

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Equations aux dérivées partielles et applications

Thème

Étude d'un problème aux limites de second ordre impulsif avec dépendance de dérivée par des méthodes variationnelles.

Présentée par :

M^{lle} KOUDRI Chaima

Membres de jury :

Mr. Abdelhak MOKHTARI	M.C.A.,	Université de M'sila	Président.
Mr. Dahmane BOUAFIA	M.C.A.,	Université de M'sila	Encadreur.
Mr. Noureddine DECHOUCHA	M.A.A.,	Université de M'sila	Examineur.

Année universitaire 2022/2023

Remercement

On remercie dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminé ce mémoire.

Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et naurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de MR. Dahmane BOUAFIA, on le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.

Je remercie mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi et toute ma famille et mes amis. Leur soutien incondtionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide.

Je remercie les membres de jury, chacun à son nom, d'avoir accepté d'examiner mon travail,

Nos remerciement s'adresse également à tout nos professeurs de la faculté des mathématiques et informatiques, le département de mathématiques pour leurs générosités et la grande patience dont ils ont su faire preuve malgré leurs charges académiques et professionnelles.

Chaima Koudri



Dédicaces

De tout mon cœur je dédie ce travail :

- *A mes parents : grâce a leurs encouragements et leurs grands sacrifices ils ont pu créer un climat propice à la poursuite mes études aucune dédicace ne pourrait exprimer mon respect, ma gratitude et ma profonde considération envers eux.*
- *A mes chères frères et sœur "omar, Mohamed, Hanan, Fairouz" et Mes neveux "Wassim, Amira, mouaad".*
- *A mes amis "basma, assala, hamida, nouara" et "Hiba" qui m'ont soutenu tous au long de mon parcours.*
- *A toutes ma famille "Koudri" qui m'a support, je ne pourrais nommer de peur d'oublier quelqu'un.*
- *A tous mes amis et toute ma famille de département de Mathématiques et à toute la promotion 2022 /2023 de L'EDP.*
- *A vous cher lecteur.*

Chaima Koudri



Table des matières

Notation	iii
Introduction	1
1 Quelques outils d'analyse fonctionnelle.	3
1.1 Que signifie une équation différentielle impulsive ?	3
1.2 Espaces de Banach et de Hilbert	4
1.3 Quelques outils de base	4
1.3.1 Les opérateurs linéaires bornés sur les espaces de banach	4
1.3.2 Continuité et compacité des opérateurs	5
1.3.3 Les injections canoniques(continue et compact)	6
1.3.4 Faiblement semi-continue inférieurement	6
1.3.5 Opérateurs différentiables	7
1.3.6 Différentiabilité au sens de fréchet	7
1.3.7 Différentiabilité au sens de Gâteaux	8
1.3.8 Espace de Lebesgue L^p	10
1.4 Théorie des points critiques	11
1.4.1 Points et valeurs critiques	11
1.4.2 Suite minimisante et infimum	12
1.5 Valeurs et vecteurs propres d'opérateurs compacts	12
1.5.1 L'opérateur adjoint et auto-adjoint	12
1.5.2 Valeurs et vecteurs propres d'opérateurs linéaires auto-adjoints compacts	13
1.6 La condition de compacité de Palais-Smale	13
1.6.1 Lemme de Col (Mountain Pass Lemma)	14
2 L'existence du solution d'un problème aux limites de second ordre impulsif par la méthode variationnelle.	15
2.1 Position du problème	15
2.1.1 Les espaces appropriés de notre problème	16
2.1.2 Les valeurs propres de problème linéaire	16
2.1.3 L'hypothèse de base	18
2.2 Construction variationnelle de notre problème	18
2.2.1 La fonctionnelle d'Euler-Lagrange	20
2.2.2 Solution classique et faible	22
2.3 Quelques lemmes nécessaires	24
2.3.1 Théorème de minimisation	27
2.4 Les résultats principaux d'existences	27
2.4.1 Première résultat d'existence	28

2.4.2	Deuxième résultat d'existence	29
3	Étude la multiplicité des solutions d'un problème aux limites de second ordre impulsif avec dépendance de dérivée.	31
3.1	Introduction	31
3.2	Quelque lemmes utilisée	32
3.2.1	Condition d'Ambrosetti-Rabinowitz	32
3.3	Les résultats d'existences et multiplicités	33
3.3.1	L'existence et multiplicités par lemme de Col	33
3.3.2	L'existence d'infinité des solutions par théorème de point selle	38
	Conclusion	41

Notation

Nous introduisons les notations et les définitions nécessaires qui sont utilisées par la suite.

H	Espace de Hilbert.
$L^\infty(\Omega)$	$\{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } \exists C : u(x) \leq C > 0 \text{ p.p sur } \Omega\}$.
$\ u\ _{L^\infty}$	$\inf\{C > 0 : u(x) \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}$.
$C(\Omega)$	Espace des fonctions continues sur Ω .
$D(A)$	Domaine de définition d'un opérateur borné A .
$R(A)$	Image de A qui est noté aussi par ImA .
(X, d)	Espace métrique .
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Le produit scalaire.
\hookrightarrow	On écrit $X \hookrightarrow Y$ pour signifier que X est inclus dans Y et que l'injection canonique de X dans Y est continue.
p.p	Presque partout.
$\partial_v F$	Dérivée directionnelle de F dans la direction v .
dF	Dérivée au sens de Fréchet qui est noté aussi par F' .
$d_G F$	Dérivée au sens de Gâteaux.
s.c.i	Semi continue inférieur.
s.c.s	Semi continue supérieur.
f.s.c.i	Faiblement semi continue inférieur.
f.s.c.s	Faiblement semi continue supérieurement .
(PS)	la condition de Palais-Smale.
(AR)	la condition d'Ambrosetti-Rabinowitz.
$AC(I)$	les fonctions absolument continues sur un intervalle I .
$\Delta u'(x_j)$	$u'(x_j^+) - u'(x_j^-) = \lim_{x \rightarrow x_j^+} u'(x) - \lim_{x \rightarrow x_j^-} u'(x)$.

Introduction générale

Les méthodes variationnelles sont utilisées dans la modélisation de certains problèmes non linéaires issus des réseaux de neurones biologiques, de la mécanique élastique, des problèmes anisotropes, etc. Au cours de la décennie précédente, les méthodes variationnelles ont été appliquées aux problèmes aux limites des équations différentielles ordinaires et partielles, et dans les problèmes impulsifs que nous avons étudié, etc... Récemment, l'équation différentielle impulsive a été étudiée dans de nombreux travaux classiques, par exemple [13], [14], [18], [20]. L'étude de l'équation différentielle impulsive via des méthodes variationnelles a été initiée par Nieto et O'Regan [17], Tian et Ge [23]. L'étude de l'impulsivité du équation différentielle second ordre avec dépendance de dérivée (équations différentielles ordinaires) via les méthodes variationnelles ont été initiées par Nieto [16], Il a récemment étudié le problème aux limites de Dirichlet linéaire amorti suivant avec impulsions :

$$\begin{cases} -u''(x) + g(x)u'(x) + \lambda u(x) = \sigma(x), & \text{p.p } x \in [0, T], \\ \Delta u'(x_j) = d_j, & j = 1, 2, \dots, p, \\ u(0) = u(T) = 0, \end{cases}$$

où $\lambda, d_j \in \mathbb{R}, \sigma \in C[0, 1]$, l'auteur a introduit une formulation variationnelle pour le problème de Dirichlet linéaire amorti avec impulsions et le concept de solution faible pour un tel problème . Nous n'oubliez pas de mentionner que Xiao et Nieto [25] ont considéré les problèmes aux limites non linéaires suivants pour les équations différentielles impulsives du second ordre

$$\begin{cases} -u''(x) + g(x)u'(x) + \lambda u(x) = f(x, u(x)), & \text{p.p } x \in [0, T], \\ -\Delta u'(x_j) = I_j(u(x_j)), & j = 1, 2, \dots, p, \\ u(0) = u(T) = 0, \end{cases}$$

où $T > 0, 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_p < x_{p+1} = T, f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continu, $g \in C[0, T]$, et $I_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, p$, sont continus, et $\Delta u'(x_j) = u'(x_j^+) - u'(x_j^-)$, pour $u'(x_j^\pm) = \lim_{x \rightarrow x_j^\pm} u'(x)$.

Le but de ce mémoire est l'étude d'existence et multiplicité des solutions pour un problème aux limites de second ordre impulsif avec dépendance de dérivée. On basé pour pruvé le résultat sur un théorie du point critique ainsi que la théorie du minimisation, le lemme du Col et théorème de point selle.

Ce mémoire était divisée en trois chapitres, comme suite :

Le premier chapitre est préliminaire qui contient quelque outils de base qui sont utilisés par la suite.

Nous avons dévisé le chapitre par des sections contient des opérateurs sur les espaces de banach comme la continuité et la compacité, injection continue et compact et les propriétés de semi-continuité de fonctionnelles, la théorie de point critique et les valeurs propres et vecteurs propres d'opérateurs compacts.

Nous avons donné aussi un rappel sur l'espace L^p et lemme de compacité, enfin les conditions

de (PS) et le principe de lemme du Col.

Dans le chapitre deux, nous avons présenté des résultats d'existence de solution pour problème aux limites de seconde ordre impulsif avec dépendance de dérivée suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + \lambda u(x) + g(x)u'(x) = f(x, u(x)), & \text{p.p } x \in [0, T]. \\ -\Delta u'(x_i) = I_i(u(x_i)), & i = 1, 2, \dots, p, \\ u(0) = 0, \quad \alpha u(T) + \beta u'(T) = 0 \end{cases}$$

où λ est un paramètre, $T > 0$, $g \in C[0, T]$, $f \in C([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $I_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, p$, sont continus, $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_p < x_{p+1} = T$, $\Delta u'(x_i) = u'(x_i^+) - u'(x_i^-) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} u'(x) - \lim_{x \rightarrow x_i^-} u'(x)$,

$\alpha \geq 0, \beta > 0$ (où $\beta = 0$).

Nous utilisons des structures variationnelles et quelques théorèmes de minimisations importantes (on obtient que la fonctionnelle est coercive et f.s.c.i).

En dernier chapitre, dans un premier résultat, nous présentons un application du lemme du Col (Mountain pass lemma) pour étudier la multiplicité des solutions. Pour obtenir les résultats, nous avons utilisé les conditions d'Ambrosetti-Rabinowitz et vérifié la condition de Palais-Smale (PS) ainsi que les conditions géométriques pour une fonctionnelle appropriée.

Pour obtenir le deuxième résultat, nous avons présenté un application du théorème point selle, pour démontrer l'existence de l'infinité des solutions pour une fonctionnelle appropriée.

Enfin, nous avons présenté des exemples illustratifs des problèmes aux limites de second ordre impulsifs qui ont été étudiés à la fin de chacun des deuxième et troisième chapitres.

QUELQUE OUTILS D'ANALYSE FONCTIONNELLE.

Sommaire

1.1	Que signifie une équation différentielle impulsive ?	3
1.2	Espaces de Banach et de Hilbert	4
1.3	Quelques outils de base	4
1.3.1	Les opérateurs linéaires bornés sur les espaces de banach	4
1.3.2	Continuité et compacité des opérateurs	5
1.3.3	Les injections canoniques(continue et compact)	6
1.3.4	Faiblement semi-continue inférieurement	6
1.3.5	Opérateurs différentiables	7
1.3.6	Différentiabilité au sens de fréchet	7
1.3.7	Différentiabilité au sens de Gâteaux	8
1.3.8	Espace de Lebesgue L^p	10
1.4	Théorie des points critiques	11
1.4.1	Points et valeurs critiques	11
1.4.2	Suite minimisante et infimum	12
1.5	Valeurs et vecteurs propres d'opérateurs compacts	12
1.5.1	L'opérateur adjoint et auto-adjoint	12
1.5.2	Valeurs et vecteurs propres d'opérateurs linéaires auto-adjoints compacts	13
1.6	La condition de compacité de Palais-Smale	13
1.6.1	Lemme de Col (Mountain Pass Lemma)	14

1.1 Que signifie une équation différentielle impulsive ?

Une équation différentielle impulsive est une équation différentielle qui contient des impulsions ou des sauts dans la fonction dérivée. Plus précisément, une équation différentielle impulsive peut être écrite sous la forme :

$$u''(x) = f(x, u(x)), \quad x \in [0, T],$$

avec des conditions initiales $u(0) = u_0$, et des conditions d'impulsion de la forme :

$$u(x^+) - u(x^-) = I(x, u(x)), \quad x \in [0, T],$$

où $u(x^+)$ et $u(x^-)$ représentent les limites droite et gauche de la fonction u à l'instant x , et $I(x, u(x))$ est une fonction donnée. Cette condition signifie que la fonction u subit un saut à l'instant x , et le saut est déterminé par la fonction I .

1.2 Espaces de Banach et de Hilbert

Définition 1.1. (Espaces de Banach) Un espace vectoriel normé est dit complet si toutes les suites de Cauchy de l'espace vectoriel convergent. Espaces vectoriels normés complets sont appelés espaces de Banach.

Pour définir un espace de Hilbert, nous avons besoin de la notion d'espace de produit scalaire (voir [8]).

Définition 1.2. (Produit scalaire) Un produit scalaire sur un espace vectoriel X est une forme sesquilinéaire définie positive, à savoir une fonctionnelle $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$, telle que pour tous $x, y, z \in X$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,

- (a) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
- (b) $\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$
- (c) $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$
- (d) $\langle x, x \rangle \geq 0$, et $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Proposition 1.1. [8] *Le produit scalaire est continu.*

Démonstration - Soit $x_n \rightarrow x$ et $y_n \rightarrow y$, alors comme y_n sont bornés, nous avons

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &\leq |\langle x_n - x, y_n \rangle| + |\langle x, y_n - y \rangle| \\ &\leq \|x_n - x\| \|y_n\| + \|x\| \|y_n - y\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que la prise de limites commute avec le produit scalaire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n \rangle.$$

■

Définition 1.3. (Espaces de Hilbert) Un espace de Hilbert est un espace de produit scalaire qui est complet comme un espace métrique, et noté H .

1.3 Quelques outils de base

1.3.1 Les opérateurs linéaires bornés sur les espaces de banach

Soient X et Y , deux espaces de Banach normés, A un opérateur linéaire, tel que $D(A) = X$ et $R(A) \subset Y$ (image de A).

Théorème 1.1. [6] *L'opérateur A est borné, si et seulement si, il existe une constante $c > 0$, telle que*

$$\|Ax\| \leq c\|x\|,$$

pour tout $x \in X$.

Définition 1.4. (Convergence faible) On dit qu'une suite $(x_n) \in X$ converge faiblement vers x , si

$$\text{pour tout } f \in X', \langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle,$$

et on écrit $x_n \rightharpoonup x$.

Proposition 1.2. [3] Soit (x_n) une suite de X . On a

1. Si $x_n \longrightarrow x$, alors $x_n \rightharpoonup x$.
2. Si $x_n \rightharpoonup x$, alors (x_n) est bornée et $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$.

Proposition 1.3. [3] Lorsque X est de dimension finie, une suite (x_n) converge faiblement, si et seulement si, elle converge fortement.

Définition 1.5. (Espace dual)[5] L'ensemble des fonctionnelles linéaires continues définies sur un espace vectoriel normé constitue un espace vectoriel. On l'appelle dual de l'espace X et on note X' .

On munit X' de la norme

$$\|f\|_{X'} = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} |\langle f, x \rangle|, \quad \forall f \in X'.$$

X' muni de cette norme est un espace de Banach et on a l'inégalité

$$|\langle f, x \rangle| \leq \|f\|_{X'} \|x\|_X, \quad \forall f \in X', \quad \forall x \in X.$$

Définition 1.6. (Réflexivité) Soit X un espace de Banach et soit \mathbf{i} l'injection canonique de X dans X'' . On dit que X est réflexif, si $\mathbf{i}(X) = X''$, où X'' est le bidual de X .

Définition 1.7. (Séparabilité) Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X est séparable si X admet une partie dénombrable et dense.

Théorème 1.2. [3] Un espace de Banach X est réflexif, si et seulement si sa boule fermée est faiblement compacte.

Corollaire 1.1. [3] Si X est un espace de Banach réflexif, alors toute suite bornée $(x_n) \subset X$ avec $\|x_n\| \leq M$ contient une sous suite qui converge faiblement vers un élément $x \in X$ vérifiant $\|x\| \leq M$.

1.3.2 Continuité et compacité des opérateurs

On va considérer des opérateurs T de X dans Y et on va donner une définition concernant les propriétés de la continuité de T .

La notion plus simple est la suivante

Définition 1.8. L'opérateur $T : X \rightarrow Y$ est dit continu en x , si pour toute suite $(x_n) \subset X$ qui converge vers x , $T(x_n)$ converge vers $T(x)$.

T est dit continu sur $\Omega \subset X$ si T est continu en tout point $x \in \Omega$.

Définition 1.9. Un opérateur $T : X \rightarrow Y$ est dit compact s'il est continu et a la propriété. Pour toute suite (x_n) bornée dans X , la suite $(T(x_n))$ admet une sous suite convergente.

1.3.3 Les injections canoniques(continue et compact)

L'injection définissent les relations qui existent entre différents espaces fonctionnels. Ils sont très importants dans l'analyse moderne et les problèmes aux limites.

Définition 1.10. Soient X et Y deux espaces de Banach. On dit que X est injecté dans Y et on écrit $X \hookrightarrow Y$, si pour tout $x \in X$ on a $x \in Y$ et $\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$, où la constante c ne dépend pas de $x \in X$. On définit l'opérateur d'injection $i : X \rightarrow Y$, qui nous permet de considérer le même élément $x \in X$ comme un élément de Y .

$X \hookrightarrow Y$ est équivalent à dire que l'opérateur d'injection $i : X \rightarrow Y$ est un opérateur linéaire continu.

Si $\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$, pour tout $x \in X$ alors $\|i(x)\|_Y \leq c$ si $\|x\|_X \leq 1$.

Définition 1.11. Si $X \hookrightarrow Y$ et l'opérateur d'injection $i : X \rightarrow Y$ est un opérateur compact, alors on dit que X est injecté de manière compacte dans Y , et on écrit $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$. La compacité de l'opérateur $i : X \rightarrow Y$ est équivalent à dire que tout sous-ensemble borné de X est un sous-ensemble compact de Y .

1.3.4 Faiblement semi-continue inférieurement

Définition 1.12. 1. Une fonctionnelle $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite faiblement semi-continue inférieurement (*f.s.c.i.*) au point x_0 , si pour chaque suite $(x_n) \subset \Omega$ telle que $x_n \rightharpoonup x_0$, on a

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

2. On dit que f est faiblement semi-continue supérieurement (*f.s.c.s.*) au point x_0 , si pour toute suite $(x_n) \subset \Omega$, telle que $x_n \rightharpoonup x_0$, on a

$$f(x_0) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

Exemple 1.1. Soit la fonctionnelle J définie sur un espace de Hilbert H comme suit

$$J : u \rightarrow \|u\|^2,$$

alors J est faiblement semi-continue inférieure (*f.s.c.i.*). En effet, soit (u_n) , telle que $u_n \rightharpoonup u$, on montre que

$$\|u\|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|^2.$$

On a

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|^2 &= (u_n - u, u_n - u) \\ &= \|u_n\|^2 - 2(u_n, u) + \|u\|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

et comme $\mathcal{H}' = H$ et $u_n \rightharpoonup u$, donc

$$\forall u \in H : (u_n, u) \rightarrow (u, u) = \|u\|^2.$$

Alors

$$\|u_n\|^2 \geq \|u\|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

il résulte que

$$\|u\|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|^2.$$

Remarque 1.1. Si f est faiblement continue en x_0 , alors f est (*f.s.c.s.*) et (*f.s.c.i.*) et inversement.

1.3.5 Opérateurs différentiables

Dans la suite on donne quelques définitions et propriétés fondamentaux conciste l'opérateurs différentiables. Soient X et Y deux espaces de Banach, U un ouvert de X .

1.3.6 Différentiabilité au sens de fréchet

Définition 1.13. (La dérivée au sens de Fréchet) Soit $u \in U$ et $F : U \rightarrow Y$. On dit que F est différentiable au point u s'il existe une application linéaire continue $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, telle que si on considère

$$R(h) = F(u + h) - F(u) - A.h, \text{ pour } h \in X, \text{ petit.}$$

Alors

$$\frac{R(h)}{\|h\|} \rightarrow 0 \text{ lorsque } \|h\| \rightarrow 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que si } \|h\|_X \leq \delta, \text{ alors } \|R(h)\|_Y \leq \varepsilon \|h\|_X.$$

Si une telle application $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ existe, elle est forcément unique. On note par

$$A = dF(u).$$

Elle est appelée différentielle (au sens de Fréchet) de F en u , ou encore application linéaire tangente à F en u . En l'absence de précision supplémentaire différentiable signifiera dans la suite différentiable au sens de Fréchet.

Exemples 1.1. 1. Si $F(u) = c$. Alors F Fréchet différentiable et

$$dF(u) = 0, \forall u.$$

2. Si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ $A(u + h) - A(u) = A.h$ et donc $dA(u) = A, \forall u \in X$.

3. La fonctionnelle $F : H \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

$$F(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 = \frac{1}{2}\langle u, u \rangle,$$

est Fréchet différentiable et

$$dF(u)h = \langle u, h \rangle.$$

4. La fonctionnelle $F : H \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$F(u) = \|u\|,$$

est Fréchet différentiable pour $u \neq 0$ et

$$dF(u)h = \frac{\langle u, h \rangle}{\|u\|}.$$

On a ensuite toutes les propriétés classiques.

Proposition 1.4. [19]

i) Soit F et G deux applications de U vers Y . Si F et G sont différentiables en $u \in U$. Alors $\forall \lambda, \mu$ réels $\lambda F + \mu G$ est différentiable en u , et

$$d(\lambda F + \mu G)(u) = \lambda dF(u) + \mu dG(u).$$

ii) Soit X, Y et Z trois espaces de Banach, U un ouvert de X , et V un ouvert de Y . Soit $F : U \rightarrow Y$ et $G : V \rightarrow Z$, tels que $F(U) \subset V$. Si F est différentiable en u et G est différentiable en $v = F(u)$, alors $G \circ F$ est différentiable en u et

$$d(G \circ F)(u) = dG(v) \circ dF(u), \quad v = F(u),$$

c'est-à-dire

$$d(G \circ F)(u)h = dG(v)[dF(u)h].$$

La différentielle de $G \circ F$ est donc la composition des applications linéaires continues $dF(u)$ et $dG(v)$, pour $v = F(u)$.

Définition 1.14. (Dérivée directionnelle) Soit $F : U \rightarrow Y$, $u \in U$. Soit $v \in X$, $v \neq 0$. On appelle dérivée directionnelle en u de F dans la direction v , notée $\partial_v F(u)$, la limite lorsqu'elle existe.

$$\partial_v F(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t}.$$

La notion de dérivée directionnelle est donc une extension de la notion de dérivée partielle. Si F est Fréchet différentiable, alors pour tout $v \in X$ la dérivée directionnelle dans la direction v est donnée par

$$\partial_v F(u) = dF(u)v.$$

En effet,

$$F(u + tv) = F(u) + dF(u)(tv) + R(tv).$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t} &= dF(u)(v) + \frac{R(tv)}{t}, \\ \frac{R(tv)}{t} &\rightarrow 0, \text{ lorsque } t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

1.3.7 Différentiabilité au sens de Gâteaux

Définition 1.15. (Différentiabilité au sens de Gâteaux) On dit que $F : U \rightarrow Y$ est Gâteaux différentiable en u (G-différentiable en u), s'il existe une application linéaire continue A de X vers Y , c'est-à-dire $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, telle que pour tout $v \in X$, la dérivée directionnelle de F en u dans la direction v existe et est égale à $A(v)$, c'est-à-dire

$$\partial_v F(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t} = A(v), \quad t \rightarrow 0, \quad \forall v \in X.$$

On vérifie alors que, si une telle application A existe, elle est unique. On note

$$A = d_G F(u).$$

Proposition 1.5. [19] Si F est Fréchet différentiable en u , elle est Gâteaux différentiable en u et

$$\partial_G F(u) = dF(u).$$

La réciproque est fautive en général, même en dimension finie.

Remarque 1.2. La G-différentiabilité n'implique pas la continuité de F .

Exemple 1.2. Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x, y) = \begin{cases} 3, & \text{si } y = x^2 \\ 0, & \text{si } y \neq x^2. \end{cases}$$

est G-différentiable à $(0, 0)$, mais n'est pas continue à $(0, 0)$, (alors que bien entendu la différentiabilité au sens de Fréchet l'implique).

Tandis que, si on sait que F est C^1 au sens de Gâteaux, alors F est Fréchet différentiable sur U et les deux notions coïncident et on a

Théorème 1.3. [19] Soit $F : U \rightarrow Y$ une application G-différentiable (U ouvert de X). On suppose que l'application $v \mapsto d_G F(v)$ est continue sur U . Alors F est Fréchet différentiable sur U et

$$dF(v) = d_G F(v), \quad \forall v \in U.$$

Démonstration - Soit $r \in]0, 1]$ tel que $B_r(u) \subset U$. Puisque $d_G F : U \rightarrow X'$ est continue à u , pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\delta \in]0, 1]$ tel que

$$\|d_G F(u + tv) - d_G F(u)\| < \varepsilon \quad \text{pour } \|v\| < \delta, |t| < 1. \quad (1.1)$$

D'autre par, pour chaque $v \in B_r(0)$ la fonction

$$t \in [0, 1] \mapsto (d_G F(u + tv), v),$$

est la dérivée de la fonction

$$g(t) = F(u + tv) \quad t \in [0, 1].$$

Par conséquent

$$\int_0^1 (d_G F(u + tv), v) dt = g(1) - g(0) = F(u + v) - F(u).$$

Donc

$$F(u + v) - F(u) - (d_G F(u), v) = \int_0^1 (d_G F(u + tv) - d_G F(u), v) dt. \quad (1.2)$$

Soit

$$R(u, v) = \int_0^1 (d_G F(u + tv) - d_G F(u), v) dt.$$

D'après (1.1), pour tout $v \in B_\delta(0)$, nous avons que

$$\begin{aligned} \|R(u, v)\| &\leq \int_0^1 \|d_G F(u + tv) - d_G F(u)\| \|v\| dt \\ &\leq \varepsilon \|v\|. \end{aligned}$$

Pour cette raison $R(u, v) = o(\|v\|)$ quand $\|v\| \rightarrow 0$. Ensuite, (1.2) montre que $d_G F(u)$ est le dérivé de Fréchet de F à u . ■

Remarque 1.3. En pratique, il est plus facile de vérifier la différentiabilité au sens de Gâteaux. Si on veut prouver que F est C^1 , il suffit donc de prouver qu'elle est Gâteaux différentiable, puis de vérifier que la différentiable $d_G F$ est continue.

1.3.8 Espace de Lebesgue L^p

Dans la suite, Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^N muni de la mesure de Lebesgue dx .

Définition 1.16. Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq p < \infty$, on définit

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty\}.$$

est sa une norme définie par

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.17. On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable et } \exists C : |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C : |f(x)| \leq C, \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

Théorème 1.4. (Théorème de convergence dominée de Lebesgue)[3] Soit (f_n) une suite de fonctions de L^1 . On suppose que

(a) $(f_n(x)) \rightarrow f(x)$ p.p Sur Ω .

(b) Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$, telle que pour chaque n , $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p Sur Ω . Alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Théorème 1.5. [3] L'espace L^p est réflexif pour $1 < p < \infty$, et son dual est L^q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Théorème 1.6. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)[3] Soit f et $g \in L^2(\Omega)$. Alors, nous avons que

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |g|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.7. (Inégalité de Hölder)[3] Soit $1 \leq p \leq +\infty$, on note q l'exposant conjugué, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Suppose que $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors,

1. $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$2. \int_{\Omega} |fg| \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|g\|_q.$$

Théorème 1.8. (Théorème de Rellich)[3] Si Ω est un ouvert borné régulier de classe C^1 , alors de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$ on dit que l'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.

Définition 1.18. (fonctions absolument continues) Soit I un intervalle borné. On dit qu'une fonction u est absolument continue $AC(I)$ si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que pour toute suite finie d'intervalles disjoints $(]a_i, b_i[)_{i=0,1,\dots,m}$ de I on a :

$$\sum_{i=0}^m |b_i - a_i| < \delta \implies \sum_{i=0}^m |u(b_i) - u(a_i)| < \varepsilon.$$

Remarque 1.4. toute fonctions absolument continue est continue .

1.4 Théorie des points critiques

1.4.1 Points et valeurs critiques

Définition 1.19. Soit J une fonctionnelle différentiable de X vers \mathbb{R} . Un point $u \in X$ est dit critique pour J ssi

$$dJ(u) = 0.$$

Définition 1.20. On appelle valeur critique, de la fonctionnelle J , de classe C^1 définie sur X , un nombre $c \in \mathbb{R}$, tel qu'il existe $u \in X$, tel que

$$J(u) = c, \quad dJ(u) = 0.$$

Proposition 1.6. [19] Soit X un espace de Banach, et J une application de X vers \mathbb{R} , soit $u \in X$. On suppose que

$$J(u) = \inf_{v \in X} J(v),$$

c'est-à-dire

$$J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in X.$$

Alors, si J est Gâteaux-différentiable en u , on a

$$d_G J(u) = 0.$$

Démonstration - Sous l'hypothèse de ce proposition, supposons sans perte de généralité que u_0 est un point minimum (sinon considérons la fonction $-J$ au lieu de J).

Comme $u_0 \in U$ et U est ouvert, il existe un nombre réel positif r tel que la boule ouverte $B_r(u_0)$ est contenu dans U .

Maintenant, soit $h \in X \setminus \{0\}$. Alors, pour chaque t tel que

$$|t| \leq \frac{r}{\|h\|}, \quad \text{on a,} \quad J(u_0 + th) \geq J(u_0),$$

et ainsi par le Gâteaux différentiabilité de J à u_0 , nous avons

$$d_G J(u_0)(h) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} [J(u_0 + th) - J(u_0)] \geq 0.$$

Il s'ensuit également que $d_G J(u_0)(-h) \geq 0$, i.e., $d_G J(u_0)(h) \leq 0$, par linéarité de $d_G J(u_0)$.

Par conséquent $d_G J(u_0)(h) = 0$, pour tout $h \in X$ en effet. Ainsi $d_G J(u_0) = 0$. ■

Définition 1.21. Soit $u_0 \in X$. On dit que u_0 est un minimum local pour J si il existe $\delta > 0$ tel que

$$J(u_0) \leq J(v), \quad \forall v \in B(u_0, \delta), \quad v \neq u_0.$$

On a alors

Proposition 1.7. [19] Soit $u_0 \in X$, un minimum local de J . Alors si J est Gâteaux différentiable en u_0 , alors

$$d_G J(u_0) = 0.$$

Pour les fonctionnelles convexes (ou espaces convexes), un résultat classique est donné par le théorème suivant

Théorème 1.9. [5] Soit C un ensemble convexe fermé de X , Banach réflexif.

Soit $J : C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On suppose

(i) J coercive et $J \neq +\infty$, c'est-à-dire

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} J(u) = +\infty.$$

(ii) J (s.c.i) pour la convergence faible. Alors il existe $u \in C$, tel que

$$J(u) = \inf_{v \in C} J(v) \quad (< +\infty).$$

Si de plus J est Gâteaux-différentiable en u , alors $d_G J(u) = 0$.

1.4.2 Suite minimisante et infimum

Définition 1.22. (Suite minimisante) Une suite minimisante d'une fonctionnelle $J : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est une suite (x_n) telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J(x_n) = \inf_{x \in X} J(x)$$

Théorème 1.10. [19] Soit X un espace de Banach réflexif, et J une fonctionnelle définie sur X , telle que

1. J est (f.s.c.i),
2. la suite minimisante de J est bornée sur X ,

alors J atteint son infimum sur X .

1.5 Valeurs et vecteurs propres d'opérateurs compacts

1.5.1 L'opérateur adjoint et auto-adjoint

Définition 1.23. Soit H un espace de Hilbert, X un espace de Banach, et X' le dual de X . On note par (\cdot, \cdot) à la fois produit scalaire de H et de la dualité entre X et X' i.e. la fonctionnelle bilinéaire sur $X' \times X$, défini par

$(v', v) = v'(v)$ pour tout $v' \in X'$, $v \in X$.

Propriétés 1.1. ([11]) Pour chaque opérateur linéaire borné $A : H \rightarrow X$, il existe un unique opérateur linéaire borné $A' : X' \rightarrow H$ tel que $(A(u), v') = (u, A'(v'))$ pour tout $u \in H$ et $v' \in X'$.

Définition 1.24. L'opérateur A' donné par la proposition ci-dessus est appelé opérateur adjoint de A .

Définition 1.25. Un opérateur linéaire borné $A : H \rightarrow H$ est dit auto-adjoint si $A = A'$, c'est-à-dire,

$$(A(u), v) = (u, A(v)), \quad \forall u, v \in H.$$

Définition 1.26. Un opérateur linéaire $A : H \rightarrow H$ est dit positif $A \geq 0$ si

$$(A(u), u) \geq 0 \text{ pour tout } u \in H.$$

Théorème 1.11. [6] Si A est un opérateur compact, le sous-espace propre X_λ associé à la valeur propre $\lambda \neq 0$ de A est de dimension finie.

Théorème 1.12. [6] Soit A un opérateur compact sur X alors pour tout ε strictement positif, il ne reste dans le plan complexe (ou sur la droite réelle) en dehors d'un disque $|\lambda| \leq \varepsilon$ qu'un nombre fini de valeurs propres de A .

1.5.2 Valeurs et vecteurs propres d'opérateurs linéaires auto-adjoints compacts

Soit H un espace de Hilbert et A un opérateur auto-adjoint compact sur H . On connaît déjà beaucoup de choses sur les valeurs propres et les vecteurs propres d'un tel opérateur. Entre autres

Théorème 1.13. [6] Si A est non nul, il admet au moins une valeur propre non nulle.

Théorème 1.14. [6] Tout opérateur linéaire compact A a toutes ses valeurs propres réelles et appartient dans $[m, M]$, où

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x), \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x).$$

Si M est non nul, c'est la plus grande valeur propre de A , si m est non nul, c'est la plus petite valeur propre de A

Corollaire 1.2. ([6]) Si A est un opérateur linéaire auto-adjoint compact sur H , on a $\|A\| = |\lambda_1|$, où λ_1 est la plus grande (en module) valeur propre de A , en particulier, cela est vrai pour tout opérateur auto-adjoint dans un espace euclidien (i.e. espace de Hilbert de dimension finie)

1.6 La condition de compacité de Palais-Smale

Définition 1.27. [7] Soit E un espace Banach et $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe C^1 . On dit que J satisfait la condition de Palais-Smale, notée (PS), s'il y a une suite (u_n) dans E telle que

$$(J(u_n)) \text{ bornée, et } J'(u_n) \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow +\infty \quad (1.3)$$

admet une sous-suite convergente.

Toute suite satisfaisante (1.3) est appelée suite de Palais-Smale.

1.6.1 Lemme du Col (Mountain Pass Lemma)

Lemme 1.1. (Lemme du Col)[19]. Soit E un espace de Banach réel et $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfait la condition de Palais-Smale (PS), avec $J(0) = 0$. Supposons que

(a) Il existe $\rho > 0$ et $\alpha > 0$ tels que $J(u) \geq \alpha$ pour tout $u \in E$ avec $\|u\| = \rho$;

(b) Il existe $u_1 \in E$, $\|u_1\|_E > \rho$ tel que $J(u_1) < 0$.

Alors J admet une valeur critique $c \geq \alpha$. De plus, c peut être caractérisée par

On définit

$$\Gamma = \{\gamma \in C^1([0, 1], E) \mid \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_1\}. \quad (1.4)$$

Alors

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} J(\gamma(t)) \geq \alpha \quad (1.5)$$

est une valeur critique de $J(u)$.

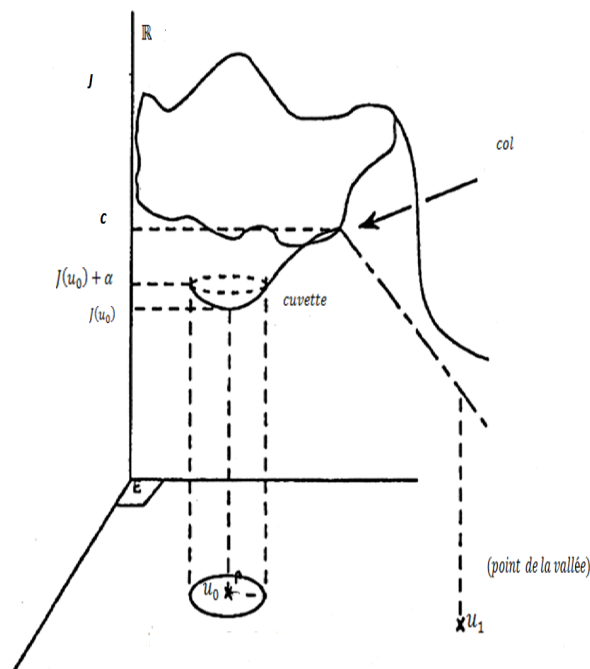


FIGURE 1.1 – Présentation du Col de la montagne.

L'EXISTENCE DU SOLUTION D'UN PROBLÈME AUX LIMITES DE SECOND ORDRE IMPULSIF PAR LA MÉTHODE VARIATIONNELLE.

Sommaire

2.1	Position du problème	15
2.1.1	Les espaces appropriés de notre problème	16
2.1.2	Les valeurs propres de problème linéaire	16
2.1.3	L'hypothèse de base	18
2.2	Construction variationnelle de notre problème	18
2.2.1	La fonctionnelle d'Euler-Lagrange	20
2.2.2	Solution classique et faible	22
2.3	Quelques lemmes nécessaires	24
2.3.1	Théorème de minimisation	27
2.4	Les résultats principaux d'existences	27
2.4.1	Première résultat d'existence	28
2.4.2	Deuxième résultat d'existence	29

Dans ce chapitre, nous discutons l'existence des solutions pour une classe d'équations de second ordre impulsive avec dépendance de dérivée. Pour obtenir nos résultats nous utilisons la méthode variationnelle et le théorème de minimisation, et nous choisissons comme exemple l'article voir[35] qui a été publié par les auteurs JIAN LIU, ZENGQIN ZHAO en 2014. C'est un bon exemple pour étudié l'existence de solutions à un problème aux limites de second ordre impulsif .

2.1 Position du problème

Notre objectifs dans ce chapitre et d'obtenir au moins une solutions aux problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + \lambda u(x) + g(x)u'(x) = f(x, u(x)), & \text{p.p } x \in [0, T], \\ -\Delta u'(x_i) = I_i(u(x_i)), & i = 1, 2, \dots, p, \\ u(0) = 0, \quad \alpha u(T) + \beta u'(T) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où λ est un paramètre, $T > 0$, $g \in C[0, T]$, $f \in C([0, T])$ et $I_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, p$, sont continus, $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_p < x_{p+1} = T$, $\Delta u'(x_i) = u'(x_i^+) - u'(x_i^-) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} u'(x) - \lim_{x \rightarrow x_i^-} u'(x)$, $\alpha \geq 0, \beta > 0$ (où $\beta = 0$).

2.1.1 Les espaces appropriés de notre problème

Nous présentons maintenant l'espace de Hilbert $H_0^1(0, T)$ qui convient à l'étude de notre problème. Soit l'espace H telle que :

$$H := H_0^1(0, T) = \{u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ est absolument continue, } u' \in L^2(0, T) \text{ et } u(0) = 0\},$$

associé au produit scalaire :

$$(u, v) = \int_0^T e^{G(x)} u'(x) v'(x) dx,$$

et muni de la norme :

$$\|u\| = \left(\int_0^T e^{G(x)} (u'(x))^2 dx \right)^{1/2},$$

et l'espace de hilbert $H^2(0, T)$ qui définie comme :

$$H^2(0, T) = \{u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid u, u' \text{ sont absolument continues, } u'' \in L^2(0, T)\}.$$

On considère maintenant l'espaces de lebesgue $L^2(0, T)$ qui définie par :

$$L^2(0, T) = \left\{ u \text{ mesurable} : \int_0^T u^2(x) dx < +\infty \right\},$$

avec la norme associée :

$$\|u\|_{L^2} = \left(\int_0^T |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit l'espace des fonctions définie et continue sur $[0, T]$, i.e,

$$C[0, T] = \{u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ telle que } u \text{ continue}\},$$

muni sa norme usuelle :

$$\|u\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, T]} |u(x)|.$$

2.1.2 Les valeurs propres de problème linéaire

Nous rappelons d'abord quelques résultats de base consiste les valeur propre du problème linéaire qui définie comme suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x), & x \in [0, T], \\ u(0) = 0, & \alpha u(T) + \beta u'(T) = 0, \\ \alpha \geq 0, \beta > 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

Proposition 2.1. Les valeur propre λ pour le problème (2.2) est définie comme :

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi - \gamma}{T} \right)^2,$$

si $\beta = 0$, alors :

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{T} \right)^2, \quad k = 0, 1, \dots,$$

Démonstration - En effet : on résoudre l'équation caractéristique :

$$-r^2 = \lambda \implies r = \mp i\sqrt{\lambda},$$

on obtenu la solution de cette problème comme :

$$u(T) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}T) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}T), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

on applique les conditions aux limits on trouve :

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ \alpha u(T) + \beta u'(T) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} u(T) = \beta \sin(\sqrt{\lambda}T) \\ \alpha \sin(\sqrt{\lambda}T) + \beta \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}T) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Soit γ telle que :

$$\cos(\gamma) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \lambda}} \quad \text{et} \quad \sin(\gamma) = \frac{\beta \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \lambda}},$$

si on divise l'équation (*) sur $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \lambda}$ alors on obtient :

$$\begin{aligned} (*) &\implies \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \lambda}} \sin(\sqrt{\lambda}T) + \frac{\beta \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 \lambda}} \cos(\sqrt{\lambda}T) = 0 \\ &\implies \cos(\gamma) \sin(\sqrt{\lambda}T) + \sin(\gamma) \cos(\sqrt{\lambda}T) = 0 \\ &\implies \sin(\gamma + \sqrt{\lambda}T) = 0 \\ &\implies (\gamma + \sqrt{\lambda}T) = k\pi \\ &\implies \lambda = \lambda_k = \left(\frac{k\pi - \gamma}{T} \right)^2, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

Dans le cas particulier (où $\beta = 0$) :

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ \alpha u(T) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} u(0) = \sin(\sqrt{\lambda}T) = 0 \\ \sin(\sqrt{\lambda}T) = 0 \end{cases} \quad (**).$$

Alors d'après l'équation (**), on a :

$$(**) \implies \sqrt{\lambda}T = K\pi \implies \lambda = \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{T} \right)^2, \quad k = 1, 2, \dots,$$

■

2.1.3 L'hypothèse de base

Nous supposons que :

$$\lambda > -\frac{m\lambda_1}{M}, \text{ ou } m = \min_{x \in [0, T]} e^{G(x)}, M = \max_{x \in [0, T]} e^{G(x)}, \text{ et } G(x) = -\int_0^x g(s)ds.$$

Telle que λ_1 est la première valeur propre de problème linéaire précédent.

Remarque 2.1. De nombreuses recherches portent sur la recherche de la première valeur propre, en raison de son importance, et pour plus d'informations, par exemple, voir les références, [4], [35], [2], et [1].

2.2 Construction variationnelle de notre problème

Pour obtenir la solution faible de le problème on multiplie la première équation par $e^{G(x)}$, on obtient

$$-(e^{G(x)}u'(x))' + \lambda e^{G(x)}u(x) = e^{G(x)}f(x, u(x)).$$

Multipliez maintenant par $v \in H$, les deux côtés, on a donc,

$$-(e^{G(x)}u'(x))'v(x) + \lambda e^{G(x)}u(x)v(x) = e^{G(x)}f(x, u(x))v(x). \quad (2.3)$$

Intégrer (2.3) sur l'intervalle $[0, T]$, et on utilisant les conditions aux limites,

$$u(0) = 0, \quad \text{et } \alpha u(T) + \beta u'(T) = 0,$$

on obtient,

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{G(x)}u'(x)v'(x)dx + \lambda \int_0^T e^{G(x)}u(x)v(x)dx - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)}I_i(u(x_i))v(x_i) + \frac{\alpha}{\beta}e^{G(T)}u(T)v(T) \\ = \int_0^T e^{G(x)}f(x, u(x))v(x)dx. \end{aligned}$$

Remarque 2.2. on montre que :pour tout $u, v \in H$ et $x \in [0, T]$:

$$-\int_0^T e^{G(x)}u''(x)v(x)dx = \int_0^T e^{G(x)}u'(x)v'(x)dx - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)}I_i(u(x_i))v(x_i) + \frac{\alpha}{\beta}e^{G(x)}u(T)v(T).$$

En effet $u, v \in H_0^1(0, T)$, donc on a :

$$-\int_0^T e^{G(x)}u''(x)v(x)dx = -\int_0^{x_1^-} e^{G(x)}u''(x)v(x)dx - \dots - \int_{x_{p-1}^+}^{x_p^-} e^{G(x)}u''(x)v(x)dx - \int_{x_p^+}^T e^{G(x)}u''(x)v(x)dx.$$

En utilisant l'intégration par parties, nous avons

$$\begin{aligned} -\int_0^{x_1^-} e^{G(x)}u''(x)v(x)dx &= -\left[e^{G(x)}u'(x)v(x)\right]_0^{x_1^-} + \int_0^{x_1^-} e^{G(x)}u'(x)v'(x)dx \\ &= -e^{G(x_1^-)}u'(x_1^-)v(x_1^-) + e^{G(0)}u'(0)v(0) + \int_0^{x_1^-} e^{G(x)}u'(x)v'(x)dx, \end{aligned}$$

et en utilisant les conditions aux limites, nous avons

$$-\int_0^{x_1^-} e^{G(x)} u''(x) v(x) dx = -e^{G(x_1^-)} u'(x_1^-) v(x_1^-) + \int_0^{x_1^-} e^{G(x)} u'(x) v'(x) dx,$$

et on a aussi :

$$\begin{aligned} -\int_{x_1^+}^{x_2^-} e^{G(x)} u''(x) v(x) dx &= -\left[e^{G(x)} u'(x) v(x) \right]_{x_1^+}^{x_2^-} + \int_{x_1^+}^{x_2^-} e^{G(x)} u'(x) v'(x) dx \\ &= -e^{G(x_2^-)} u'(x_2^-) v(x_2^-) + e^{G(x_1^+)} u'(x_1^+) v(x_1^+) + \int_{x_1^+}^{x_2^-} e^{G(x)} u'(x) v'(x) dx, \end{aligned}$$

jusqu'à

$$\begin{aligned} -\int_{x_{p-1}^+}^{x_p^-} e^{G(x)} u''(x) v(x) dx &= -\left[e^{G(x)} u'(x) v(x) \right]_{x_{p-1}^+}^{x_p^-} + \int_{x_{p-1}^+}^{x_p^-} e^{G(x)} u'(x) v'(x) dx \\ &= -e^{G(x_p^-)} u'(x_p^-) v(x_p^-) + e^{G(x_{p-1}^+)} u'(x_{p-1}^+) v(x_{p-1}^+) + \int_{x_{p-1}^+}^{x_p^-} e^{G(x)} u'(x) v'(x) dx, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -\int_{x_p^+}^T e^{G(x)} u''(x) v(x) dx &= -\left[e^{G(x)} u'(x) v(x) \right]_{x_p^+}^T + \int_{x_p^+}^T e^{G(x)} u'(x) v'(x) dx \\ &= -e^{G(T)} u'(T) v(T) + e^{G(x_p^+)} u'(x_p^+) v(x_p^+) + \int_{x_p^+}^T e^{G(x)} u'(x) v'(x) dx, \end{aligned}$$

et comme,

$$\Delta u'(x_1) v(x_1) = (u'(x_1^+) - u'(x_1^-)) v(x_1), \dots, \Delta u'(x_p) v(x_p) = (u'(x_p^+) - u'(x_p^-)) v(x_p).$$

En utilisant la condition impulsive et les conditions aux limites dans le problème, on obtient donc :

$$\begin{aligned} \Delta u'(x_1) v(x_1) + \Delta u'(x_2) v(x_2) + \dots + \Delta u'(p) v(p) &= \sum_{i=1}^p \Delta u'(x_i) v(x_i) \\ &= -\sum_{i=1}^p I_i(u(x_i)) v(x_i), \end{aligned}$$

et comme

$$\alpha u(T) + \beta u'(T) = 0 \implies u'(T) = -\frac{\alpha}{\beta} u(T).$$

Alors par substitution on a

$$\begin{aligned} \int_0^{x_1^-} e^{G(x)} u'(x) v'(x) dx + \int_{x_1^+}^{x_2^-} e^{G(x)} u'(x) v'(x) dx + \int_{x_{p-1}^+}^{x_p^-} e^{G(x)} u'(x) v'(x) dx + \int_{x_p^+}^T e^{G(x)} u'(x) v'(x) dx \\ = \int_0^T e^{G(x)} u'(x) v'(x) dx, \end{aligned}$$

enfin, on trouve

$$-\int_0^T e^{G(x)} u''(x) v(x) dx = \int_0^T e^{G(x)} u'(x) v'(x) dx - \sum_{i=1}^p e^{G(x)} I_i(u(x_i)) v(x_i) + \frac{\alpha}{\beta} e^{G(x)} u(T) v(T).$$

2.2.1 La fonctionnelle d'Euler-Lagrange

Pour tout $u \in H_0^1(0, T)$ on définit la fonctionnelle J par

$$J(u) = \frac{1}{2}A(u, u) - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} \int_0^{u(x_i)} I_i(x) dx - \int_0^T e^{G(x)} F(x, u(x)) dx, \quad (2.4)$$

telle que $F(x, u) = \int_0^u f(x, s) dx$ et A est un opérateur définie par,

$$A(u, v) = \int_0^T e^{G(x)} u'(x) v'(x) dx + \lambda \int_0^T e^{G(x)} u(x) v(x) dx + \frac{\alpha}{\beta} e^{G(T)} u(T) v(T).$$

Proposition 2.2. *La fonctionnelle J est continuellement différentiable. La dérivée de Fréchet de J sous la forme :*

$$\begin{aligned} \langle J'(u), v \rangle &= \int_0^T e^{G(x)} u'(x) v'(x) dx + \lambda \int_0^T e^{G(x)} u(x) v(x) dx + \frac{\alpha}{\beta} e^{G(T)} u(T) v(T) \\ &\quad - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} I_i(u(x_i)) v(x_i) - \int_0^T e^{G(x)} f(x, u(x)) v(x) dx. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Démonstration - Étape 1 : On prouve J est Gâteaux-différentiable pour toute $v \in H_0^1(0, T)$, nous avons

$$\begin{aligned} J(u + tv) - J(u) &= \frac{1}{2} \left[\int_0^T e^{G(x)} \left((u + tv)' \right)^2 dx + \lambda \int_0^T e^{G(x)} (u + tv)^2 dx + \frac{\alpha}{\beta} e^{G(x)} (u + tv)^2 \right] \\ &\quad - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} \int_0^{u+tv} I_i(x) dx - \int_0^T e^{G(x)} F(u + tv) dx - \frac{1}{2} \left[\int_0^T e^{G(x)} (u')^2 dx \right. \\ &\quad \left. + \lambda \int_0^T e^{G(x)} (u)^2 dx + \frac{\alpha}{\beta} e^{G(x)} (u)^2 \right] + \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} \int_0^u I_i(x) dx + \int_0^T e^{G(x)} F(u) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(u + tv) - J(u) &= \frac{t^2}{2} \int_0^T e^{G(x)} (v')^2 dx + t \int_0^T e^{G(x)} u' v' dx + \lambda \left(\frac{t^2}{2} \int_0^T e^{G(x)} (v)^2 dx + t \int_0^T e^{G(x)} u v dx \right) \\ &\quad + \frac{\alpha}{\beta} e^{G(x)} \left[\frac{1}{2} t^2 v^2 + t u v \right] - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} \left[\int_0^{u+tv} I_i(x) dx - \int_0^u I_i(x) dx \right] \\ &\quad - \int_0^T e^{G(x)} \left[F(u + tv) - F(u) \right] dx, \end{aligned}$$

alors d'après le théorème d'accroissement finis :

$$F(u + tv) - F(u) = t \int_0^T f(u + t\theta v) v dx,$$

et

$$\int_0^{u+tv} I_i(x) dx - \int_0^u I_i(x) dx = tv(x_i)I_i(u(x_i) + \theta v(x_i)),$$

où $0 < \theta < T$, et puis

$$\begin{aligned} J(u + tv) - J(u) &= \frac{t^2}{2} \int_0^T e^{G(x)} (v')^2 dx + t \int_0^T e^{G(x)} u' v' dx + \lambda \left(\frac{t^2}{2} \int_0^T e^{G(x)} (v)^2 dx + t \int_0^T e^{G(x)} uv dx \right) \\ &\quad + \frac{\alpha}{\beta} e^{G(x)} \left[\frac{1}{2} t^2 v^2 + tuv \right] - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} v(x_i) t \left[I_i(u(x_i) + \theta v(x_i)) \right] \\ &\quad - t \int_0^T e^{G(x)} \left[f(u + t\theta v) v \right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} &= \frac{t}{2} \int_0^T e^{G(x)} (v')^2 dx + \int_0^T e^{G(x)} u' v' dx + \lambda \left(\frac{t}{2} \int_0^T e^{G(x)} (v)^2 dx + \int_0^T e^{G(x)} uv dx \right) \\ &\quad + \frac{\alpha}{\beta} e^{G(x)} \left[\frac{1}{2} t v^2 + uv \right] - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} v(x_i) \left(I_i(u(x_i) + \theta v(x_i)) \right) \\ &\quad - \int_0^T e^{G(x)} \left(f(u + t\theta v) v \right) dx. \end{aligned}$$

Soit $t \rightarrow 0$, alors :

$$\langle J'(u), v \rangle = \int_0^T e^{G(x)} u' v' dx + \lambda \int_0^T e^{G(x)} uv dx + \frac{\alpha}{\beta} e^{G(x)} uv - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} I_i(u) v - \int_0^T e^{G(x)} f(x, u) v dx.$$

Étape2 : On montre que J' est continue, alors soit $(u_n) \subset H_0^1(0, T)$ avec $u_n \rightarrow u$, quand $n \rightarrow +\infty$, donc par le théorème de convergence dominé de lebeusge on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{G(x)} u_n'(x) v'(x) dx = \int_0^T e^{G(x)} u'(x) v'(x) dx,$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda \int_0^T e^{G(x)} u_n(x) v(x) dx &= \lambda \int_0^T e^{G(x)} u(x) v(x) dx, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{G(x)} f(x, u_n(x)) v(x) dx &= \int_0^T e^{G(x)} f(x, u(x)) v(x) dx, \end{aligned}$$

par conséquent, nous avons pour tout $v \in H_0^1(0, T)$:

$$\begin{aligned} \langle J'(u_n) - J'(u), v \rangle &= \int_0^T e^{G(x)} u_n' v' dx + \lambda \int_0^T e^{G(x)} u_n v dx + \frac{\alpha}{\beta} e^{G(x)} u_n v - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} I_i(u_n) v - \int_0^T e^{G(x)} f(x, u_n) v dx \\ &\quad - \int_0^T e^{G(x)} u' v' dx - \lambda \int_0^T e^{G(x)} u v dx - \frac{\alpha}{\beta} e^{G(x)} u v + \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} I_i(u) v + \int_0^T e^{G(x)} f(x, u) v dx \\ &= \int_0^T (u_n' - u') v' dx + \int_0^T (u_n - u) v dx + \frac{\alpha}{\beta} e^{G(x)} (u_n - u) v - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} I_i(u_n - u) v \\ &\quad - \int_0^T e^{G(x)} f(x, u_n - u) v dx, \end{aligned}$$

et d'après la continuité de f en passe a la limite $\langle J'(u_n) - J'(u), v \rangle$, quand $n \rightarrow +\infty$, nous obtenons que $J'(u_n) \rightarrow J'(u)$, quand $n \rightarrow +\infty$. Donc J' est continue. ■

Définition 2.1. On dit que $u \in H_0^1(0, T)$ est une solution faible du problème étudié, si pour tout $v \in H_0^1(0, T)$, on a

$$\begin{aligned} \langle J'(u), v \rangle &= \int_0^T e^{G(x)} u'(x) v'(x) dx + \lambda \int_0^T e^{G(x)} u(x) v(x) dx + \frac{\alpha}{\beta} e^{G(T)} u(T) v(T) - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} I_i(u(x_i)) v(x_i) \\ &\quad - \int_0^T e^{G(x)} f(x, u(x)) v(x) dx = 0. \end{aligned}$$

2.2.2 Solution classique et faible

Lemme 2.1. [35] Si $u \in H$ est une solution faible de notre problème, alors u est une solution classique.

Démonstration - Par la définitions de la solution faible

$$\begin{aligned} \langle J'(u), v \rangle &= 0 \\ \int_0^T e^{G(x)} u'(x) v'(x) dx + \lambda \int_0^T e^{G(x)} u(x) v(x) dx + \frac{\alpha}{\beta} e^{G(T)} u(T) v(T) - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} I_i(u(x_i)) v(x_i) \\ &\quad - \int_0^T e^{G(x)} f(x, u(x)) v(x) dx = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Pour $i \in \{0, 1, 2, \dots, p\}$, on choisit $v \in H$ avec $v(x) = 0$ pour chaque $x \in [0, x_i] \cup [x_{i+1}, T]$. Ensuite nous avons :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{G(x)} u'(x) v'(x) dx + \lambda \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{G(x)} u(x) v(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{G(x)} f(x, u(x)) v(x) dx.$$

L'expression au dessus implique :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(- (e^{G(x)} u'(x))' + \lambda e^{G(x)} u(x) - e^{G(x)} f(x, u(x)) \right) v(x) dx = 0$$

Par la définition de la dérivée faible, on trouve :

$$-(e^{G(x)}u'(x))' + \lambda e^{G(x)}u(x) = e^{G(x)}f(x, u(x)), \quad \text{p.p } x \in (x_i, x_{i+1}). \quad (2.7)$$

i.e.

$$-u''(x) + \lambda u(x) + g(x)u'(x) = f(x, u), \quad \text{p.p } x \in (x_i, x_{i+1}).$$

Il reste de montrer que u satisfait les conditions aux limites et impulsives dans la première équation que nous avons étudiée. On multiplie par $v \in H$, $v(T) = 0$ et intègre entre 0 et T alors l'équation (2.6) implique que :

$$\begin{aligned} \int_0^T \left((e^{G(x)}u'(x))' + \lambda \int_0^T e^{G(x)}u(x) - \int_0^T e^{G(x)}f(x, u) \right) v(x) dx - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} I_i(u(x_i)) v(x_i) &= 0 \\ \implies \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} I_i(u) v &= 0. \end{aligned}$$

Alors on fait des étapes pour obtenir le résultat :

$$\sum_{i=0}^p \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{G(x)}u'(x)v'(x) dx + \lambda \int_0^T e^{G(x)}u(x) dx - \int_0^T e^{G(x)}f(x, u(x)) dx - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} I_i(u(x_i)) v(x_i) = 0,$$

en utilisant l'intégration par parties sur :

$$\sum_{i=0}^p \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{G(x)}u'(x)v'(x) dx,$$

On trouve donc,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^p \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{G(x)}u'(x)v'(x) dx &= \int_0^{x_1^-} e^{G(x)}u'(x)v'(x) dx + \int_{x_p^+}^T e^{G(x)}u'(x)v'(x) dx + \sum_{i=1}^{p-1} \int_{x_i^+}^{x_{i+1}^-} e^{G(x)}u'(x)v'(x) dx \\ &= - \int_0^{x_1^-} e^{G(x)}(u'(x))' v(x) dx + e^{G(x_1^-)}u'(x_1^-)v(x_1^-) - \int_{x_p^+}^T e^{G(x)}(u'(x))' v(x) dx \\ &\quad - e^{G(x_p^+)}u'(x_p^+)v(x_p^+) + \sum_{i=1}^{p-1} \left[- \int_{x_i^+}^{x_{i+1}^-} e^{G(x)}(u'(x))' dx + e^{G(x_{i+1}^-)}u'(x_{i+1}^-)v(x_{i+1}^-) \right. \\ &\quad \left. - e^{G(x_i^+)}u'(x_i^+)v(x_i^+) \right] \\ &= e^{G(x_1)}u'(x_1^-)v(x_1^-) - e^{G(x_p^+)}u'(x_p^+)v(x_p^+) + \sum_{i=1}^{p-1} \left[e^{G(x_{i+1}^-)}u'(x_{i+1}^-)v(x_{i+1}^-) \right. \\ &\quad \left. - e^{G(x_i^+)}u'(x_i^+)v(x_i^+) \right] - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} I_i(u(x_i)) v(x_i) = 0. \end{aligned}$$

Pour simplifier on pose $a_i = e^{G(x_i)}v(x_i)$

$$\begin{aligned} &= [a_2u'(x_2^-) - a_1u'(x_1^+)] + [a_3u'(x_3^-) - a_2u'(x_2^+)] + \dots + [a_1u'(x_1^-) - a_pu'(x_p^+)] = 0 \\ &= -a_1\Delta u'(x_1) - a_2\Delta u'(x_2) - a_3\Delta u'(x_3) - \dots - a_p\Delta u'(x_p) = 0 \end{aligned}$$

$$-\sum_{i=1}^p a_i \Delta u'(x_i) = 0,$$

alors on obtient

$$-\sum_{i=1}^p \Delta(e^{G(x_i)} u'(x_i)) v(x_i) = \sum_{i=1}^p (e^{G(x_i)} I(x_i)) v(x_i).$$

Donc, on a :

$$-\Delta u'(x_i) = I_i(u(x_i)), \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

par suite u satisfait les conditions impulsives et aussi les conditions aux limits :

$$u(0) = 0, \quad \alpha u(T) + \beta u'(T) = 0.$$

Enfin, en résulte que u est une solution classique de notre problème. ■

Remarque 2.3. Puisque le terme non linéaire f est continue, alors une solution faible du problème (2.1) est une solution classique.

2.3 Quelques lemmes nécessaires

Lemme 2.2. [35] $H_0^1(0, T)$ s'injecte de manière continue dans $C[0, T]$, i.e., Il existe $\delta > 0$ tel que si $u \in H$, alors

$$\|u\|_\infty \leq \delta \|u\|,$$

$$\text{où } \|u\|_\infty = \max_{x \in [0, T]} |u(x)|.$$

Démonstration - Pour tout $u \in H_0^1(0, T)$, et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \left| \int_0^x u'(s) ds \right| \\ &\leq \int_0^x |u'(s)| ds \leq \int_0^T |u'(x)| dx \\ &\leq \left(\int_0^T \frac{1}{e^{G(x)}} dx \right)^{1/2} \left(\int_0^T e^{G(t)} |u'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{\frac{T}{m}} \|u\|. \end{aligned}$$

D'où,

$$\|u\|_\infty \leq \sqrt{\frac{T}{m}} \|u\|.$$

Ainsi, nous pouvons choisir $\delta = \sqrt{\frac{T}{m}}$ telle que le lemme soit vérifié. ■

Remarque 2.4. On sait que l'injection canonique de $H_0^1(0, T)$ dans $C(0, T)$, est compact d'après le théorème de Rellich (voir chapitre 1), et on a

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u, & \text{dans } H_0^1(0, T), \\ u_n \rightarrow u, & \text{dans } C[0, T], \\ u_n(x) \rightarrow u(x), & \text{p.p dans } (0, T). \end{cases}$$

Lemme 2.3. *L'injection de $H_0^1(0, T)$ dans l'espace $L^2(0, T)$ est continue.*

Démonstration - Soit $u \in H$, on a d'après lemme 2.2

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &\leq \frac{T}{m} \|u\|^2 \\ \int_0^T |u(x)|^2 dx &\leq \frac{T}{m} \int_0^T \|u\|^2 dx \\ \int_0^T |u(x)|^2 dx &\leq \frac{T}{m} \|u\|^2 \int_0^T dx \\ \int_0^T |u(x)|^2 dx &\leq \frac{T^2}{m} \|u\|^2. \end{aligned}$$

Alors

$$\|u\|_{L^2} = \left(\int_0^T |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \frac{T}{\sqrt{m}} \|u\|.$$

■

Remarque 2.5. la norme dans l'espace H et de l'espace usuelle $H_0^1(0, T)$ sont équivalentes, i.e. :
il exist $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, telles que :

$$\alpha \|u\|_{H_0^1(0, T)} \leq \|u\| \leq \beta \|u\|_{H_0^1(0, T)},$$

$$\text{où : } \|u\|_{H_0^1(0, T)} = \left(\int_0^T (u'(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration - Soit $m = \min_{x \in [0, T]} e^{G(x)}$, $M = \max_{x \in [0, T]} e^{G(x)}$, pour tout $u' \in H$ on a :

$$m \leq e^{G(x)} \leq M$$

$$m(u'(x))^2 \leq e^{G(x)}(u'(x))^2 \leq M(u'(x))^2,$$

on intègre chaque membre :

$$m \int_0^T (u'(x))^2 dx \leq \int_0^T e^{G(x)}(u'(x))^2 dx \leq M \int_0^T (u'(x))^2 dx,$$

alors on trouve le résultat :

$$m \|u\|_{H_0^1(0, T)}^2 \leq \|u\|^2 \leq M \|u\|_{H_0^1(0, T)}^2.$$

■

Lemme 2.4. [35] *Il existe deux constantes $\theta_2 > \theta_1 > 0$ telles que si $u \in H$, alors*

$$\theta_1 \|u\|^2 \leq A(u, u) \leq \theta_2 \|u\|^2.$$

Démonstration - Premièrement lorsque $\lambda \geq 0$, on obtient les résultats suivants par lemme 2.3

$$\begin{aligned}
A(u, u) &= \int_0^T e^{G(x)} (u'(x))^2 dx + \lambda \int_0^T e^{G(x)} (u(x))^2 dx + \frac{\alpha}{\beta} e^{G(T)} u^2(T) \\
&\leq \int_0^T e^{G(x)} (u'(x))^2 dx + \lambda M \int_0^T (u(x))^2 dx + \frac{\alpha}{\beta} e^{G(T)} u^2(T) \\
&\leq \int_0^T e^{G(x)} (u'(x))^2 dx + \frac{\lambda M}{\lambda_1} \int_0^T \frac{e^{G(x)}}{m} (u'(x))^2 dx + \frac{\alpha}{\beta} e^{G(T)} u^2(T) \\
&\leq \left(1 + \frac{\lambda M}{\lambda_1 m}\right) \int_0^T e^{G(x)} (u'(x))^2 dx + \frac{M\alpha}{\beta} \|u(x)\|_\infty^2 \\
&\leq \left(1 + \frac{\lambda M}{\lambda_1 m} + \frac{M\alpha\delta^2}{\beta}\right) \|u\|^2.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
A(u, u) &= \int_0^T e^{G(t)} (u'(x))^2 dx + \lambda \int_0^T e^{G(x)} (u(x))^2 dx + \frac{\alpha}{\beta} e^{G(T)} u^2(T) \\
&\geq \int_0^T e^{G(x)} (u'(x))^2 dx \\
&= \|u\|^2.
\end{aligned}$$

ainsi $\theta_1 = 1, \theta_2 = 1 + \frac{\lambda M}{\lambda_1 m} + \frac{M\alpha\delta^2}{\beta}$.

Deuxièmement lorsque $0 > \lambda > -m\lambda_1/M$, en utilisant lemme 2.3 (l'inégalité de Poincaré), on a

$$\begin{aligned}
A(u, u) &= \int_0^T e^{G(x)} (u'(x))^2 dx + \lambda \int_0^T e^{G(x)} (u(x))^2 dx + \frac{\alpha}{\beta} e^{G(T)} u^2(T) \\
&\geq \int_0^T e^{G(x)} (u'(x))^2 dx + \lambda \int_0^T e^{G(x)} (u(x))^2 dx \\
&\geq \int_0^T e^{G(x)} (u'(x))^2 dx + \lambda M \int_0^T (u(x))^2 dx \\
&\geq \int_0^T e^{G(x)} (u'(x))^2 dx + \frac{\lambda M}{\lambda_1} \int_0^T (u'(x))^2 dx \\
&\geq \int_0^T e^{G(x)} (u'(x))^2 dx + \frac{\lambda M}{\lambda_1 m} \int_0^T e^{G(x)} (u'(x))^2 dx \\
&= \left(1 + \frac{\lambda M}{\lambda_1 m}\right) \|u\|^2,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
A(u, u) &= \int_0^T e^{G(x)} (u'(x))^2 dx + \lambda \int_0^T e^{G(x)} (u(x))^2 dx + \frac{\alpha}{\beta} e^{G(T)} u^2(T) \\
&\leq \int_0^T e^{G(x)} (u'(x))^2 dx + \frac{\alpha}{\beta} e^{G(T)} u^2(T) \\
&\leq \left(1 + \frac{M\alpha\delta^2}{\beta}\right) \|u\|^2,
\end{aligned}$$

$$\text{ainsi, } \theta_1 = 1 + \frac{\lambda M}{\lambda_1 m}, \theta_2 = 1 + \frac{M\alpha\delta^2}{\beta}. \quad \blacksquare$$

Lemme 2.5. [35] *La fonctionnelle J est continue, et faiblement semi-continue inférieurement.*

Démonstration - Par la continuité de f et I_i ($i = 1, 2, \dots, p$), il est facile de vérifier que la fonctionnelle J est continue, continûment différentiable (voir preuve de proposition 2.2). Pour montrer que J est faiblement semi-continue inférieurement, soit $\{u_n\}$ une suite convergente faiblement vers u dans H , alors d'après (f.s.c.i) de la norme (voir exemple 1.1 dans chapitre 1), on a

$$\|u\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|,$$

et comme $\{u_n\}$ converge uniformément vers u dans $[0, T]$ (d'après l'injection compacte de $H_0^1(0, T)$ dans $C[0, T]$), donc quand, $n \rightarrow \infty$, nous avons

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} J(u_n) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \|u_n\|^2 + \frac{\lambda}{2} \int_0^T e^{G(x)} (u_n(x))^2 dx + \frac{\alpha}{2\beta} e^{G(T)} u_n^2(T) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^T e^{G(x)} F(x, u_n) dx - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} \int_0^{u_n(x_i)} I_i(x) dx \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{\lambda}{2} \int_0^T e^{G(x)} (u(x))^2 dx + \frac{\alpha}{2\beta} e^{G(T)} u^2(T) \\ &\quad - \int_0^T e^{G(x)} F(x, u) dx - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} \int_0^{u(x_i)} I_i(x) dx \\ &= J(u). \end{aligned}$$

Ainsi, par Définition (1.12), J est faiblement semi-continue inférieurement. \blacksquare

2.3.1 Théorème de minimisation

Théorème 2.1. [15] : *Soient X un espace de Banach réflexif, et J une fonctionnelle définie sur X , telle que*

1. $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} J(x) = +\infty$ (coercivité uniforme)
2. J est (f.s.c.i),

alors J est bornée inférieurement sur X et atteint sa borne inférieure en un point x_0 . De plus, si J est Gâteaux différentiable en x_0 , alors $\text{Grad } J(x_0) = 0$.

2.4 Les résultats principaux d'existences

Nous établissons maintenant nos résultats d'existence dans les deux théorèmes suivants.

2.4.1 Première résultat d'existence

Théorème 2.2. [35] Supposons que $\lambda > -\frac{m\lambda_1}{M}$, f et I_i , ($i = 1, 2, \dots, p$) soient bornés, et de plus $f(x, 0) \not\equiv 0$, alors l'équation (2.1) admet au moins une solution classique.

Démonstration - Soit $C > 0$, $C_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, p$, telle que

$$\begin{aligned} |f(x, u)| &\leq C, |F(x, u)| \leq C|u| \quad \forall (x, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \\ |I_i(u)| &\leq C_i, \quad \forall (x, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, p. \end{aligned}$$

Pour tout $u \in H$, et par les deux lemmes 2.4 et 2.2, on a :

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}A(u, u) - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} \int_0^{u(x_i)} I_i(x) dx - \int_0^T e^{G(x)} F(x, u(x)) dx \\ &\geq \frac{1}{2}\theta_1 \|u\|^2 - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} \int_0^{u(x_i)} I_i(x) dx - \int_0^T e^{G(x)} F(x, u(x)) dx \\ &\geq \frac{1}{2}\theta_1 \|u\|^2 - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} C_i |u(x_i)| - \int_0^T e^{G(x)} F(x, u(x)) dx \\ &\geq \frac{1}{2}\theta_1 \|u\|^2 - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} C_i |u(x_i)| - CM \int_0^T |u(x)| dx \\ &\geq \frac{1}{2}\theta_1 \|u\|^2 - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} C_i \|u\|_\infty - CMT \|u\|_\infty \\ &\geq \frac{1}{2}\theta_1 \|u\|^2 - M \sum_{i=1}^p C_i \|u\|_\infty - CMT \|u\|_\infty \\ &\geq \frac{1}{2}\theta_1 \|u\|^2 - M \sum_{i=1}^p C_i \delta \|u\| - CMT \delta \|u\|, \end{aligned}$$

ce qui implique que $\liminf_{\|u\| \rightarrow \infty} J(u) = +\infty$, donc J est coercive.

Ainsi J admet un minimum, qui est un point critique de J , alors le problème (2.1) admet au moins une solution. ■

Exemple 2.1. On prend $T > 0$, $x_1 \in (0, T)$, $g(x) = x$, $a(x), b(x) \in C([0, T], \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$. On Considère l'équation

$$\begin{cases} -u''(x) + \lambda u(x) + g(x)u'(x) = a(x) \sin u(x) + b(x), & \forall x \in [0, T], \\ -\Delta u'(x_1) = c \cos u(x_1), \\ u(0) = 0, \quad \alpha u(T) + \beta u'(T) = 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

quand $\lambda = \frac{-m\lambda_1}{M} > -e^{T^2/2}\lambda_1$, d'après le théorème 2.2, alors l'équation (2.8) admet une solution

2.4.2 Deuxième résultat d'existence

De manière analogue on a le résultat suivant :

Théorème 2.3. [35] *Supposons que $\lambda > -m\lambda_1/M$, f et I_i ($i = 1, 2, \dots, p$), satisfait les conditions sous-linéaire, et de plus $f(x, 0) \not\equiv 0$, alors (2.1) admet au moins une solution classique.*

Démonstration - Comme $(fx, 0) \not\equiv 0$ il ya $a > 0$, $\delta_1 \leq 1$ et, $\forall(x, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}$

$$|f(x, u)| \leq a, \quad |u| \leq \delta_1 \leq 1, \quad \forall x \in [0, T], \quad (2.9)$$

et $b > 0$, $\delta_2 \geq 1$, et $\gamma \in [0, 1)$, alors d'après la sous linéarité on a :

$$|f(x, u)| \leq b|u|^\gamma, \quad |u| \geq \delta_2 \geq 1, \quad \forall x \in [0, T], \quad (2.10)$$

alors on trouve d'après (2.9) et (2.10)

$$|f(x, u)| \leq a + b|u|^\gamma, \quad \forall(x, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

De la même manière avec $I_i(u)$, on prend $a_i, b_i > 0$, $\delta_{1i} \leq 1$, $\delta_{2i} \geq 1$ et $\gamma_i \in [0, 1)$, $i = 1, 2, \dots, p$, on trouve :

$$|I_i(u)| \leq a_i + b_i|u|^{\gamma_i}, \quad \forall(x, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

En utilisant lemme 2.2 et 2.4 et les mêmes méthodes que dans la preuve ci-dessus,

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{2}\theta_1\|u\|^2 - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)}(a_i|u| + \frac{b_i}{\gamma_i + 1}|u|^{\gamma_i+1}) - \int_0^T e^{G(x)}(a|u| + \frac{b}{\gamma + 1}|u|^{\gamma+1}) \\ &\geq \frac{1}{2}\theta_1\|u\|^2 - M \sum_{i=1}^p (a_i\|u\|_\infty + \frac{b_i}{\gamma_i + 1}\|u\|_\infty^{\gamma_i+1}) - MT(a\|u\|_\infty + \frac{b}{\gamma + 1}\|u\|_\infty^{\gamma+1}) \\ &\geq \frac{1}{2}\theta_1\|u\|^2 - M\delta \sum_{i=1}^p (a_i\|u\| + \frac{b_i}{\gamma_i + 1}\|u\|^{\gamma_i+1}) - MT\delta(a\|u\| + \frac{b}{\gamma + 1}\|u\|^{\gamma+1}), \end{aligned}$$

et comme $-\|u\| \geq -|u|^{\gamma+1}$ alors :

$$\geq \frac{1}{2}\theta_1\|u\|^2 - \|u\|^{\gamma+1} \left[M\delta \sum_{i=1}^p (a_i + \frac{b_i}{\gamma_i + 1}) + MT\delta(a + \frac{b}{\gamma + 1}) \right],$$

alors enfin Il existe $\eta > 0$ telle que

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\theta_1\|u\|^2 - \eta\|u\|^{\gamma+1},$$

avec :

$$\eta = M\delta \sum_{i=1}^p (a_i + \frac{b_i}{\gamma_i + 1}) + MT\delta(a + \frac{b}{\gamma + 1}).$$

Ce qui implique que $\liminf_{\|u\| \rightarrow \infty} J(u) = +\infty$, ainsi J est coercive. Ainsi, d'après Lemme 2.7, et Théorème 1.1, (voir [15]), J admet un minimum, qui est un point critique de J , alors (2.1) admet au moins une solution. ■

Exemple 2.2. On prend $T > 0$, $x_1 \in (0, T)$, $g(x) = x$, $a(x)$, $b(x) \in C([0, T], \mathbb{R})$, $c, d \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$. On considère l'équation :

$$\begin{cases} -u''(t) + \lambda u(x) + g(x)u'(x) = a(x)\sqrt[3]{u(x)} + b(x)\sin u(x), & \text{p.p } x \in [0, T], \\ -\Delta u'(x_1) = c\sqrt[5]{u(x_1)} + d\cos u(x_1), \\ u(0) = 0, \quad \alpha u(T) + \beta u'(T) = 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

Si on prend $\lambda = -\frac{m\lambda_1}{M} > -e^{T^2/2}\lambda_1$, alors d'après le théorème 2.3, l'équation (2.13) admet une solution.

ÉTUDE LA MULTIPLICITÉ DES SOLUTIONS D'UN PROBLÈME AUX LIMITES DE SECOND ORDRE IMPULSIF AVEC DÉPENDANCE DE DÉRIVÉE.

Sommaire

3.1	Introduction	31
3.2	Quelque lemmes utilisée	32
3.2.1	Condition d'Ambrosetti-Rabinowitz	32
3.3	Les résultats d'existences et multiplicités	33
3.3.1	L'existence et multiplicités par lemme de Col	33
3.3.2	L'existence d'infinité des solutions par théorème de point selle	38

Dans le dernier chapitre, nous discutons la multiplicité des solutions pour une classe d'équations de second ordre impulsive par le lemme du Col et théorème de point selle. Pour obtenir nos résultats, nous choisissons comme exemple l'article [35] qui a été publié par les auteurs JIAN LIU, ZENG-QIN ZHAO en 2014. C'est un bon exemple pour étudier la multiplicité des solutions à un problème aux limites de second ordre impulsif .

3.1 Introduction

Nous considérons le même problème précédent (2.1),

$$\begin{cases} -u''(x) + \lambda u(x) + g(x)u'(x) = f(x, u(x)), & \text{p.p } x \in [0, T], \\ -\Delta u'(x_i) = I_i(u(x_i)), & i = 1, 2, \dots, p, \\ u(0) = 0, \quad \alpha u(T) + \beta u'(T) = 0, \end{cases}$$

où λ est un paramètre, $T > 0$, $g \in C[0, T]$, $f \in C([0, T])$ et $I_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, p$, sont continus, $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_p < x_{p+1} = T$, $\Delta u'(x_i) = u'(x_i^+) - u'(x_i^-) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} u'(x) - \lim_{x \rightarrow x_i^-} u'(x)$, $\alpha \geq 0, \beta > 0$ (où $\beta = 0$).

3.2 Quelques lemmes utilisées

Lemme 3.1. (Lemme du col de montagne).[35], [19]

Soient E un espace de Banach et $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfait la condition de Palais-Smale. Supposons qu'il existe $x_0, x_1 \in E$, et un voisinage ouvert borné Ω de x_0 tel que $x_1 \notin \overline{\Omega}$ et

$$\max\{J(x_0), J(x_1)\} < \inf_{x \in \partial\Omega} J(x).$$

Alors il existe une valeur critique de J ; c'est-à-dire qu'il existe $u \in E$ tel que $J'(u) = 0$ et $J(u) > \max\{J(x_0), J(x_1)\}$.

Lemme 3.2. (le théorème du point selle).[35]

Soit E un espace de Banach réel de dimension infinie. Soit $J \in C^1(E, \mathbb{R})$ une fonctionnelle paire qui vérifie la condition de Palais-Smale, et $J(0) = 0$. Supposons que $E = V \oplus X$, où V est de dimension infinie, et J satisfait que

- (i) il existe $\gamma > 0$ et $\rho > 0$ tels que $J(u) \geq \gamma$ pour tout $u \in X$ avec $\|u\| = \rho$,
- (ii) pour tout sous-espace de dimension finie $W \subset E$ il y a $R = R(W)$ telle que $J(u) \leq 0$ on $W \setminus B_R(W)$.

Alors J possède une suite illimitée de valeurs critiques.

Lemme 3.3. [35] Pour la fonctionnelle $F : M \subseteq X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ avec $M \neq \emptyset$, $\min_{u \in M} F(u) = \alpha$ a une solution lorsque les conditions suivantes sont remplies :

- (i) X est un véritable espace de Banach réflexif,
- (ii) M est borné et faiblement fermé séquentiellement, c'est-à-dire que, par définition, pour chaque suite u_n dans M telle que $u_n \rightharpoonup u$ comme $n \rightarrow \infty$, on a toujours $u \in M$,
- (iii) F est semi-continu séquentiellement inférieur faible sur M .

Théorème 3.1 (théorème de Mazur). [15] Si u_k est une suite dans un espace normé X tel que $u_k \rightharpoonup u$, il existe une suite de combinaisons convexes :

$$v_k = \sum_{i=1}^k \alpha_{k_i} u_i, \quad \sum_{i=1}^k \alpha_{k_i} = 1, \quad \alpha_{k_i} \geq 0 \quad (k \in \mathbb{N}^*),$$

tel que $v_k \rightarrow u$ in X .

3.2.1 Condition d'Ambrosetti-Rabinowitz

Le rôle de Ambrosetti-Rabinowitz est d'assurer la bornité des suites de Palais-Smale de la fonctionnelle d'Euler-Lagrange. Ceci est très crucial dans les applications de la théorie des points critiques. Cependant, bien que (AR) une condition tout à fait naturelle, elle est quelque peu restrictive et élimine de nombreuses non-linéarités.

Maintenant, nous introduisons la condition de (AR) bien connue :

Définition 3.1. Soit E un espace Banach et $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle de classe $C^1(E, \mathbb{R})$. On dit que J satisfait la condition de (AR), s'il existe $\mu > 2$ et $r > 0$ tels que

$$0 < \mu F(x, u) \leq f(x, u)u, \quad \forall u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \in [0, T].$$

La condition de (AR) est pratique non seulement pour s'assurer que la suite de Palais-Smale de la fonctionnelle J est bornée mais aussi pour garantir que la fonctionnelle J a une géométrie du col de montagne.

3.3 Les résultats d'existences et multiplicités

Nous rapellons d'abord la fonction d'Euler-Lagrange associée au problème (2.1)

$$J(u) = \frac{1}{2}A(u, u) - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} \int_0^{u(x_i)} I_i(x)dx - \int_0^T e^{G(x)} F(x, u(x))dx, \quad (3.1)$$

telle que $F(x, u) = \int_0^u f(x, s)dx$ et A est un opérateur définie par,

$$A(u, v) = \int_0^T e^{G(x)} u'(x)v'(x)dx + \lambda \int_0^T e^{G(x)} u(x)v(x)dx + \frac{\alpha}{\beta} e^{G(T)} u(T)v(T).$$

Proposition 3.1. *la fonctionnelle J est continuellement différentiable. La dérivée de Fréchet de J sous la forme :*

$$\begin{aligned} \langle J'(u), v \rangle &= \int_0^T e^{G(x)} u'(x)v'(x)dx + \lambda \int_0^T e^{G(x)} u(x)v(x)dx + \frac{\alpha}{\beta} e^{G(T)} u(T)v(T) \\ &\quad - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} I_i(u(x_i))v(x_i) - \int_0^T e^{G(x)} f(x, u(x))v(x)dx. \end{aligned} \quad (3.2)$$

3.3.1 L'existence et multiplicités par lemme du Col

Théorème 3.2. [35] *Supposons que la condition (AR) soit satisfaite, $\lambda > -m\lambda_1/M$, et qu'il existe $\delta_i > 0$, $\mu > 2$, $i = 1, 2, \dots, p$, telle que*

$$\int_0^u I_i(x)dx \leq \delta_i |u|^\mu, \quad I_i(u)u \geq \mu \int_0^u I_i(x)dx > 0, \quad u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Alors le problème impulsif admet au moins deux solutions classiques.

Pour prouver le théorème nous besoin à les deux lemmes suivant

Lemme 3.4. [35] *Supposons que la condition de (AR) soit vérifiée. De plus, nous supposons*

$$I_i(u)u \geq \mu \int_0^u I_i(x)dx, \quad u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Alors la fonctionnelle J satisfait la condition de Palais-Smale.

Démonstration - Montrons que la fonctionnelle J satisfait la conditions de (PS).

Soit $\{u_k\}$ une suite dans H telle que $J(u_k)$ soit bornée et $J'(u_k) \rightarrow 0$, comme $k \rightarrow +\infty$, alors nous prouvons que $\{u_k\}$ possède une sous-suite convergente fortement dans H .

Montrons d'abord que $\{u_k\}$ est bornée.

Par la condition d'(AR) et $I_i(u)u \geq \mu \int_0^u I_i(x)dx$, nous avons

$$\begin{aligned}
\mu J(u_k) - J'(u_k)u_k &= \frac{\mu}{2}A(u_k, u_k) - \mu \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} \int_0^{u_k(x_i)} I_i(x)dx - \mu \int_0^T e^{G(x)} F(x, u_k)dx \\
&\quad - A(u_k, u_k) + \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} I_i(u_k(x_i))u_k(x_i) + \int_0^T e^{G(x)} f(x, u_k)u_k dx \\
&= \left(\frac{\mu}{2} - 1\right)A(u_k, u_k) - \mu \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} \int_0^{u_k(x_i)} I_i(x)dx + \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} I_i(u_k(x_i))u_k(x_i) \\
&\quad - \mu \int_0^T e^{G(x)} F(x, u_k)dx + \int_0^T e^{G(x)} f(x, u_k)u_k dx \\
&= \left(\frac{\mu}{2} - 1\right)A(u_k, u_k) - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} \left(\mu \int_0^{u_k(x_i)} I_i(x)dx - I_i(u_k(x_i))u_k(x_i) \right) \\
&\quad - \int_0^T e^{G(x)} \left(\mu F(x, u_k)dx - f(x, u_k)u_k dx \right).
\end{aligned}$$

Alors d'après la condition d'Ambrosetti-Rabinowitz et lemme 2.4 on obtient :

$$\begin{aligned}
\mu J(u_k) - J'(u_k)u_k &\geq \left(\frac{\mu}{2} - 1\right)\theta_1 \|u_k\|^2 + C_1 + C_2 \\
&\geq \left(\frac{\mu}{2} - 1\right)\theta_1 \|u_k\|^2.
\end{aligned}$$

Où :

$$C_1 = \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} \left(\mu \int_0^{u_k(x_i)} I_i(x)dx - I_i(u_k(x_i))u_k(x_i) \right),$$

et

$$C_2 = \int_0^T e^{G(x)} \left(\mu F(x, u_k)dx - f(x, u_k)u_k dx \right).$$

Ce qui implique que $\{u_k\}$ est bornée.

Il existe donc une sous-suite de $\{u_k\}$ (notée à nouveau par simplicité $\{u_k\}$), telle que $\{u_k\}$ converge faiblement vers un certain u dans H , alors la suite $\{u_k\}$ converge uniformément vers u dans $[0, T]$. Ainsi

$$\begin{aligned}
(J'(u_k) - J'(u))(u_k - u) &\rightarrow 0, \\
\int_0^T e^{G(x)} (F(x, u) - f(x, u))(u_k - u)dx &\rightarrow 0, \\
[I_i(u_k(x_i)) - I_i(u(x_i))](u_k(x_i) - u(x_i)) &\rightarrow 0,
\end{aligned}$$

comme $k \rightarrow +\infty$. Ainsi on a

$$\begin{aligned}
& (J'(u_k) - J'(u))(u_k - u) \\
&= J'(u_k)(u_k - u) - J'(u)(u_k - u) \\
&= \int_0^T e^{G(x)} (u'_k(x) - u'(x))^2 dx + \lambda \int_0^T e^{G(x)} (u_k(x) - u(x))^2 dx + \frac{\alpha}{\beta} (u_k(T) - u(T))^2 \\
&\quad - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} [I_i(u_k(x_i)) - I_i(u(x_i))](u_k(x_i) - u(x_i)) \\
&\quad - \int_0^T e^{G(x)} (f(x, u_k) - f(x, u))(u_k(x) - u(x)) dx \\
&= A(u_k(x) - u(x), u_k(x) - u(x)) - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} [I_i(u_k(x_i)) \\
&\quad - I_i(u(x_i))](u_k(x_i) - u(x_i)) - \int_0^T e^{G(x)} (f(x, u_k) - f(x, u))(u_k(x) - u(x)) dx \\
&\geq \theta_1 \|u_k - u\|^2 - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} [I_i(u_k(x_i)) - I_i(u(x_i))](u_k(x_i) - u(x_i)) \\
&\quad - \int_0^T e^{G(x)} (f(x, u_k) - f(x, u))(u_k(x) - u(x)) dx,
\end{aligned}$$

alors $\|u_k - u\| \rightarrow 0$ pour $k \rightarrow +\infty$. C'est-à-dire $\{u_k\}$ converge fortement u dans H . Alors la fonctionnelle J satisfait (PS). ■

Lemme 3.5. [35] Soit $\bar{M} = \max_{x \in [0, T], |u|=1} F(x, u)$, $\bar{m} = \min_{x \in [0, T], |u|=1} F(x, u)$. Supposons que la condition de (AR) soit vérifiée. Alors, pour tout $x \in [0, T]$, les inégalités suivantes sont vérifiées.

(i) $F(x, u) \leq \bar{M}|u|^\mu$, si $|u| < 1$,

(ii) Pour tout sous-espace de dimension finie $W \in H$ et tout $u \in W$, il existe des constantes $A, B > 0$, telles que $\int_0^T F(x, u) dx \geq \bar{m}B^\mu \|u\|^\mu - AT$.

Démonstration - On suppose que les conditions de (AR) soit vérifiée, alors pour tout $x \in [0, T]$, on a

$$0 < \mu F(x, u) \leq f(x, u)u, \quad \forall u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \in [0, T].$$

Si $|u| \geq 1$ alors, on intègre entre 1 et $|u|$,

$$\begin{aligned}
\int_1^{|u|} \frac{\mu}{s} ds &\leq \int_1^{|u|} \frac{f(x, s)}{F(x, s)} ds \\
\ln |u|^\mu - \ln(1)^\mu &\leq \ln F(x, |u|) - \ln F(x, 1) \\
\ln |u|^\mu &\leq \ln \left(\frac{F(x, |u|)}{F(x, 1)} \right) \\
F(x, |u|) &\geq F(x, 1)|u|^\mu.
\end{aligned}$$

Si $|u| \leq 1$

$$\begin{aligned} \int_{|u|}^1 |u|^{1-\frac{\mu}{s}} ds &\leq \int_{|u|}^1 \frac{f(x, s)}{F(x, s)} ds \\ -\ln |u|^\mu &\leq \ln F(x, 1) - \ln F(x, |u|) \\ \frac{1}{|u|^\mu} &\leq \frac{F(x, 1)}{F(x, |u|)} \\ F(x, |u|) &\leq F(x, 1)|u|^\mu. \end{aligned}$$

Alors, on trouve les deux inégalités

$$\begin{aligned} F(x, u) &\leq F(x, 1)|u|^\mu \quad \text{si } 0 < |u| \leq 1, \\ F(x, u) &\geq F(x, 1)|u|^\mu \quad \text{si } |u| \geq 1, \end{aligned}$$

en utilisant les hypothèses, on obtient :

$$F(x, u) \leq \bar{M}|u|^\mu \quad \text{si } |u| \leq 1. \quad (3.3)$$

$$F(x, u) \geq \bar{m}|u|^\mu \quad \text{si } |u| \geq 1. \quad (3.4)$$

Comme les réelles, $\bar{M} > 0$ et $\bar{m} > 0$, et depuis $F(x, u) - \bar{m}|u|^\mu$ est une fonction continue sur $[0, T] \times [-1, 1]$, donc, il existe une constante $A > 0$ telle que

$$F(x, u) \geq \bar{m}|u|^\mu - A \quad \forall (x, u) \in [0, T] \times [-1, 1], \quad (3.5)$$

Par intégration l'équations (3.5) sur $[0, T]$, on trouve :

$$F(x, u) \geq \bar{m}|u|^\mu - A \quad \forall (x, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Il est bien connu que pour tout sous-espace de dimension finie $W \subset H_0^1(0, T)$ et tout $u \in W$, il existe une constante $B > 0$ telle que

$$\|u\|_p = \left(\int_0^T |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq B\|u\|, \quad p \geq 1.$$

Alors, pour tout $u \in W$, et d'après (3.6) il existe une constante $B > 0$, telle que

$$\begin{aligned} \int_0^T F(x, u(x)) dx &\geq \bar{m}\|u\|_\mu^\mu - AT \\ &\geq \bar{m}B^\mu \|u\|^\mu - AT. \end{aligned}$$

■

Remarque 3.1. Il ya une autre démonstration base sur variation de la fonction

$$(0, +\infty) \ni \xi \mapsto F(x, u\xi^{-1})\xi^\mu.$$

Pour plus détail voir l'article [32]

Démonstration - (du théorème 3.2).

Étape1 : Nous allons montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que la fonctionnelle J possède un minimum local

$$u_0 \in B_\rho = \{u \in H : \|u\| < \rho\}.$$

Nous affirmons que $\overline{B_\rho}$ est bornée et faiblement fermé séquentiellement.

En fait, soit $\{u_n\} \subseteq \overline{B_\rho}$ et $\{u_n\} \rightharpoonup u$ comme $n \rightarrow \infty$. Par théorème de Mazur, il existe une suite de combinaisons convexes

$$v_n = \sum_{j=1}^n \alpha_{nj} u_j, \quad \sum_{j=1}^n \alpha_{nj} = 1, \quad \alpha_{nj} \geq 0, j \in N$$

tel que $v_n \rightarrow u$ dans H . $\{v_n\} \subset \overline{B_\rho}$ et $u \in \overline{B_\rho}$, depuis $\overline{B_\rho}$ est un ensemble convexe fermé.

Notant que J est une fonctionnelle faiblement semi-continue inférieurement séquentiellement sur $\overline{B_\rho}$ et que H est un espace de Banach réflexif. Alors par le lemme 2.2 nous pouvons savoir que J a un minimum local $u_0 \in B_\rho$, c'est-à-dire $J(u_0) = \min_{u \in \overline{B_\rho}} J(u)$.

Dans la suite, nous allons montrer que $J(u_0) < \inf_{u \in \partial B_\rho} J(u)$.

Choisissez ρ suffisamment petit pour que

$$\frac{\theta_1}{2} \rho^2 - M \sum_{i=1}^p \delta_i \rho^\mu - M \bar{M} \rho^\mu \delta^\mu T > 0.$$

Pour tout $u = \rho\omega$, $\omega \in H$ avec $\|\omega\| = 1$ on a $\|u\| = \|\rho\omega\| = \rho\|\omega\| = \rho$, ainsi $u \in \partial B_\rho$. D'après le lemme 2.4 et (i) du lemme 3.5, on a

$$\begin{aligned} J(u) &= J(\rho\omega) \\ &= \frac{1}{2} A(\rho\omega, \rho\omega) - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} \int_0^{\rho\omega(x_i)} I_i(x) dx - \int_0^T e^{G(x)} F(x, \rho\omega(x)) dx \\ &\geq \frac{\theta_1}{2} \rho^2 - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} \int_0^{\rho\omega(x_i)} I_i(x) dx - M \int_0^T \bar{M} |\rho\omega|^\mu dx \\ &\geq \frac{\theta_1}{2} \rho^2 - M \sum_{i=1}^p \delta_i |\rho\omega|^\mu - M \bar{M} \rho^\mu \int_0^T |\omega|^\mu dx \\ &\geq \frac{\theta_1}{2} \rho^2 - M \sum_{i=1}^p \delta_i \rho^\mu - M \bar{M} \rho^\mu \delta^\mu T, \end{aligned}$$

on obtient ainsi $J(u) > 0 = J(0) \geq J(u_0)$ pour $u \in \partial B_\rho$, ce qui implique $J(u_0) < \inf_{u \in \partial B_\rho} J(u)$.

Étape2 : Nous allons montrer qu'il existe u_1 avec $\|u_1\| > \rho$, tel que $J(u_1) < \inf_{u \in \partial B_\rho} J(u)$. D'après le lemme 2.4, la condition de croissance sous-linéarité de I_i , $i = 1, 2, \dots, p$, et (ii) du lemme 3.5, on a

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} A(u, u) - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} \int_0^{u(x_i)} I_i(x) dx - \int_0^T e^{G(x)} F(x, u(x)) dx \\ &\leq \frac{1}{2} \theta_2 \|u\|^2 - m(\bar{m} B^\mu \|u\|^\mu - AT) \leq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous pouvons choisir u_1 avec $\|u_1\|$ suffisamment grand pour que $J(u_1) < 0$. Ensuite nous avons

$$\max\{J(u_0), J(u_1)\} < \inf_{u \in \partial B_\rho} J(u).$$

montre que u satisfait la condition de Palais-smale. Ainsi, d'après le lemme 3.1 il existe un point critique \hat{u} . Donc, u_0 et \hat{u} sont deux points critiques de J , et ce sont aussi des solutions classiques de notre problème (2.1) ■

Exemple 3.1. prendre $T > 0$, $x_1 \in (0, T)$, $g(x) = x$, $a(x) \in C([0, T], (0, +\infty))$, $c > 0$, $\mu = 3$, $\delta_1 = 1/6$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$. On considère le problème

$$\begin{cases} -u''(x) + \lambda u(x) + g(x)u'(x) = 2a(x)(e^{u^2} - e^{-u^2})u^5 + 4a(x)(e^{u^2} - e^{-u^2})u^3, \\ \text{p.p } x \in [0, T], \\ -\Delta u'(t_1) = cu^5(x_1), \\ u(0) = 0, \quad \alpha u(T) + \beta u'(T) = 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

où $\lambda = -\frac{m\lambda_1}{M} > -e^{T^2/2}\lambda_1$, alors, selon le théorème 3.2, l'équation (3.7) a au moins deux solutions classiques.

Remarque 3.2. Étude de l'existence et de la multiplicité des solutions utilisant le lemme du col pour certaines problèmes aux limites, que ce soit sur un domaine borné ou non, est en diffusion chez de nombreux chercheurs, où supposons que le membre non linéaire est vérifié la condition de Ambrosetti-Rabinowitz (AR) en afin de prouver la condition de Palais-Smale (PS), et de plus d'informations, vous pouvez regarder les références voir les références, [4], [32] [10] et [26].

3.3.2 L'existence d'infinité des solutions par théorème de point selle

Théorème 3.3. [35] Supposons que la condition de (AR) soit vérifiée, $\lambda > -m\lambda_1/M$, et il existe $\delta_i > 0$, $\mu > 2$, $i = 1, 2, \dots, p$, telle que $\int_0^u I_i(x)dx \leq \delta_i|u|^\mu$, $I_i(u)u \geq \mu \int_0^u I_i(x)dx > 0$, $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. En outre, $f(x, u)$ et I_i sont impaire par rapport à u , alors le problème impulsif (2.1) a une infinité de solutions classiques.

Démonstration - On considère encore une fois la fonctionnelle J qui est définie précédemment, et on vérifie que J satisfait toutes les conditions du lemme 3.2. La preuve sera divisé en trois étapes.

Étape1 : J satisfait la condition (PS).

Soit $\{u_k\}$ une suite dans H telle que $J(u_k)$ bornée et $\lim_{k \rightarrow \infty} J'(u_k) \rightarrow 0$. Montrons que u_k est bornée par la condition de (AR) et $I_i(u)u \geq \mu \int_0^u I_i(x)dx$,

$$\mu J(u_k) - J'(u_k)u_k \geq \left(\frac{\mu}{2} - 1\right)\theta_1 \|u_k\|^2.$$

Ce qui implique que u_k est bornée. Il existe donc une sous-suite de $\{u_k\}$, converge faiblement

vers un certain u dans H , alors la suite $\{u_k\}$ converge uniformément vers u dans $[0, T]$. Ainsi

$$\begin{aligned} (J'(u_k) - J'(u))(u_k - u) &\geq \theta_1 \|u_k - u\|^2 - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} [I_i(u_k)(x_i) - I_i(u(x_i))](u_k(x_i) - u(x_i)) \\ &\quad - \int_0^T e^{G(x)} (f(x, u_k) - f(x, u))(u_k(x) - u(x)) dx, \end{aligned}$$

alors $\|u_k - u\| \rightarrow 0$ pour $k \rightarrow +\infty$. C'est-à-dire $\{u_k\}$ converge fortement u dans H . Alors la fonctionnelle J satisfait (PS), et évident que $J(0) = 0$.

Par la définition de J et comme $f(x, u)$ et I_i sont impaire par rapport à u , (i.e., $f(x, -u) = -f(x, u)$, $I_i(-u) = -I_i(u)$), pour tout $(x, u) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, il est évident que J est une fonctionnelle paire. En effet

Si on pose $s = -v$, $ds = -dv$. Donc,

$$\begin{aligned} F(x, -u) &= \int_0^{-u} f(x, v) dv \\ &= - \int_0^u f(x, -s) ds \\ &= \int_0^u f(x, s) ds = F(x, u), \quad (\text{car } f \text{ est impaire}). \end{aligned}$$

Aussi, on pose $L(u) = \int_0^u I_i(s) ds$, alors on a

$$\begin{aligned} L(-u) &= \int_0^{-u} I_i(s) ds = - \int_0^u I_i(-v) dv \\ &= \int_0^u I_i(v) v = L(u). \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} J(-u) &= \frac{1}{2} \| -u \|^2 + \lambda \int_0^T e^{G(x)} (-u(x))^2 dx + \frac{\alpha}{2\beta} (-u)^2(T) - \sum_{i=1}^p \int_0^{-u(x_i)} e^{G(x_i)} I_i(x) dx \\ &\quad - \int_0^T e^{G(x_i)} F(x, -u(x)) dx \\ &= \frac{1}{2} \|u\|^2 + \lambda \int_0^T e^{G(x)} u(x)^2 dx + \frac{\alpha}{2\beta} u^2(T) - \sum_{i=1}^p \int_0^{u(x_i)} e^{G(x_i)} I_i(x) dx - \int_0^T e^{G(x_i)} F(x, u(x)) dx \\ &= J(u). \end{aligned}$$

Étape2 : J satisfait la première condition géométrique

Pour toute $u \in H$, nous savons que $\|u\| \leq \frac{1}{\delta}$ implique $\|u\|_\infty \leq 1$ par lemme 2.2, donc quand

$\|u\| \leq \frac{1}{\delta}$, on a l'inégalité suivante par lemme 2.4 et (i) du lemme 3.5,

$$\begin{aligned}
J(u) &= \frac{1}{2}A(u, u) - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} \int_0^{u(x_i)} I_i(x) dx - \int_0^T e^{G(t)} F(x, u(x)) dx \\
&\geq \frac{1}{2}\theta_1 \|u\|^2 - M \sum_{i=1}^p \delta_i \|u\|^\mu - \int_0^T e^{G(t)} F(x, u(x)) dx \\
&\geq \frac{1}{2}\theta_1 \|u\|^2 - M \sum_{i=1}^p \delta_i \|u\|_\infty^\mu - \int_0^T e^{G(t)} F(t, u(x)) dx \\
&\geq \frac{1}{2}\theta_1 \|u\|^2 - M \sum_{i=1}^p \delta_i \delta \|u\|^\mu - M \bar{M} T \delta^\mu \|u\|^\mu.
\end{aligned}$$

Ainsi nous pouvons choisir u avec $\|u\|$ suffisamment petit pour que $J(u) \geq \gamma > 0$. Ainsi J satisfait la condition (i) du lemme 3.2. Dans la suite, il s'agit de vérifier la condition (ii) du lemme 3.2.

Étape3 : J satisfait la deuxième condition géométrique

En fait, on peut obtenir l'inégalité suivante par lemme 2.4 (ii) du lemme 3.5,

$$\begin{aligned}
J(u) &= \frac{1}{2}A(u, u) - \sum_{i=1}^p e^{G(x_i)} \int_0^{u(x_i)} I_i(x) dx - \int_0^T e^{G(x)} F(t, u(x)) dx \\
&\leq \frac{1}{2}\theta_2 \|u\|^2 - m \int_0^T F(t, u(x)) dx \\
&\leq \frac{1}{2}\theta_2 \|u\|^2 - m(\bar{m}B^\mu \|u\|^\mu - AT).
\end{aligned}$$

En notant que $\mu > 2$, l'inégalité ci-dessus implique que $J(u) \rightarrow -\infty$ comme $\|u\| \rightarrow \infty$ avec $u \in W$. Par conséquent, il existe $R = R(W)$ telle que $J(u) \leq 0$ sur $W \setminus B_R$. D'après le lemme 3.2, la fonctionnelle J possède une infinité de points critiques, c'est-à-dire le problème impulsif (2.1) a une infinité de solutions classiques. ■

Exemple 3.2. prendre $T > 0$, $x_1 \in (0, T)$, $g(x) = x$, $a(x), b(x) \in C([0, T], (0, +\infty))$, $c > 0$, $\mu = 3$, $\delta_1 = 1/4$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$. On considère l'équation

$$\begin{cases} -u''(x) + \lambda u(x) + g(x)u'(x) = a(x)u^5(x) + b(x)u^7(x), & \text{p.p } x \in [0, T], \\ -\Delta u'(x_1) = cu^3(x_1), \\ u(0) = 0, \quad \alpha u(T) + \beta u'(T) = 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

quand $\lambda = -\frac{m\lambda_1}{M} > -e^{T^2/2}\lambda_1$, l'équation (2.1) admet une infinité de solutions classiques d'après le théorème 3.2.

Conclusion

Dans ce travail, on a étudié un problème aux limites de second ordre impulsif par des méthodes variationnelles ainsi, la théorie des points critiques. Dans le premier chapitre, on a donné quelques outils de base, qui sont nécessaires pour ce travail, comme la thorie des points critiques, la différentiabilité d'un opérateur dans l'espace de Banach et un lemme Connue sous le nom lemme du Col.

En second but notre objectif était de montrer l'existence de solutions pour une classe d'équation de second ordre impulsive par théorème de minimisation et nous donne deux résultat.

En fin, on a étudié l'existence et la multiplicité de solutions pour le problèmes aux limites impulsif précédent par le lemme du Col et théorème du point selle.

Bibliographie

- [1] D. BOUAFIA, JOHN R. GRAEF, AND T. MOUSSAOUI. *Existence of solutions for a perturbed second order problem on the half-line via Ekeland variational principle*. *Communications in Applied Analysis*, 22, No. 3 (2018), 383-399.
- [2] D. BOUAFIA, T. MOUSSAOUI, AND D. O'REGAN. *Existence of Solutions for a Second Order Problem on The Half-Line Via Ekeland's Variational Principle*. *Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim.* 36 (2016), 131-140.
- [3] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson, Paris (1983).
- [4] M. BADIALE , E. SERRA. *Semilinear Elliptic Equations for Beginners Existence Results via the Variational Approach*. Springer-Verlag London Limited (2011).
- [5] S. FORMINE ET A. KOLMOGOROV. *Elément de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. Traduction française, Edition Mir. Moscou (1977).
- [6] V. TRENOGUINE. *Analyse fonctionnelle*. Traduction française, Edition, Mir. Moscou (1985).
- [7] Y. JABRI. *The Mountan Pass Theorem Variants, Generalizations and Some Applications*. Cambridge University Press, New York. (2003).
- [8] J. MUSCAT. *Functional Analysis, an Introduction to Metric Spaces, Hilbert Spaces, and Banach Algebras*. Springer, Cham Heidelberg, New York, Dordrecht, London 18,(2014).
- [9] G. A. AFROUZI, A. HADJIAN, V. D. RĂDULESCU, *Variational analysis for Dirichlet impulsive differential equations with oscillatory nonlinearity*, Portugal. *Math. (N.S.)* Vol. 70, Fasc. 3, (2013), 225–242.
- [10] D. BOUAFIA, JOHN R. GRAEF, AND T. MOUSSAOUI. *Existence of solutions for a perturbed second order problem on the half-line via Ekeland variational principle*. *Communications in Applied Analysis*, 22, No. 3 (2018), 383-399.
- [11] RADU PRECUP, *Methods in nonlinear integral equations*, Kluwer Academic, Dordrecht, (2002).
- [12] JIAN LIU, ZENGQI ZHAO *an application of variational methods to second-order impulsive differential equation with derivative dependencia*, *Electronic Journal of Differential Equations*, vol (2014), No. 62 1–13.

- [13] Y.-K. CHANG, J. J. NIETO, *Existence of solutions for impulsive neutral integro differential inclusions with nonlocal initial conditions via fractional operators*, *Functional Analysis and Optimization*, 30 (2009), 227-244.
- [14] Z. LUO, J. J. NIETO, *New results for the periodic boundary value problem for impulsive integro-differential equations*, *Nonlinear Analysis*, 70 (2009), 2248-2260.
- [15] J. MAWHIN, M. WILLEM, *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [16] J. J. NIETO, *Variational formulation of a damped Dirichlet impulsive problem*, *Applied Mathematics Letters*, 23 (2010), 940-942.
- [17] J. J. NIETO, D. O'REGAN, *Variational approach to impulsive differential equations*, *Nonlinear Analysis*, 10 (2009), 680-690.
- [18] J. J. NIETO, R. RODRIGUEZ-LOPEZ, *Boundary value problems for a class of impulsive functional equations*, *Computers and Mathematics with Application*, 55 (2008), 2715-2731.
- [19] P. H. RABINOWITZ, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 65. American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.
- [20] A. M. SAMOILENKO, N. A. PERESTYUK, *Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1995.
- [21] J. SUN, H. CHEN, J. J. NIETO, M. OTERO-NOVOA, *Multiplicity of solutions for perturbed second-order Hamiltonian systems with impulsive effects*. *Nonlinear Analysis*, 72 (2010), 4575-4586.
- [22] Y. TIAN, W. G. GE, *Variational methods to Sturm-Liouville boundary value problem for impulsive differential equations*, *Nonlinear Analysis*. 72 (2010), 277-287.
- [23] Y. TIAN, W. G. GE, *Applications of variational methods to boundary value problem for impulsive differential equations*, *Proceedings of Edinburgh Mathematical Society*, 51 (2008), 509-527.
- [24] Y. WU, T. AN, *Existence of periodic solutions for non-autonomous second-order Hamiltonian systems*, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2013, No. 77 (2013), 1-13.
- [25] J. XIAO, J. J. NIETO, *Variational approach to some damped Dirichlet nonlinear impulsive differential equations*, *Journal of the Franklin Institute*, 348 (2011), 369-377.

- [26] J. XIAO, J. J. NIETO, Z. LUO, *Multiplicity of solutions for nonlinear second order impulsive differential equations with linear derivative dependence via variational methods. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17 (2012), 426-432.
- [27] S. T. ZAVALISHCHIN, A. N. SESEKIN, *Dynamic impulse systems :theory and applications, in Mathematics and its Applications, vol.394, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.*
- [28] E. ZEIDLER, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, vol.III, Springer-Verlag, Berlin, 1985.*
- [29] G. ZENG, F. WANG, J. J. NIETO, *Complexity of a delayed predator-prey model with impulsive harvest and Holling-typeII functional response, Advances in Complex Systems*, 11 (2008), 77-97.
- [30] Z. ZHANG, R. YUAN, *An application of variational methods to Dirichlet boundary value problem with impulses. Nonlinear Analysis*, 11 (2010), 155-162.
- [31] D. ZHANG, B. DAI, *Existence of solutions for nonlinear impulsive differential equations with Dirichlet boundary conditions. Mathematical and Computer Modelling*, 53 (2011), 1154-1161.
- [32] D. ZHANG, *Multiple solutions of nonlinear impulsive differential equations with Dirichlet boundary conditions via variational method, Results in Mathematics*, 63 (2013), 611-628.
- [33] H. ZHANG, Z. LI, *Variational approach to impulsive differential equations with periodic boundary conditions. Nonlinear Analysis*, 11 (2010), 67-78.
- [34] J. ZHOU, Y. LI, *Existence and multiplicity of solutions for some Dirichlet problems with impulsive effects. Nonlinear Analysis*, 71 (2009), 2856-2865.
- [35] JIAN LIU, ZENGQI ZHAO *an application of variational methods to second-order impulsive differential equation with derivative dependenca, Electronic Journal of Differential Equations,vol (2014), No. 62 1–13.*

Résumé

Le but de cette mémoire est d'étudier quelque théorème des points critiques et minimisation et la méthode variationnel et en précisément le lemme du col de montagne et théorème du point selle pour étudier l'existence et multiplicité des solutions à un problème aux limites de second ordre impulsif avec dépendance de dérivée sous la forme :

$$\begin{cases} -u''(x) + \lambda u(x) + g(x)u'(x) = f(x, u(x)), & p.p.x \in [0, T], \\ -\Delta u'(x_i) = I_i(u(x_i)), & i = 1, 2, \dots, p, \\ u(0) = 0, & \alpha u(T) + \beta u'(T) = 0 \end{cases}$$

Mots clés : Point critique. Méthode variationnelle. Existence de solution. Seconde ordre. Impulsif. Lemme de Col. Théorème de point selle. Condition de Palais-Smale. Dépendance de dérivée. Fonctionnelle d'énergie.

Abstract

The purpose of this memoir is to study some theorem of critical points and minimization and the variational method and in particular the lemma of the mountain pass and theorem of the saddle point to study the existence and multiplicity of solutions to an impulsive second-order boundary value problem with derivative dependence in the form :

$$\begin{cases} -u''(x) + \lambda u(x) + g(x)u'(x) = f(x, u(x)), & p.p.x \in [0, T], \\ -\Delta u'(x_i) = I_i(u(x_i)), & i = 1, 2, \dots, p, \\ u(0) = 0, & \alpha u(T) + \beta u'(T) = 0 \end{cases}$$

Key words : Critical point. Variational method. Existence of solutions. Second order. Impulsive differential equation. Mountain pass lemma. Saddle point theorem. Palace-Smale Condition. Derivative dependence. Energy functional.

ملخص

الغرض من هذه الأطروحة هو دراسة بعض نظريات النقاط الحرجة والتقليل وطريقة التغيرات وعلى وجه الخصوص توطئة الممر الجبلي ونظرية نقطة السرج لدراسة وجود وتعدد الحلول لمشكلة حد من الدرجة الثانية. ترتيب اندفاعي مع اعتماد مشتق في الشكل:

$$\begin{cases} -u''(x) + \lambda u(x) + g(x)u'(x) = f(x, u(x)), & p.p.x \in [0, T], \\ -\Delta u'(x_i) = I_i(u(x_i)), & i = 1, 2, \dots, p, \\ u(0) = 0, & \alpha u(T) + \beta u'(T) = 0 \end{cases}$$

كلمات مفتاحية: نقطة حرجية. طريقة التغيرات. وجود الحلول. الدرجة الثانية. المعادلة التفاضلية المندفعة. توطئة ممر الجبل. نظرية نقطة السرج. شرط بالي-سمال. اعتماد المشتق. دالة الطاقة.

