



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques

## *Mémoire de Master*

**Domaine :** Mathématiques et Informatique

**Filière :** Mathématiques

**Option :** EDP<sub>s</sub> & Application

## Thème

---

*La résolution numérique de l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce avec noyau faiblement singulier par spline polynomial linéaire, polynomial quadratique, non polynomial linéaire et non polynomial quadratique*

---

**Présentée par :**

*M<sup>r</sup> BENADEL Raouf*

**Soutenu :** septembre 2020.

**Devant le jury composé de :**

**Président :** *M<sup>r</sup> \_\_\_\_\_*

**Encadreur :** *M<sup>r</sup> MERZOUGUI Abdelkarim*

**Examineur :** *M<sup>r</sup> \_\_\_\_\_*

Année universitaire 2019/2020

---

# Remerciements

---

## *Au nom de Dieu le Miséricordieux*

Cout d'abord, je voudrais remercier Dieu Tout-Puissant qui m'a donné le courage et la persévérance de réaliser cet humble souvenir.

Je remercie profondément **M<sup>r</sup>. MERZOUGUI Abdelkrim**, qui a toujours été attentif et disponible tout au long de la vie de cette thèse

J'adresse également mes sincères remerciements et ma gratitude à ma chère mère, à mon père, à mon frère frère Moussa et à toutes mes sœurs pour leur aide, ainsi qu'à tous mes chers amis.

Je remercie également tous mes professeurs, tous mes collègues et surtout les  
Master EDP

Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude à tous les professeurs de l'Université de M'sila, en particulier du Département de mathématiques et d'informatique.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué à ce travail

---

# Dedications

---

*A grâce et la louange de ALLAH*

*Après avoir terminé ma thèse, je dédie ce travail à:*

*Mes chers parents, que Dieu les protège*

*Mes chers frères et mes chers sœurs*

*Tous mes amis et mes proches*

*Chaque professeur m'a appris tout au long de ma carrière universitaire*

*Tous mes collègues de 2<sup>eme</sup> Master Math. EPDs 2017-2019.*

---

---

# Table des matières

---

<b>Introduction</b>	<b>vi</b>
<b>1 Concepts auxiliaires</b>	<b>8</b>
1.1 Rappels d'analyse fonctionnelle . . . . .	8
1.1.1 Notions d'analyse fonctionnelle . . . . .	8
1.1.2 Les opérateurs . . . . .	10
<b>2 Equation intégrale de Volterra et Les Fonctions Splines</b>	<b>12</b>
2.1 Equation intégrale de Volterra . . . . .	12
2.1.1 Classification des équations intégrales . . . . .	12
2.1.2 Existence et Unicité . . . . .	17
2.2 Les Fonctions Spline . . . . .	19
2.2.1 Introduction . . . . .	19
2.2.2 Quelques types des fonctions spline polynomiales: . . . . .	20
2.2.3 Fonction spline classique: . . . . .	21
2.2.4 Fonction spline polynomiale . . . . .	22
2.2.5 Fonction spline non polynomiale . . . . .	23
<b>3 Analyse numérique pour l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce avec noyau faiblement singulier</b>	<b>26</b>
3.1 Utilisation de la fonction spline linéaire non polynomiale . . . . .	27
3.2 Utilisation de la fonction spline non polynomiale quadratique . . . . .	30
3.3 Utilisation de la fonction de spline linéaire polynomiale . . . . .	32
3.4 Utilisation de la fonction de spline polynomiale quadratique . . . . .	34
3.5 l'analyse de résultats . . . . .	37

---

# Notations

---

$\mathbb{R}$ : Ensemble des nombres réels.

$\mathbb{C}$ : Ensemble des nombres complexes.

$H$ : Espace de Hilbert.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ : Produit scalaire.

$A$ : Opérateur intégrale

$K(x, t)$ : Noyau de l'équation l'intégrale.

$f(x)$ : Fonction donnée.

$\lambda$ : Un paramètre non nul, réel ou complexe.

$A^*$ : Opérateur adjoint.

$VIE's$ : Les équations intégrales de Volterra.

$LP$ : Fonction spline polynomiale de premier ordre.

$QP$ : Fonction spline polynomiale de seconde ordre.

$NLP$ : Fonction spline non polynomiale linéaire.

$NQP$ : Fonction spline non polynomiale quadratique.

$u(x)$ : Solution exacte.

$P_i(x)$ : Solution approchée.

---

# General introduction

---

Les méthodes numériques permettent de trouver la solution approchée des problèmes dont la solution exacte est difficile voir impossible a trouvé analytiquement, d'où la nécessité des méthodes numériques. Différents méthodes ont été développées et utilisées par plusieurs recherches pour trouver la solution approchée des équations intégrales..

Dans ce mémoire, On considère L'équation intégrale de Volterra de  $2^{nd}$  espèce, de la forme:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt \quad x \in [a, b]$$

Les équations intégrales de Volterra de  $2^{nd}$  espèce jouent un rôle important dans l'étude des problèmes mathématiques, physiques, ingénieries, comme dans les problèmes de la mécanique, les problèmes de diffusion, les théories potentiels, les problèmes de Dirichlet, électrostatiques, astrophysiques, et le problème de transport, aussi les équations différentielles fractionnaires, les système dynamiques Parmi les méthodes, on a la méthode de Galerkin, la méthode de collocation la méthode de l'expansion [14] , nous cherchons la solution approchée de VIE's de  $2^{nd}$  espèce par les fonctions splines polynomiales de premier et de seconde ordre et par les fonctions splines non polynomiales linéaire et quadratique.

Notre but est d'essayer de montrer l'efficacité de ces méthodes à l'amélioration de solution.

La structure de mémoire est organisée comme suit:

**Le chapitre 1** constitue des résultats préliminaires sur l'analyse fonctionnelle, et sur l'analyse numérique respectivement.

**Dans le chapitre 2** on étudiera la classification des équations intégrales, l'existence et l'unicité de VIE's de  $2^{nd}$  espèce, Ensuite nous présentons les définitions et propriétés des fonctions splines polynomiales et les fonctions spline non polynomiales.

**Le chapitre 3** l'Analyse numérique de l'equation integral de Volterra de  $2^{nd}$  espèce par les fonctions splines polynomiales linéaires et quadratiques et les fonctions splines non polynomiales linéaires et quadratiques seront utilisées pour calculer la solution numérique des

VIE linéaires de deuxième espèce à noyau faiblement singulier , On donne des exemples numériques pour illustrer l'efficacité de la méthode. Une comparaison entre la solution exacte et la solution approchée sera présentée par des figures et des tableaux à la fin de chaque exemple suivi par une conclusion générale.

# CONCEPTS AUXILAIRES

Dans ce chapitre, Nous introduisons plusieurs résultats préliminaires indispensables et des définitions nécessaires qui seront utilisées au long dans ce mémoire. On vise essentiellement à rappeler quelques définitions sur l'analyse fonctionnelle, Ensuite nous présentons les notions d'analyse numérique.

## 1.1 Rappels d'analyse fonctionnelle

### 1.1.1 Notions d'analyse fonctionnelle

**Définition 1.1.1.** (*Espace vectoriel normé*): Une norme sur un espace vectoriel  $E$  est une application qui à tout vecteurs  $x$  associe un réel  $\|x\|$  vérifiant :

1. (positivité)  $\|x\| \geq 0$ ,  $\|x\| = 0$  si et seulement si  $x$  est le vecteur nul.
2. (homogénéité)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $x \in E$ .
3. (inégalité triangulaire)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$   $x, y \in E$ .

Un espace  $E$  muni d'une norme est dit espace normé. Un vecteur de norme 1 est dit unitaire.

**Définition 1.1.2.** (*Les espaces  $C^k(\Omega)$* ): Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On désignera par  $C^0(\Omega)$  (resp.  $C^1(\Omega)$ ) l'espace des fonctions continues (resp. continûment différentiables) sur  $\Omega$  à valeurs complexes puis, pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ , on pose

$$C^k(\Omega) = \{u \in C^{k-1}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{k-1}(\Omega), i = 1, \dots, n\}.$$

$C'$  est l'espace des fonctions  $k$  fois continûment différentiables sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . On notera

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega)$$

l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur  $\Omega$ .

**Exemple 1.1.1.** Sur des fonctions continues  $C([a, b])$  sur l'intervalle borné  $[a, b]$ , les fonctions suivantes:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt, \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)| \text{ définissent une norme.}$$

**Définition 1.1.3. (Espace de Banach):** la suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de vecteurs de  $E$  est dite de Cauchy si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe,  $N > 0$ , tel que  $\|\varphi_p - \varphi_q\| < \varepsilon$ , pour  $p, q > N$ .

l'espace normé  $(E, \|\cdot\|)$  est dit Complet ou de Banach si toute suite de Cauchy de  $E$  est convergente dans  $E$ .

**Remarque 1.** tout espace vectoriel normé et complet est dit de Banach.

**Définition 1.1.4. (Produit scalaire):** On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel  $E$  (réel ou complexe), une fonction  $\langle x, y \rangle$  définie dans  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , possédant les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &\geq 0 \\ \langle \lambda x, y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle \\ \langle x, y + z \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \\ \langle x, y \rangle &= \overline{\langle y, x \rangle} \\ \langle x, x \rangle &= 0 \implies x = 0 \end{aligned}$$

la définition du produit scalaire nous donne les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \langle x + y, z \rangle &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle. \\ \langle x, \lambda y \rangle &= \overline{\lambda} \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

**Définition 1.1.5. (Espace Euclidien):** un espace vectoriel  $E$  muni d'un produit scalaire est dit espace euclidien ou préhilbertien, on introduit la norme définie par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

**Définition 1.1.6. (Espace de Hilbert):** un espace de Hilbert  $H$  est un espace vectoriel induit par le produit scalaire, de tel sorte qu'il est complet par rapport à la norme  $\|\cdot\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

**Définition 1.1.7.** (*Espace  $L^2(a, b)$* ): On dit qu'une fonction  $f$  est de carré intégrable sur  $[a, b]$  si l'intégrale

$$\int_a^b f^2(x)dx.$$

existe (est finie). L'ensemble de toutes les fonctions carré intégrable sur  $[a, b]$  sera noté  $L^2(a, b)$  ou  $L^2$ . On muni  $L^2$  du produit scalaire définie par :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)dx \quad f, g \in L^2$$

On définit la norme d'une fonction  $f$  sur  $L^2$  par:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}.$$

## 1.1.2 Les opérateurs

### Opérateur Intégrale linéaire

**Définition 1.1.8.** Soit  $K : C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, l'opérateur intégrale linéaire sur  $C[a, b]$  est défini par la formule suivante:

$$A : \varphi \in C[a, b] \rightarrow A\varphi \in C[a, b]$$

$$A(\varphi)(x) = \int_G K(x, t)\varphi(t)dt.$$

Où :  $K$  s'appelle le noyau de l'opérateur intégral  $A$ .

### Opérateur Adjoint

**Théorème 1.1.1.** Soit  $A$  un opérateur intégrale de noyau  $K(x, t)$ , Alors l'adjoint  $A^*$  est un opérateur intégrale de noyau  $K^*(x, t)$ , tel que :

$$K^*(x, t) = K(t, x)$$

**Théorème 1.1.2.** Soit un opérateur intégral  $A$  défini à partir d'un noyau  $K$  continu sur  $[a, b] \times [a, b]$  par la formule:

$$A\varphi(x) = \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt, \quad x \in [a, b]$$

Alors l'opérateur  $A$  admet un unique opérateur adjoint  $A^*$  pour le produit scalaire usuel de  $L^2([a, b])$ , défini par :

$$\forall x \in [a, b] \quad A^* \Psi(x) = \int_a^b K(x, t) \Psi(t) dt .$$

# EQUATION INTÉGRALE DE VOLTERRA ET LES FONCTIONS SPLINES

Les équations intégrales apparaissent de manière naturelle au cours de l'obtention de la solution mathématique à des problèmes aux limites mixtes de la physique mathématique. De nombreuses approches possibles pour réduire un problème de frontière mixte donné à une équation intégrale.

L'équation intégrale de Volterra présentée par Vito Volterra (1860-1940), dans sa célèbre théorie de l'équation intégrale, qui porte maintenant son nom [13] présente une introduction à l'histoire et à la théorie classique d'équations intégrales linéaires de Volterra de premier et seconde espèce, y compris l'équation avec des noyaux faiblement singuliers.

Ce chapitre est organisé comme suit: En section (2.1), nous étudions la classification des équations intégrales et quelques concepts de base sont donnés, la théorie mathématique de l'existence et unicité de la solution de VIE's de 2<sup>nd</sup> espèce seront considérés, En section (2.2), nous définissons quelques types des fonctions splines polynomiales, les fonctions splines classiques, et enfin les fonctions splines polynomiales et non polynomiales qui seront utilisées dans ce mémoire.

## 2.1 Equation intégrale de Volterra

### 2.1.1 Classification des équations intégrales

Une équation intégrale est une équation dans la fonction inconnue  $u(x)$  apparaît sous le signe d'intégration. Le plus standard type de l'équation intégrale en  $u(x)$  est de la forme:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} k(x, t, u(t)) dt \quad (2.1)$$

Où  $a(x)$  et  $b(x)$  sont les limites d'intégration,  $\lambda$  est un paramètre constant et  $k(x, t)$  est une fonction connue, appelée le noyau de l'équation intégrale, la fonction inconnue  $u(x)$  qui sera déterminé apparaît sous le signe d'intégration.

Dans d'autres cas, la fonction inconnue  $u(x)$  apparaît à l'intérieur et à l'extérieur du signe d'intégration. les fonctions  $f(x)$  et  $k(x, t)$  sont données.

Il est à noter que les bornes d'intégration déterminées comme  $a(x)$  et  $b(x)$  peuvent être toutes les deux des variables, constantes, ou mixtes.

La classification des équations intégrales dépend de plusieurs caractéristiques.

La première est la linéarité du noyau  $k(x, t, u(t))$  par rapport à la troisième variable.

1. si  $k(x, t, u(t))$  est linéaire par rapport à la troisième variable i.e

$$k(x, t, u(t)) = k(x, t)u(t) \quad (2.2)$$

l'équation intégrale est appelée équation intégrale linéaire.

2. si  $k(x, t, u(t))$  est non linéaire par rapport à la troisième variable i.e

si l'équation contient la fonction non linéaire  $u(x)$ , l'équation intégrale est appelée équation intégrale non linéaire.

deux autres cas distincts qui dépend des bornes d'intégration sont utilisés pour caractériser les équations intégrales, appelées:

1. **Equation intégrale de Fredholm** si les bornes d'intégration sont constants, donnée par la forme:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt \quad (2.3)$$

Où,  $a$  et  $b$  sont constantes.

2. si au moins une limite d'intégration est variable, l'équation intégrale est appelée **équation intégrale de Volterra** est donnée par:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt \quad (2.4)$$

En plus, les deux autres façons distinctes, qui dépend de la fonction inconnue  $u(x)$ , sont définis comme suit:

1. si la la fonction inconnue  $u(x)$  apparaît seulement sous le signe d'intégration de l'équation de Fredholm ou de Volterra, l'équation intégrale est appelée l'équation intégrale de Fredholm ou Volterra de première espèce respectivement.
2. si la la fonction inconnue  $u(x)$  apparaît à l'intérieur et à l'extérieur de le signe d'intégration de l'équation Fredholm ou Volterra, l'équation intégrale est appelée l'équation intégrale de Fredholm ou de Volterra de seconde espèce respectivement.

dans toutes les équations intégrales de Fredholm ou de Volterra présentées ci-dessus, si  $f(x)$  est égal zéro, l'équation résultante:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt \quad (2.5)$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt \quad (2.6)$$

est appelée l'équation intégrale homogène de Fredholm ou de Volterra respectivement.

Maintenant nous résumons les types d'équations intégrales comme suit.

### équation intégrales de Fredholm

Pour les équations intégrales de Fredholm, les limites d'intégration sont constants. En plus, la fonction inconnue  $u(x)$  apparaît seulement à l'intérieur d'équation intégrale est de la forme:

$$f(x) = \int_a^b k(x, t)u(t)dt \quad (2.7)$$

est appelée l'équation intégrale de Fredholm de première espèce. Cependant, pour les équations intégrales de Fredholm de seconde espèce, la fonction inconnue  $u(x)$  apparaît à l'intérieur et à l'extérieur du signe d'intégration, cette équation est représenté par :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt \quad (2.8)$$

### équation intégrale de Volterra

Pour les équations intégrales de Volterra, au moins une limite d'intégration est variable. Pour les équations intégrales de Volterra de première espèce, la fonction inconnue  $u(x)$  apparaît

seulement sous le signe d'intégration est de la forme:

$$f(x) = \int_a^x k(x, t)u(t)dt \quad (2.9)$$

Cependant, les équation intégrales de Volterra de seconde espèce, la fonction inconnue  $u(x)$  apparaît à l'intérieur et à l'extérieur du signe d'intégration, prend la forme:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)u(t)dt \quad (2.10)$$

**Remarque 2.** *l'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, Il suffit de prendre le noyau  $k$  vérifie la condition:*

$$k(x, t) = 0, \text{ pour } x < t. \quad (2.11)$$

### Equation intégrale singulière

les équations intégrales de Volterra de première espèce

$$f(x) = \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} k(x, t)u(t)dt \quad (2.12)$$

ou de seconde espèce

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} k(x, t)u(t)dt \quad (2.13)$$

sont appelées singulières si l'une des limites d'intégration  $a(x), b(x)$  ou les toutes les deux sont infinies. En plus, les deux équations sont appelées singulières.

si le noyau  $k(x, t)$  devient illimité à un ou plusieurs points de l'intervalle d'intégration, la forme la plus répandue est:

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t)dt \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.14)$$

laquelle est de première espèce et elle est appelée équation intégrale d'Abel généralisée, l'équation de seconde espèce est de la forme:

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t)dt \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.15)$$

est appelée une équation intégrale faiblement singulière.

Dans l'équation intégrale d'Abel généralisée, si  $\alpha = \frac{1}{2}$  l'équation devient l'équation intégrale d'Abel singulière. la singularité de ce type d'équation se produit à partir de la limite supérieur lorsque  $t = x$

**Remarque 3.** *l'équation intégrale d'Abel est souvent deduite du problèmes mécaniques*

### Equation intégrales du type convolution

Sont des équations intégrales linéaires dont le noyau  $k(x, t)$  dépendant que la différence des arguments.i.e.

$$k(x, t) = k(x - t) \quad (2.16)$$

Donc l'équation intégrale de type convolution est de la forme suivante:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x - t)u(t)dt \quad (2.17)$$

cette classe d'équation comprend par exemple l'équation d'Abel généralisée.

### Equations intégrales à noyau dégénéré:

Le noyau d'une équation intégrale linéaire est dit dégénéré s'il est la somme d'un nombre fini de produits de fonctions de  $x$  par des fonctions de  $t$  .i.e.

$$k(x, t) = \sum_{j=1}^n a_j(x) b_j(t) \quad (2.18)$$

les fonctions  $a_j(x)$  et  $b_j(t)$  seront supposées continues dans  $[a, b] \times [a, b]$ , et linéairement indépendantes.

Dans ce mémoire, on considère le problème suivant:

l'équation intégrales de Volterra de seconde espèce avec  $\lambda = 1$ , c.à.d

$$u(x) = f(x) + \int_a^x k(x, t)u(t)dt \quad , x \in [a, b] \quad (2.19)$$

## 2.1.2 Existence et Unicité

On considère l'équation

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)u(t)dt \quad (2.20)$$

avec  $f : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^n$  fonction continue et  $k(x, t)$  est une matrice  $n \times n$  des fonction continues telles que  $0 \leq x \leq \alpha$  et  $\alpha \leq \infty$ .

### Lemme 2.1.1. (Granwall)

Soit  $f, g : [0, \alpha] \rightarrow [0, \infty]$  deux fonctions continues et soit  $c$  un nombre positif.

$$f(t) \leq c + \int_0^t g(s) f(s) ds \quad , 0 \leq t \leq \alpha \quad (2.21)$$

Alors

$$f(t) \leq c + \exp \int_0^t g(s) ds \quad , 0 \leq t \leq \alpha \quad (2.22)$$

**Théorème 2.1.1.** Soit  $0 < \alpha \leq \infty$ , on suppose que  $f : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $k(x, t)$  et un matrice  $n \times n$  des fonctions telle que  $0 \leq t \leq x \leq \alpha$ , si  $0 < t < \alpha$ , alors il existe une unique solution  $u(x)$  pour l'équation intégrale de Volterra suivante:

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)u(t)dt, x \in [0, T] \quad (2.23)$$

### Démonstration.

Soit l'équation intégrale de Volterra

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)u(t)dt$$

On définit la suite  $(\Psi_n(x))$  sur l'intervalle  $[0, T]$  par la méthode d'approximation successive, on obtient:

$$\Psi_0(x) = f(x)$$

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) &= \int_0^x k(x,t)\Psi_0(t)dt \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{i+1}(x) &= \int_0^x k(x,t)\Psi_i(t)dt \\ K &= \max_{0 \leq t \leq T} k(x,t) \\ F &= \max_{0 \leq t \leq T} |f| \\ \Psi_1(x) &\leq \int_0^x |k(x,t)\Psi_0(t)|dt \leq K F x(x) \\ |\Psi_2(x)| &\leq \int_0^x |k(x,t)\Psi_1(t)|dt \leq \frac{1}{2} K^2 F x^2 \\ &\vdots \\ |\Psi_n(x)| &\leq \int_0^x |k(x,t)\Psi_{n-1}(t)|dt \leq \frac{F(K x)^n}{n!}.\end{aligned}$$

par récurrence la relation précédente est vraie  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on a:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{F(K x)^i}{i!} = F e^{Kx}$$

est une série de Taylor qui converge uniformément et absolument sur  $[0, T]$ , Alors la suite

$$u_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i(x) \text{ converge vers } u(x) = \sum_{i=0}^n \Psi_i(x)$$

$$\begin{aligned}\int_0^x k(x,t)u(t)dt &= \int_0^x k(x,t) \left( \sum_{i=0}^n \Psi_i(t) \right) dt \\ &= \sum_{i=0}^n \left( \int_0^x k(x,t) \Psi_i(t) dt \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \Psi_{i+1}(x) \\ &= u(x) - f(x)\end{aligned}$$

Donc il existe une solution  $u(x)$  telle que

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)u(t)dt \quad (2.24)$$

Nous pouvons montrer l'unicité, on suppose qu'il existe deux solutions  $X(x)$  et  $Y(x)$  de l'équation (2.24), donc

$$X(x) - Y(x) = \int_0^x k(x, t)(X(t) - Y(t))dt$$

On obtient donc la suite suivante:

$$|X(x) - Y(x)| \leq k \int_0^x |X(t) - Y(t)|dt$$

cette relation est de la forme suivante

$$Z(x) \leq k \int_0^x |Z(t)|dt$$

telle que  $Z(x) = X(x) - Y(x)$ , on a  $\forall c > 0$  la relation

$$Z(x) \leq c + k \int_0^x |Z(t)|dt$$

la relation précédente est vraie pour  $c = 0$  telle  $c$  est une constante, d'après le lemme de Granwall

$$|Z(x)| \leq ce^{Kx} = 0$$

puisque  $c = 0$ , donc

$$Z(x) = X(x) - Y(x) = 0$$

$$X(x) = Y(x)$$

Alors la solution de l'équation intégrale (2.24) est unique. ■

## 2.2 Les Fonctions Spline

### 2.2.1 Introduction

Un polynôme est une expression mathématique contenant une somme de puissances d'une ou plusieurs variables multipliée par des coefficients. Les polynômes ont longtemps été utilisés pour approximer des fonctions, principalement à cause de leurs propriétés mathématiques simples. Cependant, il est bien connu que les polynômes de degré élevé ont tendance à osciller fortement et qu'ils sont susceptibles de produire une très mauvaise approximation.

Les fonctions splines sont des polynômes par morceaux de degré  $n$  qui se joignent au niveau des points de discontinuités. Ces polynômes possèdent  $n - 1$  dérivées continues. Les points de

discontinuités des splines sont appelés noeuds. Avec les fonctions splines, nous combinons un polynôme de faible degré et donc faiblement oscillant de manière à obtenir une fonction aussi lisse que possible au sens où elle possède des intervalles de continuité maximaux sans être altérée globalement un polynôme. Les fonctions splines peuvent être intégrées et différenciées car elles sont des polynômes par morceaux.

Une fonction spline non polynomiale par morceaux est une combinaison de fonctions de base trigonométriques et polynomiales, qui forment un espace de Chebyshev complet. Cette approche assure une précision améliorée et une forme générale à la fonction spline existante.

$$s_n = \text{span}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}.$$

Une nouvelle base, appelée la base de c-Bezier, est construite pour l'espace

$$[(n) = \text{span}\{1, x, x^2, \dots, x^{n-2}, \cos x, \sin x\}.$$

dans lequel  $x^{n-1}$  et  $x^n$  ont été remplacé par  $\cos x$   $\sin x$

## 2.2.2 Quelques types des fonctions spline polynomiales:

**Définition 2.2.1.** Une fonction  $S$  est appelée une spline de degré  $k$  si:

1. le domain de  $S$  est un intervalle  $[a, b]$ ,
2.  $S \in C^{k-1}[a, b]$ .
3. Il existe  $t_i$  ( les noeuds de  $S$  ) t.q  $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$  et telle que  $S$  est un polynome de degré au plus  $k$  sur chaque sous-intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ .

**Définition 2.2.2.** Une fonction spline est appelée **spline naturelle** s'il satisfait une autre condition suivant:

$$S_k^m(x_0) = S_k^m(x_n) = 0$$

Il existe d'autres types des fonctions spline polynomiales par exemple:

M-spline, L-spline, G-spline, P-spline, B-spline, ..., etc.

Maintenant, on définié quelques types de fonctions spline nécessite pour ce travail.

### 2.2.3 Fonction spline classique:

#### Fonction spline classique linéaire

**Définition 2.2.3.** Une fonction  $L$  est appelée *spline linéaire* si il satisfait :

1. Il existe un partition de l'intervalle  $a = x_0 < \dots < x_n = b$ , telle que  $L$  est un polynôme de degré 1 sur chaque sous-intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ .
2.  $L$  est continue sur  $[a, b]$ , i.e.

$$L(x) = \begin{cases} l_0(x), x \in [x_0, x_1] \\ l_1(x), x \in [x_1, x_2] \\ \vdots \\ l_{n-1}(x), x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases} \quad (2.25)$$

Où  $x_0, x_1, \dots, x_n$  sont appelées noeuds, et chaque morceau de  $L(x)$  est de la forme:

$$l_i = a_i x + b_i \quad (2.26)$$

Où  $a_i, b_i$  sont des coefficients de la fonction spline linéaire (2.26).

#### Fonction spline classique quadratique

**Définition 2.2.4.** Une fonction  $Q$  est appelée *spline quadratique* si il satisfait :

1.  $Q, Q'$  sont continues sur  $[a, b]$ .
2.  $Q$  est un polynôme de degré au plus 2 sur chaque sous-intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ ,

Où  $a = x_0 < \dots < x_n = b$ .

la fonction spline quadratique est de la forme:

$$q_i = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 \quad (2.27)$$

#### Fonction spline classique cubique

**Définition 2.2.5.** Une fonction  $S$  est appelée *spline cubique* si elle satisfait:

1.  $S_i(x), S'_i(x)$  et  $S''_i(x)$  sont continues sur  $[a, b]$
2.  $S_i(x)$  est au plus cubique sur chaque sous-intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ , ou  $a = x_0 < \dots < x_n = b$

la fonction spline cubique est de la forme:

$$S_i = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

Les  $x_i$  sont les nœuds et sont supposés être classés par ordre croissant. La fonction spline  $S$ , que nous construisons, consiste en  $n$  polynômes cubiques par morceaux :

$$S(x) = \begin{cases} s_0(x), x \in [x_0, x_1] \\ s_1(x), x \in [x_1, x_2] \\ \vdots \\ s_{n-1}(x), x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Ici  $s_i$  désigne le polynôme cubique qui sera utilisé sur le sous-intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ . La condition d'interpolation es:

$$s_i(x) = u_i \quad 0 \leq i \leq n$$

### 2.2.4 Fonction spline polynomiale

On considère la partition  $\Delta = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$  de  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Soit  $S(\Delta)$  noté l'ensemble des polynômes par morceaux sur le sous-intervalle  $I_i = [t_i, t_{i+1}]$  de partition  $\Delta$ . Soit  $u(t)$  est la solution exacte, chaque spline polynomiale de l'ordre  $n$ , on a  $p_i(t)$  est de la forme:

$$p_i(t) = a_i(t - t_i) + b_i(t - t_i)^2 + \dots + y_i(t - t_i)^{n-1} + z_i \quad (\text{A.1})$$

Où  $a_i, b_i, \dots$  et  $z_i$  des constantes.

#### La fonction spline polynomiale de premier ordre

La forme de la fonction spline polynomiale de premier ordre est :

$$p_i(t) = a_i(t - t_i) + b_i \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (\text{A.2})$$

Où  $a_i$ , et  $b_i$  sont des constantes. Pour obtenir la valeur de  $a_i$  et  $b_i$ , on dérivée l'équation (A.2) on aura:

$$p'_i(t) = a_i \quad (\text{A.3})$$

d'où en remplaçant  $t$  par  $t_i$  dans la relation (A.2) et (A.3) on obtient:

$$p_i(t_i) = b_i$$

$$p'_i(t_i) = a_i$$

dans l'équations ci-dessus, on a la valeur de  $a_i$  et  $b_i$  comme suit:

$$a_i = p_i'(t_i) \quad (\text{A.4})$$

$$b_i = p_i(t_i) \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, n \quad (\text{A.5})$$

### La fonction spline polynomiale de seconde ordre

La forme de spline polynomiale de seconde ordre est:

$$p_i(t) = a_i(t - t_i)^2 + b_i(t - t_i) + c_i \quad (\text{A.6})$$

Où  $a_i, b_i$  et  $c_i$  sont des constantes des fonctions polynomiales. On a les relations suivantes:

$$p_i(t_i) = c_i = u(t_i)$$

$$p_i'(t_i) = b_i = u'(t_i)$$

$$p_i''(t_i) = 2a_i = u''(t_i)$$

Par substitution on obtient les valeur de  $a_i, b_i$  et  $c_i$  comme suit:

$$a_i = \frac{1}{2}u''(t_i) \quad (\text{A.7})$$

$$b_i = u'(t_i) \quad (\text{A.8})$$

$$c_i = u(t_i) \quad (\text{A.9})$$

pour  $i = 0, 1, \dots, n$

### 2.2.5 Fonction spline non polynomiale

On considère la partition  $\Delta = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$  de  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Soit  $S(\Delta)$  notée l'ensemble des polynomes par morceaux sur chaque sous-intervalle  $I_i = [t_i, t_{i+1}]$  de partition  $\Delta$ . Soit  $u(t)$  est la solution exacte, cette nouvelle méthode fournit une approximation non seulement l'approximation de  $u(t_i)$  dans les noeuds, mais aussi pour  $u^n(t_i), n = 1, 2, \dots$  à chaque point de l'intervalle d'intégration aussi, la  $C^\infty$  différentiabilité de la partie trigonometrique des fonctions splines non-polynomiales compense la perte de lissage produite par les polynomes. Chaque fonction spline non polynomiale d'ordre  $n$ ,  $p_i(t)$  est de la forme:

$$p_i(t) = a_i \cos k(t - t_i) + b_i \sin k(t - t_i) + \dots + y_i(t - t_i)^{n-1} + z_i \quad (\text{B.1})$$

Où  $a_i, b_i, \dots, y_i$  et  $z_i$  des constantes et  $k$  est de la fréquence de la fonction trigonométrique qui est utilisée pour augmenter la précision de la méthode.

### La fonction spline non polynomiale linéaire

La forme de la fonction spline non-polynomiale linéaire est :

$$p_i(t) = a_i \cos k(t - t_i) + b_i \sin k(t - t_i) + c_i(t - t_i) + d_i \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (B.2)$$

Où  $a_i, b_i, c_i$  et  $d_i$  sont des constantes à déterminer. Pour obtenir les valeurs de  $a_i, b_i, c_i$  et  $d_i$ , on dérive l'équation (B.2) trois fois, alors on a:

$$\left. \begin{aligned} p_i'(t) &= -ka_i \sin k(t - t_i) + kb_i \cos k(t - t_i) + c_i \\ p_i''(t) &= -k^2 a_i \cos k(t - t_i) - k^2 b_i \sin k(t - t_i) \\ p_i^{(3)}(t) &= k^3 a_i \sin k(t - t_i) - k^3 b_i \cos k(t - t_i) \end{aligned} \right\} \quad (B.3)$$

d'où on remplace  $t$  par  $t_i$  dans la relation (B.2) et (B.3) on a:

$$p_i(t_i) = a_i + d_i$$

$$p_i'(t_i) = kb_i + c_i$$

$$p_i''(t_i) = -k^2 a_i$$

$$p_i^{(3)}(t_i) = -k^3 b_i$$

dans l'équations ci-dessus, on a la valeur de  $a_i, b_i, c_i$  et  $d_i$  comme suit:

$$a_i = -\frac{1}{k^2} p_i''(t_i) \quad (B.4)$$

$$b_i = -\frac{1}{k^3} p_i^{(3)}(t_i) \quad (B.5)$$

$$c_i = p_i'(t_i) + kb_i \quad (B.6)$$

$$d_i = p_i(t_i) + a_i \quad \text{for } i = 0, 1, \dots, n \quad (B.7)$$

### La fonction spline non polynomiale quadratique

La forme de la fonction spline non polynomiale quadratique est :

$$Q_i(t) = a_i \cos k(t - t_i) + b_i \sin k(t - t_i) + c_i(t - t_i) + d_i(t - t_i)^2 + e_i \quad (B.8)$$

Où  $a_i, b_i, c_i, d_i$  et  $e_i$  sont des constantes à déterminer. Pour obtenir les valeurs de  $a_i, b_i, c_i, d_i$  et  $e_i$ , on dérivé l'équation (B.8) quatre fois par rapport  $t$ , alors on a :

$$\left. \begin{aligned} Q_i'(t) &= -ka_i \sin k(t - t_i) + kb_i \cos k(t - t_i) + c_i + 2d_i(t - t_i) \\ Q_i''(t) &= -k^2 a_i \cos k(t - t_i) - k^2 b_i \sin k(t - t_i) + 2d_i \\ Q_i^{(3)}(t) &= k^3 a_i \sin k(t - t_i) - k^3 b_i \cos k(t - t_i) \\ Q_i^{(4)}(t) &= k^4 a_i \cos k(t - t_i) + k^4 b_i \sin k(t - t_i) \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.9})$$

d'où on remplace  $t$  par  $t_i$  dans la relation (B.8) et (B.9) on a:

$$Q_i(t_i) = a_i + e_i$$

$$Q_i'(t_i) = kb_i + c_i$$

$$Q_i''(t_i) = -k^2 a_i + 2d_i$$

$$Q_i^{(3)}(t_i) = -k^3 b_i$$

$$Q_i^{(4)}(t_i) = k^4 a_i$$

On a les valeurs de  $a_i, b_i, c_i, d_i$  et  $e_i$  :

$$a_i = \frac{1}{k^4} Q_i^{(4)}(t_i) \quad (\text{B.10})$$

$$b_i = -\frac{1}{k^3} Q_i^{(3)}(t_i) \quad (\text{B.11})$$

$$c_i = Q_i'(t_i) + \frac{1}{k^2} Q_i^{(3)}(t_i) \quad (\text{B.12})$$

$$d_i = \frac{1}{2} [Q_i''(t_i) + \frac{1}{k^2} Q_i^{(4)}(t_i)] \quad (\text{B.13})$$

$$e_i = Q_i(t_i) - \frac{1}{k^4} Q_i^{(4)}(t_i) \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, n. \quad (\text{B.14})$$

# ANALYSE NUMÉRIQUE POUR L'ÉQUATION INTÉGRALE DE VOLTERRA DE SECONDE ESPÈCE AVEC NOYAU FAIBLEMENT SINGULIER

Dans ce chapitre, les fonctions splines non polynomiales linéaires et quadratiques seront utilisées pour calculer la solution numérique des VIE linéaires de deuxième espèce à noyau faiblement singulier, qui est:

$$u(x) - \int_0^x \frac{t^{\mu-1}}{x^\mu} u(t) dt = f(x), \quad x \in [0, T] \quad (3.1)$$

où  $0 < \mu < 1$  et  $f$  est une fonction connue. Il y a une singularité à  $x = 0$  et  $t = 0$  pour toute valeur positive de  $t$ . Afin de résoudre (3.1), nous multiplions les deux côtés de (3.1) par  $x^\mu$  les rendements pour:

$$x^\mu u(x) - \int_0^x t^{\mu-1} u(t) dt = f(x) x^\mu \quad (3.2)$$

D'où la différenciation (3.2) par rapport à  $x$ , on obtient:

$$x^\mu u'(x) + \mu x^{\mu-1} u(x) - \frac{1}{x^{1-\mu}} u(x) = \mu x^{\mu-1} f(x) + f'(x) x^\mu \quad (3.3)$$

Et multiplier les deux côtés de (3.3) par  $x^{1-\mu}$  les rendements pour:

$$x u'(x) + (\mu - 1) u(x) = \mu f(x) + x f'(x) \quad (3.4)$$

**Remarque 4.** Notez que  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x \frac{t^{\mu-1}}{x^\mu} u(t) dt = \frac{u(0)}{\mu}$ . Par conséquent, si  $u(0) \neq 0$

on a  $u(0) \neq f(0)$ , plus précisément  $u_0 = \frac{\mu}{\mu-1} f(0)$ .

Par conséquent, l'équation (3.1) peut être convertie sous la forme suivante [15]:

$$x u'(x) + (\mu - 1) u(x) = \mu f(x) + x f'(x) \quad (3.5)$$

avec

$$u_0 = \frac{\mu}{\mu - 1} \quad (3.6)$$

Donc différencier l'équation (3,5) par rapport à  $x$ , nous obtenons

$$u'(x) + xu''(x) + (\mu - 1)u'(x) = (\mu + 1)f'(x) + f'(x) + xf''(x)$$

et comme suit on différencier l'équation (3,5) 4 fois par rapport à  $x$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} xu''(x) + \mu u'(x) &= (\mu + 1)f'(x) + xf''(x) \\ xu'''(x) + (\mu + 1)u''(x) &= (\mu + 2)f''(x) + xf'''(x) \\ xu^{(4)}(x) + (\mu + 2)u'''(x) &= (\mu + 3)f'''(x) + xf^{(4)}(x) \\ xu^{(5)}(x) + (\mu + 3)u^{(4)}(x) &= (\mu + 4)f^{(4)}(x) + xf^{(5)}(x) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Remplacez donc  $x$  par  $a$  dans la relation (3,7), les rendements :

$$\begin{aligned} xu''(x) + \mu u'(x) &= (\mu + 1)f'(x) + xf''(x) \\ xu'''(x) + (\mu + 1)u''(x) &= (\mu + 2)f''(x) + xf'''(x) \\ xu^{(4)}(x) + (\mu + 2)u'''(x) &= (\mu + 3)f'''(x) + xf^{(4)}(x) \\ xu^{(5)}(x) + (\mu + 3)u^{(4)}(x) &= (\mu + 4)f^{(4)}(x) + xf^{(5)}(x) \end{aligned} \quad (3.7)$$

si le point initial  $a = 0$  on obtient :

$$\begin{aligned} u'_0 &= \frac{\mu+1}{\mu} f'(a) \\ u''_0 &= \frac{\mu+2}{\mu+1} f''(a) \\ u'''_0 &= \frac{\mu+3}{\mu+2} f'''(a) \\ u^{(4)}_0 &= \frac{\mu+4}{\mu+3} f^{(4)}(a) \end{aligned} \quad (3.8)$$

### 3.1 Utilisation de la fonction spline linéaire non polynomiale

Afin d'approximer la solution des VIE linéaires du deuxième type à noyau faiblement singulier (3.1) en utilisant une spline non polynomiale linéaire (B.1) .Nous présentons une méthode de résolution en algorithm (VIE2WSKNPS1)

**L'Algorithme (VIE2WSKNPS1):**

**étape1:** mettre  $h = (b - a)/n, t_i = t_0 + ih, i = 0, 1, \dots, n, (t_0 = a, t_n = b)$  et  $u_0 = \frac{\mu}{\mu-1} f(a)$

**étape2:** évalué  $a_0, b_0, c_0$  et  $d_0$  par substitué (3.6)-(3.8) dans les équations (B.4)-(B.7).

**étape3:** calcule  $p_0(t)$  on utilise l'étape 2 et l'équation (B.1)

**étape4:** approximant  $u_1 \approx p_0(t_1)$ .

**étape5:** pour  $i = 1$  à  $n - 1$  fait les étapes suivantes :

**étape6:** évalué  $a_i, b_i, c_i$  et  $d_i$  par l'utilisation les équations (B.4)-(B.7) et remplace  $u(t_i), u'(t_i)$  par  $p_i(t_i), p'_i(t_i)$ .

**étape7:** calcule  $p_i(t)$  on utilise l'étape 6 et l'équation (B.1).

**étape8:** approximant  $u_{i+1} = p_i(t_{i+1})$ .

**Exemple 01 :**

On considère l'équation intégrale de Volterra du deuxième espèce avec noyau faiblement singulier:

$$u(x) - \int_0^x \frac{t^{\mu-1}}{x^\mu} u(t) dt = f(x), 0 \leq t \leq 1$$

Avec la solution exacte  $u(x) = x^3$  et  $\mu = 0.5$  et  $f(x) = 5/7x^3$ .

n	x	sol exacte	sol approchée	Erreur
1	0.00	0.0000000000000000	0.0000000000000000	0.000000e + 00
2	0.10	0.0010000000000000	0.0009995001190311	4.998810e - 07
3	0.20	0.0080000000000000	0.0079840152296327	01.598477e - 05
4	0.30	0.0270000000000000	0.0268787600319626	01.212400e - 04
5	0.40	0.0640000000000000	0.0634899461480973	5.100539e - 04
6	0.50	0.1250000000000000	0.1234467683747824	1.553232e - 03
7	0.60	0.2160000000000000	0.2121451596297886	3.854840e - 03
8	0.70	0.3429999999999999	0.3346938765738546	8.306123e - 03
9	0.80	0.5120000000000001	0.4958634546028646	1.613655e - 02
10	0.90	0.7290000000000001	0.7000385422351012	2.896146e - 02
11	1.00	1.0000000000000000	0.9511740911526229	4.882591e - 02

**Tableau(3.1) la solution exacte et la solution approchée pour l'utilisation des fonctions spline non polynomiales linéaire pour exemple01.**

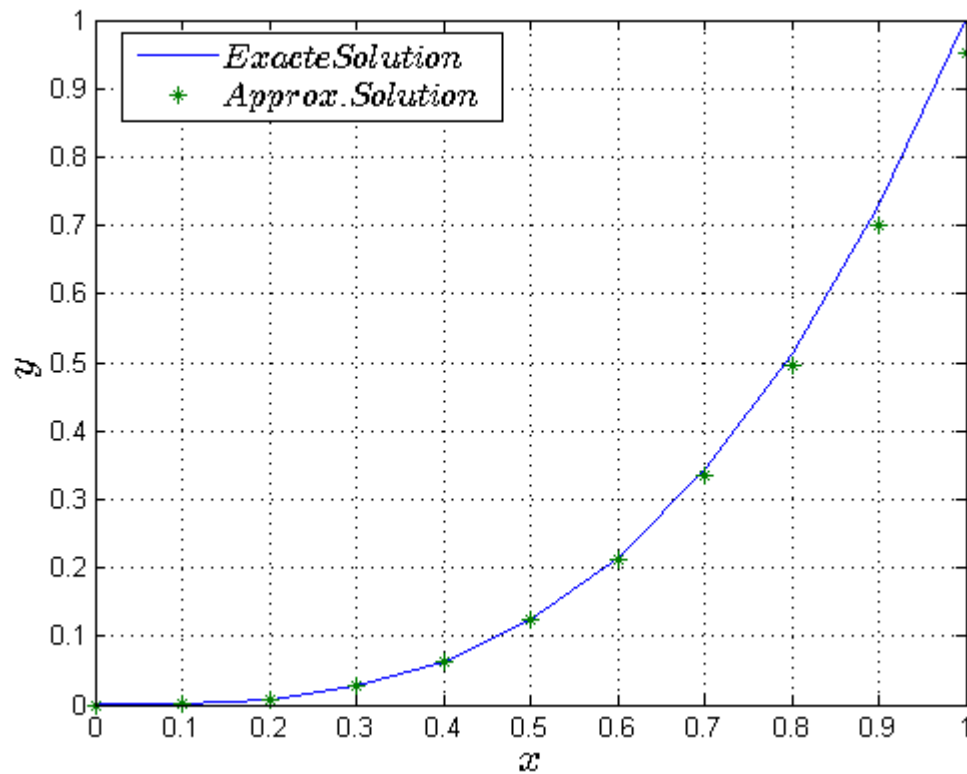


Figure 3.1: Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour l'utilisation des fonctions spline non polynomiales linéaire pour exemple01

## 3.2 Utilisation de la fonction spline non polynomiale quadratique

Nous approchons les solutions de VIE linéaires du second type avec noyau faiblement singulier en utilisant la fonction spline non polynomiale quadratique (B.8). Dans l'algorithme suivant (VIE2WSKNPS2):

### L'Algorithme VIE2WSKNPS2

**étape1:** mettre  $h = (b - a)/n$ ,  $t_i = t_0 + ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , (où  $t_0 = a$ ,  $t_n = b$ ) et  $u_0 = \frac{\mu}{\mu-1} f(a)$

**étape2:** évalué  $a_0, b_0, c_0$  et  $d_0$  par substitué (3.6)-(3.8) dans les équations (B.10)-(B.14).

**étape3:** calcule  $p_0(t)$  on utilise l'étape 2 et l'équation (B.8)

**étape4:** approximant  $u_1 \approx p_0(t_1)$ .

**étape5:** pour  $i = 1$  à  $n - 1$  fait les étapes suivantes :

**étape6:** évalué  $a_i, b_i, c_i$  et  $d_i$  par l'utilisation les équations (B.10)-(B.14) et remplace  $u(t_i), u'(t_i)$  par  $p_i(t_i), p'_i(t_i)$ .

**étape7:** calcule  $p_i(t)$  on utilise l'étape 6 et l'équation (B.8).

**étape8:** approximant  $u_{i+1} = p_i(t_{i+1})$ .

**Exemple02:** On considère l'équation intégrale de Volterra du deuxième espèce avec noyau faiblement singulier:

$$u(x) - \int_0^x \frac{t^{\mu-1}}{x^\mu} u(t) dt = f(x), \quad 0 \leq t \leq 1$$

Avec la solution exacte  $u(x) = x^3 - x^2$  et  $\mu = 0.5$  et  $f(x) = 0.71428571x^3 - 0.6x^2$ .

n	x	sol exacte	sol approchée	Erreur
1	0.00	0000000000000000	0000000000000000	0000000000000000
2	0.10	-0.0090000000000000	-0.0090004998809689	4.998810e - 07
3	0.20	-0.0320000000000000	-0.0320159847703673	1.598477e - 05
4	0.30	-0.0630000000000000	-0.0631212399680374	1.212400e - 04
5	0.40	-0.0960000000000000	-0.0965100538519027	5.100539e - 04
6	0.50	-0.1250000000000000	-0.126553231625218	1.553232e - 03
7	0.60	-0.1440000000000000	-0.147854840370211	3.854840e - 03
8	0.70	-0.1470000000000000	-0.155306123426145	8.306123e - 03
9	0.80	-0.1280000000000000	-0.144136545397135	1.613655e - 02
10	0.90	-0.0810000000000000	-0.109961457764899	2.896146e - 02
11	1.00	0000000000000000	-0.048825908847377	4.882591e - 02

**Tableau(3.2) la solution exacte et la solution approchée pour l'utilisation des fonctions spline non polynomiales quadratique pour exemple02.**

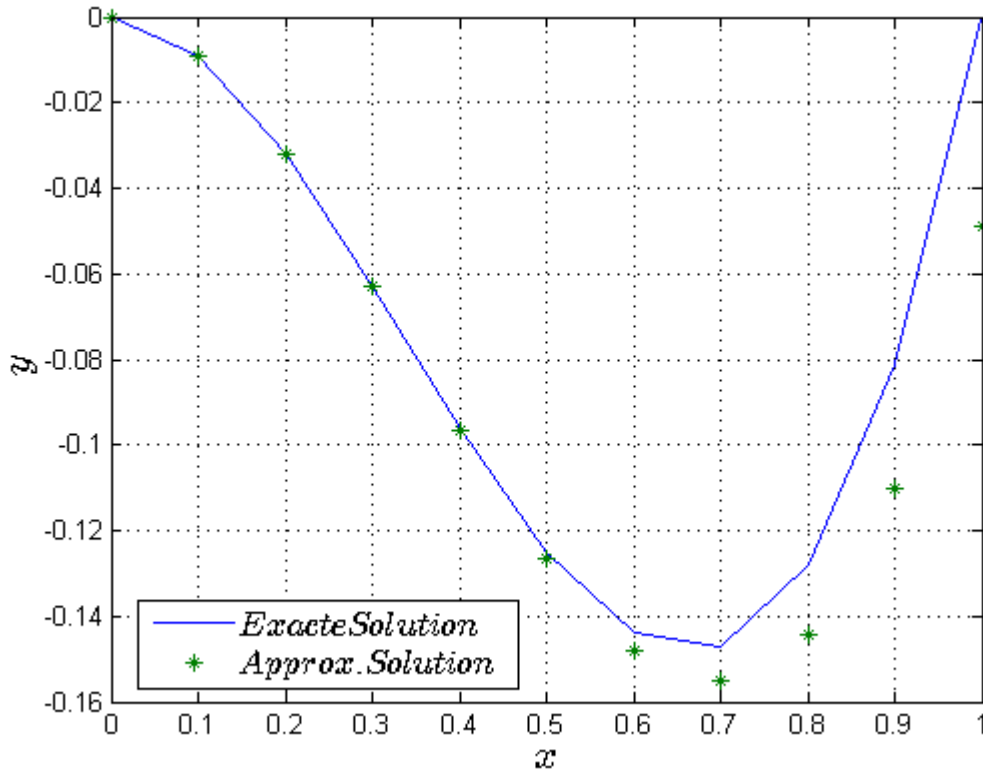


Figure 3.2: Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour l'utilisation des fonctions spline non polynomiales quadratique pour exemple02

### 3.3 Utilisation de la fonction de spline linéaire polynomiale

Afin d'approximer la solution des VIE linéaires du deuxième type à noyau faiblement singulier (3.1) en utilisant une spline polynomiale linéaire (A.1). Nous présentons une méthode de résolution en algorithme (VIE2WSKPS1)

#### L'Algorithme (VIE2WSKPS1):

**étape1:** mettre  $h = (b - a)/n$ ,  $t_i = t_0 + ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , ( $t_0 = a$ ,  $t_n = b$ ) et  $u_0 = \frac{\mu}{\mu-1} f(a)$

**étape2:** évalué  $a_0, b_0$  par substitué (3.6)-(3.8) dans les équations (A.7)-(A.8).

**étape3:** calcule  $p_0(t)$  on utilise l'étape 2 et l'équation (A.1)

**étape4:** approximant  $u_1 \approx p_0(t_1)$ .

**étape5:** pour  $i = 1$  à  $n - 1$  fait les étapes suivantes :

**étape6:** évalué  $a_i, b_i$  par l'utilisation les équations (A.7)-(A.8) et remplace  $u(t_i), u'(t_i)$  par  $p_i(t_i), p'_i(t_i)$ .

**étape7:** calcule  $p_i(t)$  on utilise l'étape 6 et l'équation (A.1).

**étape8:** approximant  $u_{i+1} = p_i(t_{i+1})$ .

**Exemple03:**

On considère l'équation intégrale de Volterra du deuxième espèce avec noyau faiblement singulier:

$$u(x) - \int_0^x \frac{t^{\mu-1}}{x^\mu} u(t) dt = f(x), \quad 0 \leq t \leq 1$$

Avec la solution exacte  $u(x) = \frac{\mu}{\mu-1} + \frac{\mu+1}{\mu}x$  et  $\mu = 0.4$  et  $f(x) = x + 1$ .

n	x	sol exacte	sol approchée	Erreur
1	0.00	-0.6666666666666667	-0.6666666666666666	1.110223e - 16
2	0.10	-0.3166666666666668	-0.3166666666666667	1.110223e - 16
3	0.20	0.0333333333333332	0.0333333333333333	1.179612e - 16
4	0.30	0.3833333333333333	0.3833333333333334	5.551115e - 17
5	0.40	0.7333333333333332	0.7333333333333333	1.110223e - 16
6	0.50	1.0833333333333330	1.50321826536994914	2.220446e - 16
7	0.60	1.4333333333333329	1.4333333333333333	4.440892e - 16
8	0.70	1.7833333333333330	1.7833333333333334	4.440892e - 16
9	0.80	2.1333333333333329	2.1333333333333333	4.440892e - 16
10	0.90	2.4833333333333325	2.4833333333333334	8.881784e - 16
11	1.00	2.8333333333333330	2.8333333333333335	4.440892e - 16

**Tableau(3.3) la solution exacte et la solution approchée pour l'utilisation des fonctions spline polynomiales linéaire pour exemple03.**

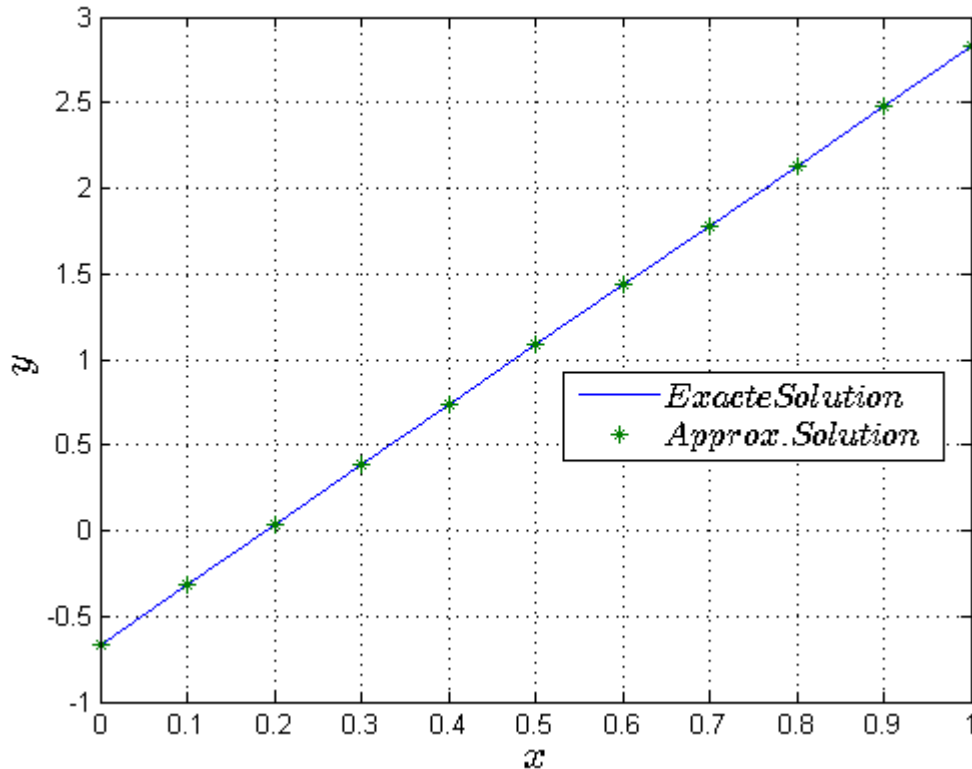


Figure 3.3: comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour l'utilisation des fonctions spline polynomiales linéaire pour exemple03.

### 3.4 Utilisation de la fonction de spline polynomiale quadratique

Afin d'approximer la solution des VIE linéaires du deuxième type à noyau faiblement singulier (3.1) en utilisant une spline polynomiale quadratique (A.1) .Nous présentons une méthode de résolution en algorithme (VIE2WSKPS1)

**L'Algorithme (VIE2WSKPS1):**

**étape1:** mettre  $h = (b - a)/n$ ,  $t_i = t_0 + ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , ( $t_0 = a$ ,  $t_n = b$ ) et  $u_0 = \frac{\mu}{\mu-1}f(a)$

**étape2:** évalué  $a_0, b_0, c_0$  par substitué (3.6)-(3.8) dans les équations (A.7)-(A.9).

**étape3:** calcule  $p_0(t)$  on utilise l'étape 2 et l'équation (A.1)

**étape4:** approximant  $u_1 \approx p_0(t_1)$ .

**étape5:** pour  $i = 1$  à  $n - 1$  fait les étapes suivantes :

**étape6:** évalué  $a_i, b_i, c_i$  par l'utilisation les équations(A.7)-(A.9)et remplace  $u(t_i), u'(t_i)$  par  $p_i(t_i), p'_i(t_i)$ .

**étape7:** calcule  $p_i(t)$  on utilise l'étape 6 et l'équation (A.1).

**étape8:** approximant  $u_{i+1} = p_i(t_{i+1})$ .

**Exemple04:** On considère l'équation intégrale de Volterra du deuxième espèce avec noyau faiblement singulier:

$$u(x) - \int_0^x \frac{t^{\mu-1}}{x^\mu} u(t) dt = f(x) , 0 \leq t \leq 1$$

Avec la solution exacte  $u(x) = \frac{\mu}{\mu-1} + \frac{\mu+1}{\mu}x + \frac{\mu+2}{\mu+1}x^2$  et  $\mu = 0.5$  et  $f(x) = x^2 + x + 1$ .

n	x	sol exacte	sol approchée	Erreur
1	0.00	-1.0000000000000000	-1.0000000000000000	0.000000e + 00
2	0.10	-0.6833333333333332	-0.6833333333333334	1.110223e - 16
3	0.20	-0.3333333333333333	-0.3333333333333333	5.551115e - 17
4	0.30	0.0500000000000000	0.0500000000000000	2.220446e - 16
5	0.40	0.4666666666666669	0.4666666666666667	2.220446e - 16
6	0.50	0.9166666666666667	0.9166666666666666	1.110223e - 16
7	0.60	1.3999999999999999	1.3999999999999999	0.000000e + 00
8	0.70	1.9166666666666661	1.9166666666666667	6.661338e - 16
9	0.80	2.4666666666666672	2.4666666666666668	4.440892e - 16
10	0.90	3.0500000000000003	3.0499999999999998	4.440892e - 16
11	1.00	3.6666666666666670	3.6666666666666665	4.440892e - 16

**Tableau(3.4)la solution exacte et la solution approchée pour l'utilisation des fonctions spline polynomiales quadratique pour exemple04.**

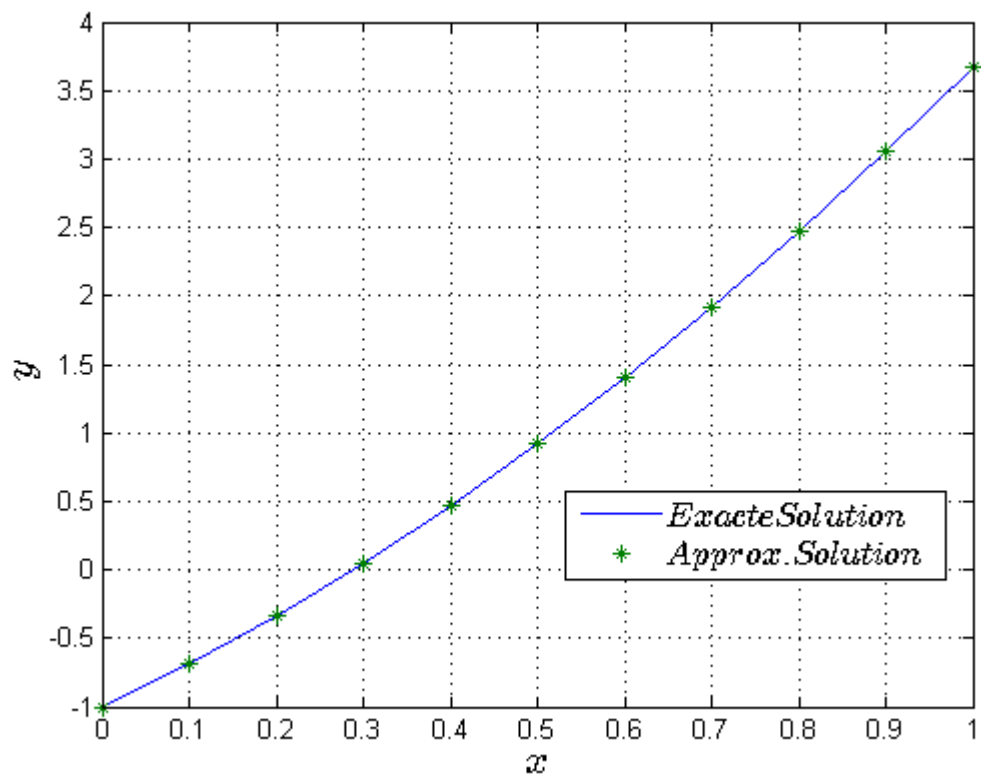


Figure 3.4: Comparaison entre la solution exacte et la solution approchée pour l'utilisation des fonctions spline polynomiales quadratique pour exemple04

### 3.5 l'analyse de résultats

#### Exemple05:

On considère l'équation intégrale de Volterra du deuxième espèce avec noyau faiblement singulier:

$$u(x) - \int_0^x \frac{t^{\mu-1}}{x^\mu} u(t) dt = f(x), \quad 0 \leq t \leq 1$$

Avec la solution exacte  $u(x) = \frac{\mu}{\mu-1} + \frac{\mu+1}{\mu}x$  et  $\mu = 0.4$  et  $f(x) = x + 1$ .

n	x	sol exacte	Erreur SPL	Erreur SPQ
1	0.00	-0.6666666666666667	$1.110223e - 16$	$1.110223e - 16$
2	0.10	-0.3166666666666668	$1.110223e - 16$	$1.110223e - 16$
3	0.20	0.0333333333333332	$1.179612e - 16$	$1.179612e - 16$
4	0.30	0.3833333333333333	$5.551115e - 17$	$5.551115e - 17$
5	0.40	0.7333333333333332	$1.110223e - 16$	$1.110223e - 16$
6	0.50	1.0833333333333330	$2.220446e - 16$	$2.220446e - 16$
7	0.60	1.4333333333333329	$4.440892e - 16$	$4.440892e - 16$
8	0.70	1.7833333333333330	$4.440892e - 16$	$4.440892e - 16$
9	0.80	2.1333333333333329	$4.440892e - 16$	$4.440892e - 16$
10	0.90	2.4833333333333325	$8.881784e - 16$	$8.881784e - 16$
11	1.00	2.8333333333333330	$4.440892e - 16$	$4.440892e - 16$

**Tableau(3.3) comparaison entre les erreurs pour l'utilisation des fonctions spline polynomiales linéaire et spline polynomiales quadratique pour exemple05.**

**Exemple 06 :**

On considère l'équation intégrale de Volterra du deuxième espèce avec noyau faiblement singulier:

$$u(x) - \int_0^x \frac{t^{\mu-1}}{x^\mu} u(t) dt = f(x), \quad 0 \leq t \leq 1$$

Avec la solution exacte  $u(x) = x^3$  et  $\mu = 0.5$  et  $f(x) = 5/7x^3$ .

n	x	sol exacte	Erreur SNPL	Erreur SNPQ
1	0.00	0.0000000000000000	0.000000e + 00	0.000000e + 00
2	0.10	0.0010000000000000	4.998810e - 07	4.998810e - 07
3	0.20	0.0080000000000000	01.598477e - 05	1.598477e - 05
4	0.30	0.0270000000000000	01.212400e - 04	1.212400e - 04
5	0.40	0.0640000000000000	5.100539e - 04	5.100539e - 04
6	0.50	0.1250000000000000	1.553232e - 03	1.553232e - 03
7	0.60	0.2160000000000000	3.854840e - 03	3.854840e - 03
8	0.70	0.3429999999999999	8.306123e - 03	8.306123e - 03
9	0.80	0.5120000000000001	1.613655e - 02	1.613655e - 02
10	0.90	0.7290000000000001	2.896146e - 02	2.896146e - 02
11	1.00	1.0000000000000000	4.882591e - 02	4.882591e - 02

**Tableau(3.1) comparaison entre les erreurs pour l'utilisation des fonctions spline non polynomiales linéaire et spline non polynomiales quadratique pour exemple06.**

Après avoir l'analysé des résultats que nous avons obtenus dans les exemples précédent (tableaux,graphes), nous pouvons conclure que:

- L'approximation par les fonctions spline non polynomiales donne meilleurs precision à comparée des fonctions spline polynomiales.
- L'approximation par les fonctions spline non polynomiales quadratique donne meilleurs precision à comparée de les fonctions spline non polynomiales linéaire.

---

# General conclusion

---

**Les méthodes utilisées dans ce mémoire montre leur efficacité pour la résolution de l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce par les fonctions splines polynomiales linéaires, polynomiales quadratiques et les fonctions splines non polynomiales linéaires et quadratiques**

**l'Analyse des résultats obtenues montre que ces méthodes donnent bon**

**Approximation**

---

---

# Bibliography

---

- [1] **Haim Brezis**, Functional Analysis Sobolev Spaces and Partial differential Equation, Rutgers University, USA, 2010.
- [2] **H, Harbi Sarah**, Algorithms For Solving Volterra Integral Equations Using Non-polynomial Spline Functions, Thesis, University of Baghdad, 2013.
- [3] **Wazwaz. A**, Linear and Non linear Integrale Equation Method and Application , Higher Education Press , Beijing, 2011.

### ملخص

في هذا البحث، دوال الثلثة متعددة الحدود والغير متعددة الحدود طبقت لإيجاد حل تقريبي لمعادلات فولتيرا التكاملية من النوع الثاني.

علاوة على ذلك، تم تقديم أمثلة عددية لتوضيح كفاءة هذه الطريقة،

### الكلمات المفتاحية:

معادلات فولتيرا التكاملية من النوع الثاني، دوال الثلثة متعددة الحدود، دوال الثلثة الغير متعددة الحدود.

### Résumé:

Dans ce mémoire, les fonctions spline polynomiales et les fonctions spline non polynomiales ont été appliquées pour trouver une solution approchée de l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce avec noyau faiblement singulier.

En plus, des exemples numérique illustratifs ont été utilisés pour montrer l'efficacité de la méthode.

Mots-Clés: équation intégrale de Volterra de seconde espèce avec noyau faiblement singulier, fonctions

splines polynomiales, fonctions splines non polynomiales, fonctions splines non polynomiales

linéaire, fonctions splines non polynomiales quadratique.

### Abstract:

In this memory, polynomial spline functions and non- polynomial spline functions are used to find approximate solution of Volterra integral equation of the second kind with weakly singular kernel. Moreover , Numerical examples are presented to show the effectiveness of this method

Keywords:Volterra integral equation of the second kind with weakly singular kernel , polynomial spline functions, non- polynomial spline functions