

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

FACULTE des Sciences
DEPARTEMENT de Physique
N° : Ph/TH/10/2023



DOMAINE : Sciences de la matière
FILIERE : Physique
OPTION : PHYSIQUE THEORIQUE.

**Mémoire présenté pour l'obtention
Du diplôme de Master Académique**

Par : KHADRAOUI Loukman

Intitulé

**Oscillations Quantiques du Moment Cinétique Orbital
Total d'un Gaz Fermionique Ultra-froid dans un Piège
Harmonique Anisotrope Tournant**

Soutenu le 20 /06 /2023 devant le jury composé de :

Dr. Medjbar. S	Université de M'sila	Président
Dr. Medjedel. S	Université de M'sila	Rapporteur
Dr. Kalli. S	Université de M'sila	Examinatrice

Année universitaire : 2022/2023

Remerciement et gratitude

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude envers Allah, notre Bon Dieu, pour toutes les grâces qu'Il nous a accordées. La plus grande de toutes les grâces est celle d'avoir montré à l'humanité le droit chemin et d'avoir envoyé son messager, notre Prophète Mohammed, que la paix soit sur lui.

Après cela j'aimerais remercier mon Professeur, monsieur Medjedel Soheyb

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude pour votre soutien et vos précieux conseils tout au long de ma thèse de master. Votre engagement et votre expertise ont été des éléments clés pour la réussite de mon travail de recherche.

Je voudrais également remercier ma famille pour leur soutien indéfectible tout au long de mes études. À mon père Mohamed Seghir Khadraoui et ma mère, je suis infiniment reconnaissant pour leur amour inconditionnel et leur encouragement constant. À ma femme, mes enfants, mes frères et sœurs ainsi que tous mes amis, je suis reconnaissant pour leur soutien moral et leur présence à mes côtés pendant cette période.

Votre encouragement et vos mots de soutien ont été d'une grande importance pour moi et m'ont aidé à traverser les moments difficiles. Encore une fois, je vous remercie tous du fond du cœur pour votre soutien et votre amour.

Dédicace

À Allah, notre Bon Dieu, qui m'a accordé la grâce de découvrir le droit chemin et qui m'a guidé tout au long de cette aventure académique.

Après cela le mérite revient à notre prophète Mohamed, que la paix soit sur lui.

Après cela à mon père et ma mère, pour leur amour inconditionnel, leur soutien et leur encouragement tout au long de ma vie et de mes études.

À ma femme, mes enfants, mes frères et sœurs ainsi que tous mes amis, pour leur présence à mes côtés, leur soutien moral et leur confiance en moi.

À mon professeur monsieur Medjedel Soheyb pour son engagement, son expertise et ses précieux conseils qui ont été des éléments clés pour la réussite de ma thèse.

Enfin, à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail, je leur adresse ma gratitude sincère.

Table des Matières

Table des matières

<u>INTRODUCTION GENERALE</u>	4
---	---

CHAPITRE 1

GAZ DE FERMIONS DEGENERE PIEGE PAR UN POTENTIEL HARMONIQUE DEFORME TOURNANT

1 <u>INTRODUCTION</u>	8
2 <u>DESCRIPTION DU SYSTEME ET SON HAMILTONIEN QUANTIQUE</u>	9
3 <u>FORMALISME DE LA MATRICE DENSITE DE BLOCH</u>	10
3.1 <u>DEFINITION DE MATRICE DENSITE DE BLOCH</u>	10
3.2 <u>RELATION ENTRE MDB ET CERTAINES GRANDEURS PHYSIQUES</u>	12
3.2.1 <i>La transformation de Laplace et sa transformation inverse</i>	12
3.2.2 <i>La transformation de Laplace inverse de la fonction de Heaviside</i>	13
3.2.3 <i>Relation entre MDB et la matrice densité de particules</i>	13
3.2.4 <i>Relation entre MDB et la densité de courant</i>	15
4 <u>EXPRESSION ANALYTIQUE DE MDB POUR LE SYSTEME ETUDIE</u>	15
4.1 <u>EXPRESSION DE LA MATRICE $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$ POUR LE CAS ISOTROPE</u>	15
4.2 <u>EXPRESSION DE LA MATRICE $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$ POUR LE CAS ANISOTROPE</u>	16
5 <u>SPECTRE D'ENERGIE DU SYSTEME</u>	16
5.1 <u>SPECTRE D'ENERGIE POUR LE CAS ISOTROPE</u>	16
5.2 <u>SPECTRE D'ENERGIE POUR LE CAS ANISOTROPE</u>	17
6 <u>ANNEXE DU CHAPITRE 1</u>	18

CHAPITRE 2

LE MOMENT CINETIQUE ORBITAL TOTAL D'UN GAZ DE FERMIONS DEGENERE PIEGE PAR UN POTENTIEL HARMONIQUE ISOTROPE TOURNANT

1 <u>INTRODUCTION</u>	21
2 <u>DERIVATION DE L'EXPRESSION DU MOMENT CINETIQUE ORBITAL TOTAL L</u>	21
2.1 <u>L'EXPRESSION DE LA DENSITE DE COURANT $\mathbf{J}(\mathbf{r})$</u>	22
2.2 <u>EXPRESSION DE DU MOMENT CINETIQUE ORBITAL TOTAL L</u>	22
3 <u>LES OSCILLATIONS QUANTIQUES DU MOMENT CINETIQUE ORBITAL TOTAL</u>	25
3.1 <u>LA RELATION ENTRE LE NOMBRE DE PARTICULE N ET LE NIVEAU DE FERMI μ</u>	26
3.2 <u>L'ETUDE GRAPHIQUE DES OSCILLATIONS QUANTIQUES DU MOMENT CINETIQUE</u>	27
4 <u>ANNEXE DU CHAPITRE 2</u>	31

CHAPITRE 3

LE MOMENT CINETIQUE ORBITAL TOTAL D'UN GAZ DE FERMIONS DEGENERE PIEGE PAR UN POTENTIEL HARMONIQUE ANISOTROPE TOURNANT

1 <u>INTRODUCTION</u>	34
2 <u>DERIVATION DE L'EXPRESSION DU MOMENT CINETIQUE ORBITAL TOTAL L</u>	34
2.1 <u>L'EXPRESSION DU PRODUIT VECTORIEL $\mathbf{r} \times \mathbf{J}(\mathbf{r})$</u>	34

2.2	<u>EXPRESSION DE DU MOMENT CINETIQUE ORBITAL TOTAL L</u>	35
3	<u>LE CAS ISOTROPE</u>	38
4	<u>LES OSCILLATIONS QUANTIQUES DU MOMENT CINETIQUE ORBITAL TOTAL</u>	39
4.1	<u>LA RELATION ENTRE LE NOMBRE DE PARTICULE N ET LE NIVEAU DE FERMÍ μ</u>	40
4.2	<u>L'ETUDE GRAPHIQUE DES OSCILLATIONS QUANTIQUES DU MOMENT CINETIQUE</u>	41
4.2.1	<u><i>Les oscillations quantiques en fonction de la vitesse de rotation</i></u>	41
4.2.2	<u><i>Les oscillations quantiques en fonction du nombre de particules</i></u>	43
5	<u>ANNEXE DU CHAPITRE 3</u>	47
	<u>CONCLUSION GENERALE</u>	49
	<u>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</u>	51

Introduction Générale

Introduction Générale

Depuis le début du vingtième siècle, les chercheurs essayaient de refroidir quelques matériaux gazeux pour atteindre des températures très basses, ce qui permettent d'observer les effets « quantiques » étranges sur les propriétés de ces gaz dégénérés selon les prédictions théoriques déjà établies (comme la statistique de Bose-Einstein). Ces essais prirent une longue période pour donner leurs fruits. En effet, ce n'était possible de les achever qu'avec l'avènement du laser où les chercheurs expérimentaux ont pu atteindre des températures au niveau du nano-kelvin, voire moins, se rapprochant ainsi du zéro absolu. Sachant que le nano-kelvin est plus bas que la température de Fermi en dessous de laquelle les effets quantiques commencent à apparaître sur la matière même au niveau macroscopique, comme par exemple la réalisation du condensat du Bose-Einstein [1].

La réponse des gaz d'atomes froids à une rotation rapide est parmi les issues qui ont reçu des investigations intensives, car elle révèle des propriétés physiques très intéressantes que ce soit pour des fermions ou pour des bosons (formation de vortex, la superfluidité du gaz, structure du spectre d'énergie de type Landau, ...). En effet, si la fréquence de la rotation augmente, le gaz quantique peut être décrit par l'ensemble des états similaires à des niveaux de Landau les plus bas (*Lowest Landau Levels*) et cette structure est reflétée dans les profils de densité [2-3]. Les systèmes des gaz de fermions dégénérés subissant une rotation se traitent généralement dans des repères tournants afin d'éliminer la dépendance en temps du potentiel confinant et par conséquent l'élimination de la dépendance temporelle de l'hamiltonien du système. Dans ce repère tournant, il est bien connu, comme nous allons le voir au chapitre 1, que l'hamiltonien du système est modifié par l'addition du terme $-\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L}$ [4]. Le moment angulaire du gaz présente des oscillations quantiques en fonction du nombre de particules [5] analogues aux oscillations de de Haas-van Alphen de la magnétisation dans les systèmes d'état solide [6]. Ces oscillations quantiques sont des manifestations macroscopiques dues à la quantification des niveaux d'énergie des électrons en présence du champ magnétique [7]. En fait, un gaz d'électron dans un métal montre une dépendance oscillatoire des observables physiques en fonction de l'intensité du champ magnétique comme par exemple les oscillations de la résistivité (oscillations de Shubnikov-de Haas), oscillations de la magnétisation, oscillations de la résistance de Hall ou les oscillations de la chaleur spécifique. Ces oscillations ont été prévues par Landau [8] et observées par de Haas-van Alphen en 1931.

Dans ce mémoire nous étudierons les Oscillations quantiques du moment cinétique orbital total d'un gaz de fermion confiné par un potentiel harmonique tournant à température nulle. Par tournant on entend que le gaz fermionique est mis

en rotation et le système est étudié dans un repère qui tourne avec la même vitesse que celle du gaz. Le potentiel piégeant le gaz des fermions sera supposé isotrope dans cas et anisotrope pour un autre, et ceci pour étudier l'influence de l'anisotropie du piège sur le comportement quantique du système. L'influence de la vitesse de rotation sur les propriétés quantiques du gaz est aussi prise en considération dans ce mémoire. L'étude de ces influences sera reflétée sur les courbes représentant les oscillations quantiques du moment cinétique orbital du système dans le repère tournant. Intuitivement, si le gaz de fermions dégénéré se comporte comme le ferait un corps rigide, i.e., un gaz classique, le moment cinétique orbital total du gaz doit être nul dans un repère tournant avec le système. Le comportement quantique du gaz conduira à un moment cinétique non nul du gaz dans le repère tournant, indiquant ainsi sa déviation du comportement classique. Ce fait est le point motivant ce travail sur les oscillations quantiques du moment cinétique orbital total.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres en plus d'une introduction et une conclusion générale. Dans le premier chapitre, nous avons décrit le système physique concerné par l'étude dans ce mémoire ainsi le repère dans lequel cette étude est faite. L'approche théorique, basée sur la matrice densité de Bloch, encadrant l'étude de ce mémoire est détaillée dans ce chapitre, y compris toutes les grandeurs physiques importantes mise en jeu et les relations entre elles.

Dans le deuxième chapitre, nous entrons aussitôt dans l'essentiel du travail. Il s'agit de la recherche d'une expression analytique du moment cinétique orbital total \mathbf{L} du système en partant d'une relation simple qu'on établira à la fin de ce chapitre. L'expression dérivée pour le moment cinétique orbital dans le repère tournant montre une séparation de ses parties classique et quantique et ceci peut être remarqué facilement sur l'expression analytique de \mathbf{L} . Le rapport entre ces deux parties classique et quantique montre un comportement oscillatoire en fonction du nombre de particule, ou en fonction du rapport de rotation.

Dans le dernier chapitre, nous suivons la même démarche que celle du chapitre 2, mais cette fois-ci pour le cas anisotrope. L'expression analytique du moment cinétique orbital total \mathbf{L} est donc dérivée. L'anisotropie du piège harmonique introduira dans ce cas un nouveau paramètre, dit paramètre d'anisotropie reflétant l'intensité de cette dernière, et c'est en plus du paramètre de rotation (indiquant la fréquence de rotation par rapport à la fréquence du potentiel confinant). Dans ce cas anisotrope, les oscillations quantiques seront régies par ces plusieurs ingrédients. Ils s'agissent de la taille du système, représenté par le nombre de particule, la vitesse de rotation du piège harmonique et l'anisotropie de ce piège.

A la fin de ce mémoire nous terminons avec une conclusion.

Chapitre 1
**Gaz de fermions dégénéré piégé par un potentiel
harmonique déformé tournant**

Chapitre 1

Gaz de fermions dégénéré piégé par un potentiel harmonique déformé tournant

1 Introduction

Les expériences sur le refroidissement des vapeurs d'atomes à partir de la température ambiante ou plus élevée (température de four) jusqu'à des températures extrêmement basses de l'ordre de milli (voire nano) Kelvin a suscité les recherches théoriques sur les gaz quantiques dégénérés, que ce soient des gaz de bosons ou de fermions. La technique standard pour refroidir ces vapeurs atomiques est « le Refroidissement LASER » qui a été développée pendant les années 80. L'idée principale de cette technique est d'immobiliser un jet d'atomes à l'aide d'un faisceau laser en diminuant la vitesse moyenne d'agitation des atomes et ceci grâce à l'action mécanique de la lumière sur ceux-ci. On est ainsi arrivé à passer de plusieurs centaines de mètres par seconde (à température ambiante) à des vitesses de quelques centimètres par seconde. En physique statistique, il est bien connu qu'à haute température, les atomes possèdent une longueur d'onde si courte et par conséquent, les effets ondulatoires sont extrêmement faibles, le gaz est alors décrit en bonne approximation par les lois de la physique classique. En revanche, à basse température les vitesses sont faibles, les longueurs d'ondes deviennent appréciables, et les effets quantiques vont se manifester [1-2].

Le confinement des atomes neutres par un piège magnétique se fait grâce à l'interaction d'un champ magnétique extérieur inhomogène $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ approprié et le moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ d'un atome. L'atome acquiert une énergie potentielle de la forme $U(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})$. A cette énergie potentielle Zeeman est associée une force agissant sur l'atome qui permet de le confiner $\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r})$. Pour réaliser un confinement harmonique, plusieurs dispositifs expérimentaux de géométries différentes ont été inventés. La contrôlabilité qu'offrent ces dispositifs permet de régler à volonté les fréquences du piège harmonique.

La réponse d'un gaz ultra-froid à la rotation constitue un domaine de recherche très intéressant et riche en phénomènes. Par exemple à température suffisamment faible, un condensat de Bose-Einstein est un superfluide, ceci revient à l'existence d'une fonction d'onde macroscopique décrivant ce condensat. L'observation de la nucléation des tourbillons quantifiés (vortex) lors d'une expérience de mise en rotation

constitue une signature expérimentale de la superfluidité des condensats de Bose-Einstein. Dans un contexte plus général, la mise en rotation des gaz ultra-froids de bosons ou de fermions fournit un lien entre la physique des atomes froids piégés et des phénomènes de la physique des systèmes de la matière condensée tels que la superfluidité, l'effet Hall quantique, et la supraconductivité [9]. Ce lien est fourni par l'analogie qui existe entre un champ magnétique agissant sur des particules chargées et le vecteur de vitesse angulaire avec lequel tourne le piège agissant sur des atomes neutres d'un gaz quantique ultra-froid. La mise en rotation d'un nuage d'atomes froids se fait par moyens optiques (deux faisceaux laser tournants) qui génèrent des potentiels dipolaires permettant d'agir (de façon mécanique) sur les atomes en mettant ces derniers en rotation rapide [10].

2 Description du système et son Hamiltonien quantique

Le système étudié dans ce chapitre est formé de N fermions neutres de spins polarisés, chacun est doué d'une masse m^* . Les particules de ce gaz, supposées indépendantes, sont astreintes de se mouvoir dans un plan que l'on choisit (x, y) . Cette restriction à deux dimensions est due grâce à un fort confinement sur l'axe Oz de sorte que l'on puisse considérer le mouvement le long duquel comme gelé (la particule occupe l'état quantique correspondant au niveau d'énergie le plus bas sur l'axe Oz). Le potentiel piégeant fait tourner le système autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire $\mathbf{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$. L'étude quantique de tel système non relativiste dans un repère de laboratoire repose principalement sur la résolution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps. La dépendance en temps de cette dernière revient en effet à la dépendance en temps du potentiel piégeant qui est en rotation par rapport au repère du laboratoire. Afin de chercher des solutions stationnaires pour l'équation de Schrödinger décrivant le système, il convient de travailler dans un repère lié au potentiel tournant, ce qui va nous permettre d'éliminer la dépendance temporelle du piège. En se mettant dans le repère tournant, le potentiel confinant le gaz est harmonique et anisotrope dont l'expression est donnée par

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m^* (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2) \quad (1.1)$$

où ω_x et ω_y sont les fréquences de confinement le long des axes Ox et Oy respectivement, et $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ est le vecteur de position de la particule dans ce repère. On introduit dès maintenant deux paramètres très utiles pour la suite de notre étude. Le premier d'entre eux, noté δ , indique l'intensité de l'anisotropie du piège et est défini comme le rapport entre les deux fréquences de piégeage ω_x et ω_y . En prenant $\omega_x \leq \omega_y$, on aurait

$$\delta = \frac{\omega_y}{\omega_x} \geq 1 \quad (1.2)$$

Le deuxième paramètre est celui défini comme le rapport entre la vitesse de rotation du système Ω et la fréquence du potentiel confinant selon l'axe du faible confinement Ox , à savoir ω_x .

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega_x} \leq 1 \quad (1.3)$$

Ce paramètre η permet d'investiguer l'influence de la vitesse de rotation sur les propriétés quantiques du système.

L'expression de l'hamiltonien quantique à un corps régissant le mouvement d'une particule du système décrit ci-dessus est donnée dans le repère tournant par [11]

$$H = \frac{1}{2m^*} \mathbf{p}^2 + \frac{1}{2} m^* (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2) - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L} \quad (1.4)$$

où $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ et $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ sont respectivement les opérateurs impulsion et moment cinétique orbital de la particule. Sous l'influence de la rotation, la particule ressent alors l'effet d'un terme supplémentaire $\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L} = \Omega L_z$ qui contient les effets combinés de la force de Coriolis et centrifuge. Ici, L_z est la composante de \mathbf{L} sur l'axe Oz . Nous souhaitons souligner que ce hamiltonien rotationnel, sous sa forme actuelle dans l'Eq. (1.4), rappelle celui décrivant une particule chargée confinée par un piège parabolique en présence d'un champ magnétique \mathbf{B} appliqué le long de l'axe Oz . La formule dudit hamiltonien magnétique est

$$H = \frac{1}{2m^*} \mathbf{p}^2 + \frac{1}{2} m^* (\Omega_x^2 x^2 + \Omega_y^2 y^2) + \omega_L L_z \quad (1.5)$$

où $\omega_L = eB/2m^*$ est la fréquence de Larmor et $\Omega_{x,y} = \sqrt{\omega_{x,y}^2 + \omega_L^2}$. La comparaison entre les deux expressions, (1.4) et (1.5), permet de montrer l'analogie entre les deux systèmes physiques. Cette analogie a été étudiée en détail dans les travaux [11-12].

3 Formalisme de la Matrice Densité de Bloch

3.1 Définition de Matrice Densité de Bloch

L'approche qui sera suivie dans ce travail est basée sur l'utilisation de ce qu'on appelle la Matrice Densité de Bloch [13], dite brièvement MDB, que l'on note $\mathcal{C}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$, où ξ n'est qu'un nombre complexe de partie réelle positive. Cette matrice densité représente le propagateur de Bloch $\exp(\xi H)$ dans la représentation position $\{|\mathbf{r}\rangle\}$.

L'exploitation de ce formalisme de la matrice de Bloch dans l'étude des propriétés thermodynamiques des systèmes d'électrons ou les systèmes d'atomes neutres ultra froids en dimensions réduites, dans des situations physiques différentes¹ [14], a révélé son importance en matière de son pouvoir calculatoire de sorte que l'étude du comportement de quelques grandeurs physiques intéressantes a pu être faite sans avoir recours à la recherche des fonctions d'onde décrivant le système qui n'est plus nécessaires une fois connue cette MDB. En effet, l'intérêt de cet outil mathématique revient au fait que sa connaissance a permis de dériver des expressions analytiques exactes des différentes grandeurs physiques caractérisant le système comme, à titre d'exemple, la densité de particules $\rho(\mathbf{r})$, la densité de courant $\mathbf{J}(\mathbf{r})$, la densité de l'énergie cinétique $\tau(\mathbf{r})$, le moment cinétique orbital total $\mathbf{L} \dots$ etc., et ceci est grâce à ses relations directes avec ces quantités, ce que l'on verra dans la suite de ce chapitre.

Les éléments $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$ de la matrice représentant l'opérateur de Bloch $\hat{C} = \exp(\xi \hat{H})$ dans la représentation position $\{|\mathbf{r}\rangle\}$ s'écrivent

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi) = \langle \mathbf{r} | e^{-\xi H} | \mathbf{r}' \rangle \quad (1.6)$$

Si on considère l'ensemble complet des vecteurs d'états quantiques $\{|i\rangle\}$, solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger avec l'hamiltonien H associées aux énergies propres E_i , l'insertion double de la relation de fermeture ($\sum_i |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i| = 1$) dans (1.6) donne

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi) = \sum_{i,j} \langle \mathbf{r} | i \rangle \langle i | e^{-\xi H} | j \rangle \langle j | \mathbf{r}' \rangle = \sum_i \varphi_i(\mathbf{r}) \varphi_i^*(\mathbf{r}') e^{-\xi E_i} \quad (1.7)$$

Les fonctions d'ondes $\{\varphi_i(\mathbf{r})\}$, correspondants aux vecteurs d'états $\{|i\rangle\}$, vérifient alors l'équation de Schrödinger stationnaire $H\varphi_i(\mathbf{r}) = E_i\varphi_i(\mathbf{r})$. L'indice i représente l'ensemble de tous les nombres quantiques déterminant de façon complète les états quantiques décrits par $\varphi_i(\mathbf{r})$. Pour un problème bidimensionnel tel le nôtre, $|i\rangle \equiv |n, m\rangle$ (deux degrés de liberté avec spin ignoré). Ainsi, l'expression (1.7) devient

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi) = \sum_{n,m} \varphi_{nm}(\mathbf{r}) \varphi_{nm}^*(\mathbf{r}') e^{-\xi E_{nm}} \quad (1.8)$$

A première vue, cette écriture (1.8) suggère que pour obtenir l'expression analytique des éléments $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$, nous devons avoir celle des fonctions d'onde $\varphi_{nm}(\mathbf{r})$. Toutefois, les éléments $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$ ont été obtenus par des méthodes mathématiques pour certains

¹ Il s'agit de la présence du champ magnétique ou non (ou champ rotationnel), son intensité, sa direction, ... etc. ainsi la présence d'un potentiel de confinement ou non, son type, ses paramètres ... etc.

systemes, dont le nôtre fait partie, sans résoudre l'équation de Schrödinger correspondante comme par exemple dans les travaux [15].

Les éléments diagonaux de la matrice de Bloch, notés $C(\mathbf{r}; \xi)$, sont obtenus en posant $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ dans (1.8) ce qui donne

$$C(\mathbf{r}; \xi) = \sum_{n,m} |\varphi_{nm}(\mathbf{r})|^2 e^{-\xi E_{nm}} \quad (1.9)$$

La normalisation des fonctions d'onde $\{\varphi_i(\mathbf{r})\}$ permet d'obtenir la relation suivante

$$\int C(\mathbf{r}; \xi) d\mathbf{r} = \sum_{n,m} e^{-\xi E_{nm}} \overbrace{\left(\int |\varphi_{nm}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} \right)}^{=1} = \sum_{n,m} \exp(-\xi E_{nm}) \quad (1.10)$$

Ce résultat nous servira plus tard dans la recherche du spectre d'énergie du système

3.2 Relation entre MDB et certaines grandeurs physiques

La transformation de Laplace et de sa transformée inverse sont deux ingrédients nécessaires à l'établissement des différentes relations entre la matrice densité de Bloch et certaines grandeurs physiques importantes du système, pour ceci il est convenable de donner ici une brève présentation de ces deux transformations afin que la dérivation des relations cherchées soit claire. On note ici une fois pour toutes que les différentes définitions et formules mathématiques ont été pris du référence [16], pour ne pas faire la citation chaque fois qu'on donne une formule mathématique.

3.2.1 La transformation de Laplace \mathcal{L} et sa transformation inverse \mathcal{L}_μ^{-1}

La transformation de Laplace $F(\xi)$ d'une fonction $f(\mu)$, notée $\mathcal{L}\{f(\mu)\}$, est donnée par l'intégrale suivante

$$\mathcal{L}\{f(\mu)\} = F(\xi) = \int_0^{\infty} f(\mu) \exp(-\xi\mu) d\mu \quad ; \text{Re}(\xi) > 0 \quad (1.11)$$

L'inverse de cette transformation, noté $\mathcal{L}_\mu^{-1}\{F(\xi)\}$, redonne bien évidemment la fonction $f(\mu)$ de sorte que

$$\mathcal{L}_\mu^{-1}\{F(\xi)\} = f(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(\xi) \exp(\xi\mu) d\xi \quad (1.12)$$

Ici c est un nombre réel supérieur à la partie réelle de toutes les singularités de $F(\xi)$. Prenons l'exemple suivant très important pour la suite de l'exposé, il s'agit de la transformée de Laplace inverse de la fonction saut de Heaviside $\Theta(x)$.

3.2.2 La transformation de Laplace inverse de la fonction de Heaviside $\Theta(\mu)$

Par définition, la fonction saut de Heaviside $\Theta(\mu)$ est

$$\Theta(\mu) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu \leq 0 \\ 1 & \text{si } \mu > 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

Elle peut être aussi définie comme une transformée de Laplace inverse de la fonction $F(\xi) = \xi^{-1}$. D'après la définition (1.12) on écrit alors

$$\Theta(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\exp(\xi\mu)}{\xi} d\xi \quad (1.14)$$

La forme de la fonction de Heaviside qui nous intéressera effectivement dans notre étude c'est celle dont l'argument est une différence $(\mu - E_{n,m})$. La fonction $F(\xi)$ qui doit être transformée pour générer $\Theta(\mu - E_{nm})$ est alors $F(\xi) = \xi^{-1} \exp(-\xi E_{nm})$. On aura donc d'après (1.14)

$$\Theta(\mu - E_{nm}) = \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{\exp(-\xi E_{nm})}{\xi} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\exp[\xi(\mu - E_{nm})]}{\xi} d\xi \quad (1.15)$$

Le nombre réel μ désigne généralement le potentiel chimique. A température nulle, le nombre μ indique le niveau de Fermi. Il s'agit de l'énergie du dernier niveau occupé par les particules du système.

3.2.3 Relation entre MDB et la matrice densité de particules $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu)$

La connaissance de la matrice densité à un corps $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu)$ est une quantité physique fondamentale pour l'étude des propriétés du système à N particules. Pour un système de N particules indépendante, elle est définie à température nulle comme [13]

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu) = \sum_{n,m} \varphi_{n,m}^*(\mathbf{r}') \varphi_{n,m}(\mathbf{r}) \Theta(\mu - E_{n,m}) \quad (1.16)$$

La sommation dans cette expression est faite sur l'ensemble de tous les nombres quantiques caractérisant les états quantiques à un corps. La présence de la fonction de

Heaviside $\Theta(\mu - E_{n,m})$ dans (1.16) tronque la sommation au niveau de Fermi quand $E_{n,m} = \mu$. Par ailleurs, sa présence permet aussi d'écrire, d'après (1.15)

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu) = \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{1}{\xi} \left(\sum_{n,m} \varphi_{n,m}^*(\mathbf{r}') \varphi_{n,m}(\mathbf{r}) \exp(-\xi E_{nm}) \right) \right\} \quad (1.17)$$

La somme entre parenthèses dans (1.17) n'est que la définition de la matrice densité de Bloch $\mathcal{C}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$ (Cf. Eq. (1.8)), alors

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{\xi\mu}}{\xi} \mathcal{C}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi) d\xi = \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{C}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)}{\xi} \right\} \quad (1.18)$$

par conséquence de cette relation, la connaissance de la matrice de Bloch $\mathcal{C}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$ permet de dériver l'expression de $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu)$ sans chercher les solutions $\varphi_{n,m}(\mathbf{r})$. En posant $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ dans $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu)$ on obtiendrait la densité locale $\rho(\mathbf{r})$ avec

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{n,m} \varphi_{n,m}^*(\mathbf{r}) \varphi_{n,m}(\mathbf{r}) \Theta(\mu - E_{n,m}) \quad (1.19)$$

qui peut être à son tour liée à la partie locale $\mathcal{C}(\mathbf{r}; \xi)$ de la matrice $\mathcal{C}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$ comme

$$\rho(\mathbf{r}) = \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{C}(\mathbf{r}; \xi)}{\xi} \right\} \quad (1.20)$$

L'intégration de cette densité de particules $\rho(\mathbf{r})$ sur tout l'espace donne le nombre de particules N du système

$$\int \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = N \quad (1.21)$$

Par ailleurs, la condition de normalisation des fonctions d'onde ($\langle \varphi_i | \varphi_i \rangle = 1$) permet d'établir la relation suivante

$$N = \sum_{n,m} \Theta(\mu - E_{n,m}) \quad (1.22)$$

Etant donné le nombre de particules N , cette dernière relation permet de trouver la valeur du niveau de Fermi μ .

3.2.4 Relation entre MDB et la densité de courant $\mathbf{J}(\mathbf{r})$

A partir de l'équation de Schrödinger dépendante du temps, et en utilisant la condition de continuité ($\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) = 0$), on peut montrer que la densité de courant $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ en fonction de la matrice densité de particules $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu)$ est donnée par l'expression suivante

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2m^*i} [(\nabla_{\mathbf{r}} - \nabla_{\mathbf{r}'})\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu)]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} - (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})\rho(\mathbf{r}) \quad (1.23)$$

Le deuxième terme du second membre de l'expression (1.23) tient compte de l'effet de la rotation sur la particule dans le repère tournant. Pour dériver la relation entre la densité de courant et la matrice de Bloch, on injecte (1.18) et (1.20) dans (1.23), ce qui donne ainsi

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2m^*i} \mathcal{L}_{\mu}^{-1} \left\{ \frac{1}{\xi} \left([(\nabla_{\mathbf{r}} - \nabla_{\mathbf{r}'})C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} - \Omega r C(\mathbf{r}; \xi) \mathbf{e}_{\varphi} \right) \right\} \quad (1.24)$$

Donc, la connaissance de la matrice $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$ permet en principe l'obtention de l'expression analytique de $\mathbf{J}(\mathbf{r})$. En l'absence du champ rotationnel ($\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$), l'expression (1.23) se réduit à celle bien connue de la densité dans le référentiel du laboratoire.

4 Expression analytique de MDB pour le système étudié

Dans cette section, nous donnerons l'expression analytique de MDB pour un système de N particules indépendantes confiné par un piège harmonique anisotrope en rotation dans le repère tournant. Son expression pour le cas isotrope est aussi donnée ici qui est nécessaire pour le chapitre 2.

4.1 Expression de la matrice $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$ pour le cas isotrope

Dans le cas isotrope, le potentiel confinant les N particules du système tournant est parabolique avec $V(\mathbf{r}) = m^* \omega_0^2 \mathbf{r}^2 / 2$, où ω_0 est sa fréquence caractéristique. La forme de la matrice $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$ est la suivante [15]

$$\begin{aligned} C(\mathbf{R}, \mathbf{S}; \xi) = & \frac{m^* \omega_0}{2\pi \hbar \sinh(\xi \hbar \omega_0)} \exp \left[\frac{i m^* \omega_0}{\hbar} \frac{\sinh(\xi \hbar \Omega)}{\sinh(\xi \hbar \omega_0)} (\mathbf{R} \times \mathbf{S}) \cdot \mathbf{e}_z \right] \\ & \times \exp \left[-\frac{m^* \omega_0}{\hbar} \left(\coth(\xi \hbar \omega_0) - \frac{\cosh(\xi \hbar \Omega)}{\sinh(\xi \hbar \omega_0)} \right) \mathbf{R}^2 \right] \\ & \times \exp \left[-\frac{m^* \omega_0}{4\hbar} \left(\coth(\xi \hbar \omega_0) + \frac{\cosh(\xi \hbar \Omega)}{\sinh(\xi \hbar \omega_0)} \right) \mathbf{S}^2 \right] \end{aligned} \quad (1.25)$$

Où $\mathbf{S} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ et $\mathbf{R} = (\mathbf{r} + \mathbf{r}')/2$ sont respectivement les coordonnées relative et de centre de masse. Les éléments diagonaux $C(\mathbf{r}; \xi)$ de cette matrice sont obtenus en posant dans (1.25) $\mathbf{S} = 0$ et $\mathbf{R} = \mathbf{r}$, c.-à-d.,

$$C(\mathbf{r}; \xi) = \frac{m^* \omega_0}{2\pi \hbar \sinh(\xi \hbar \omega_0)} \exp \left[-\frac{m^* \omega_0}{\hbar} \left(\coth(\xi \hbar \omega_0) - \frac{\cosh(\xi \hbar \Omega)}{\sinh(\xi \hbar \omega_0)} \right) \mathbf{r}^2 \right] \quad (1.26)$$

Pour ce cas isotrope, ce sont ces deux dernières expressions qu'à partir desquelles on dérive les expressions des densités $\rho(\mathbf{r})$ et $\mathbf{J}(\mathbf{r})$, et par conséquent celle du moment cinétique orbital total \mathbf{L} du système.

4.2 Expression de la matrice $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$ pour le cas anisotrope

Pour le cas anisotrope avec le potentiel (1.1), l'expression de la matrice densité de Bloch est donnée par [17]

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi) = g(\xi) \exp \left[-\left(\frac{iA}{\hbar B} \right) (xy - x'y') \right] \exp \{ a(x + x')^2 + a'(x - x')^2 + b(y + y')^2 + b'(y - y')^2 + c(x + x')(y - y') + c'(x - x')(y + y') \} \quad (1.27)$$

Pour ne pas alourdir l'exposé, les différents coefficients dans cette expression sont donnés à la fin de ce chapitre. L'expression de la partie diagonal $C(\mathbf{r}; \xi)$ se déduit donc immédiatement de (1.27) pour $(\mathbf{r} = \mathbf{r}')$ où on aura

$$C(\mathbf{r}; \xi) = g(\xi) \exp(4ax^2 + 4by^2) \quad (1.28)$$

Il est important de noter que, bien que la forme exacte de la matrice $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$ est connue, les expressions analytiques des densités $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \mu)$, $\rho(\mathbf{r})$ et $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ n'ont pas encore été rapportées dans la littérature jusqu'à présent.

5 Spectre d'énergie du système

Les niveaux d'énergie E_{nm} sont liés par les éléments diagonaux $C(\mathbf{r}; \xi)$ de la matrice de Bloch par la relation explicite (1.10). Alors, on peut en principe obtenir ces niveaux E_{nm} en faisant l'intégration de $C(\mathbf{r}; \xi)$ sur tout l'espace. On verra ça sur les deux cas qui nous intéressent ici. Il s'agit des deux cas isotrope et anisotrope pour lesquels les éléments $C(\mathbf{r}; \xi)$ sont donnés par (1.26) et (1.28) respectivement.

5.1 Spectre d'énergie pour le cas isotrope

En intégrant (1.26) on obtient

$$\int C(\mathbf{r}; \xi) d\mathbf{r} = \frac{1}{4 \sinh(\xi \hbar \Omega_+ / 2) \sinh(\xi \hbar \Omega_- / 2)} \quad (1.29)$$

Où l'intégrale gaussienne $\int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp(-\alpha t^2) = \sqrt{\pi/\alpha}$ a été utilisée dans (1.29). dans cette dernière, les nouvelles fréquences Ω_{\pm} sont définies comme

$$\Omega_{\pm} = (\omega_0 \pm \Omega) \quad (1.30)$$

Pour transformer le résultat (1.29) à une sommation double, on utilise le développement suivant

$$\sinh^{-1}(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-(2n+1)x] \quad (1.31)$$

L'expression (1.29) devient alors

$$\int C(\mathbf{r}; \xi) d\mathbf{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \exp\left\{-\xi \left[\hbar \Omega_+ \left(n + \frac{1}{2} \right) + \hbar \Omega_- \left(m + \frac{1}{2} \right) \right]\right\} \quad (1.32)$$

En faisant maintenant la comparaison entre (1.10) et (1.32) on obtient le spectre d'énergie pour le cas isotrope

$$E_{n,m} = \hbar \Omega_+ \left(n + \frac{1}{2} \right) + \hbar \Omega_- \left(m + \frac{1}{2} \right), \quad n, m = 0, 1, 2 \dots \quad (1.33)$$

Pour une rotation ultra rapide $\Omega \approx \omega_0$, on aura $\Omega_- \approx 0$ et $\Omega_+ \approx 2\omega_0$. Le spectre des niveaux d'énergie (1.33) prend la structure des niveaux de Landau infiniment dégénérés $E_n = \hbar \omega_0 (2n+1)$ et à dès qu'on approche de cette organisation, les grandeurs physiques commencent à montrer un comportement oscillatoire en fonction de la vitesse de rotation (ou l'intensité du champ magnétique de façon analogue).

5.2 Spectre d'énergie pour le cas anisotrope

En intégrant (1.28) on trouve la même forme du résultat (1.29) mais cette fois ci les fréquences Ω_{\pm} sont donnée par

$$\Omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left(\omega_x^2 + \omega_y^2 + 2\Omega^2 \pm \sqrt{(\omega_y^2 - \omega_x^2)^2 + 8\Omega^2(\omega_x^2 + \omega_y^2)} \right) \quad (1.34)$$

En suivant les mêmes étapes du paragraphe précédent on obtient aussi la même structure (1.33) pour le spectre d'énergie du cas anisotrope. C'est-à-dire

$$E_{n,m} = \hbar\Omega_+ \left(n + \frac{1}{2} \right) + \hbar\Omega_- \left(m + \frac{1}{2} \right), \quad n, m = 0, 1, 2 \dots \quad (1.35)$$

avec les fréquences Ω_{\pm} données en (1.34). De même, pour une rotation ultra rapide on aura $\Omega_+ \gg \Omega_-$ et la meme discussion du paragraphe précédent reste valable, i.e., les oscillations quantiques des grandeurs physiques en fonction du rapport de rotation η donné en (1.3), mais aussi en fonction d'autres paramètres comme le nombre de particules N et l'intensité de l'anisotropie δ .

6 Annexe du chapitre 1

Les différents coefficients de la formule (1.27) sont donnés ici

$$g(\xi) = \frac{1}{2\pi\hbar} \left(\frac{\mu_+\Omega_+}{\mu_-\Omega_-} \right)^{1/2} [\gamma_1\gamma_1' \sinh(\xi\hbar\Omega_+) \sinh(\xi\hbar\Omega_-)]^{-1/2} \quad (1.36)$$

Les masses μ_{\pm} et les fréquences Ω_{\pm} sont

$$\mu_{\pm} = \frac{2m^*S}{S + (\omega_y^2 - \omega_x^2) \pm 4\Omega^2} \quad (1.37)$$

$$\Omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} (\omega_x^2 + \omega_y^2 + 2\Omega^2 \pm S) \quad (1.38)$$

Avec

$$S = \sqrt{(\omega_y^2 - \omega_x^2)^2 + 8\Omega^2(\omega_x^2 + \omega_y^2)} \quad (1.39)$$

$$A = \frac{\omega_y^2 - \omega_x^2 + S}{2S}; \quad B = \frac{2\Omega}{m^*S} \quad (1.40)$$

$$a = -(4\hbar\gamma_1)^{-1}; \quad a' = -(4\hbar\gamma_1')^{-1} \quad (1.41)$$

$$b = -(4\hbar\gamma_2)^{-1}; \quad b' = -(4\hbar\gamma_2')^{-1} \quad (1.42)$$

$$c = \frac{i \coth(\xi\hbar\Omega_-/2)}{2\mu_-\Omega_-B\hbar\gamma_1}; \quad c' = \frac{i \tanh(\xi\hbar\Omega_-/2)}{2\mu_-\Omega_-B\hbar\gamma_1'} \quad (1.43)$$

$$d = -\frac{m^*\omega_z}{4\hbar} \tanh(\xi\hbar\omega_z/2); \quad d' = -\frac{m^*\omega_z}{4\hbar} \coth(\xi\hbar\omega_z/2) \quad (1.44)$$

$$\gamma_1 = \frac{\coth(\xi\hbar\Omega_-/2)}{\mu_-\Omega_-} + \mu_+\Omega_+B^2 \coth(\xi\hbar\Omega_+/2) \quad (1.45)$$

$$\gamma_1' = \frac{\tanh(\xi\hbar\Omega_-/2)}{\mu_-\Omega_-} + \mu_+\Omega_+B^2 \tanh(\xi\hbar\Omega_+/2) \quad (1.46)$$

$$\gamma_2 = \frac{\coth(\xi\hbar\Omega_+/2)}{\mu_+\Omega_+} + \mu_-\Omega_-B^2 \coth(\xi\hbar\Omega_-/2) \quad (1.47)$$

$$\gamma'_2 = \frac{\tanh(\xi\hbar\Omega_+/2)}{\mu_+\Omega_+} + \mu_-\Omega_-B^2 \tanh(\xi\hbar\Omega_-/2) \quad (1.48)$$

Chapitre 2

Le moment cinétique orbital total d'un gaz de fermions
dégénéré piégé par un potentiel harmonique isotrope
tournant

Chapitre 2

Le moment cinétique orbital total d'un gaz de fermions dégénéré piégé par un potentiel harmonique isotrope tournant

1 Introduction

Après avoir préparé, dans le chapitre précédent, les résultats préliminaires concernant le formalisme adopté, en particulier l'outil mathématique fondamental et ses relations avec les diverses grandeurs physiques appropriées dont nous avons besoins dans la suite de ce mémoire, dans le présent chapitre nous allons dériver l'expression du moment cinétique orbital total \mathbf{L} d'un gaz fermionique soumis à un potentiel harmonique isotrope et mis en rotation avec une vitesse angulaire Ω . Ensuite, nous étudierons les oscillations quantiques de \mathbf{L} en fonctions, non seulement en fonction de la vitesse de rotation Ω , mais aussi en fonction du nombre de particules N et ceci pour différents régimes de rotation. On met l'accent en particulier sur le régime ultra rapide où le comportement quantique apparait de façon impressionnante.

La relation clef de ce chapitre et le suivant est celle qui relie le moment cinétique orbital total \mathbf{L} avec la densité de courant \mathbf{J} et le vecteur de position \mathbf{r} , il s'agit de cette relation

$$\mathbf{L} \equiv \langle \mathbf{L} \rangle = m^* \int (\mathbf{r} \times \mathbf{J}) d\mathbf{r} \quad (2.1)$$

Son établissement peut être trouvé dans l'annexe de ce chapitre. D'après (2.1), il peut paraître que la connaissance de la forme analytique explicite de la densité de courant \mathbf{J} soit nécessaire pour la dérivation de celle de \mathbf{L} , mais on verra dans ce qui suit que ce n'est pas le cas ici, car il suffit d'utiliser la relation entre $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ et la matrice densité de Bloch $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$ pour trouver l'expression finale de \mathbf{L} .

2 Dérivation de l'expression du moment cinétique orbital total \mathbf{L}

Dans cette partie, nous allons trouver l'expression analytique de la valeur moyenne du moment cinétique \mathbf{L} pour un ensemble de N particules indépendantes soumis à un potentiel harmonique isotrope tournant. On commence tout d'abord par l'établissement d'une certaine expression de $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ sur laquelle s'appuie la suite de la recherche de \mathbf{L} .

2.1 L'expression de la densité de courant $\mathbf{J}(\mathbf{r})$

A partir des relations (1.24), (1.25) et (1.26) on peut montrer que la densité de courant s'écrit comme

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\varphi \frac{r}{2\pi a^2} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{1}{\xi} \left(\frac{\omega_0 \sinh(\xi \hbar \Omega)}{\sinh^2(\xi \hbar \omega_0)} - \frac{\Omega}{\sinh(\xi \hbar \omega_0)} \right) \exp \left[-\frac{\mathbf{r}^2}{a^2} \left(\coth(\xi \hbar \omega_0) - \frac{\cosh(\xi \hbar \Omega)}{\sinh(\xi \hbar \omega_0)} \right) \right] \right\} \quad (2.2)$$

Où $a^2 = \hbar/m^* \omega_0$ est la longueur caractéristique de l'oscillateur harmonique. Pour simplifier les calculs ultérieure, nous posons dès maintenant

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\omega_0 \sinh(\xi \hbar \Omega)}{\sinh^2(\xi \hbar \omega_0)} - \frac{\Omega}{\sinh(\xi \hbar \omega_0)} = \frac{\omega_0}{\sinh(\xi \hbar \omega_0)} \left(\frac{\sinh(\xi \hbar \Omega)}{\sinh(\xi \hbar \omega_0)} - \alpha \right) \\ \beta = \frac{\cosh(\xi \hbar \omega_0) - \cosh(\xi \hbar \Omega)}{a^2 \sinh(\xi \hbar \omega_0)} = \frac{2 \sinh(\xi \hbar \Omega_+/2) \sinh(\xi \hbar \Omega_-/2)}{a^2 \sinh(\xi \hbar \omega_0)} \end{cases} \quad (2.3)$$

Où $\alpha = \Omega/\omega_0$ est le rapport de rotation pour ce cas isotrope, avec $\Omega_\pm = \omega_0 \pm \Omega$. Le courant $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ prend la forme condensée suivante

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\varphi \frac{r}{2\pi a^2} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{1}{\xi} \lambda \exp[-\beta \mathbf{r}^2] \right\} \quad (2.4)$$

Maintenant pour trouver le moment cinétique \mathbf{L} , nous devons calculer premièrement le produit vectoriel $\mathbf{r} \times \mathbf{J}$, intégrande de (2.1). Le vecteur de position s'écrit en coordonnées cylindriques comme $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$, alors d'après (2.4) on trouve

$$\mathbf{r} \times \mathbf{J} = \mathbf{e}_z \frac{r^2}{2\pi a^2} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{1}{\xi} \lambda \exp[-\beta r^2] \right\} \quad (2.5)$$

2.2 Expression de du moment cinétique orbital total \mathbf{L}

En injectant le résultat (2.5) du produit vectoriel dans (2.1), le moment cinétique \mathbf{L} devient

$$\mathbf{L} = \mathbf{e}_z \frac{m^*}{2\pi a^2} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{1}{\xi} \lambda \int r^2 \exp[-\beta r^2] d\mathbf{r} \right\} \quad (2.6)$$

En faisant la double intégration dans les coordonnées polaires dans lesquelles l'élément de volume est ($d\mathbf{r} = r dr d\varphi$), l'expression s'écrit donc

$$\mathbf{L} = \mathbf{e}_z \frac{m^*}{a^2} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{1}{\xi} \lambda \int_0^\infty r^3 \exp[-\beta r^2] dr \right\} \quad (2.7)$$

La valeur de l'intégrale I dans (2.7) est

$$I = \int_0^\infty r^3 \exp[-\beta r^2] dr = \frac{1}{2\beta^2} \quad (2.8)$$

Substituée dans (2.7) on obtient

$$\mathbf{L} = \mathbf{e}_z \frac{m^*}{2a^2} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{1}{\xi} \frac{\lambda}{\beta^2} \right\} \quad (2.9)$$

Le rapport (λ/β^2) s'écrit d'après (2.3) comme

$$\frac{\lambda}{\beta^2} = \frac{\omega_0 a^4}{4} \left(\frac{T_1}{\sinh(\xi \hbar \Omega)} \right. \\ \left. - \alpha \frac{T_2}{\sinh(\xi \hbar \omega_0)} \right) \quad (2.10)$$

Sachant que $\Omega = (\Omega_+ - \Omega_-/2)$ et $\omega_0 = (\Omega_+ + \Omega_-/2)$, on peut exploiter les formules des sinus hyperboliques suivantes

$$\begin{cases} \sinh(\xi \hbar \Omega) = \sinh\left(\frac{\xi \hbar \Omega_+}{2}\right) \cosh\left(\frac{\xi \hbar \Omega_-}{2}\right) - \cosh\left(\frac{\xi \hbar \Omega_+}{2}\right) \sinh\left(\frac{\xi \hbar \Omega_-}{2}\right) \\ \sinh(\xi \hbar \omega_0) = \sinh\left(\frac{\xi \hbar \Omega_+}{2}\right) \cosh\left(\frac{\xi \hbar \Omega_-}{2}\right) + \cosh\left(\frac{\xi \hbar \Omega_+}{2}\right) \sinh\left(\frac{\xi \hbar \Omega_-}{2}\right) \end{cases} \quad (2.11)$$

Alors les termes $T_{1,2}$ dans (2.10) deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = \frac{\cosh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_-}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_+}{2}\right) \sinh^2\left(\frac{\xi\hbar\Omega_-}{2}\right)} - \frac{\cosh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_+}{2}\right)}{\sinh^2\left(\frac{\xi\hbar\Omega_+}{2}\right) \sinh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_-}{2}\right)} \\ T_2 = \frac{\cosh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_-}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_+}{2}\right) \sinh^2\left(\frac{\xi\hbar\Omega_-}{2}\right)} + \frac{\cosh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_+}{2}\right)}{\sinh^2\left(\frac{\xi\hbar\Omega_+}{2}\right) \sinh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_-}{2}\right)} \end{array} \right. \quad (2.12)$$

On va procéder tout d'abord par la simplification du premier terme T_1 . Le deuxième T_2 se fait de la même manière. Les deux développements suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} \sinh^{-1}(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)x} \\ \frac{\cosh(x)}{\sinh^2(x)} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)e^{-(2m+1)x} \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Où on remarque que le deuxième développement découle du premier par dérivation avec changement d'indice de sommation fait délibérément, permettent d'écrire le premier et le deuxième terme du second membre de T_1 comme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\cosh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_-}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_+}{2}\right) \sinh^2\left(\frac{\xi\hbar\Omega_-}{2}\right)} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) e^{-(n+\frac{1}{2})\xi\hbar\Omega_+ - (m+\frac{1}{2})\xi\hbar\Omega_-} \\ \frac{\cosh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_+}{2}\right)}{\sinh^2\left(\frac{\xi\hbar\Omega_+}{2}\right) \sinh\left(\frac{\xi\hbar\Omega_-}{2}\right)} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (2n+1) e^{-(n+\frac{1}{2})\xi\hbar\Omega_+ - (m+\frac{1}{2})\xi\hbar\Omega_-} \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Alors, le terme T_1 prend la forme simple suivante

$$T_1 = 8 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (m-n) e^{-(n+\frac{1}{2})\xi\hbar\Omega_+ - (m+\frac{1}{2})\xi\hbar\Omega_-} \quad (2.15)$$

En suivant les mêmes étapes que pour T_1 , on trouve pour T_2 l'expression suivante

$$T_2 = 8 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (n+m+1) e^{-(n+\frac{1}{2})\xi\hbar\Omega_+ - (m+\frac{1}{2})\xi\hbar\Omega_-} \quad (2.16)$$

Les deux expressions (2.15) et (2.16) substitués dans (2.10) donnent pour le rapport (λ/β^2) le résultat

$$\frac{\lambda}{\beta^2} = 2\omega_0 a^4 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [(m-n) - \alpha(n+m+1)] e^{-\xi E_{nm}} \quad (2.17)$$

Où $E_{nm} = \hbar\Omega_+(n+1/2) + \hbar\Omega_-(m+1/2)$ sont les niveaux d'énergie à une particule du système trouvés dans le chapitre 1. Le moment cinétique \mathbf{L} s'écrit maintenant d'après (2.9) et (2.17) comme

$$\mathbf{L} = \mathbf{e}_z \hbar \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[(m-n) - \frac{\Omega}{\omega_0} (n+m+1) \right] \mathcal{L}_{\mu}^{-1} \left\{ \frac{e^{-\xi E_{nm}}}{\xi} \right\} \quad (2.18)$$

Finalement, si on utilise l'identité suivante : $\Theta(\mu - E_{nm}) = \mathcal{L}_{\mu}^{-1} \left\{ \frac{\exp(-\xi E_{nm})}{\xi} \right\}$, on trouve l'expression du moment cinétique orbital total du système

$$\boxed{\mathbf{L} = \hbar \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \{ (m-n) - \alpha(n+m+1) \} \Theta(\mu - E_{nm}) \mathbf{e}_z} \quad (2.19)$$

Et ceci est l'objectif principal de ce chapitre. Rappelons que le rapport de rotation est $\alpha = \Omega/\omega_0$. Passons ensuite à l'étude des oscillations quantique de cette grandeur physique.

3 Les oscillations quantiques du moment cinétique orbital total

En utilisant l'expression (2.19), nous allons étudier dans cette partie les oscillations quantiques du moment cinétique orbital total \mathbf{L} comme fonction du nombre de particules dans différents régimes ou comme une fonction du rapport de rotation α pour différentes valeurs du nombre de particules. Premièrement, on note que le moment cinétique orbital total dans le repère tournant est la différence entre ses deux parties classique et quantique. La partie classique, notée \mathbf{L}_c , est liée au moment d'inertie classique I pour un gaz classique par $\mathbf{L}_c = I\boldsymbol{\Omega}$, ceci explique le fait que son expression soit attachée à la vitesse de rotation du gaz Ω via le rapport α . On a en effet

$$\mathbf{L}_c = \hbar\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (n+m+1) \Theta(\mu - E_{nm}) \mathbf{e}_z \quad (2.20)$$

La partie quantique est alors

$$\mathbf{L}_Q = \hbar \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (m-n) \Theta(\mu - E_{nm}) \mathbf{e}_z \quad (2.21)$$

En fait, le couple des deux nombres quantiques (n, m) peut être interprété dans le contexte de notre système étudié comme les nombres des quanta circulaires droit et gauche respectivement. Ainsi, leur différence donne effectivement le moment cinétique orbital comme le montre l'expression (2.21).

Nous allons donc comparer dans cette partie entre ces deux moment cinétique et nous étudierons la déviation de la valeur d'un de ces deux par rapport à l'autre en calculons le rapport entre les deux qui est nommée R :

$$R = \frac{L_Q}{L_C} = \frac{1}{\alpha} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (m - n) \Theta(\mu - E_{nm})}{\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (n + m + 1) \Theta(\mu - E_{nm})} \quad (2.22)$$

Les sommes qui apparaissent dans cette expression (2.22) ne sont pas infinies. En effet, la présence de la fonction de Heaviside $\Theta(\mu - E_{nm})$ limite les valeurs possibles que peut prendre les nombres quantiques (n, m) car le nombre N de particules du gaz est limité et ces dernières remplissent les niveaux d'énergie E_{nm} les plus bas en dessous du niveau de Fermi μ . Etant donné le nombre de particules N , nous allons voir dans la partie suivante comment peut-on déterminer la valeur du niveau de Fermi μ .

3.1 La relation entre le nombre de particule N et le niveau de Fermi μ

Partant de l'expression (1.22) établie dans le chapitre 1

$$N = \sum_{n,m} \Theta(\mu - E_{n,m}) \quad (2.23)$$

Nous pouvons donc trouver le niveau d'énergie de Fermi μ pour une valeur donnée du nombre de particules N . tout d'abord, nous devons chercher toutes les valeurs possibles de n et m qui vérifient la condition $E_{nm} \leq \mu$ pour laquelle la fonction de Heaviside n'est pas nulle. En utilisant l'expression (1.33) des niveaux d'énergie pour le cas isotrope, nous aurons

$$\Theta(\mu - E_{nm}) \geq 0 \Rightarrow E_{nm} \leq \mu \Rightarrow \hbar\Omega_+ \left(n + \frac{1}{2} \right) + \hbar\Omega_- \left(m + \frac{1}{2} \right) \leq \mu \quad (2.24)$$

On désigne les valeurs limites de n et m par n_{max} et m_{max} . Pour trouver n_{max} on pose $m=0$ on trouve donc:

$$n_{max} = \text{int} \left[\frac{\mu}{\hbar\Omega_+} - \frac{\omega_0}{\Omega_+} \right] \quad (2.25)$$

Où $\text{int}[x]$ désigne la partie entière du nombre x . Rappelons que $\Omega_{\pm} = (\omega_0 \pm \Omega)$, alors la relation (2.25) peut s'écrire comme

$$n_{max} = \text{int} \left[\frac{\tilde{\mu} - 1}{1 + \alpha} \right] \quad (2.26)$$

Où $\tilde{\mu}$ est le niveau de Fermi réduit (sans dimension) définie comme

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu}{\hbar\omega_0} \quad (2.27)$$

Maintenant, pour chaque valeur de n , la valeur maximal m_{max} du nombre quantique m est :

$$m_{max} = \text{int} \left[\frac{\tilde{\mu} - (\alpha + 1)n - 1}{1 - \alpha} \right] \quad (2.28)$$

Dans la limite de ces deux nombres maximaux, nous aurons

$$N = \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{m=0}^{m_{max}} (1) \quad (2.29)$$

Le calcul des sommes dans (2.29), tout en utilisant (2.26) et (2.28), donne la relation entre le nombre de particules N avec la valeur du niveau de Fermi

$$N = \frac{\tilde{\mu}^2 + (1 - \alpha)\tilde{\mu} + \alpha - 2\alpha^2}{2(1 - \alpha^2)} \quad (2.30)$$

La résolution de cette équation du deuxième degré en $\tilde{\mu}$ donne le résultat suivant

$$\tilde{\mu} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{-8N\alpha^2 + 9\alpha^2 + 8N - 6\alpha + 1} \quad (2.31)$$

Alors, la donnée du rapport de rotation α et le nombre de particules N permet de déterminer le niveau de Fermi réduit $\tilde{\mu}$ de ce dernier résultat.

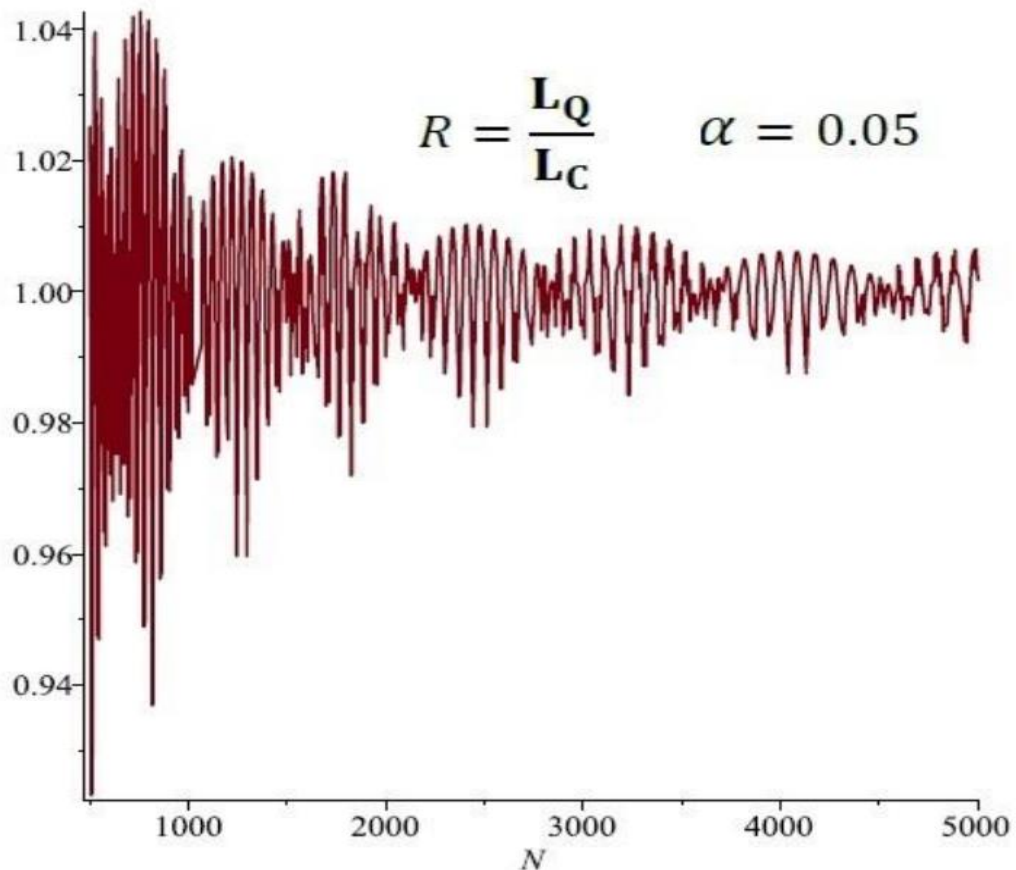
3.2 L'étude graphique des oscillations quantiques du moment cinétique

Nous pouvons après ces calculs écrire le rapport R entre la partie classique et quantique du moment cinétique

$$R = \frac{L_Q}{L_C} = \frac{\sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{m=0}^{m_{max}} (m - n)}{\sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{m=0}^{m_{max}} \alpha(m + n + 1)} \quad (2.32)$$

Donc pour une valeur constante et petite de l'intensité de rotation $\alpha=0,05$, nous pouvons remarquer les oscillations quantiques fortes du moment cinétique orbital total en fonction du nombre de particules N . A des vitesses de rotation faibles, les effets quantiques du gaz fermionique dégénéré sont bien évidents sur la figure 1 et 2 ci-dessous, ce qui montre la déviation de la partie quantique de son analogue classique.

Figure 1.



Alors, dans un repère tournant avec le système, ce dernier possède un moment cinétique orbital non nul par rapport à l'observateur lié au repère tournant, le comportement du gaz fermionique est donc différent de celui d'un corps rigide dans le régime des vitesses de rotation faibles. Ce phénomène est déjà bien connu pour les gaz bosoniques sous le nom de superfluidité, où la vitesse de rotation à partir de laquelle le gaz bosonique commence à tourner avec le récipient contenant le système s'appelle la vitesse critique. En dessous de cette vitesse critique le gaz de bosons est superfluide (absence totale du frottement du gaz avec les parois du récipient).

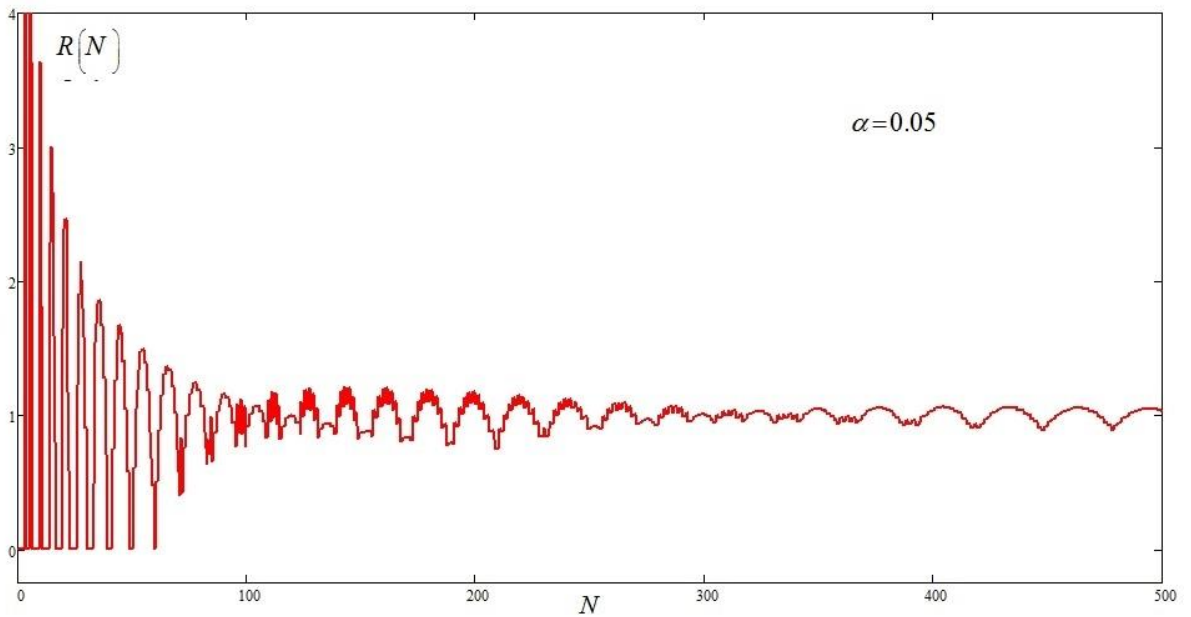


Figure 2

Ces oscillations quantiques commencent à disparaître en augmentant la vitesse de rotation même pour un petit nombre de particule comme le montre la figure 3 ci-dessous pour les deux rapports ($\alpha = 0.7; 0.9$). Ce fait est prévisible car le comportement du gaz se décline vers celui d'un comportement classique (où la partie quantique s'approche de la partie classique).

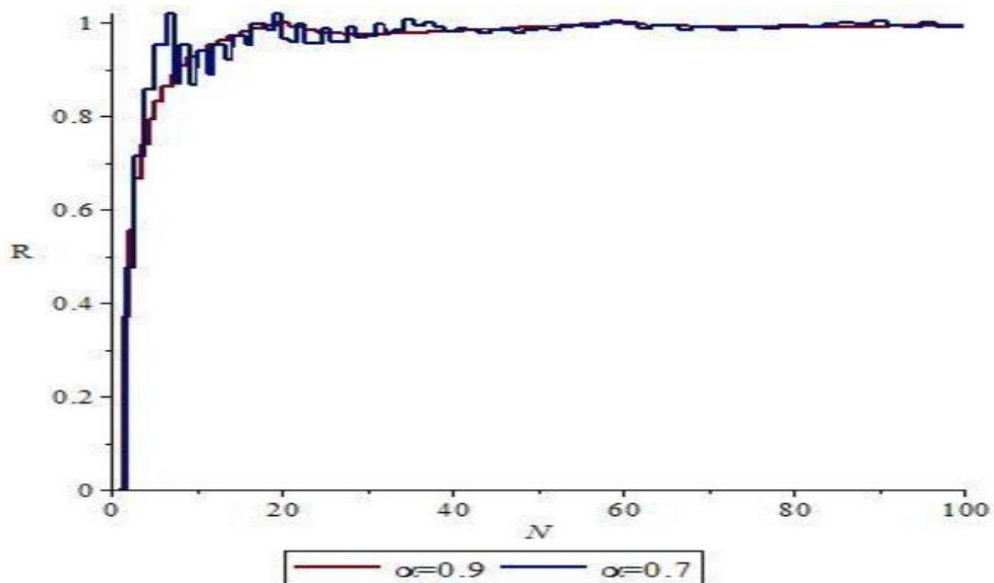


Figure 03

La figure 4 montre l'évolution du rapport R en fonction de la vitesse de rotation pour un nombre de particules $N = 1000$.

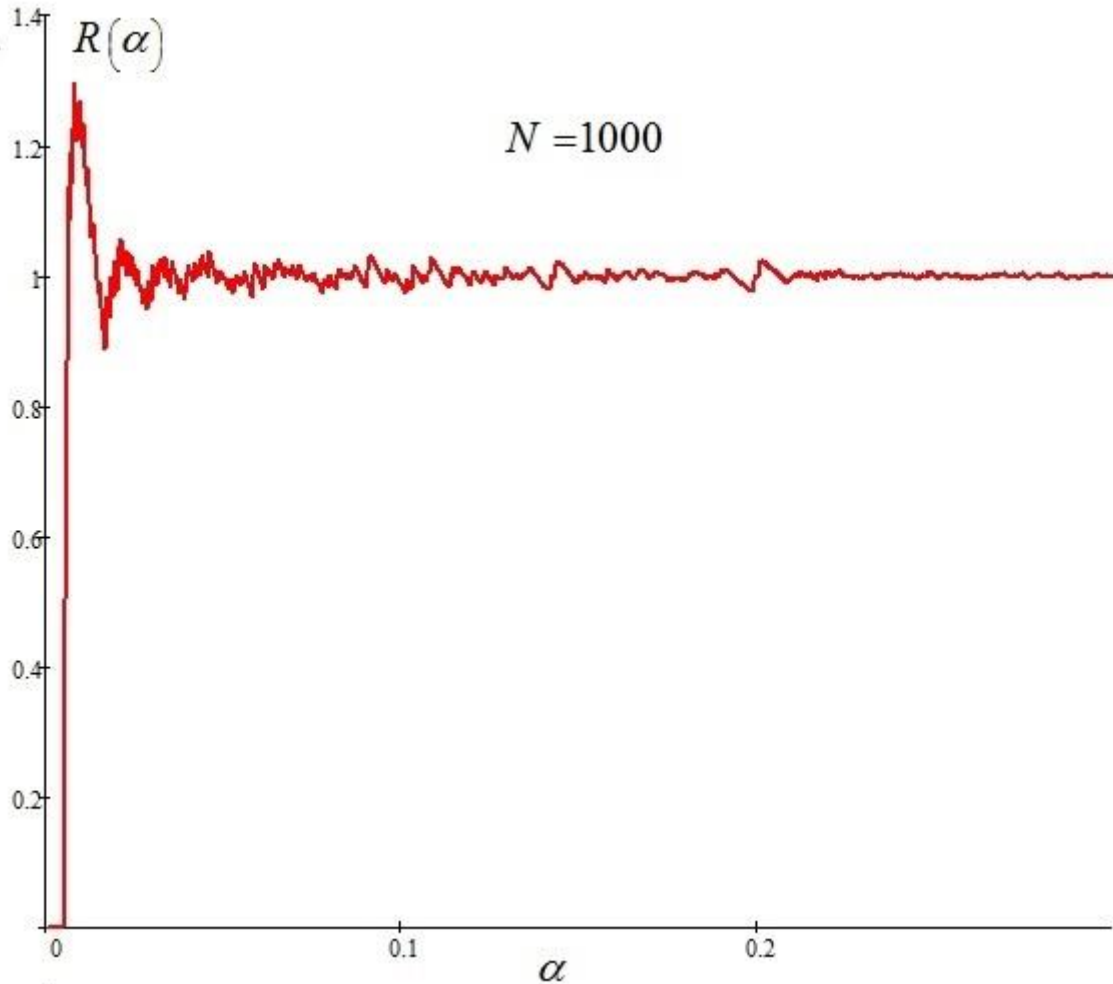


Figure 04

Les oscillations commencent de façon très fortes pour les régimes bas de vitesse de rotation pour ensuite s'amortissent progressivement avec l'accroissement de la vitesse de rotation. Le rapport $R = L_Q/L_C$ tend vers 1 en indiquant ainsi l'entrée dans le régime du comportement classique du gaz fermionique.

4 Annexe du chapitre 2

Nous voulons dans cette partie démontrer d'une façon simple la relation clef (2.1) qui relie la valeur moyenne de l'opérateur du moment cinétique orbital total d'un côté et les opérateurs vecteur de position et de la densité de courant de l'autre côté

$$\langle \mathbf{L} \rangle \equiv \mathbf{L} = m^* \int (\mathbf{r} \times \mathbf{J}) d\mathbf{r} \quad (2.33)$$

Donc nous commençons par le produit vectoriel de cette expression

$$\mathbf{r} \times \mathbf{J} = \varepsilon_{ijk} r_j J_k \mathbf{e}_i \quad (2.34)$$

Où ε_{ijk} est le symbole de Levi-Civita qui égale à (+1) pour un changement cyclique des trois indices (i, j, k) et (-1) pour un changement non cyclique, alors qu'il est nul si deux indices d'entre eux prend la même valeur. D'autre part, nous savant aussi que l'expression de la densité de courant de probabilité est donne par

$$J_j = \frac{\hbar}{2im^*} (\Psi^* \partial_j \Psi - \Psi \partial_j \Psi^*) \quad (2.35)$$

Donc

$$m^* \int (\mathbf{r} \times \mathbf{J}) d\mathbf{r} = \frac{\hbar}{2i} \int d\mathbf{r} \varepsilon_{ijk} r_i (\Psi^* \partial_j \Psi - \Psi \partial_j \Psi^*) \mathbf{e}_k \quad (2.36)$$

En utilisant ce développement

$$\varepsilon_{ijk} \partial_j (r_i \Psi \Psi^*) = \varepsilon_{ijk} (\partial_j r_i) \Psi \Psi^* + \varepsilon_{ijk} r_i (\partial_j \Psi) \Psi^* + \varepsilon_{ijk} r_i \Psi (\partial_j \Psi^*) \quad (2.37)$$

Sachant que :

$$\begin{cases} \partial_j r_i = \delta_{ij} \\ \delta_{ij} \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{iik} = 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

Nous trouvons donc

$$\varepsilon_{ijk} \partial_j (r_i \Psi \Psi^*) = \varepsilon_{ijk} r_i (\partial_j \Psi) \Psi^* + \varepsilon_{ijk} r_i \Psi (\partial_j \Psi^*) \quad (2.39)$$

Et avec l'intégration par partie nous trouvons

$$\int dv \varepsilon_{ijk} r_i \Psi (\partial_j \Psi^*) = - \int dv \varepsilon_{ijk} r_i \Psi^* (\partial_j \Psi) \quad (2.40)$$

Donc

$$m^* \int (\mathbf{r} \times \mathbf{J}) d\mathbf{r} = \frac{\hbar}{i} \int dv \varepsilon_{ijk} r_i \Psi^* (\partial_j \Psi) \mathbf{e}_k \quad (2.41)$$

Et nous pouvons remarquer que :

$$\frac{\hbar}{i} \varepsilon_{ijk} r_i (\partial_j) \mathbf{e}_k = \varepsilon_{ijk} r_i P_j \mathbf{e}_k = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = \mathbf{L}$$

Nous trouvons à la fin la relation cherchée

$$\langle \mathbf{L} \rangle \equiv \mathbf{L} = \int \Psi^* \mathbf{L} \Psi d\mathbf{r} = m^* \int (\mathbf{r} \times \mathbf{J}) d\mathbf{r} \quad (2.42)$$

Cette expression représente le point de départ pour l'étude du moment cinétique orbital total de notre système physique étudié dans ce mémoire.

Chapitre 3

**Le moment cinétique orbital total d'un gaz de fermions
dégénéré piégé par un potentiel harmonique anisotrope
tournant**

Chapitre 3

Le moment cinétique orbital total d'un gaz de fermions dégénéré piégé par un potentiel harmonique anisotrope tournant

1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier les oscillations quantiques du moment cinétique orbital total \mathbf{L} du gaz de fermions dégénéré soumis maintenant à un potentiel harmonique anisotrope tournant dont l'expression à deux dimensions est donnée par

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m^* (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2) \quad (3.1)$$

Cette anisotropie du potentiel exige l'introduction du paramètre d'anisotropie, définie dans le chapitre 1, $\delta = (\omega_y/\omega_x) \geq 1$. Ainsi, les oscillations quantiques du moment cinétique \mathbf{L} seront affectées maintenant par deux paramètres, celui susmentionné indiquant l'anisotropie du piège (δ) et le rapport de rotation définie pour le cas anisotrope comme $\eta = (\Omega/\omega_x) \leq 1$.

2 Dérivation de l'expression du moment cinétique orbital total \mathbf{L}

Dans cette partie, nous allons trouver l'expression analytique de la valeur moyenne du moment cinétique \mathbf{L} pour un ensemble de N particules indépendantes soumis à un potentiel harmonique anisotrope tournant. On commence tout d'abord par l'établissement d'une certaine expression pour le produit vectoriel $\mathbf{r} \times \mathbf{J}$ à partir duquel commence la recherche de l'expression de \mathbf{L} .

2.1 L'expression du produit vectoriel $\mathbf{r} \times \mathbf{J}(\mathbf{r})$

A partir des relations (1.24) ou (1.24), on peut montrer le produit vectoriel $\mathbf{r} \times \mathbf{J}$ s'écrit comme

$$\mathbf{r} \times \mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{J}_{kin} - \Omega r^2 \rho(\mathbf{r}) \mathbf{e}_z \quad (3.2)$$

Où \mathbf{J}_{kin} est la partie de la densité de courant dans le repère du laboratoire avec

$$\mathbf{J}_{kin} = \frac{\hbar}{2m^*i} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left[(\nabla_{\mathbf{r}} - \nabla_{\mathbf{r}'}) \left(\frac{C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)}{\xi} \right) \right]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} \quad (3.3)$$

Et la densité de particules $\rho(\mathbf{r})$ est dans ce cas, d'après (1.28)

$$\rho(\mathbf{r}) = \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{C(\mathbf{r}; \xi)}{\xi} \right\} = \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{g(\xi)}{\xi} e^{(4ax^2+4by^2)} \right\} \quad (3.4)$$

Commençons par l'expression de la matrice densité de Bloch $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)$ donnée pour le cas anisotrope par (1.27). D'après(3.3), on doit calculer le terme entre crochets qui donne

$$\begin{aligned} & [(\nabla_{\mathbf{r}} - \nabla_{\mathbf{r}'})C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \xi)]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'} \\ &= 2g(\xi) \left[\left(2c' - \frac{iA}{\hbar B} \right) y \mathbf{i} + \left(2c - \frac{iA}{\hbar B} \right) x \mathbf{j} \right] e^{(4ax^2+4by^2)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Alors la densité de courant \mathbf{J}_{kin} s'écrit maintenant

$$\mathbf{J}_{kin} = \frac{\hbar}{m^*i} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{g(\xi)}{\xi} \left[\left(2c' - \frac{iA}{\hbar B} \right) y \mathbf{i} + \left(2c - \frac{iA}{\hbar B} \right) x \mathbf{j} \right] e^{(4ax^2+4by^2)} \right\} \quad (3.6)$$

Alors, le produit vectoriel $\mathbf{r} \times \mathbf{J}_{kin}$ de l'équation (3.2) est, d'après (2.3)

$$\mathbf{r} \times \mathbf{J}_{kin} = \frac{\hbar}{m^*i} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{g(\xi)}{\xi} \left[\left(2c - \frac{iA}{\hbar B} \right) x^2 - \left(2c' - \frac{iA}{\hbar B} \right) y^2 \right] e^{(4ax^2+4by^2)} \right\} \mathbf{e}_z \quad (3.7)$$

Ce dernier résultat combiné avec l'expression (3.4), donne d'après (3.2) le produit vectoriel total $\mathbf{r} \times \mathbf{J}$, avec

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \mathbf{J} &= \frac{\hbar}{m^*i} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{g(\xi)}{\xi} \left[\left(2c - \frac{iA}{\hbar B} - \frac{im^*\Omega}{\hbar} \right) x^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(2c' - \frac{iA}{\hbar B} + \frac{im^*\Omega}{\hbar} \right) y^2 \right] e^{(4ax^2+4by^2)} \right\} \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (3.8)$$

2.2 Expression de du moment cinétique orbital total \mathbf{L}

L'expression du moment cinétique orbital total ($\mathbf{L} = m^* \int (\mathbf{r} \times \mathbf{J}) d\mathbf{r}$) deviant ici d'après le dernier résultat (3.8) du paragraphe précédent

$$\mathbf{L} = -\mathbf{e}_z i\hbar \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{g(\xi)}{\xi} \times \int dx dy \left[\left(2c - \frac{iA}{\hbar B} - \frac{im^*\Omega}{\hbar} \right) x^2 - \left(2c' - \frac{iA}{\hbar B} + \frac{im^*\Omega}{\hbar} \right) y^2 \right] e^{(4ax^2 + 4by^2)} \right\} \quad (3.9)$$

L'intégrale dans la deuxième ligne de l'équation (3.9) est évaluée dans l'annexe à la fin de ce chapitre. Le résultat de son évaluation est

$$I = \frac{\pi}{2} \hbar^2 \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \left[\left(2c - \frac{iA}{\hbar B} - \frac{im^*\Omega}{\hbar} \right) \gamma_1 - \left(2c' - \frac{iA}{\hbar B} + \frac{im^*\Omega}{\hbar} \right) \gamma_2 \right] \quad (3.10)$$

En insérant les expressions explicites des deux coefficients c et c' dans l'intégrale (3.10), celle-ci devient, avec plus de simplification (voir l'annexe pour le détail de calcul)

$$I = \frac{i\pi\hbar}{2\mu_- \Omega_- B} \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \times \left\{ [1 - A - m^*\Omega B + (A - m^*\Omega B)\mu_-^2 \Omega_-^2 B^2] \coth(\xi\hbar\Omega_-/2) - \frac{\mu_- \Omega_-}{\mu_+ \Omega_+} [1 - A + m^*\Omega B + (A + m^*\Omega B)\mu_+^2 \Omega_+^2 B^2] \coth(\xi\hbar\Omega_+/2) \right\} \quad (3.11)$$

Avant la substituons de ce résultat (3.11) dans l'expression (3.9), il convient d'introduire deux symboles afin de condenser l'écriture des prochaines formules. On met

$$\begin{cases} \lambda = 1 - A - m^*\Omega B + (A - m^*\Omega B)\mu_-^2 \Omega_-^2 B^2 \\ \kappa = 1 - A + m^*\Omega B + (A + m^*\Omega B)\mu_+^2 \Omega_+^2 B^2 \end{cases} \quad (3.12)$$

Maintenant, l'insertion de (3.11) dans (3.9) avec (3.12) permet d'écrire le moment cinétique \mathbf{L} comme

$$\mathbf{L} = -\mathbf{e}_z i\hbar \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{g(\xi)}{\xi} \frac{i\pi\hbar}{2\mu_- \Omega_- B} \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \left[\lambda \coth(\xi\hbar\Omega_-/2) - \left(\frac{\mu_- \Omega_-}{\mu_+ \Omega_+} \right) \kappa \coth(\xi\hbar\Omega_+/2) \right] \right\} \quad (3.13)$$

Si on rappelle l'expression de la fonction $g(\xi)$ qui est donnée dans l'annexe du chapitre 1 par

$$g(\xi) = \frac{1}{2\pi\hbar} \left(\frac{\mu_+ \Omega_+}{\mu_- \Omega_-} \right)^{1/2} [\gamma_1 \gamma_1' \sinh(\xi \hbar \Omega_+) \sinh(\xi \hbar \Omega_-)]^{-1/2} \quad (3.14)$$

Insérée dans (3.13) avec ensuite l'utilisation de la formule suivante

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1'} = \frac{\mu_- \Omega_-}{\mu_+ \Omega_+} \coth(\xi \hbar \Omega_- / 2) \coth(\xi \hbar \Omega_+ / 2) \quad (3.15)$$

Ça va donner la nouvelle forme de \mathbf{L} où

$$\mathbf{L} = \mathbf{e}_z \frac{\hbar}{8\mu_- \Omega_- B} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{1}{\xi \sinh(\xi \hbar \Omega_+ / 2) \sinh(\xi \hbar \Omega_- / 2)} \times \left[\lambda \coth(\xi \hbar \Omega_- / 2) - \left(\frac{\mu_- \Omega_-}{\mu_+ \Omega_+} \right) \kappa \coth(\xi \hbar \Omega_+ / 2) \right] \right\} \quad (3.16)$$

En introduisant les deux développements suivants

$$\begin{cases} \sinh^{-1}(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)x} \\ \frac{\cosh(x)}{\sinh^2(x)} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) e^{-(2m+1)x} \end{cases} \quad (3.17)$$

Ce qui permet au moment cinétique \mathbf{L} de prendre la forme suivante

$$\mathbf{L} = \mathbf{e}_z \frac{\hbar}{2\mu_- \Omega_- B} \mathcal{L}_\mu^{-1} \left\{ \frac{1}{\xi} \left[\lambda \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) e^{-\xi \{ (n+\frac{1}{2}) \hbar \Omega_+ + (m+\frac{1}{2}) \hbar \Omega_- \}} \right) - \left(\frac{\mu_- \Omega_-}{\mu_+ \Omega_+} \right) \kappa \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (2n+1) e^{-\xi \{ (n+\frac{1}{2}) \hbar \Omega_+ + (m+\frac{1}{2}) \hbar \Omega_- \}} \right) \right] \right\} \quad (3.18)$$

Si on rappelle que les niveaux d'énergie du système pour le cas anisotrope sont donnés par

$$E_{nm} = \hbar \Omega_+ (n + 1/2) + \hbar \Omega_- (m + 1/2) \quad (3.19)$$

Alors, la longue expression (3.18) de \mathbf{L} pourrait se réduire à une forme un peu plus condensée comme

$$\mathbf{L} = \mathbf{e}_z \frac{\hbar}{2\mu_- \Omega_- B} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\lambda(2m+1) - \left(\frac{\mu_- \Omega_-}{\mu_+ \Omega_+} \right) \kappa(2n+1) \right] \mathcal{L}_{\mu}^{-1} \left(\frac{e^{-\xi E_{nm}}}{\xi} \right) \right\} \quad (3.20)$$

Finalement, en utilisant l'identité suivante

$$\Theta(\mu - E_{nm}) = \mathcal{L}_{\mu}^{-1} \left\{ \frac{\exp(-\xi E_{nm})}{\xi} \right\} \quad (3.21)$$

Nous obtenons pour l'expression de \mathbf{L} pour le cas anisotrope le résultat final

$$\boxed{\mathbf{L} = \mathbf{e}_z \frac{\hbar}{2\mu_- \Omega_- B} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\lambda(2m+1) - \left(\frac{\mu_- \Omega_-}{\mu_+ \Omega_+} \right) \kappa(2n+1) \right] \Theta(\mu - E_{nm}) \right\}} \quad (3.22)$$

Cette expression condensée ne montre pas de façon claire la séparation des parties classique et quantique du moment cinétique \mathbf{L} comme c'était pour le cas isotrope. En effet, on va montrer que cette division est toujours possible si l'on sépare les termes multipliés par la vitesse de rotation angulaire du potentiel confinant. Comme une démarche intuitif, on doit confirmer que le résultat (3.22) le plus générale, i.e., le cas anisotrope, tend vers celui de (2.19) du cas isotrope dérivé dans le chapitre précédent.

3 Le cas isotrope

Si les fréquences du potentiel piégeant anisotrope tendent vers celles du potentiel isotrope, c'est-à-dire quand ($\omega_x = \omega_y = \omega_0$). Dans ce cas, le paramètre de l'anisotropie devient $\delta = 1$, alors que le rapport de rotation η s'identifie au rapport α défini dans le cas isotrope. On aura dans ce cas (voir l'annexe du chapitre 2)

$$\begin{aligned} \Omega_{\pm} &= \omega_0 \pm \Omega; & \mu_{\pm} &= 2m^* \omega_0 / (\omega_0 \pm \Omega) \\ B &= 1/2m^* \omega_0; & A &= 1/2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

On voit immédiatement que

$$\mu_+ \Omega_+ B = \mu_- \Omega_- B = 1 \quad (3.24)$$

Ainsi, la formule (3.22) devient

$$\mathbf{L} = \mathbf{e}_z \frac{\hbar}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left[1 - \frac{\Omega}{\omega_0} \right] (2m+1) - \left[1 + \frac{\Omega}{\omega_0} \right] (2n+1) \right\} \Theta(\mu - E_{nm}) \quad (3.25)$$

Ce qui peut s'écrire de façon plus claire comme

$$\mathbf{L} = \mathbf{e}_z \hbar \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ (m - n) - \frac{\Omega}{\omega_0} (n + m + 1) \right\} \Theta(\mu - E_{nm}) \quad (3.26)$$

Identique au résultat (2.19) correspondant au cas isotrope.

4 Les oscillations quantiques du moment cinétique orbital total

Comme nous avons fait dans le cas isotrope, mais cette fois-ci à partir de l'expression (3.22), nous allons étudier les oscillations quantiques du moment cinétique orbital total \mathbf{L} comme fonction du nombre de particules N dans différents régimes de rotation ou comme une fonction de la vitesse angulaire pour différentes valeurs du nombre de particules et dans les deux cas, on verra l'influence du paramètre de l'anisotropie sur le comportement du gaz de fermions. Tout d'abord, on veut écrire le moment cinétique orbital total dans le repère tournant comme la différence entre ses deux parties classique et quantique. La partie classique, notée \mathbf{L}_C , dont l'expression soit attachée à la vitesse de rotation du gaz Ω serait

$$\mathbf{L}_C = \mathbf{e}_z m^* \Omega \hbar \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1 + \mu_+^2 \Omega_+^2 B^2}{\mu_+ \Omega_+ B} \right) \left(n + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1 + \mu_-^2 \Omega_-^2 B^2}{\mu_- \Omega_- B} \right) \left(m + \frac{1}{2} \right) \right] \Theta(\mu - E_{nm}) \right\} \quad (3.27)$$

La partie quantique quant à elle est trouvée comme

$$\mathbf{L}_Q = \mathbf{e}_z \hbar \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1 - A(1 - \mu_-^2 \Omega_-^2 B^2)}{\mu_- \Omega_- B} \right) \left(m + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1 - A(1 - \mu_+^2 \Omega_+^2 B^2)}{\mu_+ \Omega_+ B} \right) \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] \Theta(\mu - E_{nm}) \right\} \quad (3.28)$$

Nous allons donc comparer dans cette partie entre ces deux moments cinétiques et nous étudierons la déviation de la valeur d'un de ces deux par rapport à l'autre en calculons le rapport entre les deux noté R comme on l'a fait dans le chapitre précédent.

$$R = \frac{L_Q}{L_C} \quad (3.29)$$

A cause de la présence des sommations infinies, que doivent être coupées pour certaines valeurs de l'énergie E_{nm} limitée par le dernier niveau occupé, dit niveau de Fermi, nous devons dériver dans la partie suivante la relation entre la valeur du niveau de Fermi μ du système et le nombre de particules N , contenant normalement les paramètres relatifs à notre étude. Ce qui va nous permettre de déterminer les valeurs maximales n_{max} et m_{max} des nombres quantiques n et m respectivement.

4.1 La relation entre le nombre de particule N et le niveau de Fermi μ

Partant de l'expression (1.22) établie dans le chapitre 1

$$N = \sum_{n,m} \theta(\mu - E_{n,m}) \quad (3.30)$$

Nous pouvons donc trouver le niveau d'énergie de Fermi μ pour une valeur donnée du nombre de particules N . tout d'abord, nous devons chercher toutes les valeurs possibles de n et m qui vérifient la condition $E_{nm} \leq \mu$ pour laquelle la fonction de Heaviside n'est pas nulle. En utilisant l'expression (3.19) des niveaux d'énergie pour le cas anisotrope, nous aurons

$$\theta(\mu - E_{nm}) \geq 0 \Rightarrow E_{nm} \leq \mu \Rightarrow \hbar\Omega_+ \left(n + \frac{1}{2} \right) + \hbar\Omega_- \left(m + \frac{1}{2} \right) \leq \mu \quad (3.31)$$

On désigne les valeurs limites de n et m par n_{max} et m_{max} . Pour trouver n_{max} on pose $m=0$ on trouve donc:

$$n_{max} = \text{int} \left[\frac{\mu}{\hbar\Omega_+} - \frac{\Omega_+ + \Omega_-}{2\Omega_+} \right] \quad (3.32)$$

Pour chaque valeur de n , la valeur maximal m_{max} du nombre quantique m est :

$$m_{max} = \text{int} \left[\frac{\mu}{\hbar\Omega_-} - \frac{\Omega_+}{\Omega_-} n - \frac{\Omega_+ + \Omega_-}{2\Omega_-} \right] \quad (3.33)$$

Dans la limite de ces deux nombres maximaux, nous aurons

$$N = \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{m=0}^{m_{max}} (1) \quad (3.34)$$

Le calcul des sommes dans (2.29), tout en utilisant (2.25) et (2.28), donne la relation entre le nombre de particules N avec la valeur du niveau de Fermi

$$N = \frac{1}{2\Omega_+\Omega_-} \left[\frac{1}{\hbar^2} \mu^2 + \frac{\Omega_+}{\hbar} \mu - \frac{1}{4} (\Omega_+ - \Omega_-)(\Omega_+ - 3\Omega_-) \right] \quad (3.35)$$

La résolution de cette équation du deuxième degré en μ donne le résultat suivant

$$\mu = -\frac{1}{2} \hbar \Omega_+ + \frac{\hbar}{2} \sqrt{8N\Omega_+\Omega_- + 2\Omega_+^2 - 4\Omega_+\Omega_- + 3\Omega_-^2} \quad (3.36)$$

Alors, la donnée des deux paramètres δ et η et le nombre de particules N permet de déterminer le niveau de Fermi μ de ce dernier résultat.

4.2 L'étude graphique des oscillations quantiques du moment cinétique

L'étude graphique du rapport R entre la partie classique et quantique du moment sera fait pour différentes valeurs du paramètre de l'anisotrope δ , tantôt comme une fonction du nombre de particules tantôt comme une fonction de la vitesse de rotation représentée par le paramètre η .

4.2.1 Les oscillations quantiques en fonction de la vitesse de rotation

Pour des nombres de particules fixés $N = 100; 1000$, nous aurons les graphes suivantes

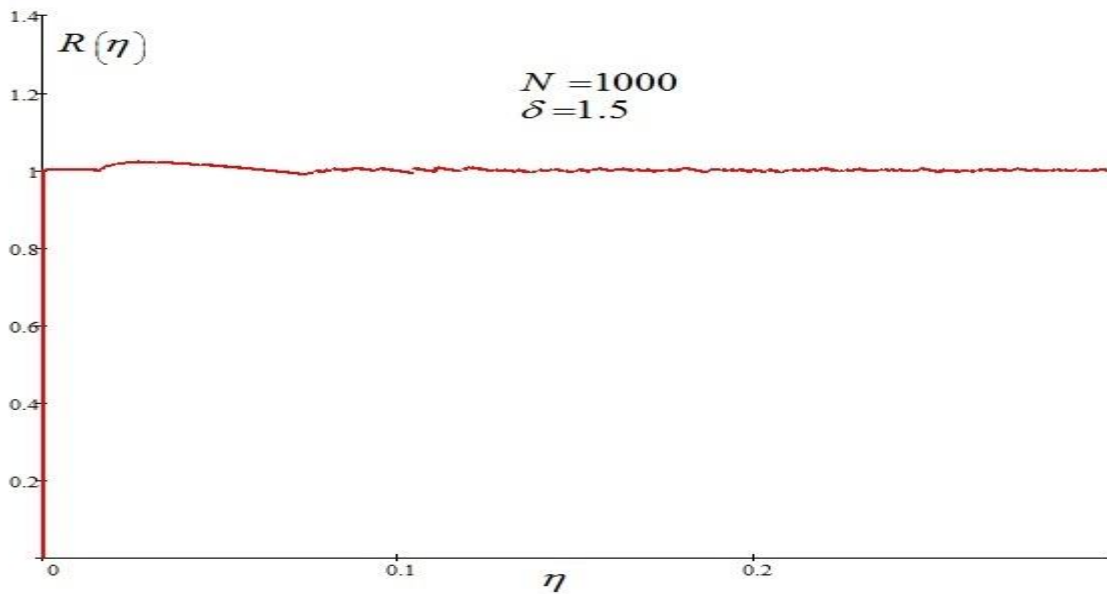


Figure 1.

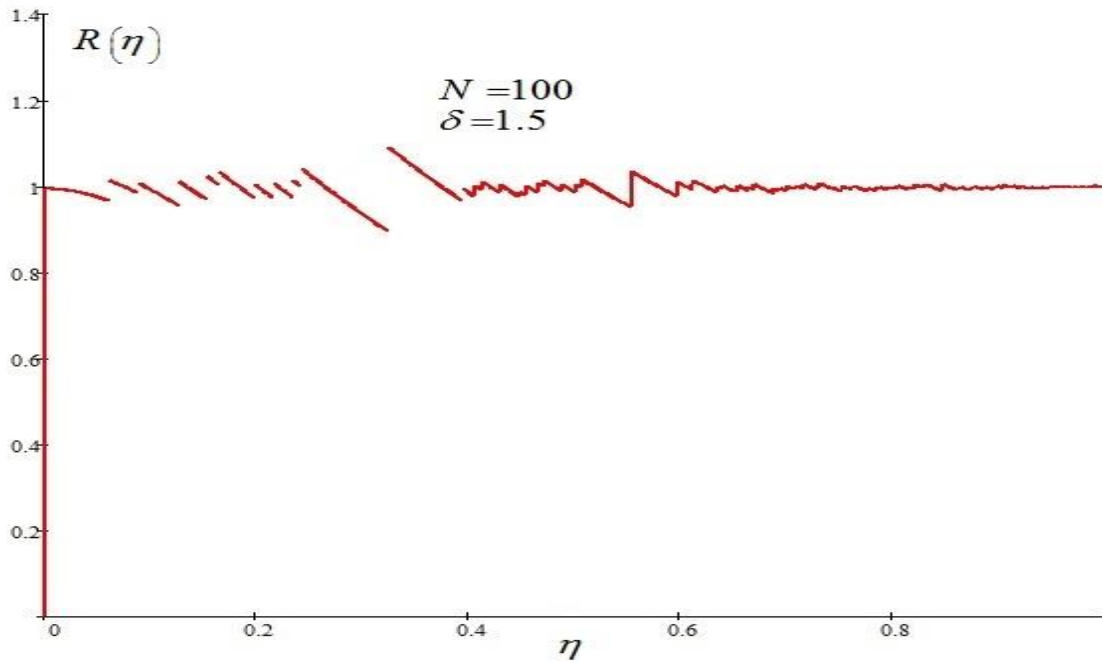


Figure 2.

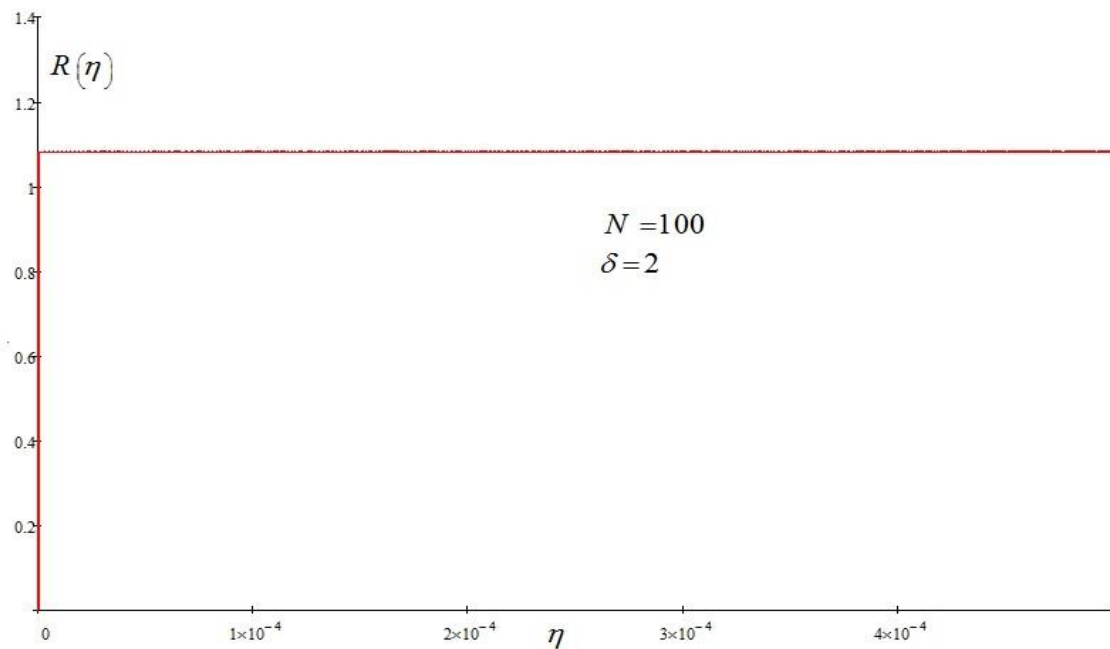
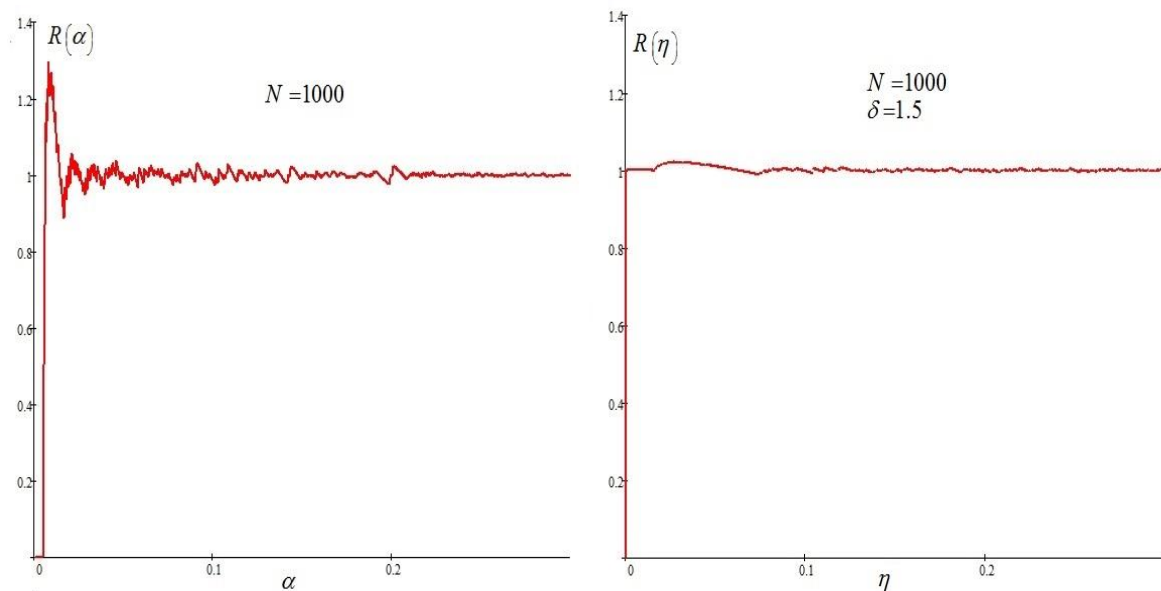


Figure 3.

Deux grandes remarques peuvent être tirées facilement d'après ces trois figures. La première est que les oscillations quantiques, qui ont été prononcées pour le cas isotrope (voir figure 04 dans le chapitre 02) disparaissent ici dans la figure 01 pour le même nombre de particules $N = 1000$. L'influence de l'anisotropie sur les oscillations

quantiques du moment cinétique orbital est donc importante. La deuxième remarque est que même pour un petit nombre de particules $N = 100$, les oscillations quantiques disparaissent totalement si on augmente l'anisotropie comme l'indique la comparaison entre les deux figures 2 et 3. Mais on doit noter ici une autre remarque importante est que l'inclusion de l'anisotropie fait de la partie quantique du moment cinétique total grand que son analogue classique, et c'est clair d'après la figure 3. Alors dans un repère tournant, et pour un petit système de fermions dégénéré, on aperçoit que le système acquiert un moment cinétique non nul. Le gaz montre son aspect quantique à ce régime d'anisotropie. L'augmentation de l'anisotropie tue les oscillations quantiques du moment cinétique orbital total pour les petits systèmes de fermions.

Pour plus de clarté sur l'influence de l'anisotropie pour un système relativement large, nous mettons ci-dessous côte à côte la figure 1 de ce chapitre et la figure 4 du chapitre précédent.



Passons dans ce qui suit, à l'influence de la taille du système sur les oscillations quantiques du moment cinétique orbital total.

4.2.2 Les oscillations quantiques en fonction du nombre de particules

Pour différentes valeurs du paramètre de l'anisotropie δ et du rapport de rotation η , on trace le comportement du rapport R en fonction du nombre de particules N . Les résultats sont représentés par la série des figures ci-dessous.

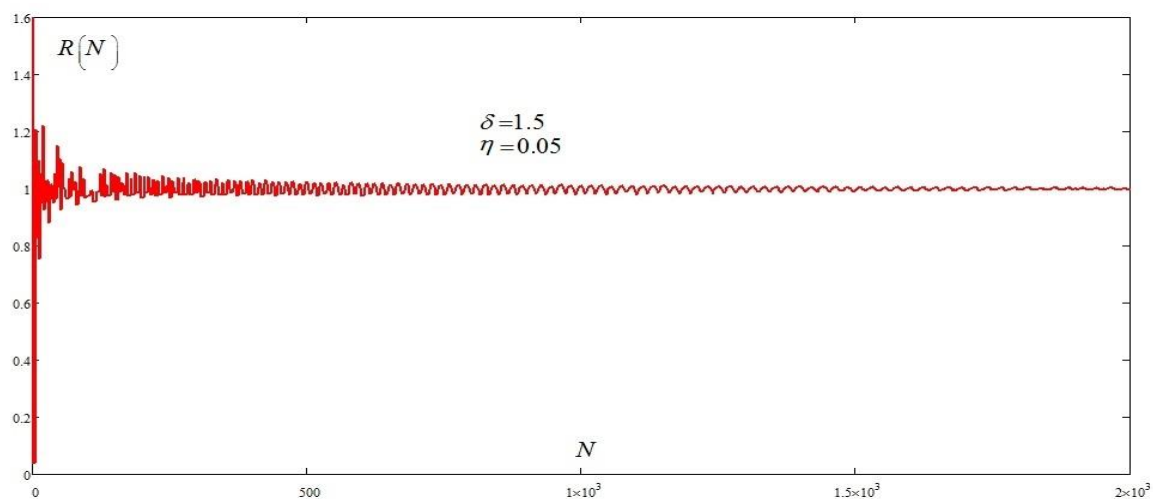


Figure 4

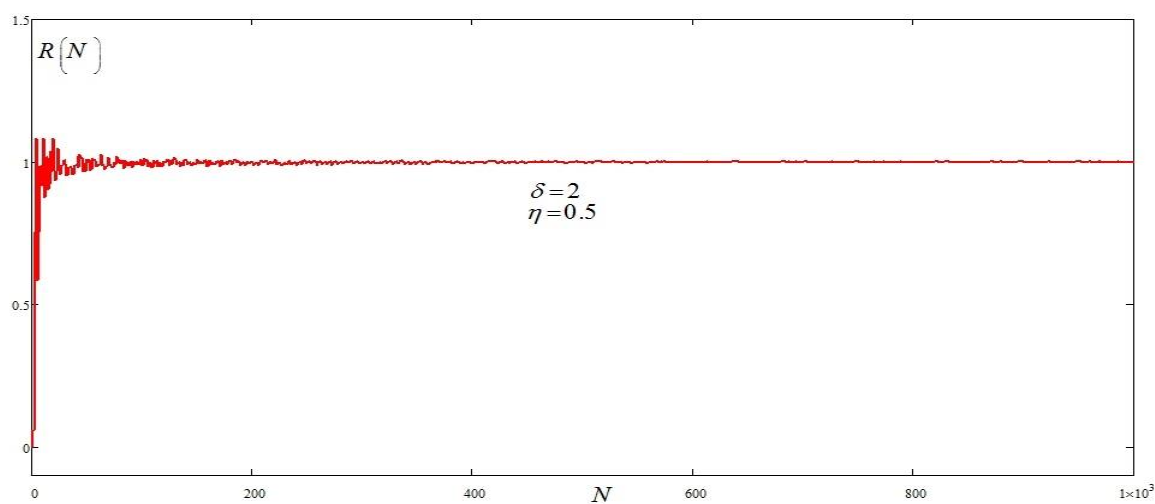


Figure 5

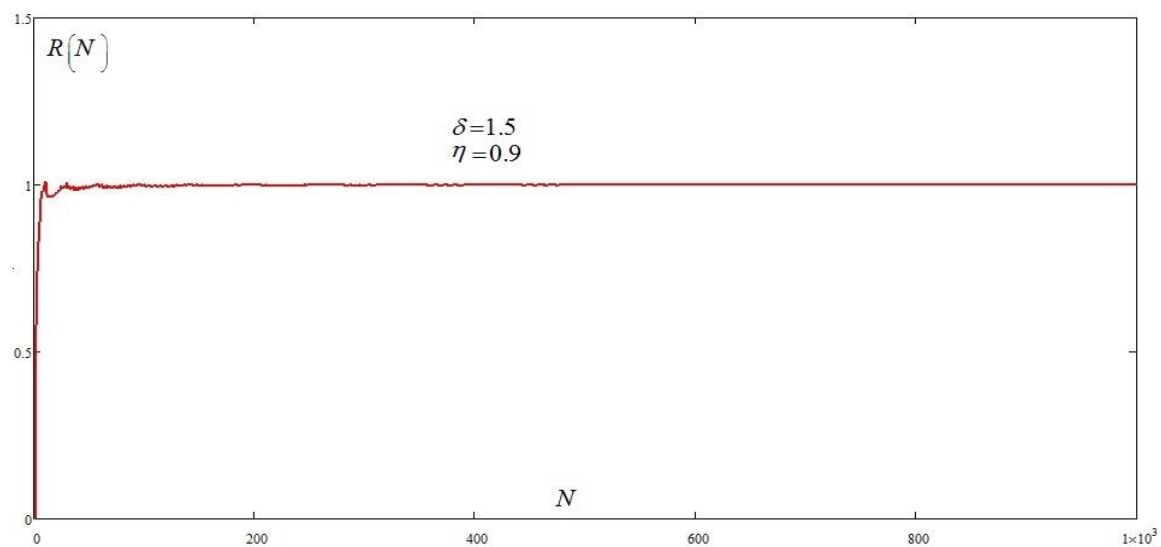


Figure 6

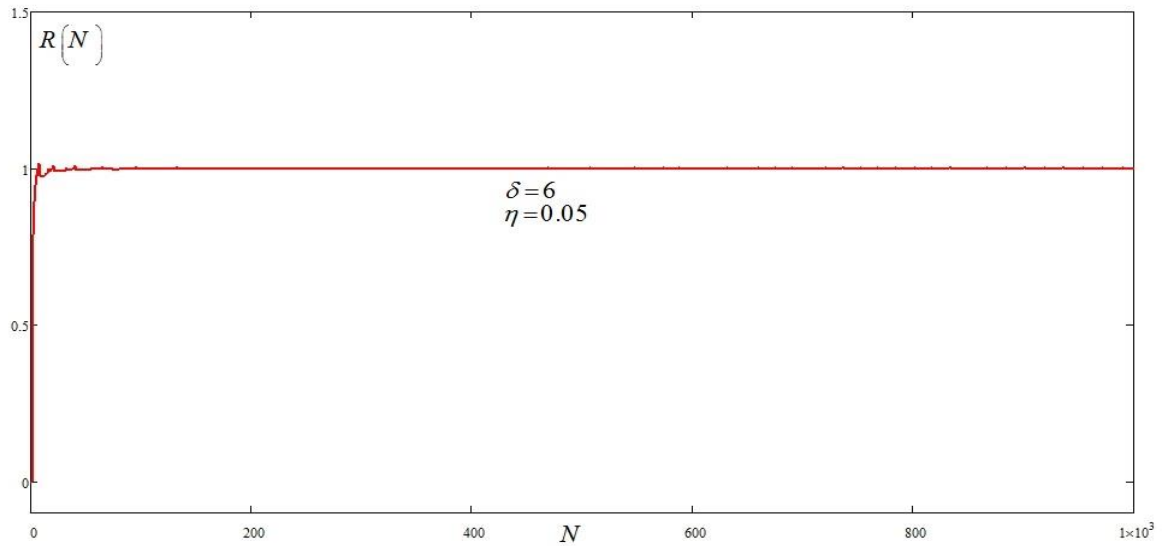


Figure 7

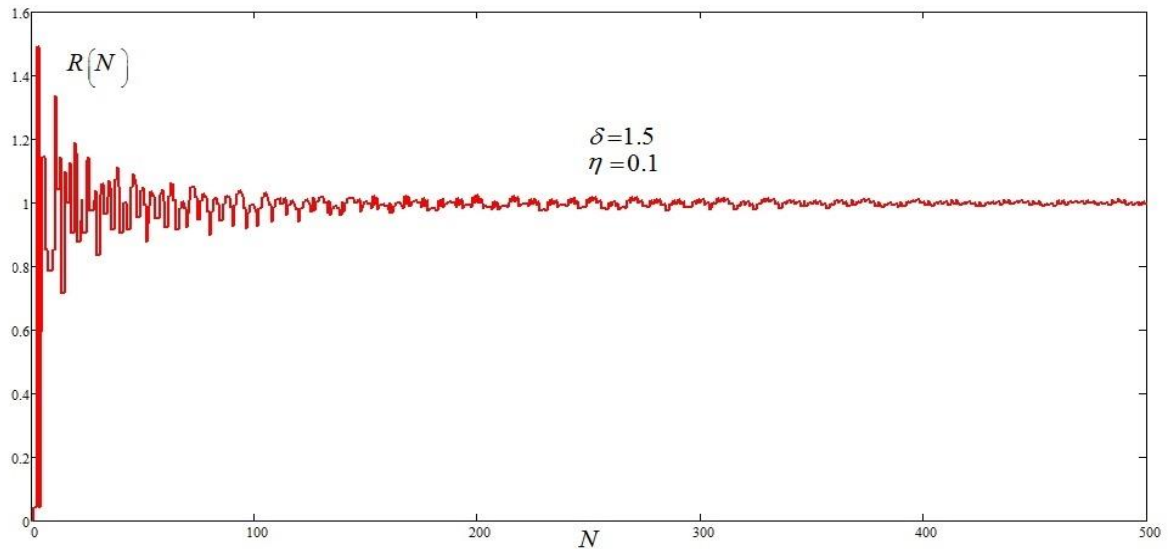


Figure 8

En suivant l'évolution des oscillations quantiques en fonction du nombre de particules tout en augmentant le rapport de rotation, on remarque qu'elles persistent jusqu'aux régimes de vitesse de rotation élevés mais pour des systèmes avec un nombre de particules relativement petit et ceci pour une anisotropie du potentiel égale environ 1.5. Pour une rotation rapide (Figure 6), ou pour une forte anisotropie (figure 7), ces oscillations disparaissent même pour les système de petit taille. La figure 8 montre que pour mieux visualiser les oscillations quantiques indiquant la déviation du comportement quantique de son contre part classique, il faut disposer de trois

ingrédients nécessaires : un petit nombre de particule, une faible anisotropie et une faible vitesse de rotation

5 Annexe du chapitre 3

Nous allons dans cette annexe évaluer l'intégrale gaussienne I de l'expression (3.9) donnée par

$$I = \int dx dy \left[\left(2c - \frac{iA}{\hbar B} - \frac{im^*\Omega}{\hbar} \right) x^2 - \left(2c' - \frac{iA}{\hbar B} + \frac{im^*\Omega}{\hbar} \right) y^2 \right] e^{(4ax^2+4by^2)} \quad (3.37)$$

Cette intégrale peut être divisée en deux intégrales comme suivant

$$I = \left(2c - \frac{iA}{\hbar B} - \frac{im^*\Omega}{\hbar} \right) I_1 - \left(2c' - \frac{iA}{\hbar B} + \frac{im^*\Omega}{\hbar} \right) I_2 \quad (3.38)$$

Où

$$I_1 = \int dx dy x^2 e^{(4ax^2+4by^2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 e^{-\frac{x^2}{\hbar\gamma_1}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-\frac{y^2}{\hbar\gamma_2}} = \frac{\pi}{2} \hbar^2 \gamma_1^{\frac{3}{2}} \gamma_2^{\frac{1}{2}} \quad (3.39)$$

Et

$$I_2 = \int dx dy y^2 e^{(4ax^2+4by^2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy y^2 e^{-\frac{y^2}{\hbar\gamma_2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{x^2}{\hbar\gamma_1}} = \frac{\pi}{2} \hbar^2 \gamma_2^{\frac{3}{2}} \gamma_1^{\frac{1}{2}} \quad (3.40)$$

Alors, l'intégrale I dans (3.38) devient

$$I = \frac{\pi}{2} \hbar^2 \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \left[\left(2c - \frac{iA}{\hbar B} - \frac{im^*\Omega}{\hbar} \right) \gamma_1 - \left(2c' - \frac{iA}{\hbar B} + \frac{im^*\Omega}{\hbar} \right) \gamma_2 \right] \quad (3.41)$$

En utilisant les expressions explicites des deux coefficients c et c' données dans l'annexe du chapitre 1, on aura

$$I = \frac{\pi}{2} \hbar^2 \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \frac{i}{\mu_- \Omega_- B \hbar} \left[\coth(\xi \hbar \Omega_- / 2) - \frac{\gamma_2}{\gamma_1'} \tanh(\xi \hbar \Omega_- / 2) \right. \\ \left. + \mu_- \Omega_- A (\gamma_2 - \gamma_1) - m^* \Omega \mu_- \Omega_- B (\gamma_1 + \gamma_2) \right] \quad (3.42)$$

Aussi, on d'une part

$$\begin{cases} \gamma_2 - \gamma_1 = \frac{1}{\mu_+ \Omega_+} (1 - \mu_+^2 \Omega_+^2 B^2) \coth(\xi \hbar \Omega_+ / 2) - \frac{1}{\mu_- \Omega_-} (1 - \mu_-^2 \Omega_-^2 B^2) \coth(\xi \hbar \Omega_- / 2) \\ \gamma_2 + \gamma_1 = \frac{1}{\mu_+ \Omega_+} (1 + \mu_+^2 \Omega_+^2 B^2) \coth(\xi \hbar \Omega_+ / 2) + \frac{1}{\mu_- \Omega_-} (1 + \mu_-^2 \Omega_-^2 B^2) \coth(\xi \hbar \Omega_- / 2) \end{cases}$$

Avec la formule (3.15) d'autre part, l'expression (3.42) devient

$$\begin{aligned} I = \frac{i\pi\hbar}{2\mu_- \Omega_- B} \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} & \left[\coth(\xi \hbar \Omega_- / 2) - \frac{\mu_- \Omega_-}{\mu_+ \Omega_+} \coth(\xi \hbar \Omega_+ / 2) + \frac{\mu_- \Omega_-}{\mu_+ \Omega_+} A (1 - \mu_+^2 \Omega_+^2 B^2) \coth(\xi \hbar \Omega_+ / 2) \right. \\ & - A (1 - \mu_-^2 \Omega_-^2 B^2) \coth(\xi \hbar \Omega_- / 2) - \frac{\mu_- \Omega_-}{\mu_+ \Omega_+} m^* \Omega B (1 + \mu_+^2 \Omega_+^2 B^2) \coth(\xi \hbar \Omega_+ / 2) \\ & \left. - m^* \Omega B (1 + \mu_-^2 \Omega_-^2 B^2) \coth(\xi \hbar \Omega_- / 2) \right] \end{aligned}$$

En simplifiant encore ce résultat, nous obtenons l'expression (3.11).

Conclusion Générale

Conclusion Générale

Le but de ce mémoire est l'étude, dans le repère tournant, des oscillations quantiques du moment cinétique orbital total d'un gaz de fermions neutres ultra froid et confiné par un potentiel harmonique tournant. Ce potentiel peut être isotrope ou anisotrope. Le système étudié est en plus supposé bidimensionnel. Le phénomène des oscillations quantiques des grandeurs physiques est très bien connu chez les physiciens du solide. En effet, lorsqu'un gaz d'électrons soit soumis à des champs magnétiques intenses, certaines grandeurs montrent un comportement oscillatoire en fonction du champ magnétique appliqué, comme par exemple les oscillations de la magnétisation, les oscillations de la résistivité, les oscillations de la chaleur spécifique, ...etc. Parfois, toutes ces oscillations sont dites "oscillations de de Haas - van Alphen" Tous ces phénomènes oscillatoires trouvent son origine dans la quantification des niveaux d'énergies, dites "niveaux de Landau". A cause de l'analogie entre le système d'électrons en présence d'un champ magnétique et le système de fermions neutres mis en rotation, ce dernier système serait alors un siège potentiel de tels phénomènes des oscillations quantiques en fonction de la vitesse de rotation. C'est le cas en particulier des oscillations quantique du moment cinétique orbital total du système évalué dans le repère tournant comme nous l'avons montré tout au long de ce travail.

Nous avons présenté dans le premier chapitre une description détaillée du système étudié. Après cela, nous avons présenté dans le même premier chapitre les outils mathématiques utilisés dans ce mémoire comme la matrice de densité de Bloch et ses relations avec certaines quantités physique comme la densité de courant et la densité de particules. Cette approche nous a permis de trouver, dans les chapitres 2 et 3, l'expression analytique du moment cinétique pour les deux cas isotrope et anisotrope. Les expressions obtenues pour le moment cinétique orbital total sont divisible en deux parties classique et quantique dont leur différence n'est pas toujours nulle dans le repère tournant comme serait le cas d'un corps rigide. Les oscillations quantiques résulteront ainsi de la déviation du comportement quantique du gaz dégénéré de son contre part classique. L'amortissement de ces oscillations indique alors le comportement classique du gaz, alors que les oscillations prononcées sont les signes de l'entrée du système dans le régime quantique. Pour que ces oscillations quantique soient fortes, on doit minimiser la taille du système, utiliser des faibles vitesses de rotation et une faible anisotropie du potentiel confinant.

Références Bibliographiques

Références Bibliographiques

- [1] B. DeMarco et al., Science **285**, 1703 (1999). B. DeMarco et al., Phys. Rev. Lett. **86** 5409, (2001) ; A. G. Truscott et al., Science **291**, 2570 (2001) ; Partridge G B et al., Science, **311** 503, (2006) ; M. H. Anderson et al., Science **269**, 198 (1995) ; C. C. Bradley et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995) ; K. B. Davis et al., Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).
- [2] N. R. Cooper, Adv. Phys. **57**, 539 (2008). N. R. Cooper et al., Phys. Rev. B **60**, R16279 (1999); N. R. Cooper et al., Phys. Rev. Lett. **87**, 120405 (2001); N. R. Cooper, ibid. **92**, 220405 (2004); T.-L. Ho et al., Phys. Rev. Lett. **85**, 4648 (2000).
- [3] K. Bencheikh et al, Phys. Rev. A **89** 063620 (2014); S. Medjedel et al, Physics Letters A **383**, 1915-1921 (2019); N. Regnault et al., Phys. Rev. B **70**, 241307(R) (2004) ; Z. Akdeniz et al., Physica B **365** 208 (2005).
- [4] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics V, Statistical Physics Part I* (Pergamon Press, Oxford, 1993), Sec. 26.
- [5] Ch. Grenier et al., Phys. Rev. A **87**, 033603 (2013).
- [6] W. J. de Haas et al., Leiden. Comm. **208d**, 212a (1930); **208**, 220d (1932).
- [7] N.W. Ashcroft, D. Mermin, *Physique du Solide*, EDP Sciences (2002), France.
- [8] L. Landau, Z. Phys. **64**, 629 (1930).
- [9] A. A. Abrikosov, Sov. Phys. JETP **5**, 1174 (1957).
- [10] F. Chevy. *Dynamique d'un condensat de Bose-Einstein*. Thèse de doctorat Atomic Physics. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI (2001). French.
- [11] S. Medjedel. « *Calcul des densités de courants dans les systèmes quantiques confinés en dimensions réduites* ». Thèse de Doctorat en physique théorique. Université Ferhat Abbes-Sétif 1 (2016). Algérie.
- [12] I. Saidi, « *Densité de particules et de courant d'un gaz Fermionique ultra froid en rotation rapide* », Mémoire Master, Université de M'sila, Algérie, (2018) ; H. SEDDIKI, A. GHEZAL, « *Étude de la magnétisation d'un gaz d'électrons bidimensionnel soumis à un champ magnétique* », Mémoire Master, Université de M'sila, Algérie, (2020).
- [13] M. Brack, R. K. Bhaduri, *Semiclassical Physics* (Frontiers in Physics, vol.96, Westview, Boulder, 2003)
- [14] M. Brack et al., Phys. Rev. Lett. **86**, 1574 (2001); M. Brack et al., J. Phys. A **36**, 1111 (2003); B.P. van Zyl et al., Phys.Rev. A **67**,023609 (2003); P. Shea et al., J. Phys. A **40**, 10589 (2007); P. Shea et al., J. Phys. A. **41**, 135305 (2008); B.P. van Zyl et al., Phys. Rev. B **69** 024520 (2004); K. Bencheikh et al., Phys. Rev. A **78** 053614 (2008). N H March et al., Phys. Rev. **120** 830 (1960) ; P. Shea et al.,Phys. Rev. B **74**, 205334 (2006) ; H. Naidja et al., Phys. Rev. A **83**, 053631 (2011).
- [15] E. H. Sondheimer et al., Proc. R. Soc. A, **210**, 173 (1951) ; N. H. March et al, J. Phys. A: Math. Gen. **18**, L643-L645 (1985) ;

- [16] I S Gradshteyn and I M Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, New York, 5th edition, 1994).
- [17] S. Medjedel et al, Physics Letters A 383, 1915-1921 (2019); K. Yonei, J. Phys. A: Math. Gen. 22. 2415 (1989).

Abstract:

In this work, we present a theoretical study of the quantum oscillations of the total orbital angular momentum of a degenerate harmonically confined Fermi gas under rotation. The confining potential can be isotropic or anisotropic. The studied system is also assumed to be two-dimensional. The phenomenon of quantum oscillations of physical quantities is very well known among solid physicists under the name "de Haas - van Alphen oscillations". Because of the analogy between the electronic system in the presence of a magnetic field and the rotating system of neutral fermions, this last system would then be a potential seat of such quantum oscillations depending on the speed of rotation or on the number of particles with the influence of the intensity of the anisotropy of the harmonic trap. This is particularly the case with quantum oscillations of the total orbital angular momentum of the gas evaluated in the rotating frame.

The obtained expressions for total angular momentum are divisible into two classical and quantum parts whose difference is not always zero in the rotating frame as would be the case of a rigid body. Quantum oscillations will thus result from the deviation of the quantum behavior of the degenerated gas from its classical counterpart. The damping of these oscillations then indicates the conventional behavior of the gas, while the pronounced oscillations are signs of the system's entry into the quantum regime. For these quantum oscillations to be strong, one must minimize the size of the system, use low rotational speeds and low anisotropy of the confining potential.

Key words: Quantum oscillations, orbital angular momentum, Fermi gas, rapid rotation, harmonic trap, Bloch density matrix.

Résumé :

Nous présentons dans ce mémoire une étude théorique des oscillations quantiques du moment cinétique orbital total d'un gaz de fermions confiné par un potentiel harmonique tournant. Ce potentiel peut être isotrope ou anisotrope. Le système étudié est en plus supposé bidimensionnel. Le phénomène des oscillations quantiques des grandeurs physiques est très bien connu chez les physiciens du solide sous le nom "oscillations de de Haas - van Alphen". A cause de l'analogie entre le système d'électrons en présence d'un champ magnétique et le système de fermions neutres mis en rotation, ce dernier système serait alors un siège potentiel de tels oscillations quantiques en fonction de la vitesse de rotation ou en fonction du nombre de particules avec l'influence de l'intensité de l'anisotropie du piège harmonique. C'est le cas en particulier des oscillations quantique du moment cinétique orbital total du système évalué dans le repère tournant.

Les expressions obtenues pour le moment cinétique orbital total sont divisibles en deux parties classique et quantique dont leur différence n'est pas toujours nulle dans le repère tournant comme serait le cas d'un corps rigide. Les oscillations quantiques résulteront ainsi de la déviation du comportement quantique du gaz dégénéré de son contre part classique. L'amortissement de ces oscillations indique alors le comportement classique du gaz, alors que les oscillations prononcées sont les signes de l'entrée du système dans le régime quantique. Pour que ces oscillations quantique soient fortes, on doit minimiser la taille du système, utiliser des faibles vitesses de rotation et une faible anisotropie du potentiel confinant.

Mots-clés : Oscillations quantiques, moment cinétique orbital, gaz de Fermi, rotation rapide, piège harmonique, matrice densité de Bloch.

ملخص:

تقدم في هذه الأطروحة دراسة نظرية للاهتزازات الكمومية للزخم الحركي المداري الكلي لغاز فيرميوني محصور بواسطة كمون توافقي دوار. يمكن أن يكون كمون المحصر متشتملاً المناحي أو لا متشتملاً المناحي كما نفترض أيضاً أن يكون النظام المدروس ثنائي الأبعاد. إن ظاهرة الاهتزازات الكمومية للكميات الفيزيائية معروفة جيداً بين فيزيائيي الحالة الصلبة تحت اسم "تذبذبات دي هاس-فان ألفين". وبسبب التشابه بين نظام الإلكترونات في وجود مجال مغناطيسي ونظام الفرميونات المحايدة الموضوعة في الدوران، فإن هذا النظام الأخير سيكون عندئذ محلاً محتملاً لمثل هذه التذبذبات الكمومية وفقاً لسرعة الدوران أو كدالة لعدد الجسيمات مع تأثير شدة تباين الخواص لكمون المحصر. هذا هو الحال بشكل خاص بالنسبة للاهتزازات الكمومية للزخم الحركي المداري الكلي للنظام الذي تم حسابه في المعلم الدوار.

إن العبارات التحليلية التي تم الحصول عليها من أجل الزخم الحركي المداري الكلي يمكن قسمتها إلى جزأين أحدهما كلاسيكي والآخر كمومي بحيث لا يكون اختلافهما دائماً صفرًا في المعلم الدوار كما هو الحال بالنسبة للجسم الصلب. وبالتالي، فإن الاهتزازات الكمومية تنتج عن انحراف السلوك الكمي للغاز المنحل عن نظيره التقليدي. يشير تخامد هذه الاهتزازات إلى السلوك الكلاسيكي للغاز، في حين أن الاهتزازات الكمومية الواضحة هي علامة دخول الجملة المدروسة في النظام الكمي. لكي تكون هذه الاهتزازات الكمومية قوية، يجب التقليل من حجم النظام (عدد الجسيمات)، واستخدام سرعات دوران منخفضة مع تباين ضعيف لإمكانية المحصر.

الكلمات المفتاحية: الاهتزازات الكمومية، الزخم الحركي المداري الكلي، غاز فيرمي، الدوران السريع، كمون الحزاز التوافقي، مصفوفة كثافة بلوخ.