

**UNIVERSITÉ DE M'SILA**

**FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES**

**Département de Mathématiques**

**Mémoire de Fin D'étude**

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Licence**

**Domaine** :Mathématiques et Informatique

**Filière** :Mathématiques

**Spécialité** :Mathématiques Appliquées

**Par**

**1-Ouifi Manal**

**2-Toum Ouassila**

**3-Ben nacer Soumia**

**sujet**

**Théorème des fonctions implicites et problèmes elliptiques**

**Dirigé par :**

Lakhal Aissa

**Promotion:2014/2015**

# *Remerciements*

Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à :

Dieu tout puissant, pour la volonté, et la santé et la patience qu'il

nous donnait durant toutes ces années d'études afin que nous

puissions en arriver là.

Comme nous tenons à remercier notre

Encadreur : **Mr. Aissa lakhal.**

Merci à tous les enseignants et les étudiants

De département **mathématique**

Pour leurs aides judicieuses, les moyens qu'ils ont

Met à notre disposition pour réaliser ce travail.

Enfin à toute personne qui a collaborée à la réalisation

Du présent mémoire.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Notations et rappelle</b>	<b>2</b>
1.1 Calcul différentiel : . . . . .	3
1.2 DERIVEES PARTIELLES DES FONCTIONS DE $R^m$ DANS $R^p$ . . . . .	5
1.2.1 Applications partielles . . . . .	5
1.2.2 Dérivée partielle en un point . . . . .	5
1.2.3 Dérivées partielles d'ordre supérieur ou égal à 2 : . . . . .	6
1.3 Champ de vecteurs . . . . .	8
<b>2 Théorème des fonctions implicites</b>	<b>11</b>
2.1 Théorème des fonctions implicites . . . . .	12
2.2 Résolubilité locale d'équation différentielles . . . . .	13
2.3 Solution périodiques d'équations non linéaires . . . . .	14
2.4 Perturbation d'un problème de Dirichlet non linéaire . . . . .	15
<b>Bibliographie</b>	<b>17</b>

# Introduction.

En mathématique, le théorème des fonctions implicites est un résultat de géométrie différentielle.

Certaines courbes sont définies par une équation cartésienne, c'est-à-dire une équation de la forme  $f(x, y) = 0$ , où  $x$  et  $y$  décrivent les nombres réels.

Le théorème indique que si la fonction  $f$  est suffisamment régulière au voisinage d'un point de la courbe, il existe une fonction  $\varphi$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et au moins aussi régulière que  $f$  telle que, la courbe et le graphe de la fonction  $\varphi$  sont confondus localement.

Plus précisément, si  $(x_0, y_0)$  vérifie l'équation et si  $f$  est continument différentiable et que sa dérivée partielle par rapport à  $y$  en  $(x_0, y_0)$  n'est pas nulle, alors il existe un voisinage de  $(x_0, y_0)$  sur lequel la zone s'identifie au graphe de  $\varphi$ .

Ce théorème admet une variante plus générale, qui s'applique non plus au plan, mais à des espaces de Banach, c'est-à-dire des espaces vectoriels complets. Ce résultat est une forme équivalente du théorème d'inversion locale qui indique qu'une fonction différentiable et suffisamment régulière est localement inversible, c'est une conséquence directe d'un théorème du point fixe.

Ce théorème se trouve dans différentes branches des mathématiques, sous cette forme ou sous celle de l'inversion locale. Il permet de démontrer le mécanisme des multiplicateurs de Lagrange, il intervient dans un contexte plus géométrique, pour l'étude des variétés différentielles, on le trouve encore pour l'étude des équations différentielles ou il est, entre autres, utilisé à travers le théorème du redressement d'un flot, permettant de démontrer le théorème de Poincaré-Bendixson. Il dépasse le cadre des mathématiques : les physiciens ou les économistes en font usage, lorsque certaines variables ne peuvent être définies à l'aide d'une fonction, mais uniquement implicitement à l'aide d'une équation.

# Chapitre 1

## Notations et rappelle

## 1.1 Calcul différentiel :

Soient  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^N$  et une application

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ou  $\mathbb{C}^n$  défini par  $f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ .

**Définition 1.1.1** *On dit que l'application  $f$  est de classe  $C^p$  sur  $\Omega$  – ce que l'on note*

$$f \in C^P(\Omega, \mathbb{R}^n),$$

ou

$$f \in C^P(\Omega, \mathbb{C}^n),$$

*si toutes les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à  $p$  des fonctions  $f_1, \dots, f_n$  sont continues sur  $\Omega$ .*

L'espace  $C^p(\Omega, \mathbb{R})$  ou  $C^P(\Omega, \mathbb{C})$  est noté  $C^P(\Omega)$ .

De façon plus générale, pour  $U \subset \mathbb{R}^N$ , on notera  $C^P(U, \mathbb{R}^n)$  (resp.  $C^P(U, \mathbb{C}^n)$ ) l'ensemble des restrictions à  $U$  d'applications de classe  $C^p$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  contenant  $U$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{C}^n$ ).

**Lemme 1.1.1 (Schwarz)**

Soit  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\Phi \in C^2(\Omega)$ , alors, pour tous  $k < l = 1, \dots, N$ , on a

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_l \partial x_k} \quad \text{sur } \Omega.$$

Nous utiliserons systématiquement les notations suivantes pour les dérivées partielles d'une fonction  $f$  de classe  $C^1$  sur  $\Omega$ , ouvert de  $\mathbb{R}^N$  :

$\partial_k f(x)$  ou  $\partial_{x_k} f(x)$  désigne la dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ , pour tout

$k = 1, \dots, N$ , ainsi que

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \partial_{x_N} f(x) \end{pmatrix}$$

## 1.2 DERIVEES PARTIELLES DES FONCTIONS DE $R^m$ DANS $R^p$

### 1.2.1 Applications partielles

Soient  $X$  une partie de  $R^3$ ,  $Y$  une partie de  $R^p$ , et  $f : X \rightarrow Y$  une fonction,

$M_0 = (x_0, y_0, z_0)$  un point de  $X$  et l'ensemble  $X_1 = \{x \in R / (x, y_0, z_0) \in X\}$ .

La fonction d'une variable réelle  $q_1 : X_1 \rightarrow Y$  telle que:

$$q_1(x) = f(x, y_0, z_0).$$

Telle que  $y$  et  $z$  soient fixés ( $y = y_0, z = z_0$ ), est appelée application Partielle de la 1<sup>e</sup> coordonnée associée à  $f$  au point  $M_0$ . On généralise cette définition au cas où  $X$  est une partie de  $R^m$ ,  $f : X \rightarrow Y \subset R^p$ . On fixe  $(m-1)$  variables  $x_1, \dots, x_{m-1}$ ; alors

$q_m : x_m \rightarrow q_m(x_m) = f(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m)$  est une application partielle (de la  $m^e$  coordonnée) associée à  $f$  en  $(x_1, \dots, x_m)$ .

### 1.2.2 Dérivée partielle en un point

Soient  $O$  un ouvert de  $R^m$ ,  $Y$  une partie  $R^p$ ,  $M_0$  un point de  $O$  et  $f : O \rightarrow Y$  une fonction .

a) case  $m = 2$ .  $M_0 = (x_0, y_0)$

On appelle dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $x$ , en  $M_0$ , la limite si elle existe de  $\frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{(x_0 - y_0)}$  quand  $x$  tend vers  $x_0$ , ou bien  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$ .

Ce n'est autre que la dérivée en  $x_0$  de la fonction partielle

$$q_1 : x \rightarrow f(x, y_0) = q_1(x).$$

On la note  $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)$  ou  $f'_x(M_0)$ . De même, on définit  $\partial f / \partial y(M_0)$  ou  $f'_y(M_0)$ , si elle existe, par  $\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$ , Ou bien  $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$

Si  $f$  admet une dérivée partielle par rapport à  $X$ , en tout point  $M$  de  $O$ , alors l'application  $O \rightarrow R^p$  est appelée fonction dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $x$ , elle est noté  $\frac{\partial f}{\partial x}$  ou  $f'_x(M)$ . on définit également  $\partial f / \partial y$ .

b) Cas  $m = 3$   $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$

On définit les dérivées partielles de  $f$  en  $M_0$  si elles existent par:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h},$$

noté encore  $f'_x(M_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{k},$$

noté encore  $f'_y(M_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(M_0) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + l) - f(x_0, y_0, z_0)}{l},$$

noté encore  $f'_z(M_0)$ .

Soient  $O$  un ouvert de  $R^3$ ,  $f : O \rightarrow y \subset R^p$  et  $M_0$  un point de  $O$ .

On pose  $f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), \dots, f_p(x, y, z))$ . Alors,  $f$  admet une dérivée partielle par rapport à  $x$  (resp.  $y$ ), (resp.  $z$ ) en  $M_0$  si et seulement si les fonctions composantes  $f_1, \dots, f_p$  admettent des dérivées partielles par rapport à  $x$  (resp.  $y$ ), (resp.  $z$ ) en  $M_0$ .

On aura :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x}(M_0) \dots \dots \dots \frac{\partial f_p}{\partial x}(M_0) \right),$$

resp

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial y}(M_0) \dots \dots \dots \frac{\partial f_p}{\partial y}(M_0) \right),$$

resp

$$\frac{\partial f}{\partial z}(M_0) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial z}(M_0) \dots \dots \dots \frac{\partial f_p}{\partial z}(M_0) \right).$$

### 1.2.3 Dérivées partielles d'ordre supérieur ou égal à 2 :

a) Dérivées partielles d'ordre 2 :

i)  $m = 2$  : Soient  $O$  un ouvert de  $R^2$ ,  $f : O \rightarrow y \subset R^p$  et  $M_0$  un point de  $O$ . on suppose que  $f'_x : O \rightarrow R^p$  existe et admet une dérivé partielle par rapport à  $y$  en  $M_0$  :  $\frac{\partial}{\partial y}(f'_x)(M_0)$ .

On dit que  $f$  admet en  $M_0$ , une dérivée partielle seconde croisée

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (M_0) \quad \text{notée } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (M_0) \quad \text{ou } f''_{xy} (M_0),$$

Les autres dérivées partielles secondes possibles, sont :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (M_0) \quad \text{notée } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (M_0) \quad \text{ou } f''_{yx} (M_0),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (M_0) \quad \text{notée } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (M_0) \quad \text{ou } f''_{x^2} (M_0),$$

et

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (M_0) \quad \text{notée } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (M_0) \quad \text{ou } f''_{y^2} (M_0).$$

ii)  $m = 3$  On définit en plus

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} (M_0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} (M_0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} (M_0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} (M_0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} (M_0).$$

## 1.3 Champ de vecteurs

**Définition 1.3.1** *Un champ de vecteurs de classe  $C^1$ , est une fonction*

$$V : \Omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N \text{ de classe } C^1(\Omega) \text{ où } \Omega \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^N.$$

**Définition 1.3.2** *La divergence d'un champ de vecteur q'u'on la note par  $\operatorname{div} V(x)$  est donné par*

$$\operatorname{div} V(x) = \sum \partial_{x_k} V_k(x).$$

On nomme "multi-indice" tout élément  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ .

A tout multi- indice  $\alpha \in \mathbb{N}^N$  on associe sa longueur

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N.$$

Pour chaque multi-indice  $\alpha \in \mathbb{N}^N$ , on note les dérivées partielles itérées d'une fonction  $f$  de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega$  comme suit :  $\partial^\alpha f(x)$  désigne  $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}(x)$ ,

c'est-à-dire que

$$\partial^\alpha f(x) = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_N}^{\alpha_N} f(x).$$

Par analogie, pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$  et tout  $\alpha \in \mathbb{N}^N$ , on note  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N}$ . et pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^N$  et tout  $\beta \in \mathbb{N}^N$ , on dit que  $\beta \leq \alpha$  si et seulement si  $\beta_k \leq \alpha_k$  pour  $k = 1, \dots, N$ .

On pose alors  $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)! \beta!}$  où  $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_N!$ .

Avec ces notation, on peut écrire très simplement

(a) la formule du binôme :

$$(x+y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta} y^\beta;$$

(b) la formule du multinôme :

$$(x_1 + \dots + x_N)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha,$$

(c) et la formule de leibnitz : pour  $f, g \in C^P(\Omega)$  et  $|\alpha| \leq p$

$$\partial^\alpha (f \cdot g) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} f \partial^\beta g$$

**Définition 1.3.3** Le laplacien d'une fonction de classe  $C^2$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  on le note par  $\Delta f$  est donné par

$$\operatorname{div}(\nabla f(x)) = \sum_1^N \partial_{x_k}^2 f(x).$$

**Définition 1.3.4** Pour tout ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  et tout  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ , on a

$$(\nabla f'(x) \cdot \zeta)_k = \sum_1^N \partial_{x_l} f_k(x) \zeta_l, \quad x \in \Omega, \quad \zeta \in \mathbb{R}^n, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Ainsi,  $\nabla f$  est une application continue de  $\Omega$  dans l'espace  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^n)$  des applications linéaires de  $\mathbb{R}^N$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

De plus, la matrice de  $\nabla f(x)$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^N$  et  $\mathbb{R}^n$  est, pour tout  $x \in \Omega$ ,  $(\partial_{x_l} f_k(x))_{1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq N}$

c'est-à-dire la matrice à  $n$  lignes et  $N$  colonnes, dont l'élément situé à la  $k$ -ième ligne et la  $l$ -ième colonne est  $\partial_{x_l} f_k(x)$ .

**Théorème 1.3.1** (Dérivation des applications composées)

Soient  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^l$  et  $V$  ouvert de  $\mathbb{R}^m$ .

Soient  $f \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$  et  $g \in C^1(V; \mathbb{R}^n)$  telles que  $f(U) \subset V$ . Alors  $g \circ f \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$  et on a

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad \text{pour tout } x \in U.$$

les matrices de  $(g \circ f)'(x)$ , de  $g'(f(x))$  et de  $f'(x)$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^n$  sont donc reliées, pour tout  $x \in U$ , par la formule

$$(\partial_{x_k} (g \circ f)_i(x))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq l}} = (\partial_{x_i} g_j(f(x)))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \cdot (\partial_{x_k} f_j(x))_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq l}}$$

où  $\cdot$  désigne le produit de matrices à  $n$  lignes et  $m$  colonnes par les matrices à  $m$  lignes et colonnes.

**Théorème 1.3.2** *La formule de Taylor avec reste intégral:*

(a) pour  $\Phi$  fonction de classe  $C^{p+1}$  sur un intervalle ouvert  $I \subset \mathbb{R}$ :

$$\Phi(b) = \sum_{k=0}^p \frac{(b-a)^k}{k!} \Phi^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^p}{p!} \Phi^{(p+1)}(t) dt$$

pour tous  $a, b \in I$  :

(b) pour une fonction  $f$  de classe  $C^{p+l}$  sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  :

$$f(b) = \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(a) + (p+1) \sum_{|\alpha|=p+1} \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^p \partial^\alpha f(a + t(b-a)) dt,$$

pour tous  $a, b \in \Omega$  tels que le segment  $[a, b] \subset \Omega$

## **Chapitre 2**

# **Théorème des fonctions implicites**

## 2.1 Théorème des fonctions implicites

**Théorème 2.1.1** (*d'inversion local*)

$f : B_1 \supset U \rightarrow B_2$  ( $B_i$  espace de Banach,  $U$  ouvert de  $B_i$ ), et supposons  $f$  continûment différentiable dans  $U$ . s'il existe une application  $A : B_2 \rightarrow B_1$  linéaire continue telle que  $f'(x_0)A = id_{B_2}$ , alors il existe  $g$ , de classe  $C^1$  au voisinage de  $y_0 = f(x_0)$ , telle que  $f(g(y)) = y$ . si de plus  $f'(x_0)$  est un isomorphisme de  $B_1$  sur  $B_2$ ,  $f$  est un  $C^1$  difféomorphisme d'un voisinage de  $x_0$  sur un voisinage de  $f(x_0)$ .

1. **Preuve.** a) Supposons d'abord que  $B_1 = B_2, f(x_0) = x_0, f'(x_0) = id$ . On écrit alors l'équation  $y = f(x)$  sous la forme  $x = x + y - f(x) \equiv h(x)$ , et l'on cherche un point fixe de  $h$  comme limite de la suite  $x_{n+1} = h(x_n)$  plus précisément :

1) pour  $\delta > 0$  assez petit et

$$\|y - x_0\| \leq \frac{\delta}{2}, \quad h : \overline{B(x_0, \delta)} \rightarrow \overline{B(x_0, \delta)};$$

En effet,

$$f(x) = f(x_0) + x - x_0 + o(\|x - x_0\|) = x + o(\|x - x_0\|),$$

d'où

$$h(x) - x_0 = y - x_0 + o(\|x - x_0\|), \quad \|h(x) - x_0\| \leq \delta \left( \frac{1}{2} + \varepsilon(\delta) \right) \leq \delta.$$

2) si  $\|y - x_0\| \leq \frac{\delta}{2}$  et  $\delta$  assez petit,  $h$  est contractante dans  $\overline{B(x_0, \delta)}$  car

$$\|h(x_1) - h(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\| \sup_{\|z - x_0\| \leq \delta} \|id - f'(z)\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|$$

D'après 1) et 2),  $h$  possède dans  $\overline{B(x_0, \delta)}$  un unique point fixe. En conséquence, pour tout  $y \in B(x_0, \frac{\delta}{2})$  l'équation  $f(x) = y$  possède une solution et une seule dans  $\overline{B(x_0, \delta)}$ . Puisque  $\delta$  peut être pris arbitrairement petit, nous en déduisons que l'image par  $f$  de tout voisinage de  $x_0$  est un voisinage de  $x_0$ .

b) Passons au cas général. En appliquant ce qui précède à  $\tilde{f} = f(x_0 + A(y - y_0))$ , on obtient d'abord que l'image par  $f$  de tout voisinage de  $x_0$  est un voisinage de  $y_0$ . soit  $Y$  une boule ouverte centrée en  $y_0$ , de rayon assez petit, tel que :

$$\sup_{y \in Y} \|id - \tilde{f}'(y)\| < 1$$

Alors, pour tout  $y \in Y$ ,  $f'(y)$  est inversible donc en appliquant ce qui précède à  $y$  et  $\tilde{f}$  on conclut que l'image par  $\tilde{f}$  de tout ouvert de  $Y$  est un ouvert. Comme  $\tilde{f}$  est également injection sur  $Y$  en vertu de la formule de Taylor déjà utilisée en a), elle réalise un  $C^1$ - difféomorphisme de  $Y$  sur  $\tilde{f}(Y)$ . Si  $\tilde{g}$  est le difféomorphisme, la formule  $g(y) = x_0 + A(\tilde{g}(y) - y_0)$  fournit l'application  $g$  cherchée. Si  $f'(x_0)$  est un isomorphisme de  $B_1$  sur  $B_2$ , alors  $A$  est inversible, et d'après b) :

$$f(x) = \tilde{f}(y_0 + A^{-1}(x - x_0))$$

définit un  $C^1$ - difféomorphisme d'un voisinage de  $x_0$  sur un voisinage de  $y_0$ . ■

**Théorème 2.1.2** Soient  $B_0, B_1, B_2$  trois espaces de Banach,

$U$  un voisinage de  $(x_0, y_0) \in B_0 \times B_1$ , et  $f : U \rightarrow B_2$  continûment différentiable. Supposons qu'il existe une application linéaire continue  $A : B_2 \rightarrow B_1$ ,

telle que  $f'_y(x_0, y_0)A = id_{B_2}$ . Il existe alors  $g, g \in C^1$  d'un voisinage de  $x_0$  dans  $B_1$ ,

telle que  $f(x, g(x)) = f(x_0, y_0)$ . Si de plus  $f'_y$  est bijectif,  $g$  est unique et

$f(x, y) = f(x_0, y_0)$  équivaut à  $y = g(x)$  pour  $(x, y)$  voisin de  $(x_0, y_0)$ .

## 2.2 Résolubilité locale d'équation différentielles

**Proposition 2.2.1** : soit  $y' = g(x, y)$  un système d'équation différentielles, où  $g$  est de classe  $C^1$  et réelle au voisinage de  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Il existe une unique solution  $y$  définie au voisinage de  $x_0$ , satisfaisant  $y(x_0) = y_0$ .

**Preuve.** Nous donnons trois preuves, chacune contenant des éléments qui seront utiles dans des situation plus générales. On peut toujours supposer  $x_0 = y_0 = 0$ . ■

1) On pose  $x = \varepsilon t$  : si  $z(t)$  est une solution de  $z' = \varepsilon g(\varepsilon t, z)$  pour

$t \in [-1, +1]$  avec  $z(0) = 0$  alors  $y(x) = z(\frac{x}{\varepsilon})$  est la solution cherchée, définie dans  $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ .

Soit  $f(\varepsilon, z) = z' - \varepsilon g(\varepsilon t, z)$ , considérée comme une application de classe  $C^1$  d'un voisinage de  $(0, 0)$  dans  $\mathbb{R} \times B_1$  à valeurs dans  $B_2 = C^0([-1, +1])$  où  $B_1 = \{z \in C^1([-1, +1]), z(0) = 0\}$ .

Comme  $f'_z(0,0) = \frac{d}{dt}$ , on prend  $A : B_2 \rightarrow B_1$  définie par

$(Au)(t) = \int_0^t u(s)ds$  pour appliquer le théorème des fonction implicites.

2) Soit  $\tilde{y}(x) = xg(0,0)$  une solution approchée et

$I = [-\alpha, +\alpha]$ , ou  $\alpha > 0$  est choisi assez petit pour que  $f(y) = y' - g(x, y)$  soit bien définie au voisinage de  $\tilde{y}$  dans  $B_1 = \{y \in C^1(I) \mid y(0) = 0\}$  à valeurs dans  $B_0 = C^0(I)$ . comme  $f'(\tilde{y}) = \frac{d}{dx} - g'_y(x, \tilde{y})$  est un système d'équation linéaires, on peut trouver  $A$  satisfaisant à  $f'(\tilde{y})A = id_{B_0}$ , et le théorème d'inversion locale s'applique. Choisissons  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\chi$  valant 1 près de 0 : pour  $\varepsilon > 0$  petit,  $\chi(\frac{x}{\varepsilon})f(\tilde{y})$  est une «petite perturbation» dans  $B_0$ , et l'on peut trouver  $y \in B_1$  voisin de  $\tilde{y}$  tel que  $f(y) = f(\tilde{y}) - \chi(\frac{x}{\varepsilon})f(\tilde{y})$ .

En particulier,  $y$  est la solution cherchée dans un voisinage de 0.

Bien que moins foudroyante que la précédent, cette preuve indique un procédé (utiliser une solution approchée en  $x_0$ ) pour transformer une question d'existence locale en  $x_0$  en problème de perturbation dans  $B_0$ .

3) On résout l'équation

$$y(x) = \int_0^x g(s, y(s))ds \equiv H(y)(x)$$

En cherchant un point fixe de  $H$  dans la boule  $\overline{B(0, \beta)}$  de  $C^0([-\alpha, \alpha])$ . En effet, si  $\beta \geq \alpha \sup |g|$ ,  $H$  opère dans cette boule, et si  $\alpha \sup |g'_y| < 1$ ,  $H$  est contractante.

## 2.3 Solution périodiques d'équations non linéaires

**Proposition 2.3.1** *soit  $p : ]a, b[ \rightarrow ]c, d[$  une fonction continue strictement croissante, pour toute fonction  $g \in C_{2\pi}^0$  (continue et  $2\pi$ -périodique) à valeurs dans  $]c, d[$ , il existe une fonction  $y \in C_{2\pi}^1$ , à valeurs dans  $]a, b[$ , satisfaisant  $y' + p(y) = g$ .*

**Preuve.** Soit  $U \subset C_{2\pi}^1$  l'ouvert des fonction à valeurs dans  $]a, b[$ ,

et  $f : U \rightarrow C_{2\pi}^0$  définie par  $f(y) = y' + p(y)$ .

a) Pour tout  $y \in U$ ,  $f'(y) : C_{2\pi}^1 \rightarrow C_{2\pi}^0$  (définie par  $f'(y) = \frac{d}{dy} + p'(y)$ ) est inversible, car  $\int_0^{2\pi} p'(y)dx \neq 0$ . on peut constater ce fait en calculant explicitement une solution périodique par la méthode de variation des constantes.

Le théorème d'inversion locale implique qu'alors  $f(U)$  est un ouvert de  $C_{2\pi}^0$ .

b) soit  $V$  l'ouvert convexe des fonction de  $C_{2\pi}^0$  à valeurs dans  $]c, d[$  comme  $f(U) \cap V \neq \emptyset$ , il suffit de montrer que  $f(U) \cap V$  est fermé dans  $V$  pour avoir  $f(U) \supset V$ . ■

Soit donc  $g \in V$ , et  $g_j \in f'(U)$ ,  $g_j \rightarrow g$ ,  $f(y_j) = g_j$  :

l'équation  $y_j' + p(y_j) = g_j$  montre que les valeurs  $p\left(\sup_x y_j\right)$  et  $p\left(\inf_x y_j\right)$  sont des valeurs prises par  $g_j$ . comme  $g_j([0, 2\pi])$  est voisin de

$g([0, 2\pi]) \subset ]c, d[$  par hypothèse, on en déduit que les valeurs des  $y_j$  sont contenues dans un compact fixe de  $]a, b[$ . l'équation implique alors que  $\|y_j'\|_0 \leq Cte$ , et l'on peut extraire de la suite des  $y_j$  une suite partielle convergente dans  $C^0$  vers  $y$ ;  $y$  est périodique, et l'équation montre que  $y \in C_{2\pi}^1$ , avec  $f(y) = g$ .

On voit ici qu'une utilisation ingénieuse du théorème d'inversion locale, combinée à des informations de nature topologique, peut conduire à des résultats d'analyse globale.

## 2.4 Perturbation d'un problème de Dirichlet non linéaire

**Proposition 2.4.1** : Pour un compact convexe  $A \subset \mathbb{R}^4$ , désignons par  $B_0(A)$  l'espace des fonction continues sur  $A$ , possédant des dérivées partielles continues par rapport aux variables  $x_2, x_3, x_4$ , Soit  $u \in C^2(I, \mathbb{R})$  ( $I = [a, b]$ ) une solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} F(x, u(x), u'(x), u''(x)) = 0, \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases}$$

pour une certaine  $F \in B_0(A)$ , ou  $A$  est un voisinage compact des valeurs de  $(x, u, u', u''$ . Supposons que  $F'_u > 0$ ,  $F'_u < 0$ .

pour tout  $G \in B_0(A)$  proche de  $F$  il existe alors une solution  $v$  du problème  $G(x, v, v', v'') = 0, v(a) = v(b) = 0$

**Preuve.** on considère  $f(G, v)$  définie au voisinage de  $(F, u)$  par

$$f(G, v)(x) = G(x, v(x), v'(x), v''(x)),$$

comme  $f$  une application d'un ouvert de  $B_0(A) \times C_0^2(I)$  dans  $C^0(I)$ , où

$$C_0^2(I) = \{u \in C^2(I), u(a) = u(b) = 0\}.$$

la différentielle  $f'_v(F, u)$  est

$$f'_v(F, u) = F'_u'' \frac{d^2}{dx^2} + F'_u' \frac{d}{dx} + F'_u$$

si  $f'_v(F, u)w = 0$ ,  $w$  ne peut avoir de maximum strictement positif ni de minimum strictement négatif à cause de l'hypothèse  $F'_u'' > 0, F'_u' < 0$ , donc  $w = 0$ . la théorie générale du problème de Dirichlet linéaire nous indique alors que  $f'_v$  est surjective (c'est « l'alternative de Fredholm ») donnons de ce fait une preuve élémentaire : soient  $y_1$  et  $y_2$  les solutions de

$$f'_v y_j = 0$$

avec

$$y_1(a) = 0, y_1'(a) = 1, y_2(b) = 0, y_2'(b) = 1$$

L'injectivité de  $f'_v$  dans  $C_0^2(I)$  implique précisément que  $y_1$  et  $y_2$  sont indépendantes. On peut alors trouver une solution de  $f'_v y = h$  sous la forme

$$y = \alpha y_1 + \beta y_2$$

par la méthode de la variation de constantes, dans laquelle on peut choisir de plus  $\alpha(b) = 0$  et  $\beta(a) = 0$ , soit  $y \in C_0^2(I)$ . ■

# Bibliographie

- [1] serge ALINHAC-Partik gérard opérateurs pseudo différentiels et théorème de Nash Moser
- [2] Baba - HAMEDC - BENHABIBK Rappels de cours et Exercices avec solution
- [3] Zuily et queffélee Analyse pour l'agrégation
- [4] systèmes différentiels Rappels de cours et Exercices Farid AMMAR Khodja