REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : EDPs et applications

Thème

Étude d'un problème p-Laplacien fractionnaire avec un terme non linéaire singulier

---

Présentée par :
M^{elle} AMMARI Imane

Membres du jury :

SAADI Abderachid	M.C.A,	Université de M'sila	**Président**.
MOKHTARI Abdelhak	M.C.B,	Université de M'sila	**Encadreur.**
BOUGHERARA Brahim	M.C.A,	Université de M'sila	**Examinateur.**

Année universitaire 2019/2020

Remerciements

Nous aimerons au premier lieu remercier notre dieu **Allah** qui nous donne la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.
Nous tenons à remercier vivement notre encadreur du mémoire M^r MOKHTARI Abdelhak. Nous remercions également le membre de jury M^r SAADI Abderrachid et M^r BOUGHERARA Brahim.
Nous adressons aussi des remerciements spéciaux à M^r NOUIRI Brahim.
Enfin nous adressons nos sincères remerciements à tous enseignants de faculté mathématique et informatique.
Merci à tous ceux qui ont contribué, de prés ou de loin, à l'aboutissement de ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

au plus chers dans ma vis, à ma mère et ma tante qui étaient un m'ont donné le soutient, à mon père

qui m'a toujours soutenu et m'a aidé pour arriver ici

à toute ma famille.

Et à tous ceux qui se fatiguaient pour réussir leurs avenirs.

A. Imane

Table des matières

Introduction générale

L'étude des équations aux dérivées partielles "EDP" est l'un des sujets de grande importance dans l'analyse non linéaire, développé ces dernières années, car elles modélisent des phénomènes physique, mécanique, biologie et économie. Bien que la résolution des EDP non linéaires par les méthodes variationnelles.
De nombreuses tentatives pour résoudre les équations faisant intervenir différents types d'opérateurs d'ordre non entier peuvent être trouvées dans la littérature par exemple la dérivée fractionnaire de Caputo, le gradient fractionnaire et le Laplacien et le p-Laplacien fractionnaires.

L'un de ces opérateurs, c'est le Laplacien fractionnaire $(-\Delta)^s$:

$$(-\Delta)^s u(x) = C(N,s) \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x,\epsilon)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

avec $s \in]0,1[$, cet opérateur et plus généralement les opérateurs pseudo différentiels qui font partie du domaine de l'analyse harmonique et des équations aux dérivées partielles pendant longtemps, l'intérêt pour ces opérateurs a augmenté constamment au cours des dernières années voir [15].

Très récemment, un nouvel opérateur non local et non linéaire a été considéré, à savoir pour $p \in]1,+\infty[$, $s \in]0,1[$ et u suffisamment régulier :

$$(-\Delta)_p^s u(x) = 2 \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x,\epsilon)} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}} dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Cet opérateur coïncide, jusqu'à une certaine constante de normalisation selon N et s, avec le Laplacien fractionnaire linéaire $(-\Delta)^s$ dans le cas $p = 2$ voir ([4], [12]). Cet opérateur, connu sous le nom de p-Laplacien fractionnaire, conduit naturellement à l'étude du problème singulier non linéaire non local :

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = \frac{f(x)}{u^\gamma} & dans \quad \Omega, \\ u > 0 & dans \quad \Omega, \\ u = 0 & dans \quad \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Une caractéristique typique de cet opérateur est la non-localité, au sens que la valeur de $(-\Delta)_p^s u(x)$ en tout point $x \in \Omega$ dépend non seulement des valeurs de u sur l'ensemble Ω, mais sur tout $\mathbb{R}^N$.
Dans ce travail, nous sommes concentrés sur la partie théorique de l'opérateur p-Laplacien fractionnaire. D'autres résultats importants permettant l'approfondissement de l'étude de cet opérateur seront par ailleurs rappelés voir ([12], [15], [24]).

Ce travail est réparti principalement en, plus d'une introduction, quatre chapitres. Dans le premier chapitre on donne les définitions et les notations qui seront utilisés dans la suite du travail. Le deuxième chapitre est consacré à la l'étude de la théorie des espaces fractionnaires que nous aurons besoin par la suite et nous avons abordé quelques caractéristiques d'opérateur non-linéaires p-Laplacien fractionnaire. Dans le troisième chapitre on présente l'opérateur p-Laplacien fractionnaire en donnant quelques leur propriétés. Dans le dernier chapitre on donne un résultat d'existence d'une solution faible pour une équation faisant intervenir l'opérateur p-Laplacien fractionnaire et un terme singulier. Enfin, cette thèse est clôturée par une bibliographie.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES ET QUELQUES OUTILS DE BASE

Dans ce chapitre, on présente quelques définitions et rappels des résultats nécessaires pour la suite de ce travail. On citera en particulier certains résultats élémentaires des espaces fonctionnels.

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Définitions et propriétés élémentaires des espaces $L^p(\Omega)$

Dans ce que suit, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

Définition 1.1. (Voir[8]) Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on pose

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ \ f\ \ mesurable\ \ et\ \ \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

On peut vérifier facilement que $\| \ \|_{L^p}$ définit une norme sur l'espace vectoriel $L^p(\Omega)$ ce qui montre que $L^p(\Omega)$ est un espace normé.

Définition 1.2. (Voir[8]) On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ \ f\ \ est\ \ mesurable.\ \exists C > 0\ \ tell\ \ que\ \ |f(x)| \leq C\ \ p.p.\ \ sur\ \ \Omega \}.$$

$L^\infty(\Omega)$ est une espace normé quand le muni par la norme :

$$\|f\|_{L^\infty} = inf \{ C,\ \ |f(x)| \leq C\ \ p.p.\ \ sur\ \ \Omega \}$$

Définition 1.3. Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$, on pose

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ \ f\ \ est\ \ mesurable / f.\chi_K \in L^p(\Omega),\ \ \forall K\ \ compact \subset \Omega \}.$$

Théorème 1.1. *(Voir[8])*

1. *L'espace $L^p(\Omega)$ est de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$,*

2. *L'espace $L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$,*

3. *L'espace $L^p(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$.*

Notation Soit $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par $p^{'}$ l'exposant **conjugués** de p c'est à dire :

$$\tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{p^{'}} = 1 \quad \text{où} \quad p^{'} = \tfrac{p}{p-1}$$

Proposition 1.1. ***(Inégalité de Hölder)*** *(Voir[8]) Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p^{'}}(\Omega)$ avec $p \in [1, +\infty[$ alors $f.g \in L^1(\Omega)$ et :*

$$\int_\Omega |fg| \, dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

Proposition 1.2. ***(Inégalité de Hölder généralisé)*** *(Voir[8]) Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p^{'}}(\Omega)$ avec $p \in [1, +\infty[$ et soit $r > 0$ tel que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^{'}} = \frac{1}{r}$, on a :*

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

Proposition 1.3. ***(Inégalité de Young)*** *(Voir[8]) $\forall a \geq 0$, $\forall b \geq 0$, supposons que : $1 < p < \infty$*

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p^{'}} b^{p^{'}}$$

L'écriture $f_n(x) \to f(x)$ p.p sur Ω, signifie que la suite $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ presque partout sur Ω.

Théorème 1.2. ***(Convergence dominée de Lebesgue)*** *(Voir[8]) Soit (f_n) une suite des fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que :*

1. *$f_n(x) \to f(x)$ p.p sur Ω,*

2. *il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p.sur Ω[1].*
   Alors,
$$f \in L^1(\Omega) \;\; et \;\; \|f_n - f\|_{L^1} \to 0$$

Théorème 1.3. ***(Convergence dominée de Lebesgue inverse)*** *(Voir[8]) Soit (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$, tels que : $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$. Alors, il existe une sous suite extraite (f_{n_k}) telle que :*
i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ p.p sur Ω,
ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x) \quad \forall k$ et p.p sur Ω avec $h \in L^p(\Omega)$.
Le résultat suivant introduite quelques propriétés topologiques des espaces de Lebesgue.

Définition 1.4. **(la convergence faible et forte)** (Voir[1]) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|_E)$ et soit $E^{'}$ son dual topologique[2]. On dit que (x_n) converge faiblement dans E s'il existe un élément $x \in E$ tel que :

$$\forall f \in E^{'}, \;\; \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x) \quad ou \quad (\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle)$$

1. On dit que g est une majorante intégrable des fonctions (f_n).
2. l'espace des formes linéaire et continues sur E, $E^{'} = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$.

Notation On notera $(x_n) \rightharpoonup x$ dans E, c'est à dire la convergence faible dans E. On notera de même $(x_n) \to x$ dans E, c'est à dire la convergence forte dans E (la convergence en norme).

Théorème 1.4. *(**Fubini**) (Voir[8]) Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^N$, on suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, alors pour presque tout $x \in \Omega_1$:*

$$F(x,y) = L^1_y(\Omega_2) \ \ et \ \ \int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1_x(\Omega_1)$$

De même, pour presque tout $y \in \Omega_2$:

$$F(x,y) = L^1_x(\Omega_1) \ \ et \ \ \int_{\Omega_1} F(x,y)dy \in L^1_y(\Omega_2)$$

De plus on a :

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx = \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} F(x,y)dxdy$$

Lemme 1.1. *(**lemme de Fatou**) (Voir[8]) Soit $(f_n)_n$ une suite des fonctions de $L^1(\Omega)$ telle que :*

1. *Pour chaque n, $f_n(x) \geq 0$ p.p sur Ω,*
2. $\sup \int_\Omega f_n(x)dx < +\infty$.

Pour chaque $x \in \Omega$ on pose

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \inf \int_\Omega f_n(x)dx$$

alors $f \in L^1(\Omega)$ et :

$$\int_\Omega f(x)dx \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \int_\Omega f_n(x)dx$$

1.1.2 L'espace $W^{1,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on note par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ et de support compacte inclus dans Ω.

Définition 1.5. (Voir[8]) L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est définie par :
$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \ \exists g_i \in L^p(\Omega), \ tel \ \ que : \ \int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega g_i\varphi dx, \ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \ \forall i \in \overline{1.n} \right\}$
En particulier, pour $p = 2$, on pose :

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

pour $u \in W^{1,2}(\Omega)$, on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \ \ et \ \ \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ \ldots, \ \frac{\partial u}{\partial x_N}\right).$$

∇u est appelé la dérivé au sens faible de g. L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|\nabla u\|_{L^p}.$$

(ou parfois, si $1 < p < \infty$, de la norme équivalente $\|u\|_{W^{1,p}} = [\|u\|^p_{L^p} + \|\nabla u\|^p_{L^p}]^{\frac{1}{p}}$).

Proposition 1.4. *(Voir[8]) L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert quand le muni par le produit scalaire*

$$(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2}$$

La norme associée :

$$\|u\|_{H^1} = [\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2]^{\frac{1}{2}}$$

est équivalent de la norme de $W^{1,2}(\Omega)$.
Voici quelques propriétés topologiques de l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$.

Proposition 1.5. *(Voir[8])*

1. *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$,*

2. *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$,*

3. *L'espace $H^1(\Omega)$ est espace de Hilbert séparable.*

1.1.3 Injections de Sobolev

Le but de cette section est de découvrir quelques injections continues et compactes concernant aux espaces de Sobolev, et rappelons qu'un opérateur linéaire T entre deux espaces vectoriels topologiques (par exemple normé) E et F est dit compact si l'image par T de toute partie bornée de E est pré compacte (adhérence compacte) dans F. Plus précisément Pour toute suite (x_n) une suite bornée dans E, on peut extraire une sous suite $u_n = (T(x_{n_k}))$ de la suite $u_n = T(x_n)$ converge dans F. Si E s'injecte continument dans F, le caractère compacte de cette injection entraine que toute suite faiblement convergente est fortement convergente dans l'espace d'arrivée.

Définition 1.6. (Voir[8])

1. E s'injecte d'une manière continue dans F, signifie que $E \subset F$ et l'injection canonique $j : E \to F$ est continue et on le note par $E \hookrightarrow F$.

2. E s'injecte d'une manière compacte dans F, signifie que $E \subset F$ et l'injection $j : E \to F$ est compacte et on le note par $E \hookrightarrow_c F$.
   Si $1 \leq p \leq N$, l'exposant de Sobolev de p est définie par :

$$p^* = \frac{NP}{N-P}$$

où

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{P} - \frac{1}{N}$$

Théorème 1.5. *(Voir[8]) Soit $1 \leq p \leq \infty$. On suppose que Ω est un ouvert de classe C^1, borné, ou bien $\Omega = \mathbb{R}_+^N$:*

1. *Si* $1 \leq p < N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$,
2. *Si* $p = N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q \in [p, +\infty[$,
3. *Si* $p > N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Théorème 1.6. ***(Rellich-Kondrachov)*** *(Voir[8]) On suppose que Ω borné de classe C^1. On a*

1. *Si* $p < N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, p^*[$,
2. *Si* $p = N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, +\infty[$,
3. *Si* $p > N$, *alors* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c C(\overline{\Omega})$.

1.1.4 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.7. (Voir[8]) Étant donné $1 \leq p < \infty$, on désigne par $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, c'est à dire

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$$

On note

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$$

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$, l'espace $H_0^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire induit par $H^1(\Omega)$.

Proposition 1.6. *(Voir[8]) L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif pour $1 < p < \infty$. L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.*

Remarque 1.1. Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$. On sait que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et par conséquent

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

Le résultat suivant fournit une caractérisation essentielle de base des fonctions dans l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.7. *(Voir[8]) Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si et seulement si $u = 0$ sur $\partial\Omega$.*

Proposition 1.7. ***(Inégalité de Poincaré)*** *(Voir[8]) Soit Ω un ouvert borné, alors il existe une constante C (dépendant de $|\Omega|$ et p) telle que :*

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty)$$

Autrement dit, sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ la quantité $\|\nabla u\|_{L^p}$ est une norme équivalente à la norme usuelle de $W^{1,p}(\Omega)$.

1.2 Quelques inégalités utilisés

Lemme 1.2. *(Voir[18]) Soit* $1 < p < \infty$ *et* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction croissante. On pose*

$$G(t) = \int_0^t g^{'}(\tau)^{\frac{1}{p}} d\tau$$

alors

$$|a-b|^{p-2}(a-b)(g(a)-g(b)) \geq |G(a)-G(b)|^p$$

Démonstration. On observe d'abord que l'on peut supposer $a > b$ sans perte de généralité. Alors

$$\begin{aligned}
|a-b|^{p-2}(a-b)(g(a)-g(b)) &= (a-b)^{p-1}(g(a)-g(b)) \\
&= (a-b)^{p-1}\int_b^a g^{'}(\tau)d\tau \\
&= (a-b)^{p-1}\int_b^a G^{'}(\tau)^p d\tau \\
&\geq \left(\int_b^a G^{'}(\tau)d\tau\right)^p
\end{aligned}$$

alors

$$|a-b|^{p-2}(a-b)(g(a)-g(b)) \geq |G(a)-G(b)|^p$$

□

Soient $a, b > 0$, on a :

• Si $1 < p < 2$ (Voir[19])

$$\left\langle |b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a, b-a \right\rangle \geq 2^{-1}(|b|^{p-2} + |a|^{p-2})\,|b-a|^2 \tag{1.1}$$

• Si $p \geq 2$ (Voir[19])

$$\left\langle |b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a, b-a \right\rangle \geq 2^{2-p}\,|b-a|^p \tag{1.2}$$

Soient $A, B \subset \mathbb{R}^N$ avec A est borné et $dist(A, B^c) = d > 0$, alors :(Voir[4])

$$|x-y| \geq C(A,B)(1+|y|), \quad x \in A, \;\; y \in B^c \tag{1.3}$$

1.3 Dérivés d'une fonctionnelle et points critiques

1.3.1 Dérivé au sens de Gâteaux

Définition 1.8. (Voir[16]) Soit E un espace de Banach, $\Omega \subseteq E$ un ensemble ouvert et $I : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle. On dit que I est différentiable au sens de Gâteaux (G-différentiable) en $u \in \Omega$, s'il existe $A \in E^{'}$ (A linéaire et continue), noté par $I^{'}_G(u)$ tel que, pour tout $v \in E$, où $I(u+tv)$ existe pour $t > 0$ assez petit, la dérivée directionnelle $DI(u)$ existe c'est à dire :

$$\lim_{t\to 0}\frac{I(u+tv)-I(u)}{t} = \langle A, v\rangle$$

Si I est différentiable au sens de Gâteaux en u.

1.3.2 Dérivé au sens de Fréchet

Définition 1.9. (Voir[16]) Soit E un espace de Banach, $\Omega \subseteq E$ un ensemble ouvert et $I : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle. On dit que I est différentiable au sens de Fréchet en $u \in \Omega$, s'il existe $A \in E^{'}$ tel que :

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Av}{\|v\|} = 0$$

où

$$I(u+v) - I(u) = Av + o(\|v\|).$$

Si I est différentiable, alors A est unique et on note $I^{'} = A$. L'ensemble des fonctions différentiables sera noté $C^1(\Omega, \mathbb{R})$.

Proposition 1.8. *(Voir[16]) Soit Ω un ouvert d'un espace de Banach E. Soit $I : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle Gâteaux différentiable dans un voisinage de $u \in \Omega$, alors si l'application $u \mapsto I_G^{'}(u)$ est continue au voisinage de u. Alors I est Fréchet différentiable et on a*

$$I_G^{'}(u) = I^{'}(u)$$

Remarque 1.2. L'importance de la proposition 1.8 réside dans le fais qu'il est souvent techniquement plus facile de calculer la dérivée au sens de Gâteaux et ensuite de prouver qu'il est continue, plutôt que de prouver directement la différentiabilité au sens de Fréchet.

1.3.3 Points critiques

Définition 1.10. (Voir[16]) Soit Ω un ouvert d'un espace de Banach E. Supposons que $I \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$.

On dit que $u \in \Omega$ est un **point critique** de I, si :

$$I^{'}(u) = 0$$

• Si u n'est pas un point critique, alors on dit que u est un point régulier de I.
• Si $c \in \mathbb{R}$, alors on dit que c est une valeur critique de I, s'il existe $u \in \Omega$ tel que

$$I(u) = c \quad et \quad I^{'}(u) = 0$$

• Si c n'est pas valeur critique, alors on dit que c est une valeur régulière de I.

1.4 Fonctions convexes

Définition 1.11. (Voir[9]) On dit qu'une partie C de X est convexe si :

$$\forall x, y \in C, \qquad \forall \lambda \in]0,1[, \qquad \lambda x + (1-\lambda) y \in C$$

Lorsque C est convexe et $J : C \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle. On dit que J est convexe si :

$$\forall x, y \in C, \qquad \forall \lambda \in]0,1[, \qquad J(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda J(x) + (1-\lambda) J(y)$$

On dit que J est strictement convexe si :

$$\forall x, y \in C, \;\; avec \;\; x \neq y \;\; \forall \lambda \in]0,1[, \qquad J(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda J(x) + (1-\lambda) J(y)$$

Proposition 1.9. *(Voir[9]) Soit $J : C \to \mathbb{R}$ convexe. Alors, pour tous points x_1, x_2, x_3 de C avec $x_1 < x_2 < x_3$:*

$$\frac{J(x_2) - J(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{J(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{J(x_3) - J(x_2)}{x_3 - x_2}$$

1.5 Quelques théorèmes utilisés

Définition 1.12. (Voir[9]) Une suite minimisante d'une fonctionnelle $J : X \to]-\infty, +\infty]$ est une suite (x_n), telle que

$$\lim_{n\to+\infty} J(x_n) = \inf_X J$$

Définition 1.13. (Voir[9]) Soit $J : X \to \mathbb{R} \cup +\infty$. On dit que J est coercive si et seulement si :

$$\lim_{\|u\|_X \to+\infty} \frac{J(u)}{\|u\|} = +\infty$$

Définition 1.14. (Voir[9]) Une fonctionnelle $J : X \to \mathbb{R}$ est faiblement semi-continue inférieurement $(f.s.c.i.)$ au point x_0 si pour toute suite $(x_n) \subset X$ telle que $x_n \rightharpoonup x_0$, on a

$$J(x_0) \leq \lim_{n\to+\infty} \inf J(x_n)$$

Théorème 1.8. *(Voir[9]) Soit X un espace de Banach réflexif, et J une fonctionnelle définie sur X, telle que*

1. $\lim_{\|x\|_X \to+\infty} \frac{J(x)}{\|x\|} = +\infty$,
2. *J est faiblement semi continue inférieurement.*

Alors J est bornée inférieurement sur X et atteint sa borne inférieure en un point x_0. De plus, si J est Gâteaux différentiable en x_0, alors $J^{'}(x_0) = 0$.

Théorème 1.9. *(**Théorème du point fixe de type Schauder**) (Voir[27]) Soit K un sous ensemble non vide, compact et convexe d'un espace de Banach E et supposons $T : K \to K$ une application continue. Alors T admet un point fixe.*

CHAPITRE 2

ESPACE DE SOBOLEV FRACTIONNAIRE $W^{s,p}(\Omega)$

Dans ce chapitre, on s'intéresse à introduire les espaces $W^{s,p}(\Omega)$ et un opérateur qui concerne de ces espaces. Ainsi, on introduit quelques injections de type Sobolev prouvés dans cet espace.

2.1 Définitions et généralités

Soit Ω un ouvert éventuellement non régulier de l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$ et $p \in [1, +\infty[$. Pour toute $s > 0$. Dans la littérature, les espaces fractionnaires de type de Sobolev sont également appelés espaces Aronszajn, Gagliardo ou Slobodeckij, par les noms de ceux qui les ont introduits. (Voir[6, 14, 25]).

Définition 2.1. (Voir[15]) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et soient $0 < s < 1$ et $p \in [1, +\infty[$, on définit l'espace de Sobolev fractionnaire $W^{s,p}(\Omega)$ par :

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\frac{N}{p}+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\} \tag{2.1}$$

muni de la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{s,p}} = (\|u\|_{L^p}^p + [u]_{s,p}^p)^{\frac{1}{p}} \tag{2.2}$$

où le terme $[u]_{s,p}$ est la semi norme de Gagliardo défini par :

$$[u]_{s,p} = \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.3}$$

Définition 2.2. (Voir[15]) Pour $s < 0$ et $p \in]1, +\infty[$, on définit $W^{s,p}(\Omega)$ comme dual de $W_0^{-s,q}(\Omega)$ par :

$$W^{s,p}(\Omega) = (W_0^{-s,q}(\Omega))'$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Proposition 2.1. *(Voir[26]) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et soient $0 < s < 1$ et $p \in [1, +\infty[$, on a alors :*

1. *L'espace $W^{s,p}(\Omega)$ est séparable et Banach pour $1 \leq p \leq \infty$,*

2. *L'espace $W^{s,p}(\Omega)$ est réflexif et uniformément convexe pour $1 < p < \infty$.*

Exemple 2.1. $x \longmapsto |x|^{\alpha} \in W^{s,p}(\Omega)$, où $\Omega =]0,1[$ avec $sp < 1$ en effet :
On pose $I = |x|^{\alpha}$ avec $\alpha = 1$,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{|x-y|^p}{|x-y|^{sp+1}} dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 |x-y|^{p-sp-1} \, dxdy \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^y (y-x)^{p-sp-1} \, dx + \int_y^1 (x-y)^{p-sp-1} \, dx \right] dy \\
&= \int_0^1 \left[-\frac{1}{p-sp}(y-x)^{p-sp} \right]_0^y + \left[\frac{1}{p-sp}(x-y)^{p-sp} \right]_y^1 dy \\
&= \int_0^1 \frac{1}{p-sp} y^{p-sp} + \frac{1}{p-sp}(1-y)^{p-sp} dy \\
&= \left(\frac{1}{p-sp} \right) \left(\frac{1}{p-sp+1} \right) \left[y^{p-sp+1} \right]_0^1 - \left(\frac{1}{p-sp} \right) \left(\frac{1}{p-sp+1} \right) \left[(1-y)^{p-sp+1} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{(p-sp)(p-sp+1)} + \frac{1}{(p-sp)(p-sp+1)} \\
&= \frac{2}{(p-sp)(p-sp+1)} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Proposition 2.2. *(Voir[15]) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et soient $p \in [1, +\infty[$ et $0 < s \leq s' < 1$. Alors :*

$$W^{s',p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega)$$

est continue. C'est à dire, il existe une constante $C_1(N,s,p) \geq 1$ tel que :

$$\|u\|_{W^{s,p}} \leq C_1(N,s,p) \, \|u\|_{W^{s',p}}, \quad \forall u \in W^{s',p}(\Omega)$$

• *En particulier : $W^{s',p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega)$.*

Proposition 2.3. *(Voir[15]) Soient $p \in [1, +\infty[$ et $s \in]0,1[$, soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{0,1}$, de frontière borné. Alors :*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,p}(\Omega)$$

est continue. C'est à dire, il existe une constante $C_2(N,s,p) \geq 1$ tel que :

$$\|u\|_{W^{s,p}} \leq C_2(N,s,p) \, \|u\|_{W^{1,p}}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

• *En particulier : $W^{1,p}(\Omega) \subseteq W^{s,p}(\Omega)$.*

Définition 2.3. (Voir[2]) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et soient $0 < s < 1$ et $p \in [1, +\infty[$. Alors l'espace $W_0^{s,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W_0^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N) : u = 0 \;\; dans \;\; \mathbb{R}^N \backslash \Omega \right\}$$

Théorème 2.1. *(Voir[12]) Pour $0 < s < 1$, l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Définition 2.4. (Voir[12]) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ on pose : $W_0^{s,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ dans $W^{s,p}(\Omega)$.
Et alors d'après le théorème 2.1 on a :$W_0^{s,p}(\Omega) = W^{s,p}(\Omega)$, mais en général pour $\Omega \underset{\neq}{\subset} \mathbb{R}^N$, $W^{s,p}(\Omega) \neq W_0^{s,p}(\Omega)$.

Théorème 2.2. ***(de type Poincaré)*** *(Voir[26]) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, et soient $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$, alors il existe λ tel que :*

$$\|u\|_{L^p} \leq \lambda \, [u]_{s,p} \, , \;\; \forall u \in W_0^{s,p}(\Omega)$$

Par conséquent si Ω est borné alors $[.]_{s,p}$ est un norme de $W_0^{s,p}(\Omega)$ équivalent à $\|.\|_{W^{s,p}}$.

Définition 2.5. (Voir[15]) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et soient $s \notin \mathbb{N}$ avec $s > 1$ et $p \in [1, +\infty[$. L'espace $W^{s,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{[s],p}(\Omega); \;\; D^\alpha u \in W^{s-[s],p}(\Omega) \;\; \forall \alpha, \;\; |\alpha| = [s] \right\}$$

où $[s]$ désigne la partié entière de s.
• C'est un espace vectoriel, on le muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{s,p}} = \left(\|u\|^p_{W^{[s],p}} + \sum_{|\alpha|=[s]} \|D^\alpha u\|^p_{W^{s-[s],p}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

• Si $s = [s]$, alors l'espace $W^{s,p}(\Omega)$ est coïncide avec l'espace de Sobolev classique.
• $(W^{s,p}(\Omega), \|.\|_{W^{s,p}})$ est un espace de Banach.

Définition 2.6. (Voir[2]) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et soient $0 < s < 1$ et $p \in [1, +\infty[$. Alors l'espace $W_{loc}^{s,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W_{loc}^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(K) : [u]_{s,p} < \infty \right\}, \qquad pour \;\; tout \;\; K \Subset \Omega$$

2.2 Injections de type Sobolev

Dans cette section, on montre les résultats des injections continue et compact dans l'espace $W^{s,p}(\Omega)$ avec $0 < s < 1$. On commence par quelques résultats important qu'on vas les utiliser dans les preuves (Voir[12]).

Lemme 2.1. *(Voir[12]) Soit $q \in [1, +\infty[$, soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ fonction mesurable. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, soit :*

$$f_n(x) = max \left\{ min f(x), N, -N \right\}, \;\; \forall x \in \mathbb{R}^N$$

alors :

$$\lim_{N \to +\infty} \|f_N\|_{L^q} = \|f\|_{L^q}$$

Maintenant on a prés a prouver les théorèmes principale de cette section concernant les injections continue et compact.

Première cas : $sp < N$

Théorème 2.3. *(Voir[12]) Soit $q \in [1, +\infty[$, soit $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, Alors il existe un constant positif $C = C(N, s, p)$ tel que, pour toute fonction mesurable à support compact : $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ on a :*

$$\|f\|_{L^{p^*}}^p \leq C \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dxdy$$

avec $p^* = p^*(N, s)$: exposant critique fractionnaire, qui égale $\frac{NP}{N-sp}$ c'est à dire :

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \quad \forall q \in [p, p^*]$$

Théorème 2.4. *(Voir[12]) Soient $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$ tel que $sp < N$. Pour toute fonction mesurable à support compact et $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, il existe $C = C(N, s, p)$ tel que :*

$$\|f\|_{L^q} \leq C \|f\|_{W^{s,p}}, \ \ \forall q \in [p, p^*]$$

avec $p^* = \frac{Np}{N-sp}$
c'est à dire :

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{q^*}(\mathbb{R}^N), \ \ \forall q \in [p, p^*]$$

Deuxième cas : $sp = N$

Théorème 2.5. *(Voir[12]) Soient $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$ tel que $sp = N$. Alors il existe un constant $C = C(N, s, p) > 0$, pour tout fonction mesurable à support compact $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ on a :*

$$\|f\|_{L^q} \leq C \|f\|_{W^{s,p}}, \ \ \forall q \in [p, +\infty[$$

c'est à dire :

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \ \ \forall q \in [p, +\infty[$$

Théorème 2.6. *(Voir[12]) Soient $s \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$ tel que $sp = N$, et soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Alors il existe un constant $C = C(N, s, p, \Omega)$ tel que, pour tout $f \in W^{s,p}(\Omega)$, on a :*

$$\|f\|_{L^q} \leq C \|f\|_{W^{s,p}}, \ \ \forall q \in [p, +\infty[$$

c'est à dire :

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \ \ \forall q \in [p, +\infty[$$

Corollaire 2.1. *(Voir[12]) Sous les hypothèses de théorème 2.6, si on suppose de plus que Ω est borné, alors*

$$\|f\|_{L^q} \leq C \|f\|_{W^{s,p}}, \ \ \forall q \in [1, +\infty[$$

avec $C = C(N, s, p, \Omega)$
c'est à dire :

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \ \ \forall q \in [1, +\infty[$$

Troisième cas : $sp > N$

Théorème 2.7. *(Voir[12]) Soient $s \in]0,1[$ et $p \in [1,+\infty[$ tel que $sp > N$. Alors il existe un constant $C = C(N,s,p,\Omega)$, on a :*

$$\|f\|_{C^{0,N-\frac{s}{p}}} \leq C\,\|f\|_{W^{s,p}}\,, \quad \forall f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$$

c'est à dire :

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

plus précisément

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b^{0,N-\frac{s}{p}}(\mathbb{R}^N)$$

Corollaire 2.2. *(Voir[12]) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{0,1}$, de frontière borné, et soient $p \in [1,+\infty[$ et $s \in]0,1[$ tel que $sp > N$, alors il existe un constant $C = C(N,s,p,\Omega)$, on a :*

$$\|f\|_{C^{0,N-\frac{s}{p}}} \leq \left(C\,\|f\|_{L^p}^p + \int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$$

c'est à dire :

$$W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) \cap C^{0,N-\frac{s}{p}}(\Omega) = C_b^{0,N-\frac{s}{p}}(\Omega)$$

Théorème 2.8. *(Voir[7]) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{0,1}$, de frontière borné, et soient $p \in [1,+\infty[$ et $s \in]0,1[$ et $N \geq 1$. Alors :*

1. *Si $sp < N$ alors $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compact $\forall q \leq \frac{Np}{N-sp}$,*
2. *Si $sp = N$ alors $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compact $\forall q < +\infty$,*
3. *Si $sp > N$ alors $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{0,\alpha}(\Omega)$ est compact $\forall \alpha \leq s - \frac{N}{p}$.*

2.3 Prolongement d'une fonction de $W^{s,p}(\Omega)$

Comme il est bien connu lorsque s est un entier (c'est à dire le cas ou $W^{s,p}(\Omega)$ est l'espace de Sobolev classique). Les résultats du prolongement sont assez important dans les applications.

Définition 2.7. (Voir[4]) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. L'espace $\widetilde{W}^{s,p}(\Omega)$ est défini par :

$$\widetilde{W}^{s,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N) : \exists \Omega \Supset U, \quad \|u\|_{W^{s,p}(U)} + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^{p-1}}{(1+|x|)^{N+ps}}dx < \infty\right\}$$

avec

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^{p-1}}{(1+|x|)^{N+ps}}dx < \infty$$

Définition 2.8. (Voir[4]) Soit Ω est infini. L'espace $\widetilde{W}^{s,p}_{loc}(\Omega)$ est défini par :

$$\widetilde{W}^{s,p}_{loc}(\Omega) = \left\{u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N) : u \in \widetilde{W}^{s,p}(\Omega') \ \ pour \ \ tout \ \ \Omega' \subseteq \Omega\right\}$$

Lemme 2.2. *(Voir[4]) Soit Ω est borné et soient $\varphi \in W^{s,p}_0(\Omega)$ et $u \in \widetilde{W}^{s,p}(\Omega)$. Alors*

$$\varphi \mapsto (u,\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))^{p-1}(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+ps}}dxdy$$

est fini et appartient à $W^{-s,p'}(\Omega)$.

Démonstration. Soit $\Omega \Supset U$, tel que

$$\|u\|_{W^{s,p}} + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^{p-1}}{(1+|x|)^{N+ps}} dx < \infty \tag{2.4}$$

et écrire

$$\begin{aligned}
(u,\varphi) &= \int_{U\times U} \frac{(u(x)-u(y))^{p-1}(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+ps}} dxdy \\
&+ \int_{U\times U^c} \frac{(u(x)-u(y))^{p-1}\varphi(x)}{|x-y|^{N+ps}} dxdy \\
&- \int_{U^c\times U} \frac{(u(x)-u(y))^{p-1}\varphi(y)}{|x-y|^{N+ps}} dxdy \\
&= \int_{U\times U} \frac{(u(x)-u(y))^{p-1}(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+ps}} dxdy \\
&+ 2\int_{\Omega\times U^c} \frac{(u(x)-u(y))^{p-1}\varphi(x)}{|x-y|^{N+ps}} dxdy
\end{aligned} \tag{2.5}$$

depuis $supp(\varphi) \subset \overline{\Omega}$. L'intégrale dans $U \times U$ est fini et continue en ce qui concerne la forte convergence de $\varphi \in W_0^{s,p}(\Omega)$ depuis $u \in W_0^{s,p}(U)$.
On observe pour $x \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{U^c} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+ps}} dy &\leq C\left(|u(x)|^{p-1}\int_{U^c}\frac{1}{|x-y|^{N+ps}}dy + \int_{U^c}\frac{|u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+ps}}dy\right) \\
&\leq C\left(|u(x)|^{p-1} + \int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(y)|^{p-1}}{|x-y|^{N+ps}}dy\right)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

On utilisé 1.3 avec $A = \Omega$ et $B = U$. Le côté droit de 2.6 appartient à $L^{p'}(\Omega)$ depuis Ω est délimité et $u \in L^p(\Omega)$. Donc le deuxième terme dans2.5 est continue par rapport à $L^p(\Omega)$ convergence de φ. Il est donc également continue en $W_0^{s,p}(\Omega)$. □

CHAPITRE 3

OPÉRATEUR P-LAPLACIEN FRACTIONNAIRE

Dans ce chapitre, on introduit l'opérateur p-Laplacien fractionnaire avec des résultats de cet opérateur.

3.1 Définitions et motivations

Définition 3.1. (Voir [22, 21]) Soient $p \in]1, +\infty[$ et $s \in]0, 1[$, alors on définit le p-Laplacien fractionnaire par :

$$(-\Delta)_p^s u(x) = 2P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

avec

$$P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} dy = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x,\epsilon)} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} dy$$

Remarque 3.1. (Voir[12]) • Si $p \neq 2$: $(-\Delta)_p^s$ est non linéaire.
• Cet opérateur est appelé non local, en ce sens que la valeur de p-Laplacien fractionnaire $u(x)$ à tout point $x \in \Omega$ dépend non seulement des valeurs de x sur l'ensemble Ω, mais en fait sur la tout $\mathbb{R}^N$.
• $(-\Delta)_p^s \to (-\Delta)_p$ quand $s \to -1$.

3.2 Quelques propriétés de $(-\Delta)_p^s$

Le résultat suivant apparait une caractéristique non local fondamentale de $(-\Delta)_p^s$.

Lemme 3.1. *(Voir[4])(**Comportement non local de** $(-\Delta)_p^s$) On suppose $u \in \widetilde{W}_{loc}^{s,p}(\Omega)$ résout $(-\Delta)_p^s u = f$ faiblement, fortement ou pointer à bon escient en Ω pour certains $f \in L_{loc}^1(\Omega)$. Soit $v \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ tel que*

$$dist(supp(v), \Omega) > 0, \int_{\Omega^c} \frac{|v(x)|^{p-1}}{(1 + |x|)^{N+ps}} dx < \infty \tag{3.1}$$

et définir pour presque partout Lebesgue le point $x \in \Omega$ de u

$$h(x) = 2\int_{supp(v)} \frac{(u(x)-u(y)-v(y))^{p-1} - (u(x)-u(y))^{p-1}}{|x-y|^{N+ps}} dy$$

Alors $u+v \in \widetilde{W}^{s,p}_{loc}(\Omega)$ et ça résout $(-\Delta)_p^s(u+v) = f+h$ faiblement, fortement ou ponctuellement respectivement dans Ω.

Démonstration. Comme d'habitude, il suffit de considérer le cas Ω borné, et on prouve d'abord que $u+v \in \widetilde{W}^{s,p}(\Omega)$.
Soit $K = supp(v)$ et U tel que 2.4 tient pour toi u, et supposons sans perte de généralité que $\Omega \Subset U \Subset K^c$. Clairement $u+v = u$ dans U, et il appartient donc à $W^{s,p}(U)$. De plus

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-v(x)|^{p-1}}{(1+|x|)^{N+ps}} dx \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^{p-1}}{(1+|x|)^{N+ps}} dx + \int_K \frac{|v(x)|^{p-1}}{(1+|x|)^{N+ps}} dx\right)$$

et le dernier terme est fini en raison de 3.1. Avec une estimation similaire, on voit que l'intégrale définissant h est finie (dû aussi à 3.1 et 1.3).

On considère maintenant le cas où $(-\Delta)_p^s u = f$ faiblement. On choisi $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ et on calcule

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)+v(x)-u(y)-v(y))^{p-1}(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+ps}} dxdy \\
&= \int_{\Omega\times\Omega} \frac{(u(x)-u(y))^{p-1}(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+ps}} dxdy \\
&+ \int_{\Omega\times\Omega^c} \frac{(u(x)-u(y)-v(y))^{p-1}\varphi(x)}{|x-y|^{N+ps}} dxdy \\
&- \int_{\Omega^c\times\Omega} \frac{(u(x)+v(x)-u(y))^{p-1}\varphi(y)}{|x-y|^{N+ps}} dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))^{p-1}(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+ps}} dxdy \\
&- \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))^{p-1}(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+ps}} dxdy \\
&- \int_{\Omega\times\Omega^c} \frac{(u(x)-u(y))^{p-1}\varphi(x)}{|x-y|^{N+ps}} dxdy \\
&+ \int_{\Omega^c\times\Omega} \frac{(u(x)-u(y))^{p-1}\varphi(y)}{|x-y|^{N+ps}} dxdy \\
&+ 2\int_{\Omega\times\Omega^c} \frac{(u(x)-u(y)-v(y))^{p-1}\varphi(x)}{|x-y|^{N+ps}} dxdy \\
&= \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx + 2\int_{\Omega\times\Omega^c} \frac{(u(x)-u(y)-v(y))^{p-1} - (u(x)-u(y))^{p-1}}{|x-y|^{N+ps}} \varphi(x)dxdy \\
&= \int_\Omega (f(x)+h(x))\varphi dx
\end{aligned}$$

Où à la fin on a utilisé le théorème de Fubini. La densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W_0^{s,p}(\Omega)$ permet de conclure.
On suppose que $(-\Delta)_p^s u = f$ fortement ou pointer à bon escient en Ω. Soit, pour $x \in V \Subset \Omega$ et $\epsilon < dist(V, \Omega^c)$,

$$g_\epsilon(x) = \int_{B_\epsilon^c(x)} \frac{(u(x)+v(x)-u(y)-v(y))^{p-1}}{|x-y|^{N+ps}} dy$$

En utilisant 3.1 on a

$$\begin{aligned} g_\epsilon(x) &= \int_{\Omega \setminus B_\epsilon(x)} \frac{(u(x)-u(y))^{p-1}}{|x-y|^{N+ps}} dy + \int_{\Omega^c} \frac{(u(x)-u(y)-v(y))^{p-1}}{|x-y|^{N+ps}} dy \\ &= \int_{B_\epsilon^c(x)} \frac{(u(x)-u(y))^{p-1}}{|x-y|^{N+ps}} dy + \int_K \frac{(u(x)-u(y)-v(y))^{p-1} - (u(x)-u(y))^{p-1}}{|x-y|^{N+ps}} dy \end{aligned}$$

Prendre la limite pour $\epsilon \to 0^+$ donne la demande dans le cas ponctuel.

On montre que

$$(-\Delta)_p^s(u+v) = f + h$$

est fortement. Il suffit de montrer que

$$x \mapsto \int_K \frac{(u(x)-u(y)-v(y))^{p-1} - (u(x)-u(y))^{p-1}}{|x-y|^{N+ps}} dy$$

appartient à $L^1(K)$, qui peut être fait en procédant comme dans 2.6 et en utilisant 3.1 pour le terme impliquant v.

□

On rappelle également l'homogénéité bien connue, mise à l'échelle, et propriétés d'invariance rotationnelle de $(-\Delta)_p^s$. pour tous $\rho > 0$, $M \in O_N$(le groupe orthogonal), v mesurable, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, ensemble

$$\begin{aligned} v_\rho(x) &= v(\rho x), \;\; \rho^{-1}\Omega = \{x/\rho : x \in \Omega\}, \\ v_M(x) &= v(Mx), \;\; M^{-1}\Omega = \left\{M^{-1}x : x \in \Omega\right\}. \end{aligned}$$

Lemme 3.2. *(Voir[4]) Soit $u \in \widetilde{W}_{loc}^{s,p}(\Omega)$ satisfaire $(-\Delta)_p^s u = f$ faiblement en Ω pour certains $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Alors on a :*

1. *Pour tout $h > 0$, $(-\Delta)_p^s(hu) = h^{p-1} f$ faiblement en Ω,*
2. *Pour tout $\rho > 0$, $u_\rho \in \widetilde{W}^{s,p}(\rho^{-1}\Omega)$ et $(-\Delta)_p^s u_\rho = \rho^{ps} f_\rho$ faiblement en $\rho^{-1}\Omega$,*
3. *Pour tout $M \in O_N$, $u_M \in \widetilde{W}^{s,p}(M^{-1}\Omega)$ et $(-\Delta)_p^s u_M = f_M$ faiblement en $M^{-1}\Omega$.*

Proposition 3.1. *(Voir[4]) (**Principe de comparaison**) Soit Ω est borné, $u, v \in \widetilde{W}^{s,p}(\Omega)$ satisfaisant $u \leq v$ dans Ω^c et pour tout $\varphi \in W_0^{s,p}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ dans Ω,*

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))^{p-1}(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+ps}} dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} \frac{(v(x)-v(y))^{p-1}(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+ps}} dxdy$$

Alors $u \leq v$ dans Ω.

Démonstration. On montre que $u \leq v$ dans Ω.
Il suffit de savoir que les deux côtés de l'inégalité sont finis, et on multiple par $(u-v)_+ \in W_0^{s,p}(\Omega)$, qui y est utilisé comme fonction de test. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))^{p-1}(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+ps}}(u-v)_+dxdy \leq \int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{(v(x)-v(y))^{p-1}(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+ps}}(u-v)_+dxdy$$

et par lemme 2.2, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{(u(x)-u(y))^{p-1}(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+ps}}dxdy < \infty$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{(v(x)-v(y))^{p-1}(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+ps}}dxdy < \infty$$

Soit $U \Supset \Omega$ comme dans la définition 2.7 pour les deux u et v. On a divisé la norme de Gagliardo en $\mathbb{R}^N$ comme

$$\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \frac{|w(x)-w(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy = \int_{U\times U} \frac{|w(x)-w(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy + 2\int_{\Omega\times U^c} \frac{|w(x)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy$$

où on a utilisé ce $w = 0$ dans Ω^c par hypothèse. Le premier terme est borné depuis $u, v \in W^{s,p}(U)$. Le second terme est non singulier puisque $dist(\Omega, U^c) > 0$ et en utilisant 1.3, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times U^c} \frac{|w(x)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy &\leq C_{\Omega,U}\int_\Omega (|u(x)|^p + |v(x)|^p)\,dx \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(1+|y|)^{N+ps}}dy \\ &\leq C_{\Omega,U}\int_\Omega (|u(x)|^p + |v(x)|^p)\,dx\end{aligned}$$

Ce qui terminé la preuve.

□

3.3 Cas particulier

3.3.1 Espace $H^s(\Omega)$

Dans cette section on s'intéresse à le cas particulier où $p = 2$.

Définition 3.2. (Voir [15]) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et soient $s \in]0,1[$ et $p = 2$. L'espace $H^s(\Omega)$ est défini par :

$$H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$$

Proposition 3.2. *(Voir [15]) Le produit scalaire dans $H^s(\Omega)$ est défini par :*

$$\langle u, v\rangle_{H^s(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \int_{\Omega\times\Omega} \frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}}dxdy, \quad \forall u, v \in H^s(\Omega)$$

Alors $H^s(\Omega)$ est espace de Hilbert.
Clairement, pour tout $s \in]0,1[$, on a

$$H^s(\mathbb{R}^N) = W^{s,2}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) : [u]_{s,2} < +\infty \right\}$$

où est défini dans la formule 2.3.

Définition 3.3. (Voir [15]) L'espace $H^s(\mathbb{R}^N)$ peut être défini de manière alternative via une transformée de Fourier. Alors :

$$\widehat{H^s}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^{2s}) \left| \mathcal{F}u(\xi) \right|^2 dx < +\infty \right\}$$

3.3.2 L'opérateur Laplacien fractionnaire

L'opérateur de base impliqué dans ce type de problème est le soi-disant fractionnaire Laplacien $(-\Delta)^s$ avec $s \in]0,1[$. Cette section est consacrée à la définition de cet opérateur et à ses propriétés. (Voir[15])

Définition 3.4. (Voir[15]) Soient $p = 2$ et $s \in]0,1[$, alors on définit le Laplacien factionnaire par :

$$(-\Delta)^s u(x) = C(N,s) \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x,\epsilon)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \tag{3.2}$$

où $B(x,\epsilon)$ est la boule centrée en x de rayon ϵ, et $C(N,s)$ est la constante de normalisation (positive) suivant :

$$C(N,s) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1-cos(\xi_1)}{|\xi|^{N+2s}} d\xi \right)^{-1} \tag{3.3}$$

peut écrire

$$(-\Delta)^s u(x) = C(N,s) P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \tag{3.4}$$

avec

$$P.V. \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x,\epsilon)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy \tag{3.5}$$

Définition 3.5. (Voir[15]) Soit $s \in]0,1[$, alors on définit le Laplacien factionnaire via la transformée de Fourier par :

$$(-\Delta)^s u(x) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s} \mathcal{F}u(\xi))(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

où $\mathcal{F}^{-1}$ est transformée de Fourier inverse, alors

$$\mathcal{F}^{-1}\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix.\xi.} \varphi(\xi) d\xi$$

Proposition 3.3. *(Voir[15]) Soit $s \in]0,1[$. Alors :*

$$(-\Delta)^s u(x) = -\frac{1}{2} C(N,s) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x+y) + u(x-y) - 2u(x)}{|y|^{N+2s}} dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Proposition 3.4. *(Voir [15]) Soient $s \in]0,1[$ et $C(N,s)$ est la constante définie en 3.3. Puis, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, l'égalité*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1 - cos(\xi.y)}{|y|^{N+2s}} dy = C(N,s)^{-1} |\xi|^{2s}$$

Corollaire 3.1. *(Voir [15]) Soient* $s \in]0,1[$ *et* $C(N,s)$ *est la constante définie en* 3.3*. Puis, pour tout* $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$*, l'égalité*

$$[u]^2_{H^s(\mathbb{R}^N)} = 2C(N,s)^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 \, d\xi$$

De plus,

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \widehat{H^s(\mathbb{R}^N)}$$

CHAPITRE 4

APPLICATION : EXISTENCE DES SOLUTIONS FAIBLES POUR UN PROBLÈME P-LAPLACIEN FRACTIONNAIRE SINGULIER

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence et l'unicité de solution d'un problème aux limites contenant l'opérateur p-Laplacien fractionnaire et un terme non linéaire singulier.

4.1 Présentation du problème et quelques préliminaires

Soient $p \in]1, +\infty[$, $s \in]0, 1[$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné régulier avec $N > sp$. On considère le problème singulier non linéaire non local suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = \frac{f(x)}{u^\gamma} & dans \quad \Omega, \\ u > 0 & dans \quad \Omega, \\ u = 0 & dans \quad \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

Le but de cette partie est d'étudier l'existence et l'unicité de la solution pour le problème 4.1. la nature de l'opérateur non locale exige d'introduire une définition de base d'un solution faible du problème 4.1 comme suit

Définition 4.1. (Voir [2]) Une fonction $u \in W_{loc}^{s,p}(\Omega) \cap L^{p-1}(\Omega)$ est une solution faible du problème 4.1 si

$$u^{\max\left\{\frac{\gamma+p-1}{p},1\right\}} \in W_0^{s,p}(\Omega), \quad \frac{f(x)}{u^\gamma} \in L_{loc}^1(\Omega)$$

et on a

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+sp}} dxdy = \int_\Omega \frac{f(x)}{u^\gamma}\varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Le théorème suivant nous fournit, le résultat principal de cette partie.

Théorème 4.1. *(Existence)(Voir [2]) Soit $0 < \gamma \leq 1$ et suppose que*

$$f \geq 0, \ \ f \in L^m(\Omega), \ \ m = \frac{Np}{N(p-1) + sp + \gamma(N - sp)}$$

Alors 4.1 a une solution faible $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ avec $u > 0$ pour tout compact $k \Subset \Omega$.

Théorème 4.2. *(Unicité)(Voir [2]) Soit $\gamma > 0$ et soit $f \in L^1(\Omega)$ non négatif. Alors, sous conditions aux limites de Dirichlet nulles au sens de la définition 4.2, la solution à 4.1 est unique.*

La preuve de ce théorème 4.1 repose sur une technique bien établie introduite dans ([2]).

Dans ce que suit, on donne une définition pour une fonction u s'annule sur le bord de Ω ($u = 0$ sur $\partial\Omega$).

Définition 4.2. (Voir [2]) Soit u tel que $u = 0$ dans $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$. On dit que $u \leq 0$ sur $\partial\Omega$ si, pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$(u - \epsilon)^+ \in W_0^{s,p}(\Omega)$$

On dit que $u = 0$ sur $\partial\Omega$ si u est positif et $u \leq 0$ sur $\partial\Omega$.

Lemme 4.1. *(Voir [2]) Soient $q > 1$ et $\epsilon > 0$. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on pose*

$$S_\epsilon^x = \{x \geq \epsilon\} \cap \{y \geq 0\} \qquad S_\epsilon^y = \{y \geq \epsilon\} \cap \{x \geq 0\}.$$

Alors, on a

$$|x^q - y^q| \geq \epsilon^{q-1} |x - y| \quad dans \quad S_\epsilon^x \cup S_\epsilon^y. \tag{4.2}$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x \geq y$, on considère la fonction $f(t) = t^q,\ t \in [y, x]$ avec $x \neq y$ (l'inégalité est évidente dans le cas $x = y$). Comme $q > 1$ alors f est continue sur $[y, x]$ et dérivable sur $]y, x[$, alors d'après le théorème des accroissements finis, il existe $\lambda \in]y, x[$ tel que :

$$\begin{aligned} x^q - y^q &= f^{'}(\lambda)(x - y) \\ &= q\lambda^{q-1}(x - y) \end{aligned}$$

1. Si $(x, y) \in S_\epsilon^x \cap S_\epsilon^y$ alors $y \geq \epsilon$ et $x \geq \epsilon$

$$\begin{aligned} x^q - y^q &= q\lambda^{q-1}(x - y) \\ &\geq \lambda^{q-1}(x - y) \\ &\geq \epsilon^{q-1}(x - y) \end{aligned}$$

   car $\epsilon \leq y < \lambda < x \Rightarrow \lambda > \epsilon$

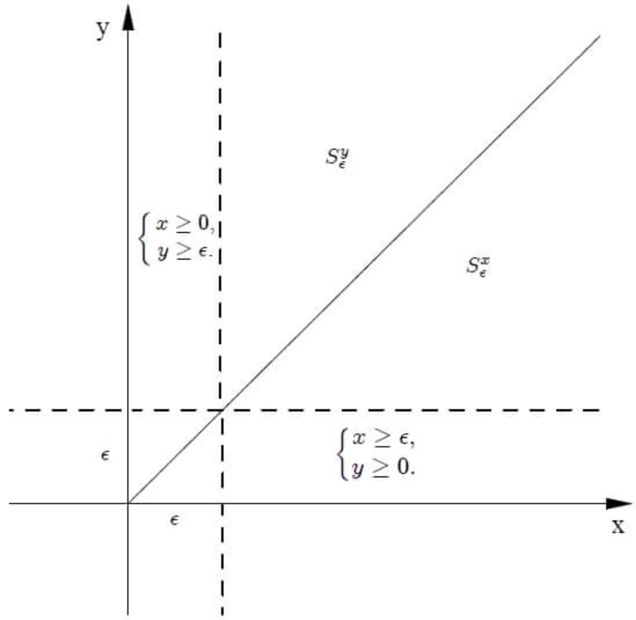
2. Si $x \geq \epsilon$ et $y \geq 0$
   On sait que la fonction $f(t) = t^q$ avec $q > 1$ est strictement convexe d'après proposition 1.9, alors on a :

$$\begin{aligned} \frac{x^q - y^q}{x - y} &\geq \frac{x^q - 0^q}{x - 0} \\ &= \frac{x^q}{x} \\ &= x^{q-1} \\ &\geq \epsilon^{q-1} \end{aligned}$$

alors

$$x^q - y^q \geq \epsilon^{q-1}(x - y)$$

Alors, l'inégalité 4.2 est prouvée. $\square$



Proposition 4.1. *(Voir [2]) Soit $\gamma > 0$ et soit u est une fonction positif avec $u^{max\{\frac{\gamma+p-1}{p},1\}} \in W_0^{s,p}(\Omega)$. Alors u satisfait les conditions aux limites de Dirichlet au sens de la définition 4.2.*

Démonstration. • Si $0 < \gamma < 1$ alors $\max\left\{\frac{\gamma+p-1}{p}, 1\right\} = 1$ et par suite le résultat est évident.
• Si $\gamma > 1$ alors $\max\left\{\frac{\gamma+p-1}{p}, 1\right\} = \frac{\gamma+p-1}{p}$. Pour $\epsilon > 0$, on pose :

$$S_\epsilon = supp(u-\epsilon)^+ \;\; dans \;\; Q_\epsilon = \mathbb{R}^{2N} \backslash (S_\epsilon^c \times S_\epsilon^c)$$

où

$$\begin{aligned} supp(u-\epsilon)^+ &= \overline{\{x \in \Omega : (u-\epsilon)^+ > 0\}} \\ &= S_\epsilon^{u(x)} \times S_\epsilon^{u(y)} \end{aligned}$$

D'après lemme 4.1, on a $Q_\epsilon \subset S_\epsilon^x \cup S_\epsilon^y$. Alors

$$\begin{aligned} \left|(u-\epsilon)^{+q}(x) - (u-\epsilon)^{+q}(y)\right| &\geq \epsilon^{q-1} \left|(u-\epsilon)^+(x) - (u-\epsilon)^+(y)\right| \quad dans \quad Q_\epsilon \\ |u^q(x) - u^q(y)| &\geq \epsilon^{q-1} |u(x) - u(y)| \quad dans \quad Q_\epsilon \end{aligned}$$

On pose $q = \frac{\gamma+p-1}{p}$, donc on a :

$$\begin{aligned} |u^q(x) - u^q(y)| &= \left|u^{\frac{\gamma+p-1}{p}}(x) - u^{\frac{\gamma+p-1}{p}}(y)\right| \\ &\geq \epsilon^{\frac{\gamma+p-1}{p}-1} |u(x) - u(y)| \\ &= \epsilon^{\frac{\gamma+p-1-p}{p}} |u(x) - u(y)| \\ &= \epsilon^{\frac{\gamma-1}{p}} |u(x) - u(y)| \end{aligned}$$

alors

$$\left|u^{\frac{\gamma+p-1}{p}}(x) - u^{\frac{\gamma+p-1}{p}}(y)\right|^p \geq \epsilon^{\gamma-1} |u(x) - u(y)|^p \tag{4.3}$$

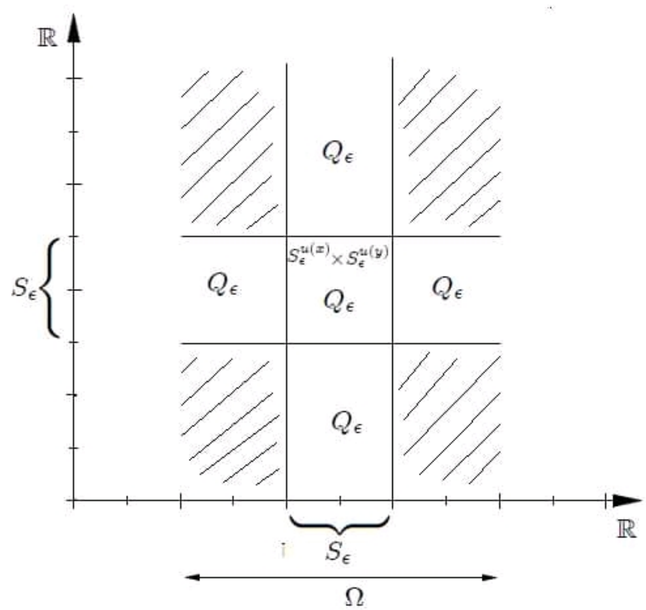
Comme $u(x) \geq \epsilon$ dans Q_ϵ et $u(y) \geq \epsilon$ dans Q_ϵ. On a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|(u-\epsilon)^+(x) - (u-\epsilon)^+(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy &= \int_{Q_\epsilon} \frac{|(u-\epsilon)^+(x) - (u-\epsilon)^+(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \\
&+ \int_{\mathbb{R}^{2N}\setminus Q_\epsilon} \frac{|(u-\epsilon)^+(x) - (u-\epsilon)^+(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \\
&\leq \int_{Q_\epsilon} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy
\end{aligned}$$

En utilisant la relation 4.3 on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|(u-\epsilon)^+(x) - (u-\epsilon)^+(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \leq \epsilon^{1-\gamma} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{\left|u^{\frac{\gamma+p-1}{p}}(x) - u^{\frac{\gamma+p-1}{p}}(y)\right|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy$$

Ce qui termine la preuve.



□

4.2 Étude d'existence des solutions pour un problème p-Laplacien fractionnaire avec un terme régulier

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$, soient $p \in]1, +\infty[$ et $s \in]0, 1[$ tels que $sp < N$. On considère le problème suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = f(x) & dans \quad \Omega, \\ u > 0 & dans \quad \Omega, \\ u = 0 & dans \quad \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases} \tag{4.4}$$

où f est une fonction positif de $L^\infty(\Omega)$.

Définition 4.3. On dit que $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ est une solution faible de problème 4.4, si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+sp}}dxdy = \int_\Omega f(x)\varphi dx, \qquad \forall \varphi \in W_0^{s,p}(\Omega)$$

Théorème 4.3. *(Voir [2]) Soient $f \in L^\infty(\Omega)$ et $f \geq 0,\ f \not\equiv 0$. Alors le problème 4.4 admet une solution unique $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$.*

• Pour prouver l'existence de la solution faible du problème 4.4, on considère la fonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned} J : W_0^{s,p}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto J(u) \end{aligned}$$

avec

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy - \int_\Omega f(x)udx$$

Lemme 4.2. *Tout point critique de J est une solution faible du problème 4.4.*

Démonstration. D'abord, on montre que J est de classe $C^1(W_0^{s,p}(\Omega), \mathbb{R})$.
On pose

$$\begin{aligned} J_1(u) &= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy, && \forall u \in W_0^{s,p}(\Omega) \\ J_2(u) &= \int_\Omega f(x)udx, && \forall u \in W_0^{s,p}(\Omega) \end{aligned}$$

D'abord, on montre que J_2 **est Fréchet différentiable**, en effet, soit $u,\ \ \varphi \in W_0^{s,p}(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} J_2(u+\varphi) - J_2(u) &= \int_\Omega f(x)(u+\varphi)dx - \int_\Omega f(x)udx \\ &= \int_\Omega f(x)udx + \int_\Omega f(x)\varphi dx - \int_\Omega f(x)udx \\ &= \int_\Omega f(x)\varphi dx \\ &= J_2(\varphi) + O(\|\varphi\|) \\ &= \langle Au, \varphi\rangle \end{aligned}$$

Maintenant, on assure que la forme linéaire Au est continue. En utilisant l'inégalité de Hölder 1.1 et l'inégalité de type Poincaré 2.2, on obtient

$$\begin{aligned} |\langle Au, \varphi\rangle| &= \left|\int_\Omega f(x)\varphi dx\right| \\ &\leq \|f\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{L^1} \\ &\leq C\|f\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{L^p} \\ &\leq C'\|f\|_{L^\infty}[\varphi]_{s,p} \\ &\leq C'\|f\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{W^{s,p}} \end{aligned}$$

D'où, Au est une forme linéaire et continue et on écrit

$$Au = J_G^{'}(u)$$

où

$$\left\langle J_{2G}^{'}(u), \varphi \right\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{s,p}(\Omega)$$

De plus, on peut vérifier facilement que

$$J_{2G}^{'} : W_0^{s,p}(\Omega) \to \left(W_0^{s,p}(\Omega)\right)^{'}$$

est continue.
Ce qui implique que J_2 est Fréchet différentiable et on écrit

$$\left\langle J_2^{'}(u), \varphi \right\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi dx$$

Maintenant, de la même manière, on vérifie que J_1 est Gâteaux différentiable, en effet, pour tout $u, \varphi \in W_0^{s,p}(\Omega)$ et pour tout $t > 0$ tel que $u + t\varphi \in W_0^{s,p}(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \to 0} \frac{J_1(u + t\varphi) - J_1(u)}{t} \\
=&\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|(u(x) + t\varphi(x)) - (u(y) + t\varphi(y))|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy\right] \\
=&\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|(u(x) - u(y)) + t(\varphi(x) - \varphi(y))|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy\right]
\end{aligned}$$

Pour calculer cette limite, on applique le théorème des accroissements finis sur la fonction g définie par :

$$g(s) = |(u(x) - u(y)) + s(\varphi(x) - \varphi(y))|^p, \quad pour \;\; s \in (0, t)$$

Alors, il existe un nombre $c_t \in]0, t[$ vérifiant :

$$g(t) - g(0) = g^{'}(c_t)t$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
&|(u(x) - u(y)) + t(\varphi(x) - \varphi(y))|^p - |u(x) - u(y)|^p \\
&= \left[p\,|(u(x) - u(y)) + c_t(\varphi(x) - \varphi(y))|^{p-2}\left((u(x) - u(y)) + c_t(\varphi(x) - \varphi(y))\right)(\varphi(x) - \varphi(y))\right] t
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{1}{p}\frac{|(u(x) - u(y)) + t(\varphi(x) - \varphi(y))|^p - |u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \\
=&\lim_{c_t \to 0}\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|(u(x) - u(y)) + c_t(\varphi(x) - \varphi(y))|^{p-2}\left((u(x) - u(y)) + c_t(\varphi(x) - \varphi(y))\right)(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \\
=&\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x-y|^{N+sp}} dxdy
\end{aligned}$$

On signale que :

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} |(u(x)-u(y))+c_t(\varphi(x)-\varphi(y))|^{p-2}\left((u(x)-u(y))+c_t(\varphi(x)-\varphi(y))\right)(\varphi(x)-\varphi(y))$$

$$\to \int_{\mathbb{R}^{2N}} |u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))$$

En effet, si on pose : $c_t = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$h_n(x,y) = \left|(u(x)-u(y))+\frac{1}{n}(\varphi(x)-\varphi(y))\right|^{p-2}\left((u(x)-u(y))+\frac{1}{n}(\varphi(x)-\varphi(y))\right)(\varphi(x)-\varphi(y))$$

$$h(x,y) = |u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))$$

D'abord, facilement de voir que : la suite $h_n(x,y)$ converge vers $h(x,y)$ presque partout dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$.
De plus

$$\begin{aligned}
|h_n(x,y)| &\leq (|u(x)-u(y)|+\frac{1}{n}|\varphi(x)-\varphi(y)|)^{p-2}(|u(x)-u(y)|+\frac{1}{n}|\varphi(x)-\varphi(y)|)\,|\varphi(x)-\varphi(y)| \\
&\leq (|u(x)-u(y)|+|\varphi(x)-\varphi(y)|)^{p-2}(|u(x)-u(y)|+|\varphi(x)-\varphi(y)|)\,|\varphi(x)-\varphi(y)| \\
&= (|u(x)-u(y)|+|\varphi(x)-\varphi(y)|)^{p-1}\,|\varphi(x)-\varphi(y)| \in L^1(\mathbb{R}^{2N})
\end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
Lu : W_0^{s,p}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\
\varphi \to Lu(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+sp}}dxdy
\end{aligned}$$

Évidant de voir que Lu est une forme linéaire, on vérifie qu'elle est continue, soit $u, \varphi \in W_0^{s,p}(\Omega)$, on utilisant l'inégalité de Hölder 1.1, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}|u(x)-u(y)|\,|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-1}|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^{\frac{N+sp}{p'}}\,|x-y|^{\frac{N+sp}{p}}}dxdy \\
&\leq \left[\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p}}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\right]^{\frac{1}{p'}} \left[\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^{p}}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= [u]_{s,p}^{\frac{p}{p'}}\,[\varphi]_{s,p} \\
&= C\,\|\varphi\|_{W^{s,p}}
\end{aligned}$$

où p' est le conjugué de $p\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$ et $C=[u]_{s,p}^{\frac{p}{p'}}$ ce qui prouve que Lu est une forme linéaire continue et on pose :

$$Lu(\varphi)=\left\langle J'_{1G}u,\varphi\right\rangle=\int_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}\,(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+sp}}dxdy,\quad \forall\varphi\in W_0^{s,p}(\Omega)$$

Il reste de prouver que

$$J'_{1G}:W_0^{s,p}(\Omega)\to(W_0^{s,p}(\Omega))'$$

est continue.
Soit (u_n) une suite de $W_0^{s,p}(\Omega)$ convergente vers une fonction u dans $W_0^{s,p}(\Omega)$ c'est à dire :

$$\|u_n-u\|_{W_0^{s,p}}\to 0$$

alors,

$$\left\|J'_{1G}(u_n)-J'_{1G}(u)\right\|_{(W_0^{s,p})'}\to 0$$

avec la norme dans $(W_0^{s,p}(\Omega))'$ est définie comme :

$$\left\|J'_{1G}(u_n)-J'_{1G}(u)\right\|_{(W_0^{s,p})'}=\sup_{\|\varphi\|\le 1}\frac{\left|\left\langle J'_{1G}(u_n)-J'_{1G}(u),\varphi\right\rangle\right|}{\|\varphi\|}$$

$$\begin{aligned}&\left|\left\langle J'_{1G}(u_n)-J'_{1G}(u),\varphi\right\rangle\right|=\left|\left\langle J'_{1G}(u_n),\varphi\right\rangle-\left\langle J'_{1G}(u),\varphi\right\rangle\right|\\ =&\left|\int_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{|u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+sp}}dxdy-\int_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\right|\\ =&\left|\int_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{\left(|u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y))(\varphi(x)-\varphi(y))\right)-\left(|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))\right)}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\right|\end{aligned}$$

Comme (u_n) est une suite convergente dans $W_0^{s,p}(\Omega)$. Alors J'_{1G} est continue.
Alors J_1 est Gâteaux différentiable.

□

D'après le lemme 4.2, au lieu de chercher des solutions faibles du problème 4.4, on va chercher des points critiques pour la fonctionnelle et pour établir ça on s'appuie sur une méthode de minimisation plus précisement c'est le théorème 1.8. D'abord on assure la coercivitée de J d'après le lemme suivant :

Lemme 4.3. *La fonctionnelle J est coercive.*

Démonstration. On montre que J est coercive.
On a

$$J(u)=\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy-\int_\Omega f(x)udx$$

D'après l'inégalité de Hölder 1.1 et l'inégalité de type Poincaré 2.2, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x)udx&\le C_1\,\|f\|_{L^\infty}\,\|u\|_{L^p}\\ &\le C\,\|f\|_{L^\infty}\,[u]_{s,p}\\ &=C\,\|f\|_{L^\infty}\,\|u\|_{W^{s,p}}\\ &=C\,\|f\|_{L^\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy - C\|f\|_{L^\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq \frac{1}{p}\|u\|^p_{W_0^{s,p}} - C\|f\|_{L^\infty}\|u\|_{W_0^{s,p}} \end{aligned}$$

En division sur $\|u\|_{W_0^{s,p}}$

$$\frac{J(u)}{\|u\|_{W_0^{s,p}}} \geq \frac{1}{p}\|u\|^{p-1}_{W_0^{s,p}} - C\|f\|_{L^\infty}$$

Comme $p > 1$, alors

$$\lim_{\|u\|_{W_0^{s,p}} \to +\infty} \frac{J(u)}{\|u\|_{W_0^{s,p}}} = +\infty$$

Donc J est coercive. □

Lemme 4.4. *J est faiblement semi continue inférieurement.*

Démonstration. Soit $(u_n) \subset W_0^{s,p}(\Omega)$ une suite converge faiblement vers u dans $W_0^{s,p}(\Omega)$, c'est à dire

$$u_n \rightharpoonup u$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} |J_2(u_n) - J_2(u)| &= \left|\int_\Omega f u_n dx - \int_\Omega f u dx\right| \\ &\leq \int_\Omega |f|\,|u_n - u|\,dx \\ &\leq \|f\|_{L^\infty}\int_\Omega |u_n - u|\,dx \end{aligned}$$

Comme l'injection de $W_0^{s,p}(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$ est compact car $\frac{Np}{N-sp} > 1$, alors

$$\|u_n - u\|_{L^1} = \int_\Omega |u_n - u|\,dx \to 0$$

et par suite

$$J_2(u) = \lim_{n\to+\infty} J_2(u_n)$$

D'autre part, on a

$$J_1(u) \leq \lim_{n\to+\infty} \inf J_1(u_n)$$

En effet, d'après le lemme de Fatou 1.1, on a :

$$\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy$$

Ce qui affirme la faiblement semi continuité inférieurement. □

Preuve du théorème 4.3 :

Existence : Il est facile de voir que les lemmes 4.2, 4.3 et 4.4 satisfaisants les conditions du théorème 1.8 et par suite la fonctionnelle J admet au moins un point critique donc le problème 4.4 admet au moins une solution faible.

Unicité : Supposons que $u_1, u_2 \in W_0^{s,p}(\Omega)$ sont des solutions faibles à problème 4.4. Par conséquent, pour tout $\varphi \in W_0^{s,p}(\Omega)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_1(x)-u_1(y)|^{p-2}(u_1(x)-u_1(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+sp}}dxdy = \int_{\Omega} f(x)\varphi dx, \tag{4.5}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_2(x)-u_2(y)|^{p-2}(u_2(x)-u_2(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+sp}}dxdy = \int_{\Omega} f(x)\varphi dx. \tag{4.6}$$

En soustraction 4.5 et 4.6, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(|u_1(x)-u_1(y)|^{p-2}(u_1(x)-u_1(y)) - |u_2(x)-u_2(y)|^{p-2}(u_2(x)-u_2(y)))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+sp}}dxdy = 0$$

On pose $\varphi(x) = \omega(x) = u_1(x) - u_2(x)$. En utilisant l'inégalité 1.1, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(|u_1(x)-u_1(y)|+|u_2(x)-u_2(y)|)^{p-2}|\omega(x)-\omega(y)|^2}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \leq 0\\
&\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|(u_1(x)-u_2(x))-(u_1(y)-u_2(y))|^{p-2}|\omega(x)-\omega(y)|^2}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \leq 0\\
&\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|\omega(x)-\omega(y)|^{p-2}|\omega(x)-\omega(y)|^2}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \leq 0, \qquad si\ \ 1<p<2
\end{aligned} \tag{4.7}$$

En utilisant l'inégalité 1.2, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|\omega(x)-\omega(y)|^{p}}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \leq 0, \qquad si\ \ p \geq 2 \tag{4.8}$$

Dans les deux cas, les inégalités 4.7 et 4.8 affirment que $\omega(x) = C$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et certains constant $C \in \mathbb{R}$. Puisque $u_i = 0$ sur Ω^c, on obtient $\omega = 0$ sur Ω^c. Donc $C = 0$ et l'affirmation suit.

4.3 Régularités des solutions du problème 4.4

Dans cette partie on étudie la régularité des solutions du problème $(-\Delta)_p^s u = f(x)$ où f est une fonction de $L^q(\Omega)$, plus précisément on s'intéresse du cas ou $f \in L^\infty(\Omega)$, ici, le résultat principale est :

Lemme 4.5. *(Voir [24]) Soit $f \in L^q(\Omega)$ avec $1 < q \leq \infty$. Supposons que $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ est une solution faible de l'équation $(-\Delta)_p^s u = f(x)$ dans Ω. Alors*

$$\|u\|_{L^r} \leq C\,\|f\|_{L^q}^{\frac{1}{p-1}} \tag{4.9}$$

où

$$r = \begin{cases} \frac{N(p-1)q}{N-spq}, & 1 < q < \frac{N}{sp} \\ \infty & \frac{N}{sp} < q \leq \infty \end{cases}$$

et $C = C(N, \Omega, p, s, q) > 0$. En particulier, si $f \in L^\infty(\Omega)$, alors

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{L^\infty}^{\frac{1}{p-1}} \tag{4.10}$$

Démonstration. Pour $K > 0$, $t \in \mathbb{R}$, et $\alpha > 0$, ensemble $t_k = \max\{-k, \min\{t, k\}\}$ et considéré la fonction non croissante $g(t) = t_k^\alpha$. En utilisant le lemme 1.2 et tester l'équation $(-\Delta)_p^s u = f(x)$ par $g(u) \in W_0^{s,p}(\Omega)$ donne

$$\begin{aligned} \|G(u)\|^p &\leq \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(u(x)-u(y))^{p-1}(g(u(x))-g(u(y)))}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \\ &= \int_\Omega f(x) g(u(x)) dx, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_0^t g^{'}(\tau)^{\frac{1}{p}} d\tau \\ &= \frac{\alpha^{\frac{1}{p}} p}{\alpha + p - 1} t_k^{\frac{\alpha+p-1}{p}} \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Sobolev à gauche et l'inégalité de Hölder à droite, on a

$$\left\| u_k^{\frac{\alpha+p-1}{p}} \right\|_{L^{p_s^*}}^p \leq C \|f\|_{L^q} \|u_k^\alpha\|_{L^{q'}} \tag{4.11}$$

Si $1 < q < \frac{N}{sp}$, on prend :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{(p-1)p_s^*}{pq^{'} - p_s^*} \\ &= \frac{N(p-1)(q-1)}{N-spq} \\ &> 0 \end{aligned}$$

et donc :

$$\frac{\alpha+p-1}{p} p_s^* = \alpha q^{'}$$

Alors, on pose :

$$\begin{aligned} r &= \alpha q^{'} \\ &= \frac{N(p-1)q}{N-spq} \end{aligned}$$

et 4.11 donne

$$\|u_k\|_{L^r}^{\frac{pr}{p_s^*}} \leq C \|f\|_{L^q} \|u_k\|_{L^r}^{\frac{r}{q'}}$$

donc

$$\|u_k\|_{L^r} \leq C \|f\|_{L^q}^{\frac{1}{p-1}}$$

En faisant $k \to \infty$, on obtient l'inégalité 4.9 pour ce cas.
Si $\frac{N}{sp} < q \leq \infty$, en utilisant le théorème 3.1 dans l'article [18] et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C \left(\|u\|_{L^{q'}} + \|f\|_{L^q}^{\frac{1}{p-1}} \right) \tag{4.12}$$

Sachant que $q^{'} < p_s^*$ dans ce cas, l'inégalité de Hölder et la relation 4.11 avec $\alpha = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{L^{q'}}^p &\leq C \|u_k\|_{L^{p_s^*}}^p \\ &\leq C \|f\|_{L^q} \|u_k\|_{L^{q'}} \end{aligned}$$

d'où

$$\|u_k\|_{L^{q'}} \leq C \|f\|_{L^q}^{\frac{1}{p-1}}$$

En faisant $k \to \infty$ et en combinant avec la relation 4.12, on trouve

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{L^q}^{\frac{1}{p-1}}$$

En particulier, si $q = \infty$, on a

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{L^\infty}^{\frac{1}{p-1}}$$

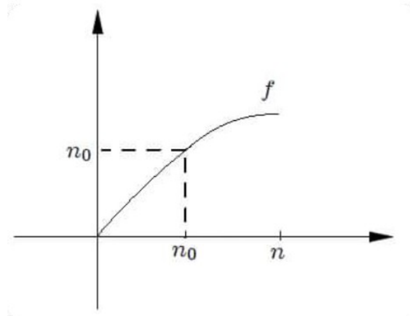
□

Corollaire 4.1. *Soit $f \in L^\infty(\Omega)$ et $f \geq 0$, $f \not\equiv 0$. Alors le problème 4.4 admet une solution unique $u \in W_0^{s,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.*

4.4 Approximations

Soit $f \in L^1(\Omega)$ avec $f \geq 0$, on considère la suite de troncature suivante :

$$f_n(x) = \min_{x\in\Omega} \{f(x), n\} = \begin{cases} f(x), & si \;\; f(x) \leq n \\ n, & si \;\; f(x) \geq n \end{cases}$$



Alors, on considère le problème d'approximation suivant :

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u_n = \frac{f_n(x)}{(u_n+\frac{1}{n})^\gamma} & dans \ \ \Omega \\ u_n > 0 & dans \ \ \Omega \\ u_n = 0 & dans \ \ \mathbb{R}^N \backslash \Omega \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_n$}$$

Proposition 4.2. *(Voir [2]) Pour toute $n \geq 1$, il existe une solution faible $u_n \in W_0^{s,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ à ($\mathcal{P}_n$).*

Démonstration. Étant donné $n \in \mathbb{N}$ et une fonction $u \in L^p(\Omega)$ à la lumière du théorème 4.3, il existe une solution unique $\omega \in W_0^{s,p}(\Omega)$ du problème

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s \omega = \frac{f_n(x)}{(u^+ +\frac{1}{n})^\gamma} & dans \ \ \Omega \\ \omega > 0 & dans \ \ \Omega \\ \omega = 0 & dans \ \ \mathbb{R}^N \backslash \Omega \end{cases} \tag{4.13}$$

où $u^+ = max(u, 0)$.
Alors, on peut définir l'application S définie par :

$$L^p(\Omega) \ni u \mapsto S(u) = \omega \in W_0^{s,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

où ω est la solution unique de 4.13. En utilisant ω comme fonction test dans 4.13, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|(\omega(x)-\omega(y))|^{p-2}\left((\omega(x)-\omega(y))((\omega(x)-\omega(y))\right.}{|x-y|^{N+sp}} dxdy = \int_\Omega \frac{f_n(x)}{(u^+ + \frac{1}{n})^\gamma} \omega dx$$

Comme $f_n(x) \leq n$ p.p $x \in \Omega$ et $u^+ \geq 0$, alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|(\omega(x)-\omega(y))|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy &= \int_\Omega \frac{f_n(x)}{(u^+ + \frac{1}{n})^\gamma} \omega dx \\ &\leq n^{\gamma+1} \|\omega\|_{L^1} \\ &\leq C n^{\gamma+1} \|\omega\|_{W_0^{1,p}} \end{aligned}$$

d'où

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|\omega(x)-\omega(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \leq C n^{\frac{\gamma+1}{p-1}} \tag{4.14}$$

pour certains $C = C(p, s, N, \Omega)$ (indépendant de u), de sorte que la boule de rayon $R = Cn^{\frac{\gamma+1}{p-1}}$ dans $W_0^{s,p}(\Omega)$, est invariant sous l'action de S. Maintenant, afin d'appliquer **le théorème du**

point fixe du Schauder 1.9 à S où $E = W_0^{s,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, puis d'obtenir une solution du problème 4.13, on besoin de prouver la continuité et la compacité de S comme un opérateur de $W_0^{s,p}(\Omega)$ dans $W_0^{s,p}(\Omega)$.
• Pour prouver la continuité et la compacité.
L'opérateur est définit par :

$$S : W_0^{s,p}(\Omega) \to W_0^{s,p}(\Omega)$$

1. **Continuité de** S
   Par la convergence forte de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $W_0^{s,p}(\Omega)$.
   On peut extraire une sous-suite $u_{k_l} = u_k$ telle que

$$u_k \to u \ \ dans \ \ L^{p_s^*}(\Omega)$$

   et

$$u_k(x) \to u(x) \ \ p.p. \ \ dans \ \ \Omega, \ \ comme \ \ k \to +\infty$$

   En considérant la suite correspondante des solutions $(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$. On a

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|\omega_k(x)-\omega_k(y)|^{p-2}(\omega_k(x)-\omega_k(y))(\omega_k(x)-\omega_k(y))}{|x-y|^{N+sp}}dxdy = \int_\Omega \frac{f_n(x)}{(u_k^+ + \frac{1}{n})^\gamma}\omega_k dx, \quad (4.15)$$

   et

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|\omega(x)-\omega(y)|^{p-2}(\omega(x)-\omega(y))(\omega(x)-\omega(y))}{|x-y|^{N+sp}}dxdy = \int_\Omega \frac{f_n(x)}{(u^+ + \frac{1}{n})^\gamma}\omega dx. \quad (4.16)$$

   En retranchant 4.15 de 4.16 et en posant $\overline{\omega}_k(x) = \omega_k(x) - \omega(x)$.

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(|\omega_k(x)-\omega_k(y)|^{p-2}(\omega_k(x)-\omega_k(y))^2 - |\omega(x)-\omega(y)|^{p-2}(\omega(x)-\omega(y))^2)}{|x-y|^{N+sp}}dxdy$$
$$= \int_\Omega \left(\frac{f_n(x)}{(u_k^+ + \frac{1}{n})^\gamma} - \frac{f_n(x)}{(u^+ + \frac{1}{n})^\gamma}\right)(\omega_k - \omega)\,dx$$

   $*$ Si $1 < p < 2$: On utilise l'inégalité 1.1, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(|\omega_k(x)-\omega_k(y)|+|\omega(x)-\omega(y)|)^{p-2}|\overline{\omega}_k(x)-\overline{\omega}_k(y)|^2}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \le \int_\Omega \left(\frac{f_n(x)}{(u_k^+ + \frac{1}{n})^\gamma} - \frac{f_n(x)}{(u^+ + \frac{1}{n})^\gamma}\right)(\omega_k - \omega)\,dx \quad (4.17)$$

   $*$ Si $p \ge 2$: On utilise l'inégalité 1.2, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|\overline{\omega}_k(x)-\overline{\omega}_k(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \le \int_\Omega \left(\frac{f_n(x)}{(u_k^+ + \frac{1}{n})^\gamma} - \frac{f_n(x)}{(u^+ + \frac{1}{n})^\gamma}\right)(\omega_k - \omega)\,dx \quad (4.18)$$

On considère le côté droit de 4.18. En utilisant les inégalités de Hölder et de Sobolev, alors

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \left(\frac{f_n(x)}{(u_k^+ + \frac{1}{n})^\gamma} - \frac{f_n(x)}{(u^+ + \frac{1}{n})^\gamma}\right)(\omega_k - \omega)\,dx\right| &= \left|\int_\Omega \left(\frac{f_n(x)}{(u_k^+ + \frac{1}{n})^\gamma} - \frac{f_n(x)}{(u^+ + \frac{1}{n})^\gamma}\right)\overline{\omega}_k dx\right| \\ &\leq \left(\int_\Omega \left|\frac{f_n(x)}{(u_k^+ + \frac{1}{n})^\gamma} - \frac{f_n(x)}{(u^+ + \frac{1}{n})^\gamma}\right|^{(p_s^*)'} dx\right)^{\frac{1}{(p_s^*)'}} \|\overline{\omega}_k\|_{L^{p_s^*}} \\ &\leq C\left(\int_\Omega \left|\frac{f_n(x)}{(u_k^+ + \frac{1}{n})^\gamma} - \frac{f_n(x)}{(u^+ + \frac{1}{n})^\gamma}\right|^{(p_s^*)'} dx\right)^{\frac{1}{(p_s^*)'}} \|\overline{\omega}_k\|_{W_0^{s,p}}\end{aligned}$$

où $(p_s^*)' = \frac{Np}{N(p-1)+sp}$ et $C = C(p, s, N)$ est une constante positif. D'après 4.18, on obtient
$*$ Si $p \geq 2$

$$\|\omega_k - \omega\|_{W_0^{s,p}} \leq C\left(\int_\Omega \left|\frac{f_n(x)}{(u_k^+ + \frac{1}{n})^\gamma} - \frac{f_n(x)}{(u^+ + \frac{1}{n})^\gamma}\right|^{(p_s^*)'} dx\right)^{\frac{1}{(p-1).(p_s^*)'}} \tag{4.19}$$

En remarquant que :

$$\left|\frac{f_n(x)}{(u_k^+ + \frac{1}{n})^\gamma} - \frac{f_n(x)}{(u^+ + \frac{1}{n})^\gamma}\right| \leq 2n^{\gamma+1} \tag{4.20}$$

car

$$\left|\frac{f_n(x)}{(u_k^+ + \frac{1}{n})^\gamma}\right| \leq n^{\gamma+1} \quad et \quad \left|\frac{f_n(x)}{(u^+ + \frac{1}{n})^\gamma}\right| \leq n^{\gamma+1}.$$

Alors, par le théorème de convergence dominé et par le fait que $u_k(x) \to u(x)$ p.p dans Ω de 4.19, on a

$$\lim_{k\to+\infty} \|\omega_k - \omega\|_{W_0^{s,p}} = 0$$

Donc, dans le cas $p \geq 2$, on a montré que S est continue de $W_0^{s,p}(\Omega)$ à $W_0^{s,p}(\Omega)$.
Dans le cas $1 < p < 2$ par un argument similaire et en utilisant la relation 4.17, on peut montrer la continuité de S de $W_0^{s,p}(\Omega)$ à $W_0^{s,p}(\Omega)$.

2. **Compacité de S**
Soit $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W_0^{s,p}(\Omega)$ une suite bornée, c'est à dire

$$\exists C > 0 : \|u_k\|_{W_0^{s,p}} \leq C, \qquad \forall k \in \mathbb{N}^* \tag{4.21}$$

Si on note $\omega_k = S(u_k)$, on montre qu'il existe une sous-suite et une fonction $\omega \in W_0^{s,p}(\Omega)$ satisfaite

$$\lim_{k\to\infty} \|\omega_k - \omega\|_{W_0^{s,p}} = 0$$

D'après 4.21 et de la réflexivité de l'espace $W_0^{s,p}(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite de (u_k) noter lui même telle que

$$u_k \rightharpoonup u \ \ faiblement \ \ dans \ \ W_0^{s,p}(\Omega)$$

et sachant que l'injection $W_0^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ est compacte pour tout $1 \leq r < p_s^*$, alors on a

$$u_k \to u \ \ dans \ \ L^r(\Omega), \ \ 1 \leq r < p_s^*$$

En vertu 4.14, on a $\|S(u_k)\|_{W_0^{s,p}} \leq C$ pour une constante C indépendante de k, et donc pour $1 \leq r < p_s^*$, on a

$$S(u_k) \rightharpoonup \omega \ \ dans \ \ W_0^{s,p}(\Omega)$$

et

$$S(u_k) \to \omega \ \ dans \ \ L^r(\Omega)$$

Pour certains $\omega \in W_0^{s,p}(\Omega)$. Alors pour tout $\varphi \in W_0^{s,p}(\Omega)$

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|\omega_k(x)-\omega_k(y)|^{p-2}\left(\omega_k(x)-\omega_k(y)\right)\left(\varphi(x)-\varphi(y)\right)}{|x-y|^{N+sp}}dxdy = \int_\Omega \frac{f_n(x)}{(u_k^+ + \frac{1}{n})^\gamma}\varphi dx \qquad (4.22)$$

On montre maintenant que, quand k tend vers l'infini, l'équation 4.22 converge vers

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|\omega(x)-\omega(y)|^{p-2}\left(\omega(x)-\omega(y)\right)\left(\varphi(x)-\varphi(y)\right)}{|x-y|^{N+sp}}dxdy = \int_\Omega \frac{f_n(x)}{(u^+ + \frac{1}{n})^\gamma}\varphi dx \qquad (4.23)$$

par le théorème de convergence dominé, on voit facilement que

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega \frac{f_n(x)}{(u_k^+ + \frac{1}{n})^\gamma}\varphi dx = \int_\Omega \frac{f_n(x)}{(u^+ + \frac{1}{n})^\gamma}\varphi dx$$

De plus, puisque la suite

$$\left\{\frac{|\omega_k(x)-\omega_k(y)|^{p-2}\left(\omega_k(x)-\omega_k(y)\right)}{|x-y|^{\frac{N+sp}{p'}}}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$$

est bornée dans $L^{p'}(\mathbb{R}^{2N})$ et par convergence ponctuelle de $\omega_k(x)$ à $\omega(x)$, on a

$$\frac{|\omega_k(x)-\omega_k(y)|^{p-2}\left(\omega_k(x)-\omega_k(y)\right)}{|x-y|^{\frac{N+sp}{p'}}} \to \frac{|\omega(x)-\omega(y)|^{p-2}\left(\omega(x)-\omega(y)\right)}{|x-y|^{\frac{N+sp}{p'}}} \ \ p.p \ \ dans \ \ \mathbb{R}^{2N}$$

De la réflexivité des espaces classiques de Lebesgue on peut passer à une sous-suite de sorte que :

$$\frac{|\omega_k(x)-\omega_k(y)|^{p-2}\left(\omega_k(x)-\omega_k(y)\right)}{|x-y|^{\frac{N+sp}{p'}}} \rightharpoonup \frac{|\omega(x)-\omega(y)|^{p-2}\left(\omega(x)-\omega(y)\right)}{|x-y|^{\frac{N+sp}{p'}}} \ \ faiblement \ \ dans \ \ L^{p'}(\mathbb{R}^{2N})$$

Alors, puisque :

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^{\frac{N+sp}{p'}}} \in L^p(\mathbb{R}^{2N})$$

on conclut que le membre à gauche de 4.22 converge vers le membre à gauche de 4.23. D'où, 4.23 est satisfaite. C'est, en particulier, $\omega = S(u)$.
Avec une même démonstration pour 4.17 et 4.18 et en posant $\omega_k = S(u_k)$ et $\overline{\omega}_k(x) =$

$\omega_k(x) - \omega(x)$, on obtient que :
$*$ Si 1 < p < 2, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(|\omega_k(x) - \omega_k(y)| + |\omega(x) - \omega(y)|)^{p-2} |\overline{\omega}_k(x) - \overline{\omega}_k(y)|^2}{|x-y|^{N+sp}} dxdy$$
$$\leq \|\omega_k - \omega\|_{L^p} \left(\int_\Omega \left| \frac{f_n(x)}{(u_k^+ + \frac{1}{n})^\gamma} - \frac{f_n(x)}{(u^+ + \frac{1}{n})^\gamma} \right|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$*$ Si $p \geq 2$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|\overline{\omega}_k(x) - \overline{\omega}_k(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} dxdy$$
$$\leq \|\omega_k - \omega\|_{L^p} \left(\int_\Omega \left| \frac{f_n(x)}{(u_k^+ + \frac{1}{n})^\gamma} - \frac{f_n(x)}{(u^+ + \frac{1}{n})^\gamma} \right|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}}$$

où $p' = \frac{p}{p-1}$. En utilisant 4.20, les deux dernières équations impliquent que

$$\lim_{k \to +\infty} \|S(u_k) - S(u)\|_{W_0^{s,p}} = 0$$

et par conséquent la compacité de S de $W_0^{s,p}(\Omega)$ à $W_0^{s,p}(\Omega)$. Le théorème du point fixe de Schauder 1.9 assure l'existence de $u_n \in W_0^{s,p}(\Omega)$, tel que $u_n = S(u_n)$, donc une solution faible

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u_n = \frac{f_n(x)}{(u_n + \frac{1}{n})^\gamma} & dans \ \ \Omega \\ u_n > 0 & dans \ \ \Omega \\ u_n = 0 & dans \ \ \mathbb{R}^N \backslash \Omega \end{cases} \tag{4.24}$$

Comme $\frac{f_n}{(u_n + \frac{1}{n})^\gamma} \in L^\infty(\Omega)$, alors le lemme 4.5 nous forint que u_n soit dans $L^\infty(\Omega)$. $\square$

Le résultat suivant prouve la monotonie des suite des solutions (u_n) du 4.24.

Lemme 4.6. *(Voir [2]) La suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ trouvé dans le lemme précédent satisfait*

$$u_n(x) \leq u_{n+1}(x), \quad p.p. \ \ pour \ \ x \in \Omega$$

et

$$u_n(x) \geq \sigma > 0, \quad p.p. \ \ pour \ \ x \in \omega \Subset \Omega$$

pour une constante positive $\sigma = \sigma(\omega)$.

Démonstration. On a, pour toute $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\varphi \in W_0^{s,p}(\Omega)$

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_n(x) - u_n(y)|^{p-2} (u_n(x) - u_n(y)) (\varphi(x) - \varphi(y))}{|x-y|^{N+sp}} dxdy = \int_\Omega \frac{f_n(x)}{(u_n + \frac{1}{n})^\gamma} \varphi dx$$

aussi bien que, pour tout $\varphi \in W_0^{s,p}(\Omega)$

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_{n+1}(x) - u_{n+1}(y)|^{p-2} (u_{n+1}(x) - u_{n+1}(y)) (\varphi(x) - \varphi(y))}{|x-y|^{N+sp}} dxdy = \int_\Omega \frac{f_{n+1}(x)}{(u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^\gamma} \varphi dx$$

en prenant $\varphi = \omega = (u_n - u_{n+1})^+ \in W_0^{s,p}(\Omega)$ comme fonction test dans les formules ci-dessus, et on retranche le second du premier, et en remarquant que $f_n \leq f_{n+1}$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{f_n(x)}{(u_n + \frac{1}{n})^\gamma}(u_n - u_{n+1})^+ dx - \int_\Omega \frac{f_{n+1}(x)}{(u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^\gamma}(u_n - u_{n+1})^+ dx \\
&= \int_\Omega (u_n - u_{n+1})^+ \left(\frac{f_n(x)(u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^\gamma - f_{n+1}(x)(u_n + \frac{1}{n})^\gamma}{(u_n + \frac{1}{n})^\gamma (u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^\gamma} \right) dx \\
&\leq \int_\Omega f_{n+1}(u_n - u_{n+1})^+ \frac{(u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^\gamma - (u_n + \frac{1}{n})^\gamma}{(u_n + \frac{1}{n})^\gamma (u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^\gamma} dx \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Alors, si $I_p(s) = |s|^{p-2}\, s$, on conclut que

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{(I_p(u_n(x) - u_n(y))) - I_p\left(u_{n+1}(x) - u_{n+1}(y)\right)(\omega(x) - \omega(y))}{|x-y|^{N+sp}} dxdy \leq 0 \tag{4.25}$$

Maintenant, par ([11, lemme 9]) on a

$$(I_p(u_n(x) - u_n(y))) - I_p\left(u_{n+1}(x) - u_{n+1}(y)\right)(\omega(x) - \omega(y)) \geq 0 \;\; pour \;\; (x,y) \in \mathbb{R}^{2N}$$

avec la stricte inégalité, sauf si ça tient

$$(u_n(x) - u_{n+1}(x))^+ = (u_n(y) - u_{n+1}(y))^+ \;\; pour \;\; (x,y) \in \mathbb{R}^{2N} \tag{4.26}$$

D'autre part, par 4.25, on a

$$(I_p(u_n(x) - u_n(y))) - I_p\left(u_{n+1}(x) - u_{n+1}(y)\right)(\omega(x) - \omega(y)) = 0 \;\; pour \;\; (x,y) \in \mathbb{R}^{2N}$$

par conséquent, 4.26 est vrai, et par suite

$$(u_n(x) - u_{n+1}(x))^+ = C \;\; pour \;\; (x,y) \in \mathbb{R}^{2N}$$

pour un certain constant C, puisque $u_n = u_{n+1} = 0$ sur $\mathbb{R}^N \backslash \Omega$ il s'ensuit que $C = 0$, ce qui implique que $u_n(x) \leq u_{n+1}(x)$, p.p. $x \in \Omega$. ceci conclut la preuve de la première affirmation. Concernant la deuxième affirmation, on a $u_1 \in L^\infty(\Omega)$, et

$$(-\Delta)_p^s u_1 = \frac{f_1(x)}{(u_1 + 1)^\gamma} \in L^\infty(\Omega).$$

Alors, par ([4, théorème 1.1]) on déduit $u_1 \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ pour certains $\alpha \in (0,1)$. En particulier par le principe du maximum fort, on a

$$u_1(x) \geq \sigma > 0, \;\; pour \;\; x \in \omega \Subset \Omega$$

et $\sigma = \sigma(\omega)$. La deuxième affirmation suit de la monotonie. $\square$

4.5 Estimations a priori et passage de la limite

Le lemme suivant nous permet de voir des conditions suffisantes pour la bornitude de la suite des solutions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'espace $W_0^{s,p}(\Omega)$.

Lemme 4.7. *(Voir [2]) Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset W_0^{s,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ la suite de solution du problème $(\mathcal{P}_n)$ prouvé dans la proposition 4.2, on suppose que*

$$0<\gamma\leq 1,\quad f\geq 0,\quad f\in L^m(\Omega),\quad m=\frac{Np}{N(p-1)+sp+\gamma(N-sp)} \tag{4.27}$$

Alors, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans $W_0^{s,p}(\Omega)$.

Démonstration. • Dans le cas $0<\gamma<1$ comme on a $f_n\leq f$, alors en utilisant l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{|u_n(x)-u_n(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy &= \int_\Omega \frac{f_n(x)}{(u_n+\frac{1}{n})^\gamma}u_n dx\\ &\leq \int_\Omega f_n(x)u_n^{1-\gamma}dx\\ &\leq \|f\|_{L^m}\left(\int_\Omega u_n^{(1-\gamma)m'}dx\right)^{\frac{1}{m'}}\end{aligned} \tag{4.28}$$

où $m'=\frac{m}{m-1}$. Comme $(1-\gamma)m'=p_s^*$, par l'inégalité de type de Sobolev, on obtient

$$\left(\int_\Omega u_n^{(1-\gamma)m'}dx\right)^{\frac{1}{m'}}\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{|u_n(x)-u_n(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy\right)^{\frac{p_s^*}{pm'}}$$

pour une constante $C=C(p,s,N)>0$. Comme $\frac{p_s^*}{pm'}<1$, de la relation 4.28 on a

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|u_n\|_{W_0^{s,p}}\leq C\,(f,p,s,\gamma,N)$$

• Dans le cas $\gamma=1$, de la même méthode avec 4.28, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{|u_n(x)-u_n(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}}dxdy &\leq \int_\Omega \frac{f_n(x)}{(u_n+\frac{1}{n})^\gamma}u_n dx\\ &\leq \int_\Omega f(x)dx\end{aligned}$$

ce qui donne à la bornitude de la suite. □

Théorème 4.4. *(Voir [2]) On suppose que le lemme 4.7 est satisfait. Alors le problème 4.1 admet une solution faible $u\in W_0^{s,p}(\Omega)$.*

Démonstration. En vertu lemme 4.7, la suite des solutions $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset W_0^{s,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ du problème $(\mathcal{P}_n)$ fourni par la proposition 4.2 est borné dans $W_0^{s,p}(\Omega)$. Alors, pour un sous-suite, on a $u_n\rightharpoonup u$ dans $W_0^{s,p}(\Omega)$, et par l'injection compact on a $u_n\to u$ dans $L^r(\Omega)$ pour $1\leq r<p_s^*$ et $u_n\to u$ p.p. dans Ω et, en outre, par lemme 4.6, on a

$$\forall k\Subset\Omega\ \exists\sigma_k>0\ \ tel\ \ que\ \ u(x)\geq\sigma_k>0,\ \ pour\ \ p.p.\ \ x\in k$$

on a

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+sp}}dxdy = \int_\Omega \frac{f_n(x)}{(u_n+\frac{1}{n})^\gamma}\varphi dx \tag{4.29}$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, comme la suite

$$\left\{ \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y))}{|x-y|^{\frac{N+sp}{p'}}} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

est borné dans $L^{p'}(\mathbb{R}^{2N})$ et par la convergence presque partout de u_n vers u.

$$\frac{|u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y))}{|x-y|^{\frac{N+sp}{p'}}} \to \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{\frac{N+sp}{p'}}} \;\; p.p. \;\; dans \;\; \mathbb{R}^{2N}$$

de sorte que

$$\frac{|\omega_k(x)-\omega_k(y)|^{p-2}(\omega_k(x)-\omega_k(y))}{|x-y|^{\frac{N+sp}{p'}}} \rightharpoonup \frac{|\omega(x)-\omega(y)|^{p-2}(\omega(x)-\omega(y))}{|x-y|^{\frac{N+sp}{p'}}} \;\; faiblement \;\; dans \;\; L^{p'}(\mathbb{R}^{2N})$$

Alors, puisque pour $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ on a

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{|x-y|^{\frac{N+sp}{p}}} \in L^p(\mathbb{R}^{2N})$$

on conclut que

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^{p-2}(u_n(x)-u_n(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+sp}}dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+sp}}dxdy
\end{aligned}$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Concernant le côté droit de la formule 4.29, rappelant le lemme 4.6, pour tous $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ avec $supp(\varphi) = k$, il existe $\sigma_k > 0$ indépendant de n tel que

$$\left| \frac{f_n(x)\varphi}{(u_n+\frac{1}{n})^\gamma} \right| \le \sigma_k^\gamma |f(x)\varphi(x)| \in L^1(\Omega).$$

Par le théorème de convergence dominé, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \frac{f_n(x)\varphi}{(u_n+\frac{1}{n})^\gamma}\varphi dx = \int_\Omega \frac{f(x)}{u^\gamma}\varphi dx.$$

Enfin, en passant à la limite dans 4.29, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+sp}}dxdy = \int_\Omega \frac{f(x)}{u^\gamma}\varphi dx$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, et par suite u est une solution à 4.1.

□

Conclusion générale

Dans notre travail, nous avons étudié un problème aux limites contenant l'opérateur p-Laplacien fractionnaire et un terme non linéaire singulier. Dans notre approche, nous allons étudier ce problème par des méthodes variationnelles ainsi que la théorie des points critiques, et la théorie du point fixe.
Nous espérons que notre travail sert comme un premier pas vers d'autres travaux qui généralisent les résultats obtenus dans le présent mémoire et on laisse ce mémoire en débat ouvert pour l'étude de problème p-Laplacien fractionnaire pour $\gamma > 1$.

Bibliographie

[1] *Convergence faible, Résumé du cours de MEDP, Maîtrise de mathématiques 2001-2002, 2001nov18 (medp-conv-faible. tex), https : //www fourier. ujfgrenoble. fr/ pberard/E/MEDP-0102/medp-conv-faible. pdf.*

[2] B. Sciunzi A. Canino, L. Montoro and M. Squassina. Non local problems with singular nonlinearity. *Bulletin des Sciences Mathmathiques*, 141(3) :223–250, 2017.

[3] N.K. Tavoularis A. Cotsiolis. Best constants for sobolev inequalities for higher order fractional derivatives. *J. Math. Anal. Appl*, 295 :225–236, 2004.

[4] S. Mosconi A. Iannizzotto and M. Squassina. Global hölder regularity for the fractional p-laplacian. *Rev. Mat. Iberoam*, 32(4) :1353–1392, 2016.

[5] R.A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press, New York, 1975.

[6] N. Aronszajn. Boundary values of functions with finite dirichlet integral. *Technical Report 14, University of Kansas*, pages 77–94, 1955.

[7] T. Bartsch. Infinitely many solutions of a symmetric dirichlet problem. *Nonlinear Anal*, 20 :1205–1216, 1993.

[8] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle, théorie et application*. Masson, Paris, 1992.

[9] M. Briki. *Étude de quelques problèmes aux limites par des méthodes variationnelles. Mémoire magister*. Université Kouba, Algérie, 2012.

[10] K.C. Chang. *Methods in Nonlinear Analysis*. Peking Univercity, 2003.

[11] P. Lindqvist E. Lindgren. Fractional eigenvalues. *Calc. Var*, 49 :795–826, 2014.

[12] G. Palatucci E.Di. Nezza and E. Valdinoci. Hitchhiker's guide to the fractional sobolev spaces. *Bull. Sci. Math*, 136 :521–573, 2012.

[13] F. Demengel G. Demengel. *Functional spaces for the theory of elliptic partial differential equations*. London, 2012.

[14] E. Gagliardo. Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili. *Ricerche Mat*, 7 :102–37, 1958.

[15] V.D. Radulescu G.M. Bisci and R. Servadei. *Variational methods for nonlocal fractional problems*. University Printing House, Cambridge CB2 8BS, United Kingdom, 2016.

[16] O. Kavian. *Introduction à la Théorie des Points Critiques, et application aux problèmes elliptiques*. O.K. Nancy, le 20 Juillet 1993.

[17] A.N. Kolmogorov. Über kompaktheit der funktionenmengen bei der konvergenz im mittel. *Nachr. Ges. Wiss. Gottingen*, 9 :60–63, 1931.

[18] E. Parini L. Brasco. The second eigenvalue of the fractional p-laplacian. *Advances in calculus of variation, Walter de Gruyter GmbH*, 2016.

[19] P. Lindqvist. Notes on the p-laplace equation.

[20] P.H. Rabinowitz M.G. Crandall and L. Tartar. On a dirichlet problemwith a singular non-linearity. *Comm. Partial Differential Equations*, 2 :193–222, 1977.

[21] S. Saldi P. Pucci. Multiple solutions for an eigenvalue problem involving non-local elliptic p laplacian operators. *In Geometric Methods in PDEs (Springer INdAM Series). Vol. 13, ed. by G. Citti, M. Manfredini, D. Morbidelli, S. Polidoro, and F. Uguzzoni. Springer Verlag, Berlin*, pages 159–76, 2015.

[22] P. Piersanti and P. Pucci. *Existence theorems for fractional p-Laplacian problems*. Anal. Appl. (Singap.), in press. Preprint, 2015.

[23] M. Riesz. Sur les ensembles compacts de fonctions sommables. *Acta Szeged Sect. Math*, 6 :136–142, 1933.

[24] M. Squassina S. Mosconi, K. Perera and Y. Yang. The brezis-nirenberg problem for the fractional p-laplacian. *Calculus of variations and partial differential equations*, 55(4) :1–24, 2016.

[25] L.N. Slobodeckij. Generalized sobolev spaces and their applications to boundary value problems of partial differential equations. *Leningrad. Gos. Ped. Inst. Ucp. Zap*, 197 :54–112, 1958.

[26] M. Srati. p-laplacien fractionnaire. Master's thesis, Université Sidi Mohamed Ben Abdel-lah, Maroc, 2017.

[27] E. Zeidler. *Nonlinear functional analysis and its applications Fixed point theorem*. Springer Verlag, New York Berlin Heiderberg, Tokyo, 1985.

ملخص: تتناول هذه المذكرة لمحة حول فضاء صوبولاف الكسري والمؤثر ب-لابلاسيان الكسري. دراسة وجود و وحدانية الحل لمشكلة ب-لابلاسيان الكسري بمصطلح منتظم. دراسة وجود وتفرد الحل الضعيف لمشكلة ب-لابلاسيان الكسري بمصطلح مفرد غير خطي في إطار فضاء صوبولاف الكسري وذلك باستخدام نظرية النقطة الصامدة لشودر.

كلمات مفتاحية: كسور ب-لابلاسيان، حل ضعيف، مفرد غير خطي، فضاء صوبولاف الكسري، وجود، وحدانية، نقطة صامدة.

Ce mémoire traite un aperçu sur l'espace de Sobolev fractionnaire et l'influent p-Laplacien fractionnaire. L'étude de l'existence et l'unicité de la solution du problème p-Laplacien fractionnaire avec un terme régulier. L'étude de l'existence et l'unicité de la solution faible du problème p-Laplacien fractionnaire avec un terme non linéaire singulier dans le cadre de l'espace de Sobolev fractionnaire par l'utilisation de la théorie de point fixe du Schauder.

Mots-Clés : p-Laplacien fractionnaire, Solution faible, Non-linéairité singulier, Espace de Sobolev fractionnaire, Existence, Unicité, Point fixe.

This thesis memory with a perception on the fractional Sobolev space and the influent fractional p-Laplacian. The study of the existence and uniqueness of the solution of the fractional p-Laplacian problem with a regular term. The study of the existence and uniqueness of the weak solution of the fractional p-Laplacian problem with a singular nonlinear term in the framework of the fractional Sobolev space by the use of the Schauder's fixed point theory.

Keywords : Factional p-Laplacian, Weak solution, Singular non-linearity, Factional Sobolev space, Existence, Uniqueness, Fixed point.