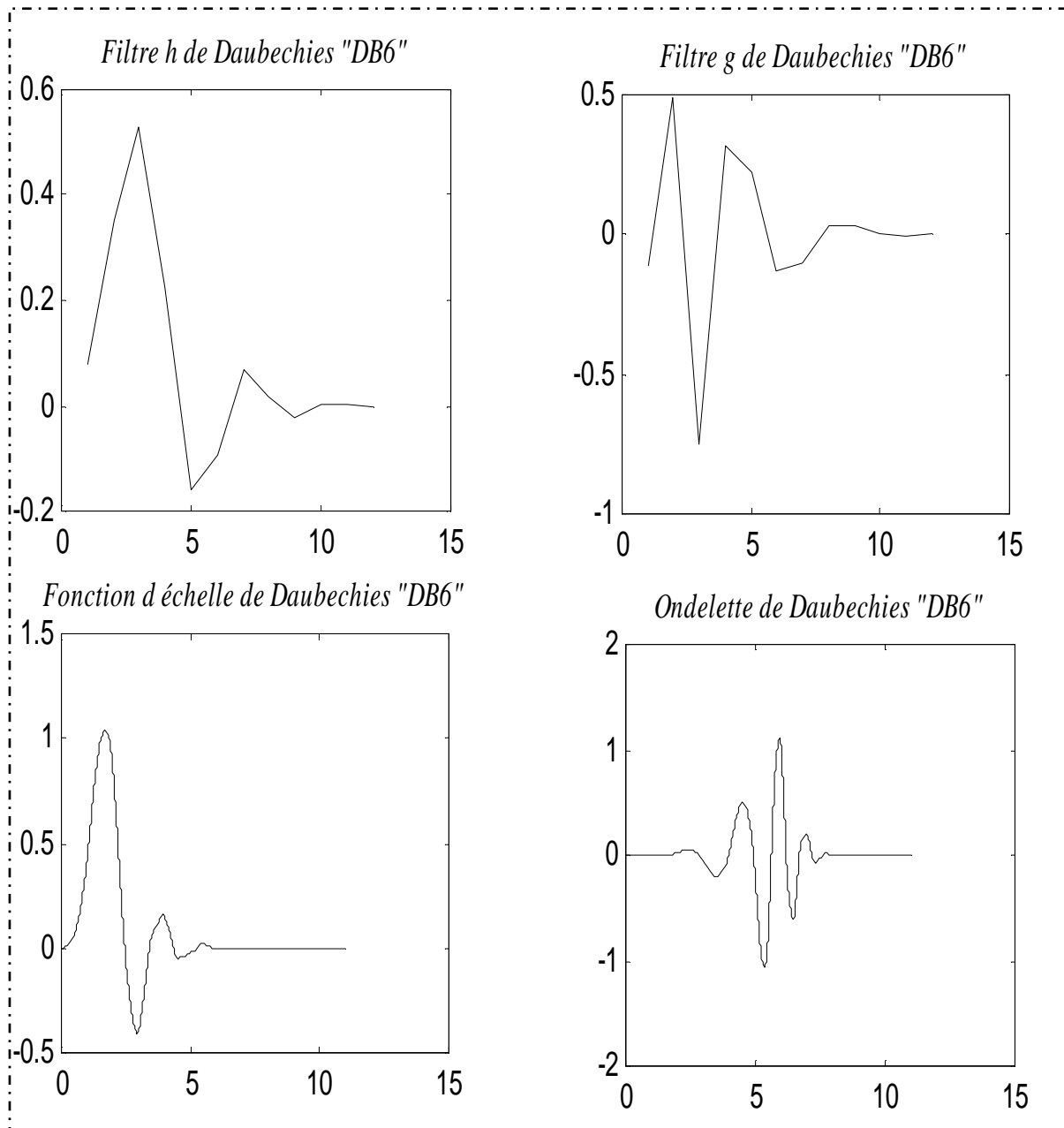


Fig. 15 : Filtres h, g, fonction d'échelle et l'ondelette mère de *Daubechies* pour $N = 6$

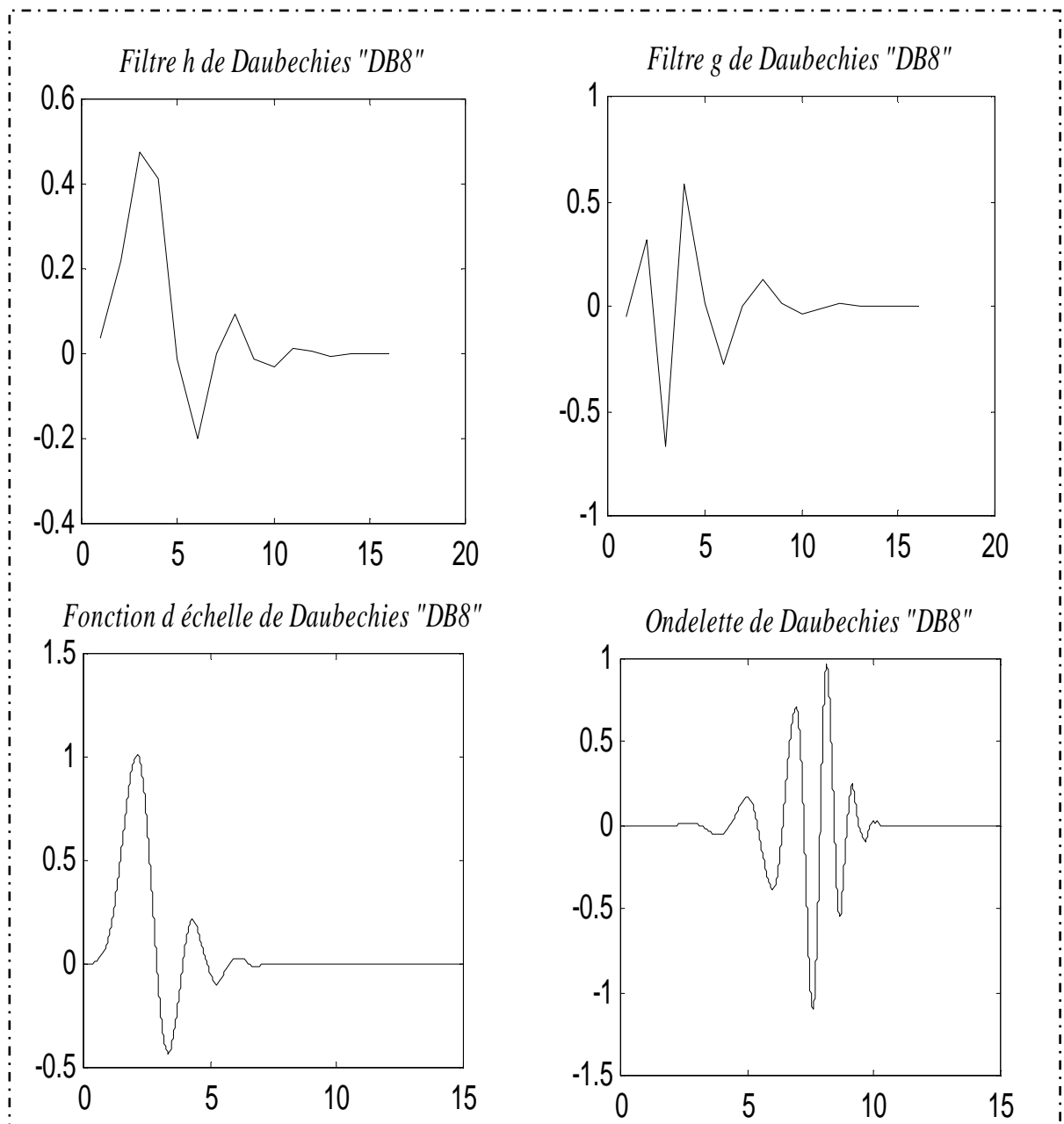


Fig.16 : Filtres h, g, fonction d'échelle et l'ondelette mère de *Daubechies* pour $N = 8$

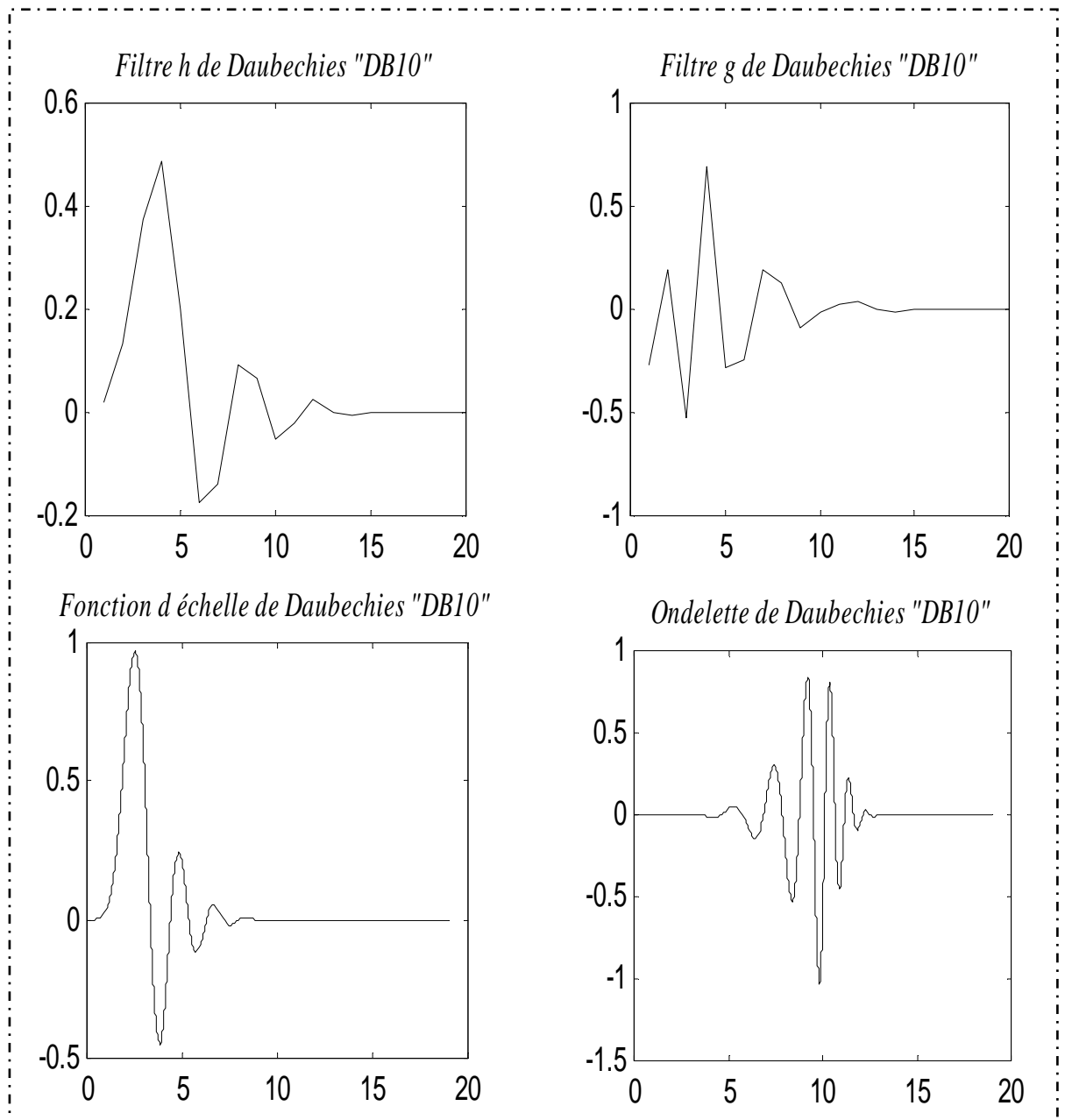


Fig.17 : Filtres h, g, fonction d'échelle et l'ondelette mère de *Daubechies* pour $N = 10$

Interprétation graphique : D'après l'ensemble des figures (13 - 17) qui ont été tracées, on peut tirer la constatation suivante :

Les ondelettes mères construites à partir des filtres h et g (voir tableau 1 et 2) ont la tendance d'être régulières de plus en plus.

Donc, pour avoir une ondelette régulière, il est intéressant d'augmenter le nombre (N) de moment nuls.

5) La transformée en ondelette

La transformée en ondelette est la projection d'un signal $x(t)$ quelconque sur une famille d'ondelettes $\psi_{a,b}(t)$. [11]

L'idée de base de cette transformée pour la plus part des auteurs est d'obtenir une bonne localisation temporelle des hautes fréquences en prenant une fenêtre d'observation dont la largeur n'est plus constante.

5.1) La transformée en ondelette continue

Grossman et Morlet ont montré que si $\psi(t)$ est à valeurs réelles, la collection $\psi_{a,b}(t)$ peut être utilisée comme s'il s'agissait d'une base orthonormée.

Cela signifie que tout signal d'énergie finie peut s'écrire comme une combinaison linéaire d'ondelettes $\psi_{a,b}(t)$ et que les coefficients de cette combinaison sont les produits scalaires [16]:

$$s \rightarrow (C(a,b) = \langle s, \psi_{a,b} \rangle)_{a>0, b \in \mathbb{R}}$$

Les coefficients d'ondelettes $C(a, b)$ sont donc les produits scalaires dans L^2 du signal avec les fonctions d'analyse (ou ondelette d'analyse) $\psi_{a,b}(t)$.

$$C(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (\text{II.28})$$

Ces coefficients mesurent, en un certain sens, les fluctuations du signal $s(t)$ autour du point b à l'échelle fournie par a .

La transformée en ondelette est un opérateur linéaire, invariant par translation et par dilatation.

$C(a, b - t_0)$ est la transformée de $s(t - t_0)$.

2- $C(a/\lambda, b/\lambda)$ est la transformée de $1/\lambda s(t/\lambda)$.

On peut écrire l'équation (II.28) de la manière suivante :

$$C(a, b) = s(t) * \frac{1}{\sqrt{a}} \overline{\psi} \left(-\frac{t}{a} \right) \quad (\text{II.29})$$

Puisque l'ondelette $\psi(t)$ est valeur réelle on a :

$$\overline{\psi}(-t) = \psi(t)$$

Alors :

$$C(a, b) = s(t) * \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{t}{a} \right) \quad (\text{II.30})$$

On conclue que la transformée en ondelette peut être obtenue par filtrage du signal $s(t)$, en utilisant une série de filtre de réponse impulsionnelle

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{t}{a} \right).$$

Une autre manière d'écrire la transformée en ondelette

La transformée en ondelette est le produit scalaire du signal $s(t)$ avec les fonctions d'analyses (ondelettes).

$$C(a, b) = \langle s, \psi_{a, b} \rangle \text{ avec } a > 0 \text{ et } b \in \mathfrak{R}$$

En utilisant l'identité de Parseval

$$\langle s, \Psi_{a,b} \rangle = \langle S, \hat{\Psi}_{a,b} \rangle$$

Où $S(f)$: est la transformée de Fourier du signal $s(t)$.

Et $\hat{\Psi}(f)$: est la transformée de Fourier de l'ondelette $\Psi(t)$.

Avec

$$\hat{\Psi}_{a,b}(f) = \sqrt{a} \cdot \hat{\Psi}(af) \cdot e^{-i2\pi fb}$$

Donc la transformée en ondelette peut être écrite :

$$C(a,b) = \langle S, \hat{\Psi}_{a,b} \rangle = \sqrt{a} \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot \hat{\Psi}(af) \cdot e^{-i2\pi fb} df \quad (\text{II.31})$$

5.1.1) Les propriétés de la transformée en ondelette continue

Soit une ondelette mère vérifiant les conditions suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(t)|^2 dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\Psi}(f)|^2}{f} df = C < +\infty$$

a) Conservation de l'énergie

Il n'y a pas de perte d'énergie (i-e) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{K} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |C(a,b)|^2 \frac{dad b}{a^2} \quad (\text{II.32})$$

Preuve

$$\text{Soit : } \Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$$\text{Sa transformée de Fourier est : } \Psi_{a,b}(f) = \sqrt{a} \cdot e^{-i2\pi fb} \cdot \Psi(af)$$

Les coefficients d'ondelettes s'écrivent :

$$C(a,b) = \sqrt{a} \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot \bar{\Psi}(af) \cdot e^{i2\pi fb} dt$$

On trouve sous l'intégrale une transformée de Fourier inverse :

$$C(a,b) = \sqrt{a} \cdot TF^{-1}[S(f) \cdot \bar{\Psi}(af)](b)$$

$$\text{On va calcul : } J = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |C(a,b)|^2 db \right) \frac{da}{a^2}$$

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |TF^{-1}[S(f) \cdot \bar{\Psi}(ab)](\tau)|^2 db \right) \frac{da}{|a|}$$

On applique la relation de Parseval, on obtient :

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 \cdot |\Psi(ab)|^2 db \right) \frac{da}{|a|}$$

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(ab)|^2}{|a|} db \right) df$$

On prend :
$$K = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\psi(ab)|^2}{|a|} db \right)$$

Finalement :

$$J = K \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df = K \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt \tag{II.33}$$

L'analyse par ondelette assure la conservation de l'énergie.

b) La reconstruction du signal

La transformée en ondelette admet un inverse :

$$s(t) = C^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C(a,b) \cdot \psi_{a,b}(t) \frac{dad b}{a^2} \tag{II.34}$$

Preuve :

Soit I(a) L'intégral en f de la transformée en ondelette continue :

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(a,b) \cdot \psi_{a,b}(t) db$$

On peut l'écrire d'une autre manière :

$$I(a) = \sqrt{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} TF^{-1}[S(f) \cdot \bar{\psi}(af)](b) \cdot \psi_{a,b}(t) db$$

On a

$$TF^{-1}[\psi_{a,b}(t)](f) = \sqrt{|a|} \cdot \bar{\psi}(af) \cdot e^{i2\pi ft}$$

d'où :

$$I(a) = \sqrt{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot \bar{\psi}(af) \cdot TF^{-1}[\psi_{a,b}(t)](f) \cdot df$$

$$I(a) = |a| \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot |\widehat{\Psi}(af)|^2 \cdot e^{i2\pi ft} df$$

Dans le cas ou $s(t)$ (est continu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(a) \cdot \frac{da}{a^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot |\widehat{\Psi}(af)|^2 \cdot e^{i2\pi ft} df \frac{da}{|a|}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(a) \cdot \frac{da}{a^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot e^{i2\pi ft} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(af)|^2}{|a|} \cdot da \right) df$$

On pose : $C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(af)|^2}{|a|} \cdot da$

Il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(a) \cdot \frac{da}{a^2} = C \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot e^{i2\pi ft} df = C \cdot s(t)$$

Finalement :

$$s(t) = C^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} I(a) \cdot \frac{da}{a^2} = C^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C(a,b) \cdot \Psi_{a,b}(t) \frac{dadb}{a^2}$$

5.2) La transformée en ondelette discrète

Le traitement numérique des données nécessite la discrétisation de l'analyse en ondelette.

Pour les applications d'analyse du signal, il s'agit de remplacer une représentation continue (a, b) par une représentation discrète, on choisit de limiter les valeurs des paramètres a et b de la relation (II.35) à un réseau discret.

$$\Psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (\text{II.35})$$

Dans ce cas on fixe un pas de dilatation $a_0 > 1$ et un $b_0 > 0$. Les paramètres a et b deviennent :

$$a = a_0^m \quad \text{et} \quad b = nb_0 a_0^m \quad \text{avec} \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

Le paramètre b dépend du taux de dilatation

Où

a_0 : Paramètre de dilatation

b_0 : Paramètre de translation

Alors la relation (II.35) devient :

$$\Psi_{m,n}(t) = a_0^{-m/2} \cdot \Psi(a_0^{-m} t - nb_0) \quad (\text{II.36})$$

Dans l'espace *temps-fréquence*, le réseau discret est donné par :

$$(t, f) = (n \cdot b_0 \cdot a_0^m, a_0^{-m} f) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t |\Psi_{m,n}(t)|^2 dt, \int_{-\infty}^{+\infty} f |\hat{\Psi}_{m,n}(f)|^2 dt \right) \quad (\text{II.37})$$

Pour la majorité des applications, on choisit $a_0 = 2$, ce qui correspond à une échelle logarithmique de fréquence. Alors le pas de translation $b = nb_0 2^m$, cela correspond à un réseau dyadique défini par :

$$(t, f) = (n \cdot b_0 \cdot 2^m, 2^m \cdot f_0) \quad (\text{II.38})$$

f_0 : est la fréquence de l'ondelette mère.

La transformée en ondelette discrète associée aux ondelettes de la relation (II.36), associé à un signal « s » une séquence indexée dans Z^2 définie par :

$$C_{m,n} = \langle \Psi_{m,n}, s \rangle = a_0^{-\frac{m}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \bar{\Psi}(a_0^{-m}t - nb_0) dt \quad (II.39)$$

5.2.1) Frame d'ondelette

Frame d'ondelette c'est une autre manière de calculer la transformée en ondelette discrète. Cette notion a été utilisée par P. Flandrin par analogie avec les bases orthonormales [10].

On dit que la famille d'ondelette de la relation (II.36) constitue une frame s'il existe deux constantes A et B strictement positives telles que :

$$\forall s \in L^2(\mathfrak{R}) \quad \exists A > 0 \quad B < \infty \quad \text{Alors}$$

$$A \|s\|^2 \leq \sum |\langle \Psi_{m,n}, s \rangle|^2 \leq B \|s\|^2 \quad (II.40)$$

A et B sont les bornes du frame.

Dans ce cas on peut construire des algorithmes numériquement stables pour reconstruire le signal à partir des coefficients d'ondelette, en particulier :

$$s = \frac{2}{A+B} \sum_{m,n \in Z} \Psi_{m,n} \langle \Psi_{m,n}, s \rangle + R \quad (II.41)$$

Avec

$$\|R\| = O\left(\frac{B}{A} - 1\right) \|s\| \quad (\text{Terme d'erreur}) \quad (II.42)$$

Le terme d'erreur peut être omis, si $\frac{B}{A} \approx 1$

- Si $A = B$, la relation (II.40) devient

$$A \|s\|^2 = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle \psi_{m,n}, s \rangle|^2 \quad (\text{II.43})$$

La frame est dite serrée

Si $A = B = 1$, la frame devient une base orthonormale.

Les paramètres a_0 et b_0 sont reliés aux bornes de la frame A et B par la relation suivante :

$$A \leq \frac{2\pi}{b_0 \log a_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(f)|^2}{f} df \leq B \quad (\text{II.44})$$

Si la frame est serrée :

$$A = \frac{2\pi}{b_0 \log a_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(f)|^2}{f} df \quad (\text{II.45})$$

Si l'ondelette est à support fréquentiel strictement positif

$$A \leq \frac{2\pi}{b_0 \log a_0} \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(f)|^2}{f} df \leq B \quad (\text{II.46})$$

La borne de la frame d'ondelette « A » calculée pour $a_0 = 2$ est plus petite que la borne supérieure « B », ceci conduit à une valeur de $\frac{B}{A} > 1$.

Ce phénomène est évité par l'introduction de plusieurs fonctions d'ondelettes notées ψ^j qui sont des versions dilatées d'une seule ondelette :

$$\psi^j(t) = 2^{-j/N} \psi\left(2^{-j/N} t\right), \quad j = 0, \dots, (N-1) \quad (\text{II.47})$$

Où N représente le nombre de voie par octave.

Les paramètres a_0 et b_0 sont reliés par la relation (II.44) :

$$A \leq \frac{2\pi}{b_0 \log a_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(f)|^2}{f} df \leq B$$

Une estimation des bornes A et B de la frame et leur rapport sont calculés par *Daubechies* [12], pour deux ondelettes «l'ondelette chapeau mexicain et la 8^{ème} dérivée de la gaussienne » (voir tableau 3 et 4), et cela pour $a_0 = 2$ et pour des valeurs de b_0 et des nombres de voies par octave (N).

N = 1									
b_0	A	B	B/A						
0.25	13.091	14.183	1.083						
0.50	6.546	7.092	1.083						
0.75	4.364	4.728	1.083						
1.00	3.223	3.596	1.116						
1.25	2.001	3.454	1.726						
1.50	0.325	4.221	12.986						

N = 2				N = 3			N = 4		
b_0	A	B	B/A	A	B	B/A	A	B	B/A
0.25	27.273	27.278	1.0002	40.914	40.914	1.0000	54.552	54.552	1.0000
0.50	13.637	13.639	1.0002	20.457	20.457	1.0000	27.276	27.276	1.0000
0.75	9.091	9.093	1.0002	13.638	13.638	1.0000	18.184	18.184	1.0000
1.00	6.768	6.870	1.015	10.178	10.279	1.010	13.586	13.690	1.0070
1.25	4.834	6.077	1.257	7.530	8.835	1.173	10.205	11.616	1.1380
1.50	2.609	6.483	2.485	4.629	9.009	1.947	6.594	11.590	1.7580
1.75	0.517	7.276	14.061	1.747	9.942	5.691	2.928	12.659	4.3240

Tableau 3 : Estimation des bornes de la frame A et B et le rapport B/A pour quelques valeurs de b_0 et N basées sur l'ondelette chapeau mexicain.

N = 2									
b_0	A	B	B/A	A	B	B/A	A	B	B/A
0.125	25.515	26.569	1.041	39.054	39.073	1.0005	52.085	52.085	1.0000
0.250	12.758	13.285	1.041	19.527	19.536	1.0005	26.042	26.042	1.0000
0.375	8.505	8.856	1.041	13.018	13.024	1.0005	17.362	17.362	1.0000
0.500	6.379	6.642	1.041	9.764	9.768	1.0005	13.022	13.022	1.0000
0.625	5.101	5.316	1.042	7.808	7.817	1.0010	10.414	10.420	1.0005
0.750	3.995	4.686	1.173	6.251	6.770	1.0830	8.420	8.941	1.0620
0.875	1.669	5.772	3.459	3.563	7.598	2.1320	5.313	9.568	1.8010
1.000				0.163	9.603	58.929	1.127	11.894	10.550

Tableau 4 : Estimation des bornes de la frame A et B et le rapport B/A pour quelques valeurs de b_0 et N basées sur l'ondelette définie comme $8^{ème}$ dérivée de la gaussienne.

6) Le scalogramme

Le scalogramme (spectrogramme d'ondelette) est défini comme le carré du module de la transformée en ondelette. Il fournit une distribution de l'énergie dans le plan *temps-échelle*.

Contrairement au spectrogramme l'énergie est distribuée avec des résolutions différentes. [17].

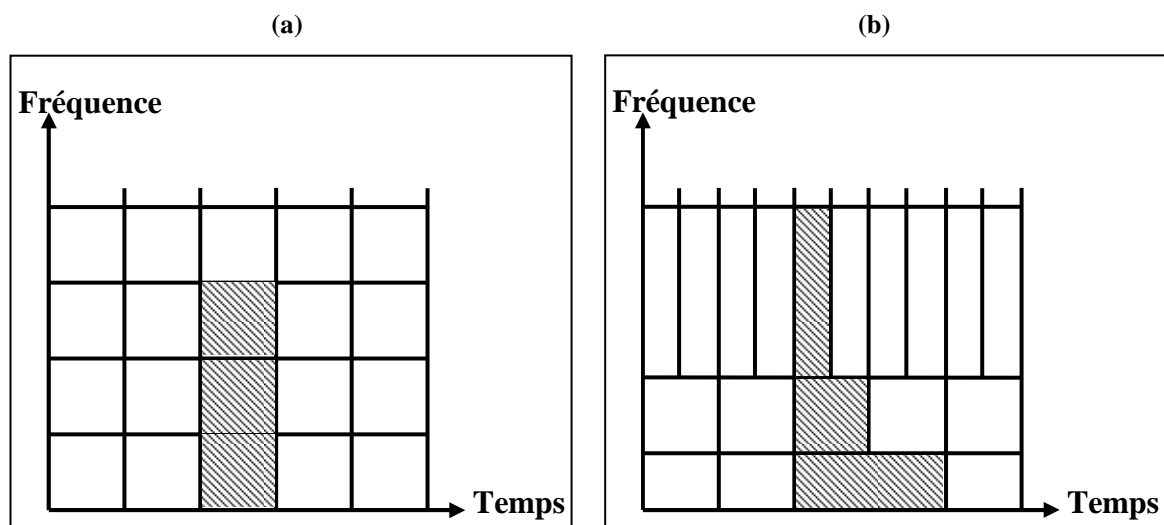


Fig. 18 : Résolution temps-fréquence a) TFCT et b) Transformée en ondelette

7) La relation entre le traitement du signal et les coefficients de la transformée en ondelette

- Si le signal à traiter est très régulier c'est-à-dire pratiquement constant, le produit de $x(t)$ et $\psi_{j,k}(t)$ est égal à $\lambda \cdot \psi_{j,k}(t)$, l'intégral dans ce cas est nul car l'ondelette est de valeur moyenne nulle (la relation II.4). [11]
- Si les fréquences à détecter sont très grandes, l'ondelette dans ce cas est courte durée, alors le nombre de points à calculer est très élevé, c'est pour cela qu'on utilise généralement la relation (II. 31) pour diminuer le temps de calcul.

8) Les algorithmes de décomposition-recomposition

8.1) Algorithme dans le système de Haar

La fonction échelle et la fonction ondelette sont données pour j et $k \in \mathbb{N}$ par les équations suivantes :

$$\Psi_{j,k}(t) = \begin{cases} 2^{-\frac{j}{2}} & 2^j(k-1) \leq t \leq 2^j\left(k - \frac{1}{2}\right) \\ -2^{-\frac{j}{2}} & 2^j\left(k - \frac{1}{2}\right) \leq t \leq 2^j k \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{II-48})$$

$$\Phi_{j,k}(t) = \begin{cases} |I_{j,k}|^{-\frac{1}{2}} & \text{si } t \in I_{j,k} \\ 0 & \text{Ailleurs} \end{cases} \quad (\text{II-49})$$

Avec $I_{j,k} = [2^j(k-1) , 2^j k]$

Les coefficients de Haar d_i et A_i d'un signal $x(t)$ sont définies par :

$$d_i = \int_0^1 x(t) \cdot \Psi(t) dt \quad (\text{II-50})$$

$$A_i = \int_0^1 x(t) \cdot \Phi(t) dt \quad (\text{II-51})$$

51)

Soit $d_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_{i'} - A_{i''})$ (II-52)

et $A_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_{i'} + A_{i''})$ (II-53)

Où I' et I'' sont les demi-intervalles de I .

Pour obtenir une méthode de calcul des coefficients de Haar d'un signal $x(t)$, on procède comme suit :

Supposons que le nombre d'échantillon : $N = 2^n$

$$A_k^0 = \int_{2^{-n}(k-1)}^{2^{-n}k} x(t)dt \tag{II-54}$$

Alors les coefficients d'approximation sont donnés par :

$$A_k^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_{2k-1}^0 + A_{2k}^0) \tag{II-55}$$

Et les coefficients de détail par :

$$d_k^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_{2k-1}^0 - A_{2k}^0) \tag{II-56}$$

Cette procédure est répétée afin d'obtenir les coefficients de Haar

$$\left. \begin{aligned} A_k^{j+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (A_{2k-1}^j + A_{2k}^j) \\ d_k^{j+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (A_{2k-1}^j - A_{2k}^j) \end{aligned} \right\} \text{Pour } j=0, \dots, (n-1) \text{ et } k=1, \dots, 2^{n-j} \tag{II-57}$$

L'algorithme est illustré par la forme pyramidale (fig.19).

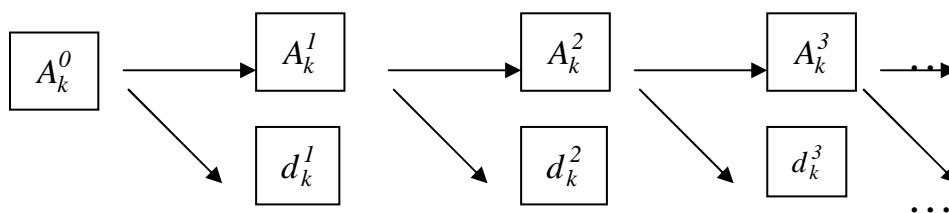


Fig. 19 : L'algorithme pyramidal

8.2) Algorithme de la transformée en ondelettes rapide

C'est un algorithme qui est basé sur les ondelettes orthogonales de I. Daubechies et l'analyse multirésolution.[18]

En remplaçant les bases de Haar dans les équations (II-55), (II-56) et (II-57) par les bases d'ondelettes de moments nuls et supposants que $\{A_k^0, k = 1, 2, \dots, n\}$ sont donnés.

Ces coefficients sont composés des approximations et des détails $\{A^j, d^j\}$ on aura :

$$\left. \begin{aligned} A_k^j &= \sum_{n=1}^{2M} h_n \cdot A_{n+2k-2}^{j-1} \\ d_k^j &= \sum_{n=1}^{2M} g_n \cdot A_{n+2k-2}^{j-1} \end{aligned} \right\} \quad \text{(II-58)}$$

Où A_k^j, d_k^j sont des séquences périodiques et de période $2^{n-j}, k=1, 2, \dots, 2^{n-j}$ et $j=1, 2, \dots, n$

Dans le cas de la reconstruction a partir d'un seul coefficient $\{A_j^n\}$, on peut calculer les $\{A_l^0\}$ en appliquant les équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} A_{2n}^{j-1} &= \sum_{k=1}^M h_{2k} \cdot A_{n-k+1}^j + \sum_{k=1}^M g_{2k} \cdot d_{n-k+1}^j \\ A_{2n-1}^{j-1} &= \sum_{k=1}^M h_{2k-1} \cdot A_{n-k+1}^j + \sum_{k=1}^M g_{2k-1} \cdot d_{n-k+1}^j \end{aligned} \right\} \text{pour } j = n, n-1, \dots, 0 \quad \text{(II-59)}$$

Donc le signal x(t) s'écrit de la manière suivante :

$$x(t) = \sum_{k=1}^{2^{n-j}} 2^{\frac{n-j}{2}} \cdot A_k^j \cdot \phi(2^{n-j}t - (k-1)) + \sum_{k=1}^{2^{n-j}} 2^{\frac{n-j}{2}} \cdot d_k^j \cdot \psi(2^{n-j}t - (k-1)) \quad (\text{II-60})$$

Exemple :

Soit un vecteur de $N=2^3$ échantillons.

A partir ce vecteur, on peut créer deux vecteurs de 2^2 échantillons, l'un est obtenu en filtrant avec le filtre h et l'autre avec le filtre g.

On voit que le dernier niveau contient un seul élément (Fig.20).

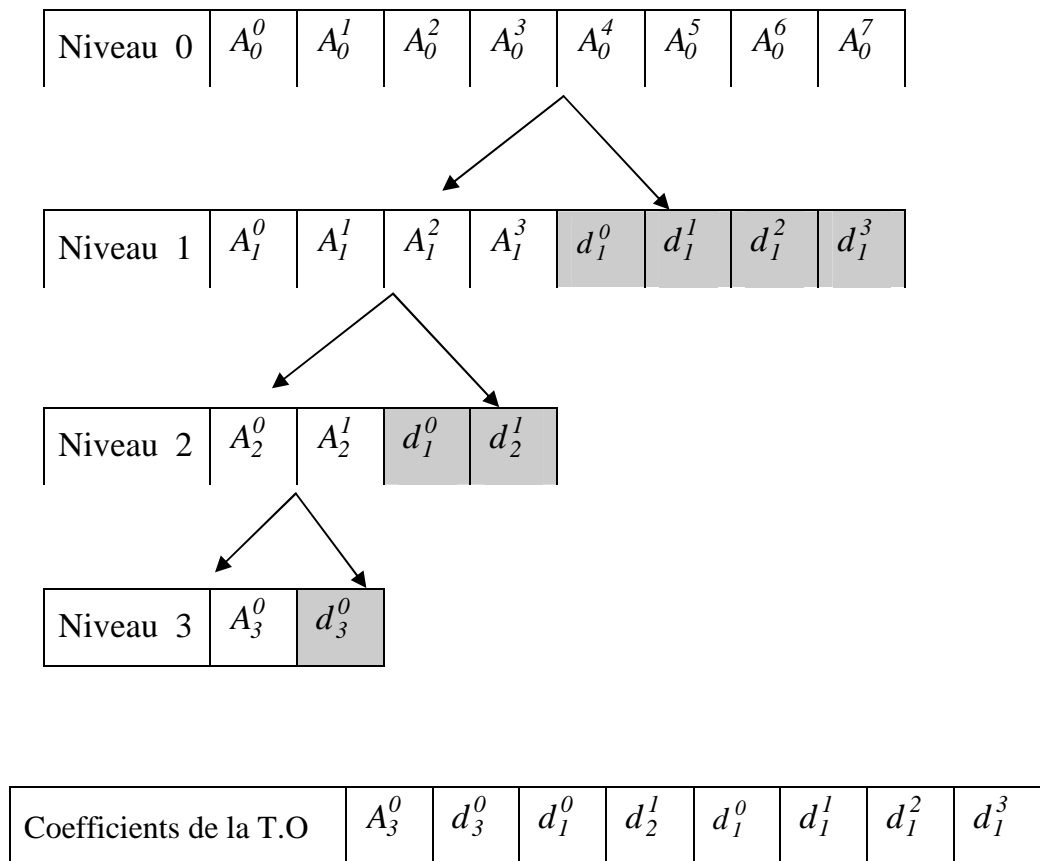


Fig. 20 : La transformée en ondelette rapide sur un vecteur de 2^3 échantillons

CHAPITRE III

Etude comparative

Dans ce chapitre, nous allons faire une comparaison entre la transformée de *Fourier* à court terme et la transformée en ondelettes, en se basant sur des exemples numériques.

En premier lieu, on doit fixe les différents paramètres (tel que la largeur de la fenêtre pour la transformée de *Fourier* à court terme) et (le nombre de voies par octave, la fréquence de l'ondelette, le nombre de point du signal et la fréquence d'échantillonnage du signal et de l'ondelette pour la transformée en ondelettes).

1) Le rôle de la largeur de la fenêtre dans la T.F.C.T

1.1) Spectrogramme

L'utilisation du spectrogramme avec des fenêtres différentes nous donne, soit une bonne résolution temporelle ou une bonne résolution fréquentielle.

Pour avoir une bonne résolution temporelle, on doit utiliser une fenêtre étroite, mais elle entraîne une mauvaise résolution fréquentielle.

Et pour avoir une bonne résolution fréquentielle, on doit utiliser une fenêtre beaucoup plus large, mais elle entraîne une mauvaise résolution temporelle

Afin de bien voir cela (figure 21), on a utilisé un signal $s(t)$ définie comme la somme de trois sinusoïdes décalées dans le temps :

$$s(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t_1) + A_2 \sin(2\pi f_2 t_2) + A_3 \sin(2\pi f_3 t_3) \quad (\text{III.1})$$

Avec : $A_1 = A_2 = A_3 = 10$ et $f_1 = 100$ Hz, $f_2 = 200$ Hz, $f_3 = 300$ Hz

Et $t_1 \in [0, 0.1]$, $t_2 \in]0.1, 0.2]$, $t_3 \in]0.2, 0.4]$

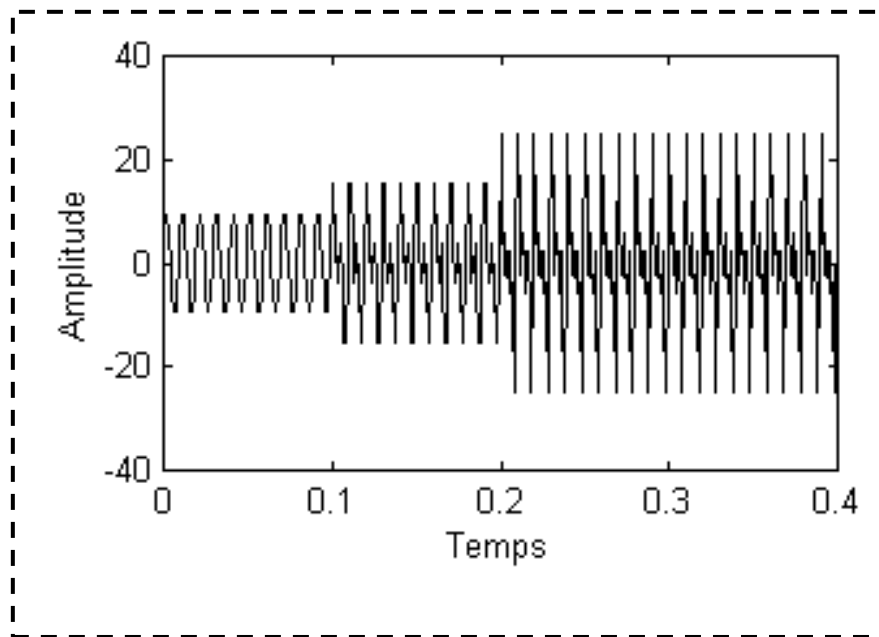


Fig. 21 : Signal temporel

La figure 22.a, montre une localisation temporelle lorsque la fenêtre est étroite et la figure 22.c, montre une localisation fréquentielle lorsque la fenêtre est large.

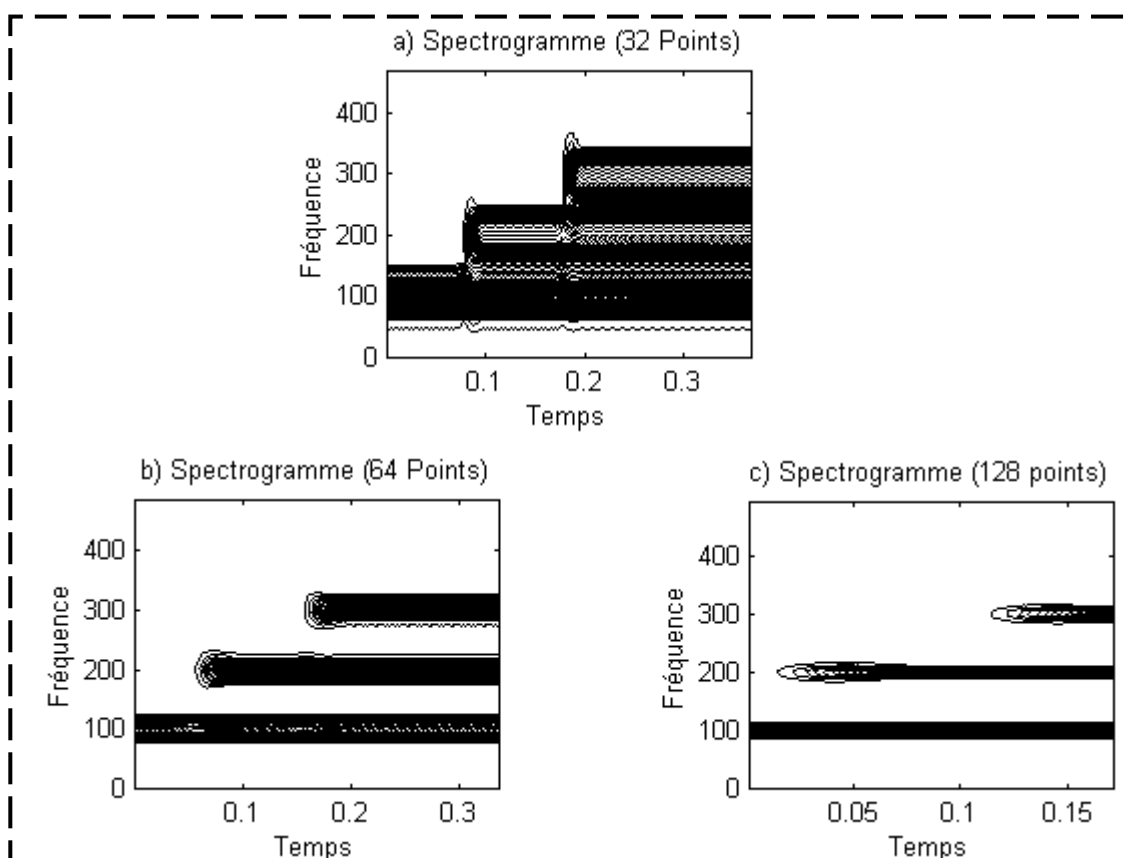


Fig. 22 : Spectrogramme du signal $s(t)$

2) Choix des paramètres de la transformée en ondelette

L'exploitation de la transformée en ondelette nécessite un bon choix de quelques paramètres, tel que le nombre de voies par octave, la fréquence de l'ondelette, le nombre de point (l'intervalle d'étude) et la fréquence d'échantillonnage du signal.

2.1) Nombre de voies par octave

Le nombre de voies par octave joue un rôle important dans l'analyse par ondelette. Afin de montrer cela on a utilisé le signal de la relation (III.1) avec les mêmes conditions.

L'ondelette utilisée pour le calcul du scalogramme est celle de *Morlet* pour un nombre de voies par octave égal à 5 et 15 (figure 23).

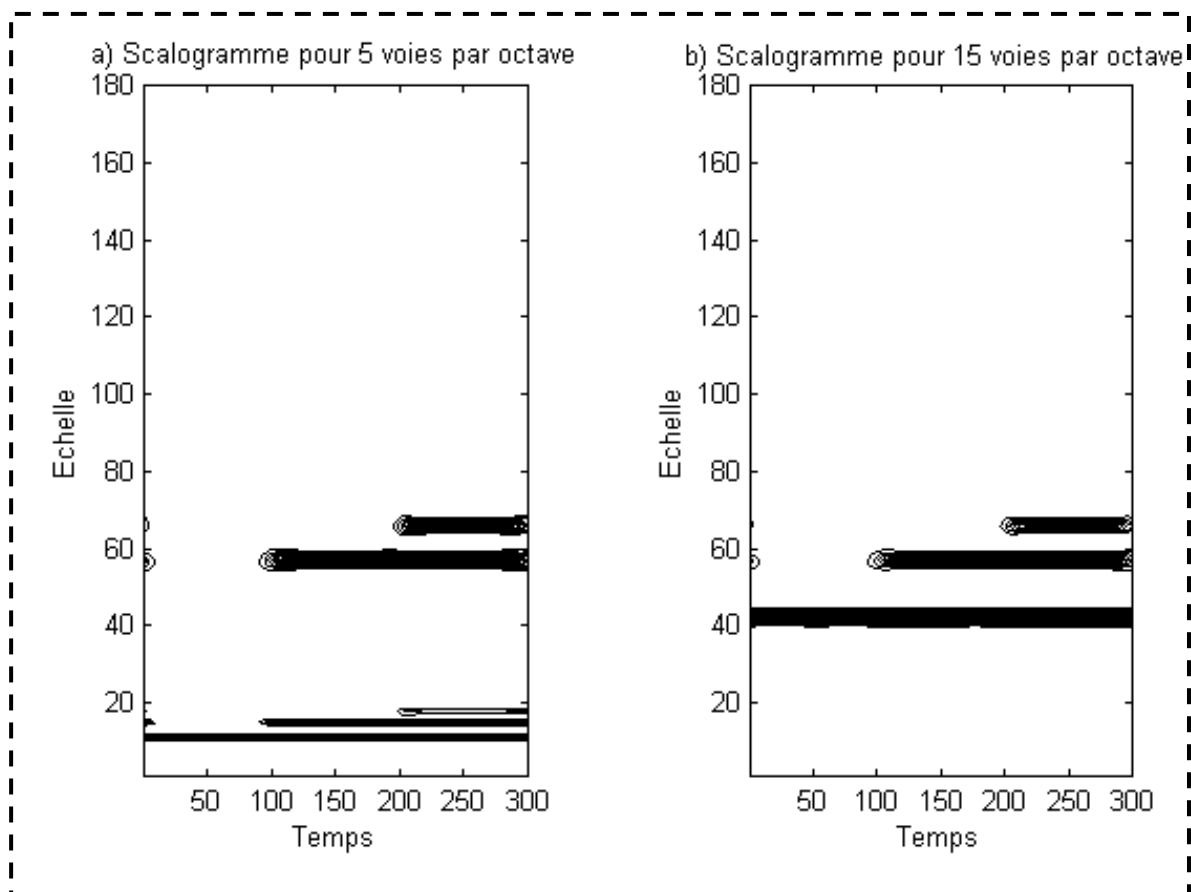


Fig. 23 : Scalogramme pour différentes voies par octaves

On remarque une bonne résolution fréquentielle et temporelle dans le cas où le nombre de voies augmente.

2.2) La fréquence de l'ondelette

Afin d'éviter quelque problème tel que le phénomène de recouvrement, la fréquence f_0 de l'ondelette de *Morlet* définie comme :

$$\psi(t) = \left(e^{-\frac{t^2}{2}} - \sqrt{2} e^{-\frac{2\pi f_0^2}{2} t^2} \right) e^{if_0 t}$$

doit satisfaire la condition suivante : $2\pi f_0 \geq 5.5$.

Pour cela, on va utiliser un signal :

$$s(t) = A \sin(2\pi f t)$$

Avec :- L'amplitude $A = 10$

La fréquence de base du signal $f = 50$ Hz

La fréquence d'échantillonnage $F_e = 1000$ Hz

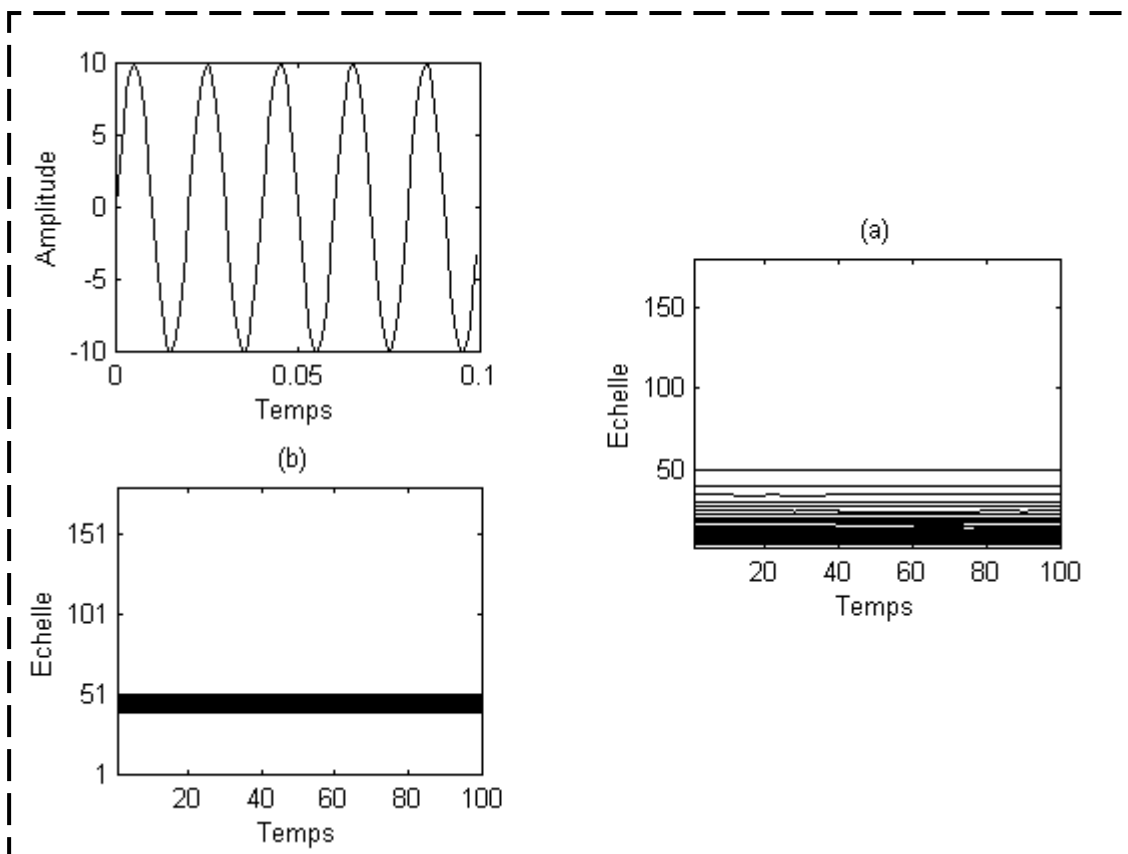


Fig. 24 : Scalogramme pour a) $2\pi f_0 < 5.5$, b) $2\pi f_0 = 5.5$

La figure 24.a),montre une mauvaise résolution fréquentielle dans le cas où $2\pi f_0 < 5.5$.

2.3) Le nombre de point

Pour décrire complètement un signal sans perte d'information, il faut l'étudier au moins sur une période T et le pas d'échantillonnage T_e doit être très petit.

Pour cela, on va utiliser un signal :

$$s(t) = A \sin(2\pi ft)$$

Avec : - L'amplitude $A = 10$

- La fréquence de base $f = 50$ Hz

- La fréquence d'échantillonnage $f_e = 1000$ Hz

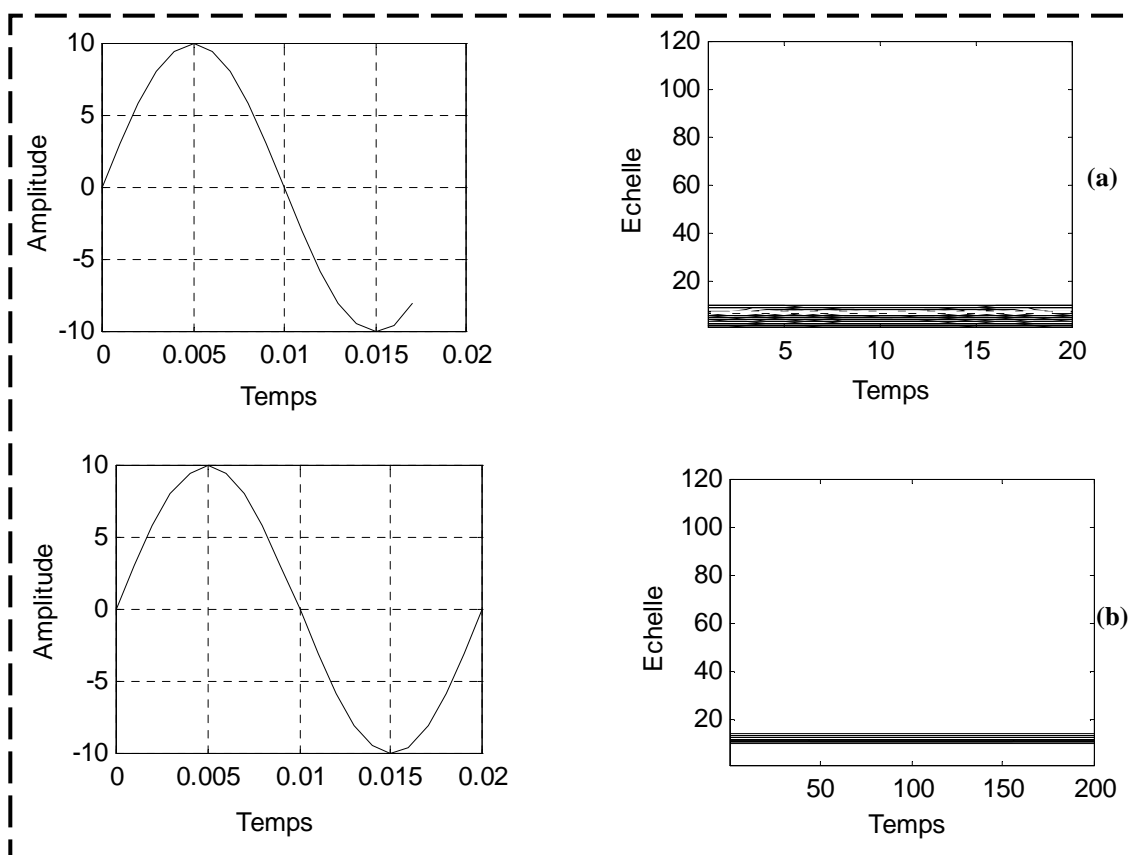


Fig.25 : Scalogramme du signal sinusoïdal a) Inférieur à une période b) Une période

La figure 25 montre l'effet du nombre de points sur les résultats de l'analyse. On remarque sur la figure 25.a, un mauvais résultat parce que l'étude n'était pas faite sur une période.

3) Comparaison entre spectrogramme et scalogramme

3.1) Signaux stationnaires

a) On utilise ici un signal sinusoïdal défini comme

suit :

$$s(t) = A_1 \cdot \sin(2\pi f_1 t) + A_2 \cdot \sin(2\pi f_2 t)$$

Avec : $A_1 = A_2 = 10$

$f_1 = 50 \text{ Hz}$ et $f_2 = 200 \text{ Hz}$

$F_e = 1000 \text{ Hz}$ et $N = 200$ points

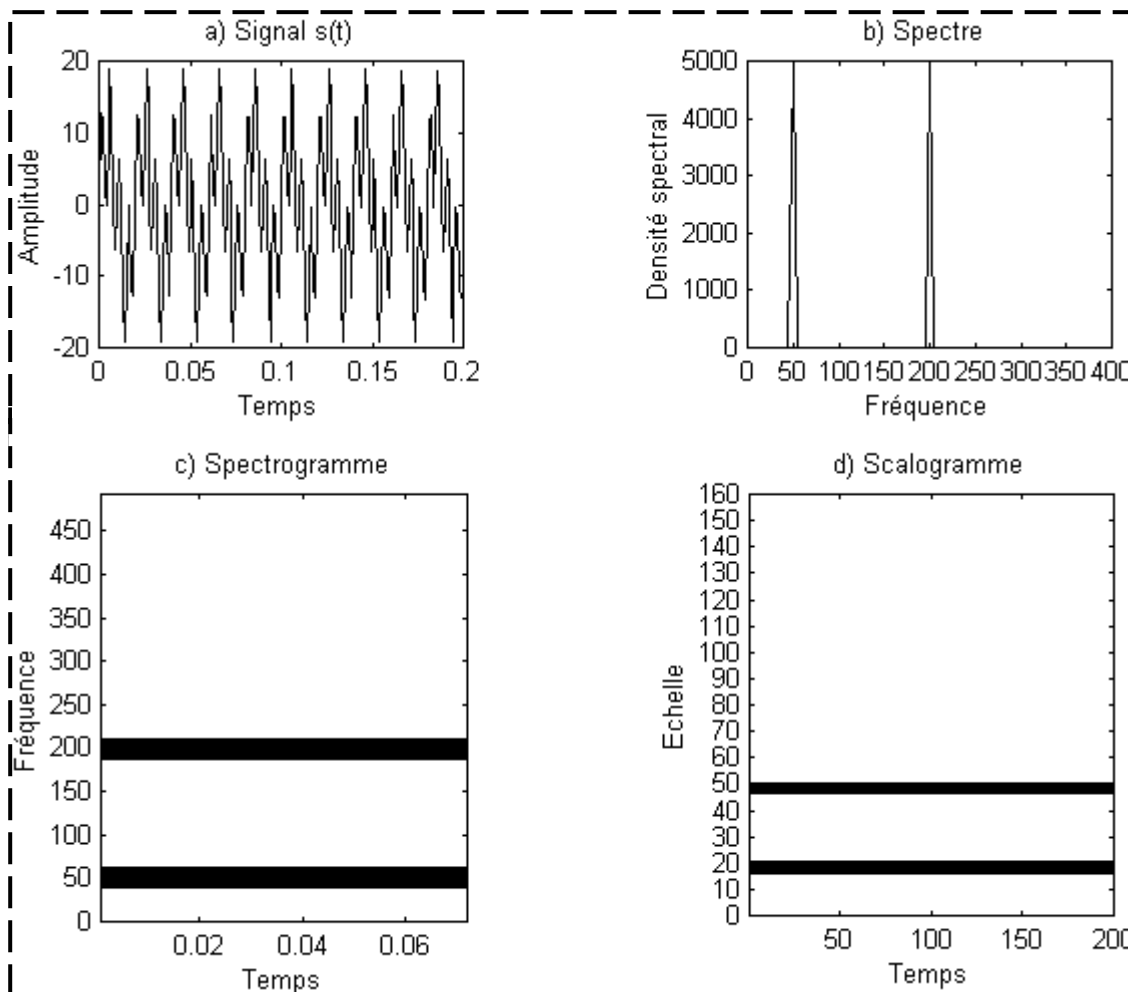


Fig.26 : La somme de deux sinusoïdes: a) temporel, b) spectre, c) spectrogramme et d) scalogramme

On remarque que sur la figure 26.c) et 26.d) l'existence de deux bandes parallèles à l'axe du temps. Elles sont localisées autour de 50 Hz et 200 Hz pour le spectrogramme et autour de l'échelle $a = 20$ et 50 pour le scalogramme.

Dans ce cas les deux méthodes se comportent normalement.

b) On utilise ici un signal sinusoïdal défini comme suit :

$$s(t) = A_1 \cdot \sin(2\pi f_1 t) + A_2 \cdot \sin(2\pi f_2 t) + A_3 \cdot \sin(2\pi f_3 t)$$

Avec :

$$f_1 = 80 \text{ Hz} , f_2 = 200 \text{ Hz} \text{ et } f_3 = 210 \text{ Hz}$$

$$F_e = 1000 \text{ Hz} \text{ et } N = 300 \text{ points}$$

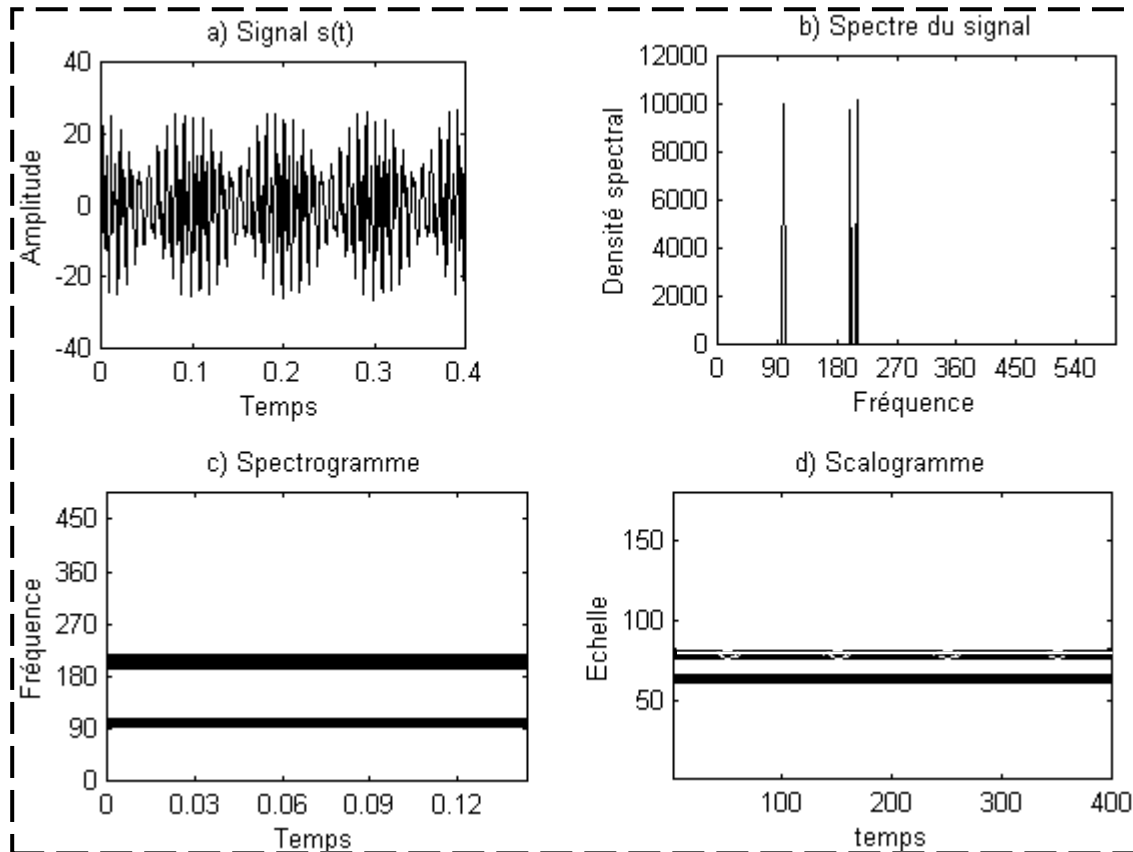


Fig. 27 : La somme de trois sinusoïdes a) représentation temporelle, b) Densité spectrale, c) Spectrogramme et d) Scalogramme

On a pris deux fréquences très proche, on remarque cela sur la figure 27.b), par contre sur la figure 27.c), au lieu d'avoir trois bandes parallèles à l'axe de temps on a que deux, mais sur la figure 27.d) on voit les trois fréquences.

Donc la transformée en ondelette donne une meilleure résolution fréquentielle que la Transformée de Fourier à Court Terme.

3.2) Signaux non-stationnaires

a) Soit le signal à étudier dont la fréquence est fonction du temps définie comme suit :

$$s(t) = A \sin(2\pi f_0 t^2)$$

La fréquence de ce signal est fonction du temps, mais la modulation n'apparaît pas dans le spectre (figure 28.b).

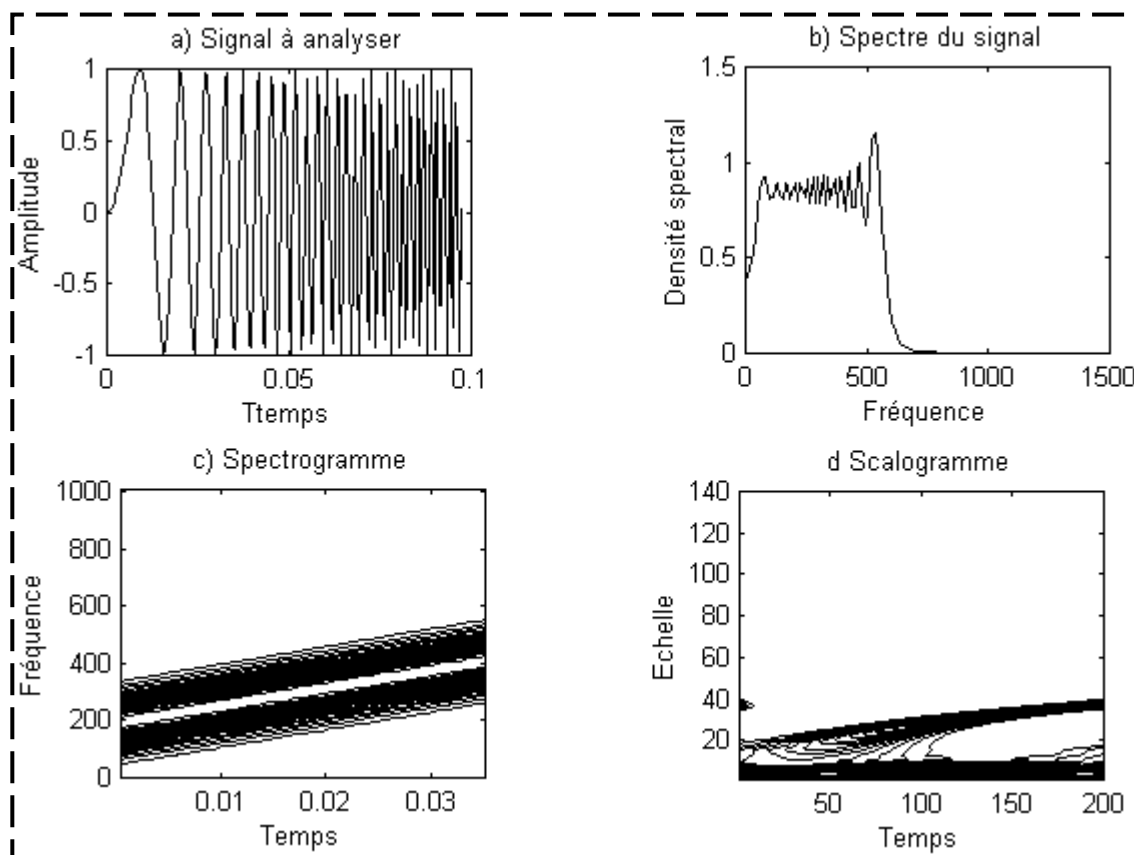


Fig. 28 : Signal non-stationnaire a) représentation temporelle, b) Densité spectrale, c) Spectrogramme et d) Scalogramme

La figure 28.c) et la figure 28.d) montrent d'une façon claire cette modulation. Dans le spectrogramme la modulation est linéaire par

contre pour le scalogramme, elle est hyperbolique car l'échelle est logarithmique.

3.3) Les signaux bruités

Pour exploiter les deux méthodes avec des signaux bruités, on a utilisé un signal composé de deux sinusoïdes auquel on a ajouté du bruit.

Si le rapport signal/bruit est très petit, le bruit devient très grand par contre si on fait tendre ce rapport à l'infinie le signal devient sans bruit.

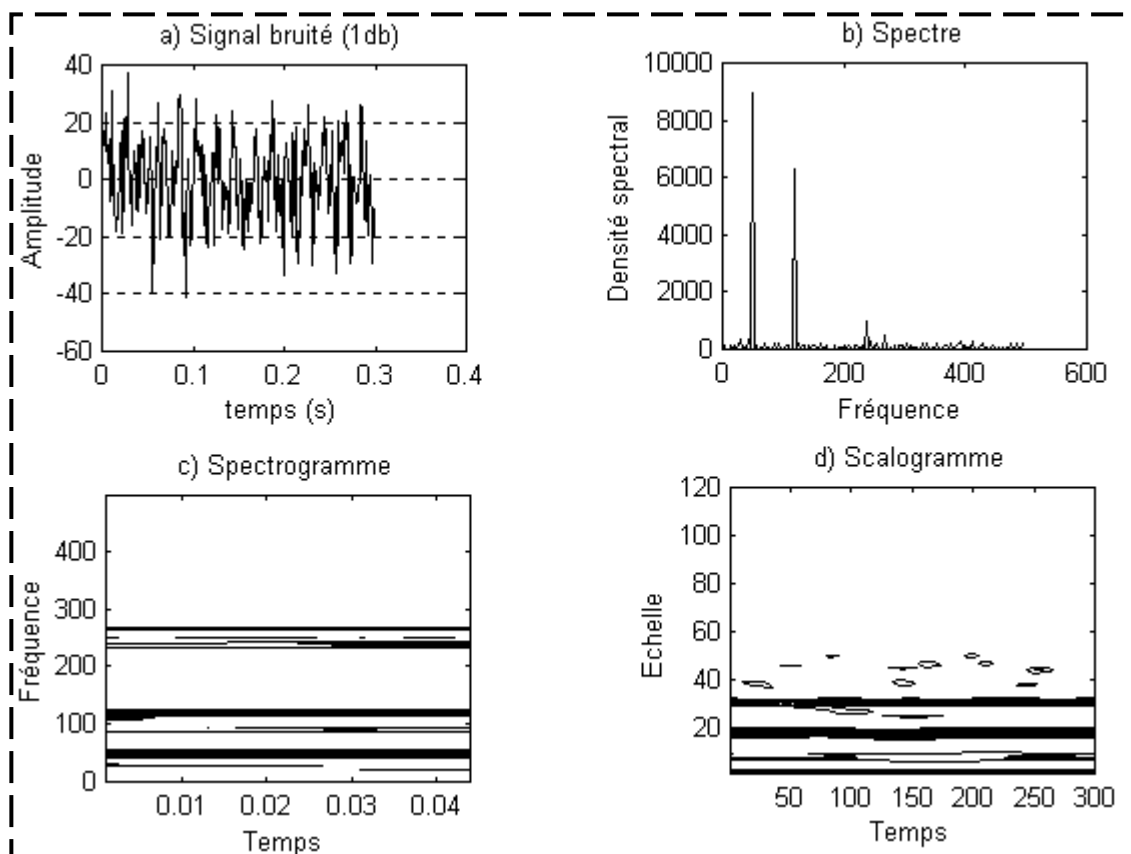


Fig. 29 : La représentation du signal avec un rapport Signal/Bruit = 1

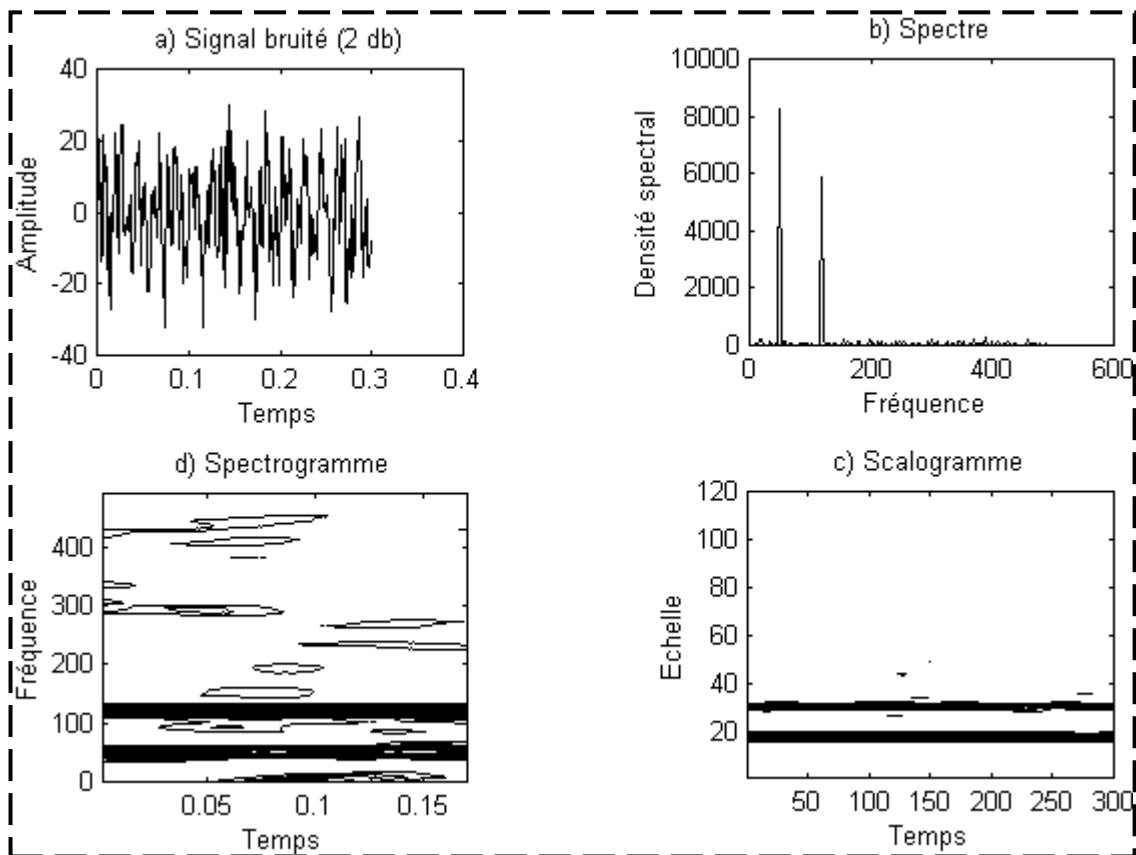


Fig. 30 : La représentation du signal avec un rapport *Signal/Bruit* = 2

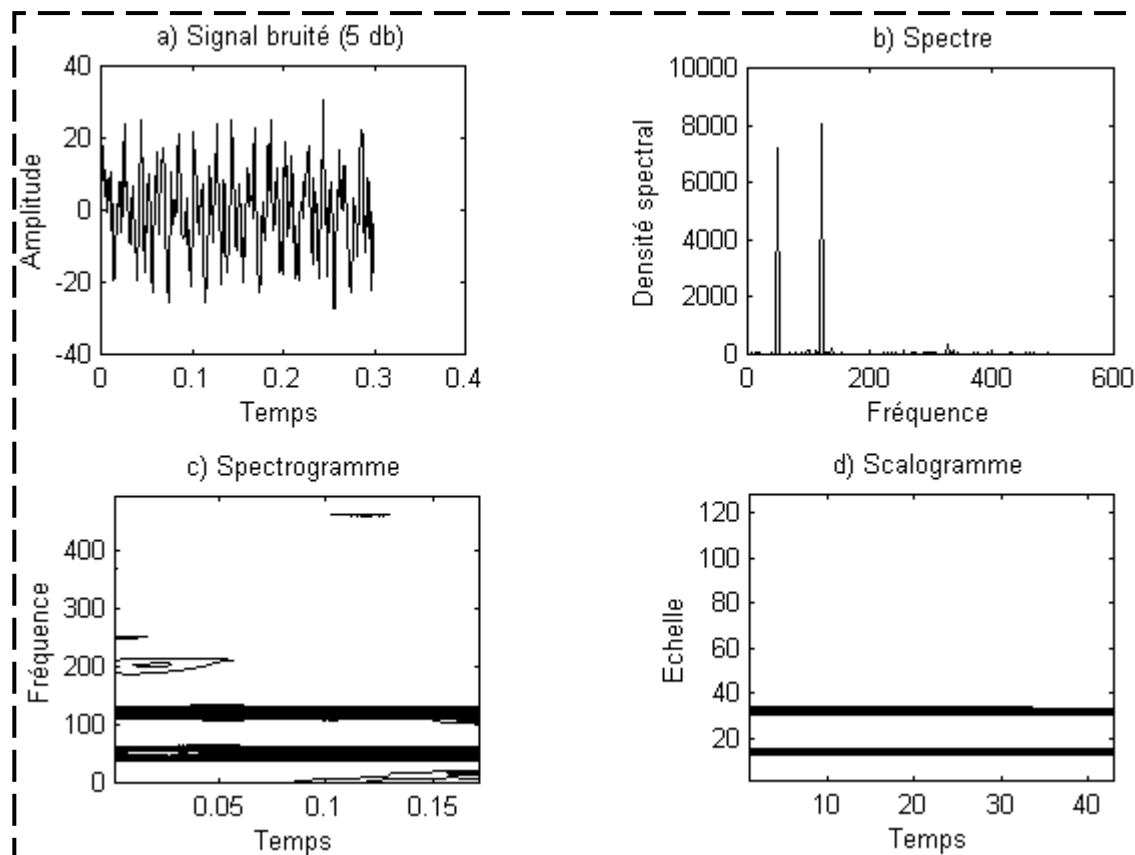


Fig. 31 : La représentation du signal avec un rapport *Signal/Bruit* = 5

La figure 29 montre le comportement des deux méthodes pour un signal défini comme la somme de deux sinusoïdes de fréquence 50 Hz et 120 Hz respectivement. On remarque que les deux méthodes représentent des défauts.

A chaque fois quand on augmente le rapport *signal/bruit*, le spectrogramme présente toujours des défauts, mais les résultats du scalogramme deviennent de plus en plus meilleurs figure 31.

Conclusion

En traitement du signal, le critère d'efficacité de la méthode d'analyse réside dans une bonne lisibilité de la transformée.

La transformée en ondelettes se présente comme un instrument d'analyse plus riche et plus puissant que l'analyse de *Fourier*.

Dans cette étude, on a fait un développement théorique pour les deux méthodes d'analyse (Fourier et ondelette), et on a donné des exemples pratiques pour montrer les limites de la transformée de Fourier et la transformée de Fourier à court terme.

Nous avons fait une comparaison entre les deux méthodes, en se basant sur des signaux simulés, en prenant compte des différents paramètres afin de bien exploiter la transformée en ondelettes.

La transformée en ondelettes semble très pertinente surtout dans l'étude des signaux non-stationnaire.

Vu les propriétés intéressantes de la transformée en ondelettes et la pertinence de la technique et l'efficacité des algorithmes de décomposition-recomposition, nous espérons continuer dans cette voie pour étudier des problèmes liés à la technologie de pointes.

Bibliographie

- [1] : **A. Vigouroux** «Etude de la variabilité solaire à long terme » Thèse de doctorat, 1996
- [2] : **R.E BEKAA** «Introduction au traitement du signal » O.P.U, Alger, 1993
- [3] : **J. Max** «Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques » 4^{ème} édition, Tome1, 1998
- [4] : **DIAF. M et DJEDDI. M** «Traitement numérique du signal » O.P.U, Alger, 1994.
- [5] : **S.V KLAU** «Traitement du signal », Toulouse cours EIM école national de la métrologie, 1993
- [6] : **R.E BEKAA** «Fondement du traitement du signal » 2^{ème} édition, O.P.U, Alger, 1998
- [7] : **H. MAHGOUN , A. FELKAOUI , R.E BEKAA** «Application de la transformée en ondelette à la détection des chocs et impulsion » 2^{ème} conférence internationale d'électronique sur les signaux, systèmes et automatique, Blida, Algérie, 10-12 mai 1999, pp. 168-173
- [8] : **R.M. PORTNOFF** « Time frequency representation of digital signals and systems based on short time fourier analysis », IEEE transaction on acoustic, speech, and signal processing, V28, N°1, February 1980, pp.55-69.
- [9] : **J-P. KAHANE et P.G LEMARIE-RIEUSSET** « Séries de Fourier et ondelette » paris, 1998.
- [10] : **P. FLANDRIN** «Représentation temps-fréquence des signaux non-stationnaires », Traitement du signal, V6, N°2, 1989, pp. 89-101.
- [11] : **MEYER. Y** «L'analyse par ondelette », pour la science, sept 87, mensuel N°119, pp. 28-37.
- [12] : **DAUBECHIES.I** «The wavelet transformation, time-frequency localisation and signal analysis » IEEE Transaction on information theory, Vol 36, pp.499-1005, sept 1990
- [13] : **V. Pierre** «Ondelettes et simulation numérique », Thèse de doctorat, Paris 1991.

- [14] : **M. VETTERLI** « Wavelet and filtre banks », IEEE transactions on signal processing V 40, N°9, septembre 1992, pp 2207-2232.
- [15] : **I. DAUBECHIES** «Ten lectures on wavelet » CBMS-NSF Regional conference. Séries in Applied Math 61, SIAM Press, Philadelphia, 1992.
- [16] : **P. BONNET, D.REMOND** «Une transformée en ondelette rapide », traitement du signal V8, N°3, pp. 195-207, 1991
- [17] : **R. OLIVIER** » Wavelet and signal processing » IEEE Magazine October 1991
- [18] : **G. BEYLKIN, R.COIFMAN, et V.ROKHLIN**«Fast wavelet transforms and numerical algorithms », comm on pure and applied mathematics, vol. XLIV, pp. 14-38, 1991

L'espace $L^2(\mathfrak{R})$

Soient deux fonctions $f, g \in L^2(\mathfrak{R})$

$L^2(\mathfrak{R})$ est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire défini par :

$$\langle f, g \rangle_2 = \int_{\mathfrak{R}} f(x) \cdot \bar{g}(x) dx$$

Où : \bar{g} est la conjugué de la fonction g .

La norme associée à ce produit scalaire est :

$$\|f\| = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

Le calcul explicite de l'ondelette mère ψ

a) Connaissant la fonction d'échelle ϕ , on peut calculer une ondelette ψ de la façon suivante :

Soit $\phi \in V_0 \subset V_1$ donc il existe des coefficients $h(n)$ tels que :

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_n h(n) \phi(2x - n) \quad (1)$$

Car $(\sqrt{2}\phi(2x - n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de V_1 , et les coefficients $h(n)$ se calculent par les produits scalaires :

$$h(n) = \sqrt{2} \langle \phi, \phi(2 \cdot -n) \rangle$$

L'équation (1) s'écrit également en Fourier :

$$\hat{\phi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

Avec
$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) e^{-2\pi i \xi n}$$

Démonstration:

On veut montrer :

$$\hat{\phi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

On a :
$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) \phi(2x - n)$$

Alors la transformée de Fourier de la fonction $\phi(x)$ est :

$$\hat{\phi}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) \phi(2x - n) e^{-2\pi i \xi x} dx$$

On passe au changement de variable :

On prend : $y = 2x - n$

Il vient alors

$$\hat{\phi}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) \phi(y) e^{-2\pi i \xi \left(\frac{y+n}{2}\right)} \frac{dy}{2}$$

$$\hat{\phi}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) \phi(y) e^{-2\pi i \xi \left(\frac{y}{2}\right)} e^{-2\pi i \xi \left(\frac{n}{2}\right)} dy$$

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) e^{-\pi i \xi n} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) e^{-\pi i \xi y} dy$$

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) e^{-\pi i \xi n} \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

Si on prend :

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) e^{-2\pi i \xi n}$$

Alors

$$\hat{\phi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

Les relations d'orthogonalités

Les fonctions $(\phi(x-k))_{k \in \mathbb{Z}}$ constituant une base orthonormée de V_0 , les relations d'orthogonalité s'écrivent (Formule de Poisson) :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + k)|^2 = 1$$

ce qui est équivalent à :

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + 1/2)|^2 = 1$$

Démonstration:

On veut montrer :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + k)|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + 1/2)|^2 = 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

$$\text{Où : } m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) e^{-2\pi i \xi n}$$

Un calcul direct donne : $m_0(\xi + k) = m_0(\xi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

On va décomposer cette somme $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + k)|^2$ suivant le nombre k pair et impaire.

Il vient :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + k)|^2 = \sum_{k \text{-pair}} |\hat{\phi}(\xi + k)|^2 + \sum_{k \text{-impaire}} |\hat{\phi}(\xi + k)|^2 \quad (2)$$

- On prend la première somme «suivant les k -pairs ».

$$\sum_{k \text{-pair}} |\hat{\phi}(\xi + k)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + 2k)|^2$$

On va écrire cette somme en fonction de $m_0(\xi)$:

$$\hat{\phi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \Rightarrow \hat{\phi}(2\xi) = m_0(\xi) \hat{\phi}(\xi)$$

$$\hat{\phi}(2\xi + 2k) = m_0(\xi + k) \hat{\phi}(\xi + k)$$

$$\text{On a } m_0(\xi + k) = m_0(\xi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Alors } \hat{\phi}(2\xi + 2k) = m_0(\xi) \hat{\phi}(\xi + k)$$

$$\text{Donc } |\hat{\phi}(2\xi + 2k)|^2 = |m_0(\xi)|^2 |\hat{\phi}(\xi + k)|^2$$

Par passage à la somme :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(2\xi + 2k)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |m_0(\xi)|^2 |\hat{\phi}(\xi + k)|^2 = |m_0(\xi)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + k)|^2$$

et on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + k)|^2 = 1$$

Finalement:
$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(2\xi + 2k)|^2 = |m_0(\xi)|^2$$

- On prend la deuxième somme «suivant les k-impaires».

$$\sum_{k\text{-impaire}} |\hat{\phi}(\xi + k)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + 2k + 1)|^2$$

On va écrire cette somme en fonction de $m_0(\xi + 1/2)$:

$$\hat{\phi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \Rightarrow \hat{\phi}(2\xi) = m_0(\xi) \hat{\phi}(\xi)$$

$$\hat{\phi}(2\xi + 2k + 1) = m_0\left(\xi + k + \frac{1}{2}\right) \hat{\phi}\left(\xi + k + \frac{1}{2}\right)$$

On a
$$m_0(\xi + k) = m_0(\xi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Il on ai de même que :

$$m_0\left[\left(\xi + \frac{1}{2}\right) + k\right] = m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \text{Car } \xi + \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

Alors
$$\hat{\phi}(2\xi + 2k + 1) = m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \hat{\phi}\left(\xi + k + \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Donc } \left| \hat{\phi}(2\xi + 2k + 1) \right|^2 = \left| m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \right|^2 \left| \hat{\phi}\left(\xi + \frac{1}{2} + k\right) \right|^2$$

Par passage à la somme :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}(2\xi + 2k + 1) \right|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \right|^2 \left| \hat{\phi}\left(\xi + \frac{1}{2} + k\right) \right|^2 \\ &= \left| m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \right|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}\left(\xi + \frac{1}{2} + k\right) \right|^2 \end{aligned}$$

et on a

$$\xi + \frac{1}{2} \in R \Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}\left(\xi + \frac{1}{2} + k\right) \right|^2 = 1$$

$$\text{Finalement: } \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}(2\xi + 2k + 1) \right|^2 = \left| m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \right|^2$$

de l'équation (2)

$$\left| m_0(\xi) \right|^2 + \left| m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \right|^2 = 1$$

b) Calculer Ψ sachant que $\Psi \in V1$ revient à chercher des coefficients $g(n)$ vérifiant:

$$\Psi(x) = \sqrt{2} \sum_n g(n) \phi(2x - n)$$

avec $g(n) = \sqrt{2} \langle \Psi, \phi(2 \cdot -n) \rangle$

s'écrit également en Fourier :

$$\hat{\Psi}(\xi) = m_1\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

$$\text{Avec } m_I(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) e^{-2\pi i \xi n}$$

Démonstration:

On veut montrer :

$$\hat{\psi}(\xi) = m_I\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\psi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

$$\text{On a : } \psi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) \phi(2x - n)$$

Alors la transformée de Fourier de la fonction $\psi(x)$ est :

$$\hat{\psi}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) \phi(2x - n) e^{-2\pi i \xi x} dx$$

On passe au changement de variable :

$$\text{On prend : } y = 2x - n$$

Il vient alors

$$\hat{\psi}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) \phi(y) e^{-2\pi i \xi \left(\frac{y+n}{2}\right)} \frac{dy}{2}$$

$$\hat{\psi}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) \phi(y) e^{-2\pi i \xi \left(\frac{y}{2}\right)} e^{-2\pi i \xi \left(\frac{n}{2}\right)} dy$$

$$\hat{\psi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) e^{-\pi i \xi n} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) e^{-\pi i \xi y} dy$$

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) e^{-\pi i \xi n} \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

$$\text{Si on prend : } m_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) e^{-2\pi i \xi n}$$

Alors

$$\boxed{\bar{\psi}(\xi) = m_1\left(\frac{\xi}{2}\right) \bar{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right)}$$

Les relations d'orthogonalité des fonctions ϕ et ψ donnent :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + k)|^2 = 1$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + k) \bar{\psi}(\xi + k)|^2 = 1$$

D'où les nouvelles conditions:

$$|m_1(\xi)|^2 + |m_1(\xi + 1/2)|^2 = 1$$

$$m_1(\xi) \bar{m}_0(\xi) + m_1(\xi + 1/2) \bar{m}_0(\xi + 1/2) = 0$$

Démonstration :

On veut montrer :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + k)|^2 = 1 \Rightarrow |m_1(\xi)|^2 + |m_1(\xi + 1/2)|^2 = 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

$$\text{Où : } m_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) e^{-2\pi i \xi n}$$

Un calcul direct donne : $m_1(\xi + k) = m_1(\xi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

On va décomposer cette somme $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + k)|^2$ suivant le nombre k pair et

impair.

$$\text{Il vient : } \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + k)|^2 = \sum_{k \text{-pair}} |\hat{\psi}(\xi + k)|^2 + \sum_{k \text{-impaire}} |\hat{\psi}(\xi + k)|^2 \quad (3)$$

- On prend la première somme «suivant les k-pairs».

$$\sum_{k \text{-pair}} |\hat{\psi}(\xi + k)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + 2k)|^2$$

On va écrire cette somme en fonction de $m_1(\xi)$:

$$\bar{\psi}(\xi) = m_1\left(\frac{\xi}{2}\right) \bar{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \Rightarrow \bar{\psi}(2\xi) = m_1(\xi) \bar{\phi}(\xi)$$

$$\hat{\psi}(2\xi + 2k) = m_1(\xi + k) \hat{\phi}(\xi + k)$$

$$\text{On a } m_1(\xi + k) = m_1(\xi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Alors } \hat{\psi}(2\xi + 2k) = m_1(\xi) \hat{\phi}(\xi + k)$$

$$\text{Donc } |\hat{\psi}(2\xi + 2k)|^2 = |m_1(\xi)|^2 |\hat{\phi}(\xi + k)|^2$$

Par passage à la somme :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2\xi + 2k)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |m_1(\xi)|^2 |\hat{\phi}(\xi + k)|^2 = |m_1(\xi)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + k)|^2$$

et on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + k)|^2 = 1$$

Finalement:
$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2\xi + 2k)|^2 = |m_I(\xi)|^2$$

- On prend la deuxième somme « suivant les k-impaires ».

$$\sum_{k\text{-impaire}} |\hat{\psi}(\xi + k)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + 2k + 1)|^2$$

On va écrire cette somme en fonction de $m_I(\xi + 1/2)$:

$$\hat{\psi}(\xi) = m_I\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \Rightarrow \hat{\psi}(2\xi) = m_I(\xi) \hat{\phi}(\xi)$$

$$\hat{\psi}(2\xi + 2k + 1) = m_I\left(\xi + k + \frac{1}{2}\right) \hat{\phi}\left(\xi + k + \frac{1}{2}\right)$$

On a $m_I(\xi + k) = m_I(\xi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Il est de même que :

$$m_I\left[\left(\xi + \frac{1}{2}\right) + k\right] = m_I\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \text{Car } \xi + \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

Alors $\hat{\psi}(2\xi + 2k + 1) = m_I\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \hat{\phi}\left(\xi + k + \frac{1}{2}\right)$

Donc $|\hat{\psi}(2\xi + 2k + 1)|^2 = \left|m_I\left(\xi + \frac{1}{2}\right)\right|^2 \left|\hat{\phi}\left(\xi + \frac{1}{2} + k\right)\right|^2$

Par passage à la somme :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2\xi + 2k + 1)|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| m_I \left(\xi + \frac{1}{2} \right) \right|^2 \left| \hat{\phi} \left(\xi + \frac{1}{2} + k \right) \right|^2 \\ &= \left| m_I \left(\xi + \frac{1}{2} \right) \right|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi} \left(\xi + \frac{1}{2} + k \right) \right|^2 \end{aligned}$$

et on a

$$\xi + \frac{1}{2} \in R \Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\psi} \left(\xi + \frac{1}{2} + k \right) \right|^2 = 1$$

$$\text{Finalement: } \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2\xi + 2k + 1)|^2 = \left| m_I \left(\xi + \frac{1}{2} \right) \right|^2$$

de l'équation (3)

$$|m_I(\xi)|^2 + \left| m_I \left(\xi + \frac{1}{2} \right) \right|^2 = 1$$

- Pour monter :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}(\xi + k) \overline{\hat{\psi}(\xi + k)} = 0 \Rightarrow m_0(\xi) \overline{m_1(\xi)} + m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \overline{m_1\left(\xi + \frac{1}{2}\right)} = 0$$

On va procéder de la même manière c'est-à-dire

Divisant la somme suivant les k-pairs et impaires.

- Sur les k-pairs:

$$\text{on a déjà vu } \begin{cases} \hat{\phi}(2\xi + 2k) = m_0(\xi) \hat{\phi}(\xi + k) \\ \hat{\psi}(2\xi + 2k) = m_1(\xi) \hat{\phi}(\xi + k) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\phi}(2\xi + 2k) = m_0(\xi) \hat{\phi}(\xi + k) \\ \hat{\psi}(2\xi + 2k) = \bar{m}_1(\xi) \hat{\phi}(\xi + k) \end{cases}$$

$$\text{donc } \hat{\phi}(2\xi + 2k) \bar{\psi}(2\xi + 2k) = m_0(\xi) \hat{\phi}(\xi + k) \bar{m}_1(\xi) \hat{\phi}(\xi + k)$$

$$\text{Finalement } \hat{\phi}(2\xi + 2k) \bar{\psi}(2\xi + 2k) = m_0(\xi) \bar{m}_1(\xi) \hat{\phi}^2(\xi + k)$$

Par passage à la somme :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}(2\xi + 2k) \bar{\psi}(2\xi + 2k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_0(\xi) \bar{m}_1(\xi) \hat{\phi}^2(\xi + k)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}(2\xi + 2k) \bar{\psi}(2\xi + 2k) = m_0(\xi) \bar{m}_1(\xi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}^2(\xi + k)$$

$$\text{et comme } \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + k)|^2 = 1$$

donc la somme sur les k-pairs

$$\boxed{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}(2\xi + 2k) \bar{\psi}(2\xi + 2k) = m_0(\xi) \bar{m}_1(\xi)}$$

- Sur les k-impaires:

$$\text{on a déjà vu } \begin{cases} \hat{\phi}(2\xi + 2k + 1) = m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \hat{\phi}\left(\xi + k + \frac{1}{2}\right) \\ \hat{\psi}(2\xi + 2k + 1) = m_1\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \hat{\phi}\left(\xi + k + \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\phi}(2\xi + 2k + 1) = m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \hat{\phi}\left(\xi + k + \frac{1}{2}\right) \\ \bar{\psi}(2\xi + 2k + 1) = \bar{m}_1\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \hat{\phi}\left(\xi + k + \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

donc

$$\hat{\phi}(2\xi + 2k + 1) \bar{\psi}(2\xi + 2k + 1) = m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \hat{\phi}\left(\xi + k + \frac{1}{2}\right) \bar{m}_1\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \hat{\phi}\left(\xi + k + \frac{1}{2}\right)$$

Finalement

$$\hat{\phi}(2\xi + 2k + 1) \bar{\psi}(2\xi + 2k + 1) = m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \bar{m}_1\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \hat{\phi}^2\left(\xi + k + \frac{1}{2}\right)$$

Par passage à la somme :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}\left(2\xi + 2k + \frac{1}{2}\right) \bar{\psi}\left(2\xi + 2k + \frac{1}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \bar{m}_1\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \hat{\phi}^2\left(\xi + k + \frac{1}{2}\right)$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}\left(2\xi + 2k + \frac{1}{2}\right) \bar{\psi}\left(2\xi + 2k + \frac{1}{2}\right) = m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \bar{m}_1\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}^2\left(\xi + k + \frac{1}{2}\right)$$

et comme $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}\left(\xi + \frac{1}{2} + k\right) \right|^2 = 1$

donc la somme sur les k-impaires

$$\boxed{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}(2\xi + 2k + 1) \bar{\psi}(2\xi + 2k + 1) = m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \bar{m}_1\left(\xi + \frac{1}{2}\right)}$$

et finalement

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}(\xi + k) \bar{\psi}(\xi + k) = 0 \Rightarrow \boxed{m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \bar{m}_1\left(\xi + \frac{1}{2}\right) + m_0(\xi) \bar{m}_1(\xi) = 0}$$