



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques



## *Mémoire de Master*

**Domaine :** Mathématiques et Informatique

**Filière :** Mathématiques

**Option :** EDP et applications

## Thème

---

*Méthode de transformation différentielle réduite pour la résolution d'équations  
aux dérivées partielles fractionnaires*

---

**Présentée par :**

*M<sup>r</sup> SAOUDI Dhiya Eddine Aymen*

**Soutenu publiquement le :** 01/07/2019.

**Devant le jury composé de :**

**Président :** *M<sup>r</sup> MERZOUGUI Abdelkrim*

M.C.A, Université de M'sila

**Encadreur :** *M<sup>r</sup> NOURI Brahim*

M.C.A, Université de M'sila

**Co-Encadreur :** *M<sup>r</sup> ABDELKEBIR Sâad*

M.A.A, Université de M'sila

**Examineur :** *M<sup>r</sup> MIHOUBI Farid*

M.A.A, Université de M'sila

---

# Remerciements

---

*AU NOM DE ALLAH LE CLÉMENT ET LE MISÉRICORDIEUX.*

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout Puissant  
qui m'a donné le courage et la persévérance pour la réalisation  
de ce mode de mémoire.

Je remercie profondément Monsieur  
*NOUIRI Brahim* mon encadreur, qui m'a beaucoup aidé pour  
terminer ce travail malgré ses nombreuses charges,  
il m'a guidé durant mon recherche, et sans oublier ses précieux conseils.  
mes remerciements vont aussi aux Monsieur

*ABDELKEBIR Sâad* ma co-encadreur.

Je voudrais également remercier tous mes enseignants,  
tous mes collègues de deuxième année Master EDP et applications.  
je leur souhaite une bonne continuation.

De tout mon cœur je remercie mes parents,  
et mes prières que Dieu les protège et les accorde santé et longue vie.

Enfin, j'adresse un grand remerciement à mes sœurs,  
mes frères et tout ma famille, qui m'ont donné beaucoup de soutien constant et  
d'encouragement.

---

# Dédicaces

---

*AU NOM DE **ALLAH** LE CLÉMENT ET LE MISÉRICORDIEUX.*

Je dédie ce mode ste mémoire  
À mes très chers parents.  
À mes chers frères : H. Raouf, H. khayr eddine et C Mohammad .  
À tout les membres de ma famille.  
À mes amis.  
À tous qui m'ont encouragé et soutenu pour arriver à ce niveau d'étude.  
À tout les gents qui m'ont aimé.

Dhinya

---

# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Préliminaires sur le calcul fractionnaire</b>	<b>6</b>
1.1	Fonctions spéciales . . . . .	7
1.1.1	Fonction Gamma . . . . .	7
1.1.2	Fonction Bêta . . . . .	7
1.1.3	fonction Mittag-Leffler . . . . .	9
1.2	Intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville . . . . .	10
1.3	Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville . . . . .	12
1.4	Dérivées fractionnaires au sens de Caputo . . . . .	14
<b>2</b>	<b>RDTM pour une équation aux dérivées partielles</b>	<b>16</b>
2.1	Transformation différentielle de dimension 1 . . . . .	17
2.2	Méthode de transformation différentielle réduite . . . . .	19
2.3	Quelques Exemples . . . . .	24
2.4	Méthode de transformation différentielle de deux dimensions . . . . .	32
<b>3</b>	<b>RDTM pour une équation aux dérivées partielles fractionnaires</b>	<b>36</b>
3.1	Méthode de transformation différentielle réduite fractionnaire . . . . .	37
3.1.1	Théorèmes de Méthode de transformation différentielle réduite fractionnaire . . . . .	37
3.2	Quelques Exemples . . . . .	40

---

# Table des figures

---

2.1	solution exacte et approché pour $t = 0.4$ et $t = 0.8$ . . . . .	29
2.2	solution exacte et approché pour $t = 1$ et $t = 1.2$ . . . . .	29

---

# Introduction générale

---

Les équations aux dérivées partielles d'ordre entière ou fractionnaire apparaissent dans presque tous les domaines de la physique, des sciences appliquées et des sciences de l'ingénieur [9, 12]. Afin de mieux comprendre ces phénomènes physiques et de les appliquer davantage à la recherche scientifique pratique, il est important de trouver les solutions exactes. L'étude de la solution exacte de ces équations est intéressante et importante.

Au cours des dernières décennies, de nombreux auteurs ont étudié la solution de telles équations en utilisant diverses méthodes développées. Récemment, la méthode d'itération variationnelle (VIM) [9, 1] a été appliquée pour traiter divers types de problèmes non linéaires, par exemple, les équations différentielles fractionnaires [18], les équations différentielles non linéaires [18], la thermo-élasticité non linéaire [8], équations d'onde [18]. Dans les références [12, 13], la méthode de décomposition d'Adomian (ADM), la méthode de perturbation d'homotopie (HPM), la méthode d'analyse d'homotopie (HAM) et la méthode de variation de paramètre (VPM) sont appliquées avec succès pour obtenir la solution exacte d'équations aux dérivées partielles d'ordre entière et fractionnaire.

Dans ce mémoire, nous avons utilisé la méthode de transformation différentielle réduite (RDTM) qui a été introduite par Kaskin et Oturanc [7, 6] pour construire une solution pour quelques équations aux dérivées partielles d'ordre entière et fractionnaire.

La technique de transformation différentielle réduite est une procédure itérative permettant d'obtenir une solution sous la forme d'une série de Taylor converge vers la solution exacte. Cette méthode est semi-analytique et largement utilisée par de nombreux chercheurs pour la résolution des équations aux dérivées partielles classique ou fractionnaire, linéaires et non linéaires, homogènes et non homogènes. Les résultats obtenus montrent que la méthode (RDTM) est précise, efficace et nécessite moins d'effort par rapport aux autres méthodes analytiques et numériques.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivante : dans le premier chapitre, nous avons parlé par certains théories de base du calcul fractionnaire. Nous donnons des définitions de quelques fonctions spéciales (Gamma, Bêta et la fonction de Mittag-Leffler), ensuite nous présentons les intégrales et les dérivées fractionnaire (au sens de Riemann-Liouville et de Caputo).

Dans le deuxième chapitre, nous avons appliqué la méthode (RDTM) pour des équations aux dérivées partielles d'ordre entière en dimension 1 et 2. De plus, nous avons cherché des solutions exactes et approchés par des exemples données.

Dans le dernier chapitre, nous avons appliqué le même méthode de (RDTM) pour les équations aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire a travers des exemples choisis.

On termine ce mémoire par une conclusion et quelque perspectives.

# PRÉLIMINAIRES SUR LE CALCUL FRACTIONNAIRE

---

Dans ce chapitre, nous avons parlé par certains théories de base du calcul fractionnaire. Nous donnons des définitions de quelques fonctions spéciales ( Gamma, Bêta et la fonction de Mittag-Leffler ), ensuite nous présentons les intégrales et les dérivées fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et de Caputo.

## 1.1 Fonctions spéciales

### 1.1.1 Fonction Gamma

**Définition 1.1.** (voir[11]). On appelle fonction Gamma, la fonction définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad \text{où } z \in \mathbb{C} \text{ et } \operatorname{Re}(z) > 0$$

**Propriétés 1.1.** Nous avons les propriétés suivantes :

1.  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
2.  $\Gamma(n) = (n-1)!$  ,  $n \in \mathbb{N}$
3.  $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$  ,  $n \in \mathbb{N}$

**Remarque 1.1.** La détermination de la fonction Gamma pour les valeurs négatives non entières par la formule  $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$  et la transition d'un intervalle à une autre  $(-1, 0), (-2, -1), \dots$  la fonction Gamma n'existe pas pour les valeurs négatives entières

**Exemple 1.1.** 1. pour  $z = 1$ ,  $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$

2. pour  $z = \frac{1}{2}$  on utilise un changement de variable on pose que  $t = \tau^2$ , on obtient,

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau \quad \text{(d'après l'intégrale de Gauss)} \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \\ &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

3. pour  $z = -\frac{1}{2}$ ,  $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$

### 1.1.2 Fonction Bêta

**Définition 1.2.** (voir[11]). La fonction de Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie par

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \quad p, q \in \mathbb{C} \text{ avec } \operatorname{Re}(p) > 0 \text{ et } \operatorname{Re}(q) > 0$$



**Proposition 1.1.** *la relation entre la fonction Gamma et Bêta donnée par :  
pour tout  $p, q \in \mathbb{C}$  avec  $\operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0$  on a :*

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}$$

*Démonstration.* Soit  $D = ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  on a :

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \left( \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \right) \left( \int_0^{+\infty} y^{q-1} e^{-y} dy \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)} dx dy \end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \frac{x}{x+y} \end{cases} \implies \begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -uv - u(1-v) = -u$$

De même que le domaine  $D'$  correspondante à  $D$  dans les coordonnées  $u, v$  est

$$D' = \{(u, v) / u \geq 0, 0 \leq v \leq 1\}$$

$$\begin{aligned} \iint_D x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)} dx dy &= \iint_{D'} (uv)^{p-1} (u(1-v))^{q-1} e^{-u} | -u | du dv \\ &= \iint_{D'} (u)^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} e^{-u} du dv \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^1 (u)^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} e^{-u} du dv \\ &= \left( \int_0^{+\infty} (u)^{p+q-1} e^{-u} du \right) \left( \int_0^1 v^{p-1} (1-v)^{q-1} dv \right) \\ &= \Gamma(p+q) B(p, q) \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}.$$

□

### 1.1.3 fonction Mittag-Leffler

**Définition 1.3.** (voir[5]). La fonction de Mittag-Leffler est définie par :

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad , \alpha > 0$$

et la fonction de Mittag-Leffler généralisée est définie par :

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad , \alpha, \beta > 0$$

**Exemple 1.2.**

$$E_1(x) = E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

**Propriétés 1.2.** Pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , on a :

$$E_{\alpha,\beta}(x) = x E_{\alpha,\beta+\alpha}(x) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}$$

*Démonstration.* On a :

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} + \frac{x^0}{\Gamma(0.\alpha + \beta)} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \\ &= x \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \\ &\quad \begin{cases} \text{pose } j = k - 1 \Leftrightarrow k = j + 1 \\ \text{pour } k = 1 \Rightarrow j = 0 \end{cases} \\ &= x \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^j}{\Gamma(\alpha(j+1) + \beta)} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \\ &= x \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^j}{\Gamma(\alpha j + \beta + \alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \\ &= x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta + \alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \\ &= x E_{\alpha,\beta+\alpha}(x) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}. \end{aligned}$$

□

## 1.2 Intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $-\infty < a < b < +\infty$ ) et  $f \in L^1([a, b])$  une fonction intégrable sur  $[a, b]$ ,  
Nous avons :

$$I_{a+}^1 f(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

$I_{a+}^1 f(x)$  la primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$ .

$$\begin{aligned} I_{a+}^2 f(x) &= I_{a+}^1 (I_{a+}^1 f(x)) \\ &= \int_a^x I_{a+}^1 f(t) dt \\ &= \int_a^x \left( \int_a^t f(s) ds \right) dt \end{aligned}$$

on intègre par partie

pose  $g(t) = \int_0^t f(s) ds$

$$\begin{aligned} I_{a+}^2 f(x) &= \left[ t \int_a^t f(s) ds \right]_a^x - \int_a^x t f(t) dt \\ &= x \int_a^x f(s) ds - \int_a^x t f(t) dt \\ &= x \int_a^x f(t) dt - \int_a^x t f(t) dt \\ &= \int_a^x (x - t) f(t) dt. \end{aligned}$$

Donc, pour  $n^{eme}$  itération, on obtient,

$$I_{a+}^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt$$

Grâce à la fonction Gamma que nous avons définie précédemment  
la propriété  $\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}$  on a :

$$I_{a+}^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt$$

**Définition 1.4.** (voir[5, 15]). Soient  $\Omega = [a, b]$  avec ( $-\infty < a < b < +\infty$ ) un intervalle fini sur  $\mathbb{R}$   
et  $f \in L^1([a, b])$  une fonction intégrable sur  $\mathbb{R}$

Les intégrales

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad x > a, \operatorname{Re}(\alpha) > 0 \quad (1.1)$$

$$I_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt \quad x < b, \operatorname{Re}(\alpha) > 0 \quad (1.2)$$

sont appelés les intégrales fractionnaires à gauche (à droite) de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}$   $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$  respectivement.

**Exemple 1.3.** Soit  $f(x) = (x-a)^{\beta-1}$  on a :

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-a)^{\alpha-1} (t-a)^{\beta-1} dt$$

$$\begin{cases} \text{posons } t-a = s(x-a) \\ t=a \Leftrightarrow s=0 \\ t=x \Leftrightarrow s=1 \\ dt = (x-a)ds \end{cases}$$

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 s^{\beta-1} (1-s)^{\alpha-1} ds$$

$$= \frac{B(\beta, \alpha)}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta-1} \quad B(\beta, \alpha) = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha)}$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta-1}.$$

**Remarque 1.2.** L'intégrale d'une fonction constante a sens de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha > 0$  est donnée par :

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} (x-a)^{\alpha}$$

et

$$I_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} (b-x)^{\alpha}$$

$$f(x) = C \in \mathbb{R}$$

**Proposition 1.2.** (voir[15, page34]). Soient  $f \in \mathbb{C}([a, b])$  et  $\alpha > 0$  alors :

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f(x) = I_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f(x) = I_{a+}^{\alpha+\beta} f(x)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \left( \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\beta-1} f(s) ds \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t (x-t)^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} f(s) ds dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(s) \int_s^x (x-t)^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} dt ds \quad \text{changement de l'ordre d'intégrale} \\
&\quad \left\{ \begin{array}{l} a \leq s \leq t \leq x \\ \text{posons } u = \frac{t-s}{x-s} \\ t = s \Leftrightarrow u = 0 \\ t = x \Leftrightarrow u = 1 \\ du = \frac{dt}{x-s} \end{array} \right. \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(s) (x-s)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(s) (x-s)^{\alpha+\beta-1} B(\beta, \alpha) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(s) (x-s)^{\alpha+\beta-1} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(s) (x-s)^{\alpha+\beta-1} ds \\
&= I_{a+}^{\alpha+\beta} f(x)
\end{aligned}$$

□

### 1.3 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

**Définition 1.5.** (voir[5, page70]). Soit  $f \in L^1([a, b])$  une fonction intégrable sur  $[a, b]$ . Les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville  $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x)$  et  $\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x)$  d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $Re(\alpha) > 0$

sont définies par :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} f(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [Re(\alpha)] + 1; \quad x > a.\end{aligned}\tag{1.3}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x) &= \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{b-}^{n-\alpha} f(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \quad n = [Re(\alpha)] + 1; \quad x < b.\end{aligned}\tag{1.4}$$

respectivement, où  $[Re(\alpha)]$  est la partie entière de  $Re(\alpha)$ .

**Propriétés 1.3.** (voir[5, page71]). Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  avec  $Re(\alpha), Re(\beta) > 0$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ . Nous avons

1.  $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}$
2.  $\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} (b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-x)^{\beta-\alpha-1}$

*Démonstration.* 1.  $f(x) = (x-a)^{\beta-1}$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} (x-a)^{\beta-1} &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} f(x)) \quad (\text{D'après l'exemple 1.3}) \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left( \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)} (x-a)^{n-\alpha+\beta-1} \right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha+\beta-1} &= (n-\alpha+\beta-1)(n-1+\beta-2) \dots \times \\ &\quad (n-\alpha+\beta-1-(n-1)) (x-a)^{-\alpha+\beta-1} \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-1+\beta-2) \dots (\beta-\alpha) \\ &\quad (x-a)^{-\alpha+\beta-1}\end{aligned}$$

et d'autre coté :

$$\begin{aligned}\Gamma(n-\alpha+\beta) &= (n-\alpha+\beta-1) \Gamma(n-\alpha+\beta-1) \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2) \Gamma(n-\alpha+\beta-2) \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2) \dots (\beta-\alpha) \Gamma(\beta-\alpha)\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} (x-a)^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)} (n-\alpha+\beta-1) \dots (\beta-\alpha) (x-a)^{-\alpha+\beta-1} \\ &= \frac{(n-\alpha+\beta-1) (n-\alpha+\beta-2) \dots (\beta-\alpha) \Gamma(\beta)}{(n-\alpha+\beta-1) (n-\alpha+\beta-2) \dots (\beta-\alpha) \Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{-\alpha+\beta-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned}$$

2. de mémé manière. □

**Remarque 1.3.** On remarque que si  $\beta = 1$  et  $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$  alors la dérivées au sens de Riemann-Liouville d'une fonction constante en général n'est pas nulle

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} 1 = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \text{ et } \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} 1 = \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

## 1.4 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

**Définition 1.6.** (voir[5]). Soient  $\alpha \in \mathbb{C}$  avec  $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction telle que  $f^{(n)} \in L^1([a, b])$ . Les dérivées fractionnaires d'ordre  $\alpha$  de  $f$  au sens de Caputo sont définies par

$${}^C \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x) = I_{a+}^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \quad (1.5)$$

et

$${}^C \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x) = (-1)^n I_{b-}^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \quad (1.6)$$

**Propriétés 1.4.** (voir[5, page95]). Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  avec  $\operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\beta) > 0$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ . Nous avons

1.  ${}^C \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1} \quad \operatorname{Re}(\beta) > n$
2.  ${}^C \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} (b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-x)^{\beta-\alpha-1} \quad \operatorname{Re}(\beta) > n$
3. si  $f(x) = C \in \mathbb{R}$

$$({}^C \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} C)(x) = 0 \text{ et } ({}^C \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} C)(x) = 0$$

**Proposition 1.3.** (voir[5, page91]). Les relations entre les dérivées au sens de Caputo (1.5),(1.6) et les dérivées au sens de Riemann-Liouville (1.3),(1.4) sont données par

$${}^C \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x) = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} \left( f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right)$$

et

$${}^C\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}f(x) = \mathcal{D}_{b-}^{\alpha}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-x)^k\right)$$

on remarque que si  $f^{(k)}(a) = 0$  pour  $k = 0, 1, \dots, n-1$  alors :

$${}^C\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f(x) = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f(x) \quad \text{et} \quad {}^C\mathcal{D}_{b-}^{\alpha}f(x) = \mathcal{D}_{b-}^{\alpha}f(x)$$

**Lemme 1.1.** (voir[10]). Si  $\alpha \in [0, 1)$  l'ordre de dérivé fractionnaire ou sens de Caputo, on a :

$$1. \quad \mathcal{D}^{\alpha}(E_{\alpha}(x^{\alpha})) = E_{\alpha}(x^{\alpha})$$

$$2. \quad \mathcal{D}^{\alpha}(E_{\alpha}(-x^{\alpha})) = -E_{\alpha}(-x^{\alpha})$$

$$3. \quad \mathcal{D}^{\alpha}(\sin_{\alpha}(x^{\alpha})) = \cos_{\alpha}(x^{\alpha})$$

$$4. \quad \mathcal{D}^{\alpha}(\cos_{\alpha}(x^{\alpha})) = -\sin_{\alpha}(x^{\alpha})$$

$$\text{avec } E_{\alpha}(x^{\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)}, \quad \sin_{\alpha}(x^{\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{(2k+1)\alpha}}{\Gamma((2k+1)\alpha + 1)}$$

$$\text{et } \cos_{\alpha}(x^{\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k\alpha}}{\Gamma(2k\alpha + 1)}$$



# RDTM POUR UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

---

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la méthode (RDTM) pour des équations aux dérivées partielles d'ordre entière en dimension 1 et 2. De plus, nous avons cherché des solutions exactes et approchées par des exemples données.

## 2.1 Transformation différentielle de dimension 1

**Définition 2.1.** (voir[21]). Si la fonction  $w(x)$  est continue et différentiable, la transformation différentielle de la fonction  $w(x)$  est définie par :

$$W(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} w(x) \right]_{x=x_0}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.1)$$

avec  $w(x)$  est la fonction originale et  $W(k)$  est une fonction transformée .  
L'inverse de transformation différentielle de  $w(k)$  définie par

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} W(k) (x - x_0)^k, \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.2)$$

par la combinaison de (2.1) et (2.2), on obtient

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} w(x) \right]_{x=x_0} (x - x_0)^k$$

D'après les définitions ci-dessus, il est facile de voir que le concept de transformation différentielle est dérivée de l'expansion en série de Taylor .à l'aide de (2.1) et (2.2) ,la base des opérations mathématiques elle est faciles que obtenir les donnés dans

**Proposition 2.1.** (voir[21, 16, 22]). Si

$$w(x) = au(x) \pm bv(x) \text{ et } a, b \in \mathbb{R}$$

Alors

$$W(k) = aU(k) \pm bV(k)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} W(k) &= \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} (au(x) \pm bv(x)) \right]_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left[ a \frac{d^k}{dx^k} u(x) \pm b \frac{d^k}{dx^k} v(x) \right]_{x=0} \\ &= \frac{a}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} u(x) \right]_{x=0} \pm \frac{b}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} v(x) \right]_{x=0} \\ &= aU(k) \pm bV(k). \end{aligned}$$

□

**Proposition 2.2.** (voir[21, 16, 22]). Si

$$w(x) = \frac{d^m u(x)}{dx^m} \quad m \in \mathbb{N}$$

Alors

$$W(k) = \frac{(k+m)!}{k!} U(k+m)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
 W(k) &= \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k}{dx^k} \left( \frac{d^m u(x)}{dx^m} \right) \right]_{x=0} \\
 W(k) &= \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^{k+m} u(x)}{dx^{k+m}} \right]_{x=0} \\
 W(k) &= \frac{(k+m)!}{(k+m)! k!} \left[ \frac{d^{k+m} u(x)}{dx^{k+m}} \right]_{x=0} \\
 W(k) &= \frac{(k+m)!}{k!} \frac{1}{(k+m)!} \left[ \frac{d^{k+m} u(x)}{dx^{k+m}} \right]_{x=0} \\
 W(k) &= \frac{(k+m)!}{k!} U(k+m).
 \end{aligned}$$

□

**Proposition 2.3.** (voir[21, 16, 22]). Si

$$w(x) = u(x) v(x)$$

Alors

$$W(k) = \sum_{r=0}^k U(r) V(k-r)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
 w(x) &= u(x) v(x) \\
 &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} U(k) x^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} V(k) x^k \right) \\
 &= (U(0) + U(1)x + U(2)x^2 + \dots) (V(0) + V(1)x + V(2)x^2 + \dots) \\
 &= U(0)V(0) + (U(1)V(0) + V(1)U(0))x + (U(2)V(0) + V(2)U(0) + U(1)V(1))x^2 + \dots \\
 &\quad + (U(0)V(k) + U(1)V(k-1) + \dots + U(k-1)V(1) + U(k)V(0))x^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{r=0}^k U(r) V(k-r)}_{W(k)} x^k
 \end{aligned}$$

Donc

$$W(k) = \sum_{r=0}^k U(r) V(k-r)$$

□

## 2.2 Méthode de transformation différentielle réduite

On considère  $u(x, t)$  une fonction à deux variable et supposons qu'il puisse être représenté comme un produit de deux fonctions à variable unique, c'est-à-dire  $u(x, t) = f(x)g(t)$  on utilise les propriétés du transformée différentielle,  $u(x, t)$  peut être représenté comme

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} F(i) x^i \sum_{j=0}^{\infty} G(j) t^j = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) t^k$$

où  $U_k(x)$  est appelé fonction t-dimensionnel de la fonction  $u(x, t)$

Les définitions et opérations de base de méthode du transformation différentielle réduite sont introduit comme suit

**Définition 2.2.** (voir[21, 20]). Si la fonction  $u(x, t)$  est analytique et continue et différentiable par rapport au temps  $t$  et à l'espace  $x$  dans le domaine intérêt. Alors,

$$U_k(x) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x, t) \right]_{t=t_0}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.3)$$

où la fonction t-dimensionnel  $U_k(x)$  est un fonction transformée.

Les minuscules  $u(x, t)$  représentent l'originale de fonction pendant que  $U_k(x)$  majuscule représentent le fonction transformée.

La transformation différentielle inverse de  $U_k(x)$  est défini par :

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) (t - t_0)^k, \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.4)$$

Puis en combinant les équations (2.3) et (2.4), nous écrivons

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[ \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x, t) \right]_{t=t_0} (t - t_0)^k. \quad (2.5)$$

Parmi les définitions ci-dessus, on peut trouver que le concept de transformation différentielle réduit est dérivée de série de puissance .

**Exemple 2.1.** On considérons

$$u(x, t) = e^{x+t},$$

cette fonction peut être écrit comme

$$\begin{aligned} u(x, t) = e^{x+t} &= \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \right) \left( 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} F(i) x^i \sum_{j=0}^{\infty} G(j) t^j. \end{aligned}$$

D'autre par

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{x+t} = e^x \left( 1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots \right) = e^x + e^x t + e^x \frac{t^2}{2} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^x}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) t^k. \end{aligned}$$

pour illustrer les concepts de base de RDTM, considérons l'équation générale suivante :

$$Lu(x, t) + Ru(x, t) + Nu(x, t) = g(x, t).$$

Avec la condition initiale

$$u(x, 0) = f(x)$$

où  $L = \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $R = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  est un opérateur linéaire,  $Nu(x, t)$ ,  $g(x, t)$  deux termes respectivement non linéaire et non homogène.

**Proposition 2.4.** (voir[20]). Si

$$w(x, t) = au(x, t) \pm bv(x, t) \quad \text{et} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Alors

$$W_k(x) = aU_k(x) \pm bV_k(x)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} W_k(x) &= \frac{1}{k!} \left[ \frac{\partial^k}{\partial t^k} (au(x, t) \pm bv(x, t)) \right]_{t=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left[ a \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x, t) \pm b \frac{\partial^k}{\partial t^k} v(x, t) \right]_{t=0} \\ &= \frac{a}{k!} \left[ \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x, t) \right]_{t=0} \pm \frac{b}{k!} \left[ \frac{\partial^k}{\partial t^k} v(x, t) \right]_{t=0} \end{aligned}$$

Donc

$$W_k(x) = aU_k(x) \pm bV_k(x).$$

□

**Proposition 2.5.** (voir[21]). Si

$$w(x, t) = x^m t^n \quad m, n \in \mathbb{N}$$

Alors

$$W_k(x) = x^m \delta(k - n)$$

*Démonstration.*  $w(x, t) = x^m t^n \quad m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} W_k(x) &= \frac{1}{k!} \left[ \frac{\partial^k}{\partial t^k} x^m t^n \right]_{t=0} \\ &= \frac{x^m}{k!} \left[ \frac{\partial^k}{\partial t^k} t^n \right]_{t=0} \end{aligned}$$

Si  $k = n$

$$\begin{aligned} W_k(x) &= \frac{x^m}{k!} (n)(n-1)(n-2) \dots (n-(k-1)) t^{n-k} \\ &= \frac{x^m}{k!} (n)(n-1)(n-2) \dots (n-(k-1)) \\ &= \frac{x^m}{k!} (k)(k-1)(k-2) \dots (k-(k-1)) \\ &= \frac{x^m}{k!} k! \\ W_k(x) &= x^m \end{aligned}$$

Si  $k > n$

$$W_k(x) = 0$$

Si  $k < n$

$$\begin{aligned} W_k(x) &= \frac{x^m}{k!} n(n-1)(n-2) \dots (n-(k-1)) t^{n-k} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc

$$W_k(x) = x^m \delta(k-n).$$

□

**Proposition 2.6.** (voir[21, 16, 20]). Si

$$w(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

Alors

$$W_k(x) = \frac{\partial}{\partial x} U_k(x)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} W_k(x) &= \frac{1}{k!} \left[ \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left( \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right) \right]_{t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{k!} \left[ \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x, t) \right]_{t=0} \right) \end{aligned}$$

Donc

$$W_k(x) = \frac{\partial}{\partial x} U_k(x).$$

□

**Proposition 2.7.** (voir[20, 14, 16]). Si

$$w(x, t) = \frac{\partial^r u(x, t)}{\partial t^r} \quad r \in N$$

Alors

$$W_k(x) = \frac{(k+r)!}{k!} U_{k+r}(x)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} W_k(x) &= \frac{1}{k!} \left[ \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left( \frac{\partial^r}{\partial t^r} u(x, t) \right) \right]_{t=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left[ \frac{\partial^{k+r}}{\partial t^{k+r}} u(x, t) \right]_{t=0} \\ &= \frac{(k+r)!}{k!} \frac{1}{(k+r)!} \left[ \frac{\partial^{k+r}}{\partial t^{k+r}} u(x, t) \right]_{t=0} \end{aligned}$$

Donc

$$W_k(x) = \frac{(k+r)!}{k!} U_{k+r}(x).$$

□

**Proposition 2.8.** (voir[21, 20]). Si

$$w(x, t) = u(x, t) v(x, t)$$

Alors

$$W_k(x) = \sum_{r=0}^k U_r(x) V_{k-r}(x) = \sum_{r=0}^k V_r(x) U_{k-r}(x)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} w(x, t) &= u(x, t) v(x, t) \\ &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) t^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} V_k(x) t^k \right) \\ &= (U_0(x) + U_1(x)t + U_2(x)t^2 + \dots) (V_0(x) + V_1(x)t + V_2(x)t^2 + \dots) \\ &= U_0(x)V_0(x) + (U_1(x)V_0(x) + V_1(x)U_0(x))t \\ &\quad + (U_2(x)V_0(x) + V_2(x)U_0(x) + U_1(x)V_1(x))t^2 + \dots \\ &\quad + (U_0(x)V_k(x) + U_1(x)V_{k-1}(x) + \dots + U_{k-1}(x)V_1(x) + U_k(x)V_0(x))t^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{r=0}^k U_r(x) V_{k-r}(x)}_{W_k(x)} t^k \end{aligned}$$

Donc

$$W_k(x) = \sum_{r=0}^k U_r(x) V_{k-r}(x).$$

□

**Proposition 2.9.** (voir[21, 20, 22]). Si

$$w(x, t) = x^m t^n u(x, t) \quad m, n \in \mathbb{N}$$

Alors

$$W_k(x) = x^m U_{k-n}(x) \quad k \geq n$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} W_k(x) &= \frac{1}{k!} \left[ \frac{\partial^k}{\partial t^k} (x^m t^n u(x, t)) \right]_{t=0} \\ &= \frac{x^m}{k!} \left[ \frac{\partial^k}{\partial t^k} (t^n u(x, t)) \right]_{t=0} \\ &= \frac{x^m}{k!} \left[ \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i! (k-i)!} (t^n)^{(i)} \frac{\partial^{k-i}}{\partial t^{k-i}} u(x, t) \right]_{t=0} \end{aligned}$$

si  $i > n$

$$(t^n)^{(i)} = 0$$

si  $i < n$

$$\begin{aligned} (t^n)^{(i)} &= n(n-1) \cdots (n-(i-1)) t^{n-i} \\ &= 0 \quad \text{on } t = 0 \end{aligned}$$

si  $i = n$

$$\begin{aligned} W_k(x) &= \frac{x^m}{k!} \left[ \frac{k!}{n! (k-n)!} (t^n)^{(n)} \frac{\partial^{k-n}}{\partial t^{k-n}} u(x, t) \right]_{t=0} \\ &= \frac{x^m}{k!} \left[ \frac{k! n(n-1) \cdots 2 \times 1}{n! (k-n)!} t^{n-n} \frac{\partial^{k-n}}{\partial t^{k-n}} u(x, t) \right]_{t=0} \\ &= \frac{x^m}{k!} \frac{k! n!}{n! (k-n)!} \left[ \frac{\partial^{k-n}}{\partial t^{k-n}} u(x, t) \right]_{t=0} \\ &= x^m \frac{1}{(k-n)!} \left[ \frac{\partial^{k-n}}{\partial t^{k-n}} u(x, t) \right]_{t=0} \\ &= x^m U_{k-n}(x). \end{aligned}$$

□

**Proposition 2.10.** (voir[20]). Pour le terme non linéaire  $Nu(x, t)$  on a



```

code maple de terme non linéaire
restart;
NF:NU(x,t):      #fonction non linéaire
m:=5:            #Ordre
u[t]:=sum(u[b]*t^b,b=0..m):
NF[t]:=subs(Nu(x,t)=u[t],NF):
s:=expand(NF[t],t):
dt:=unapply(s,t):
for i from 0 to m do
n[i]:=(D@@i)(dt)(0)/i!):
print(N[i],n[i]); #fonction transformée
od:

```

D'après la RDTM et la Propositions, nous pouvons construire la formule d'itération comme suivante :

$$(k+1)U_{k+1}(x) = G_k(x) - RU_k(x) - NU_k(x). \quad (2.6)$$

Où  $U_k(x)$ ,  $RU_k(x)$ ,  $NU_k(x)$  et  $G_k(x)$  sont les transformations des fonctions respectivement à  $Lu(x,t)$ ,  $Ru(x,t)$ ,  $Nu(x,t)$  et  $g(x,t)$  . avec la condition initiale,

$$U_0(x) = f(x). \quad (2.7)$$

En remplaçant (2.7) dans (2.6) et par des calculs itératifs simples, on obtient ce qui suit de valeurs  $U_k(x)$  .Puis la transformation inverse de l'ensemble des valeurs  $\{U_k(x)\}_{k=0}^n$  donne la solution d'approximation,

$$\tilde{U}_n(x,t) = \sum_{k=0}^n U_k(x)t^k.$$

Où  $n$  l'ordre de la solution approchée . par conséquent , la solution exacte du problème est donnée par

$$U(x,t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{U}_n(x,t) \quad (2.8)$$

## 2.3 Quelques Exemples

**Exemple 2.2.** (problème linéaire homogène )

$$P1 \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 3u, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ C.I : u(x,0) = 0, & u_t(x,0) = 2 \cos(x) \end{cases} \quad (2.9)$$

On utilisant la méthode de RDT pour l'équation (2.9) parmi condition initiale, on obtient,

$$\frac{(k+2)!}{k!} U_{k+2}(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_k(x) - 3U_k(x) \quad (2.10)$$

et

$$U_0(x) = 0, \quad U_1(x) = 2 \cos(x) \quad (2.11)$$

pour  $k = 0$ , on remplace (2.11) dans (2.10) on a :

$$\begin{aligned} 2U_2(x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_0(x) - 3U_0(x) \\ U_2(x) &= 0 \end{aligned}$$

pour  $k = 1$

$$\begin{aligned} 3!U_3(x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_1(x) - 3U_1(x) \\ 3!U_3(x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} 2\cos(x) - 6\cos(x) \\ 3!U_3(x) &= -2\cos(x) - 6\cos(x) = -8\cos(x) \\ U_3(x) &= -\frac{4}{3}\cos(x) \end{aligned}$$

pour  $k = 2, 3, \dots$ , on obtient,

$$U_4(x) = 0, \quad U_5(x) = \frac{4}{155}\cos(x), \quad U_6(x) = 0, \quad U_7(x) = -\frac{8}{315}\cos(x), \dots$$

Donc :

$$U_k(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}}{k!} 2^k \cos(x) & \text{si } k \text{ impaire} \\ 0 & \text{si } k \text{ paire} \end{cases}$$

pour démontre la solution de problème (2.9) on utilise la transformation inverse (formule (2.4))

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) t^k \\ u(x, t) &= \cos(x) \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}}{k!} (2t)^k \\ u(x, t) &= \cos(x) \sin(2t). \end{aligned}$$

**Exemple 2.3.** (problème linéaire non homogène )

$$P2 \begin{cases} u_{tt} + u_{xx} - 2u = (12t^2 - 3t^4) \sin(x), & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

On utilisant la méthode de RDT pour la variable  $t$  pour l'équation (2.12) parmi condition initiale, on obtient

$$\frac{(k+2)!}{k!} U_{k+2}(x) = (12\delta(k-2) - 3\delta(k-4)) \sin(x) + 2U_k(x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_k(x) \quad (2.13)$$

et

$$U_0(x) = 0, \quad U_1(x) = 0 \quad (2.14)$$

pour  $k = 0$ , on remplace (2.14) dans (2.13), on a :

$$\begin{aligned} 2!U_2(x) &= (12\delta(-2) - 3\delta(-4)) \sin(x) + 2U_0(x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_0(x) \\ U_2(x) &= 0 \end{aligned}$$

pour  $k = 1$

$$\begin{aligned} 3!U_3(x) &= (12\delta(-1) - 3\delta(-3)) \sin(x) + 2U_1(x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_1(x) \\ U_3(x) &= 0 \end{aligned}$$

pour  $k = 2$

$$\begin{aligned} \frac{4!}{2!}U_4(x) &= (12\delta(0) - 3\delta(-2)) \sin(x) + 2U_2(x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_2(x) \\ U_4(x) &= \sin(x) \end{aligned}$$

pour  $k = 3, 4, \dots$ , on obtient,

$$U_5(x) = U_6(x) = U_7(x) = \dots = 0$$

$$U_k(x) = 0, \quad \text{si } k = 5, 6, \dots$$

Alors par la transformation inverse (formule (2.4)), on a :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) t^k \\ &= t^4 \sin(x) \end{aligned}$$

$u(x, t) = t^4 \sin(x)$  est une solution exacte de (2.12).

**Exemple 2.4.** (problème linéaire non homogène de dérive mixte  $u_{xt}$ )

$$P3 \begin{cases} u_{xt} = u - t, & 0 < x < a, 0 < t < b \text{ et } a, b \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = e^x, & u(0, t) = t + e^t \\ u(0, 0) = 1 \end{cases} \quad (2.15)$$

On utilisant la méthode de RDT pour la variable  $x$ , on a :

$$(k+1) \frac{d}{dt} U_{k+1}(t) = U_k(t) - t\delta(k) \quad (2.16)$$

et

$$U_0(t) = t + e^t, \quad U_1(t) = 0 \quad (2.17)$$

pour  $k = 0$ , on remplace (2.17) dans (2.16), on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} U_1(t) &= U_0(t) - t\delta(0) \\ &= t + e^t - t \\ &= e^t \end{aligned}$$

Alors :

$$\frac{d}{dt}U_1(t) = e^t$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} U_1(t) &= e^t - 1 + U_1(0) \\ &= e^t - 1 + 1 \\ &= e^t \end{aligned}$$

pour  $k = 1, 2, \dots$

$$U_2(t) = \frac{e^t}{2}, \quad U_3(t) = \frac{e^t}{3!}, \quad U_4(t) = \frac{e^t}{4!}, \dots$$

Donc :

$$U_k(t) = \frac{e^t}{k!}, \quad \text{si } k = 1, 2, \dots$$

Alors par transformation inverse (formule (2.4)), on a :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t) x^k + t + e^t \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^t}{k!} x^k + t + e^t \\ &= e^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + t + e^t \\ &= e^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + t + e^t - e^t \\ &= e^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} + t \\ &= e^{t+x} + t. \end{aligned}$$

$u(x, t) = e^{t+x} + t$  est une solution exacte de (2.15).

**Exemple 2.5.** (problème homogène quasi linéaire )

$$P4 \begin{cases} u_t + (1 + u) u_x = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{x-1}{2} \end{cases} \quad (2.18)$$

On utilisant la méthode de RDT pour l'équation (2.18) parmi condition initiale, on obtient

$$(k+1) U_{k+1}(x) = -\frac{\partial U_k(x)}{\partial x} - \sum_{r=0}^k U_{k-r}(x) \frac{\partial U_r(x)}{\partial x} \quad (2.19)$$

et

$$U_0(x) = \frac{1}{0!} \left[ \frac{\partial^0}{\partial t^0} \left( \frac{x-1}{2} \right) \right]_{t=0} = \frac{x-1}{2} \quad (2.20)$$

pour  $k = 0$ , on remplace (2.20) dans (2.19), on a :

$$\begin{aligned} U_1(x) &= -\frac{\partial U_0(x)}{\partial x} - \sum_{r=0}^0 U_0(x) \frac{\partial U_0(x)}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial \left( \frac{x-1}{2} \right)}{\partial x} - \left( \frac{x-1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{x-1}{4} \\ &= -\frac{x}{4} - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

pour  $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} U_2(x) &= \frac{x}{8} + \frac{1}{8}, \quad U_3(x) = -\frac{x}{16} - \frac{1}{16}, \\ U_4(x) &= \frac{x}{32} + \frac{1}{32}, \quad U_5(x) = -\frac{x}{64} - \frac{1}{64}, \dots \end{aligned}$$

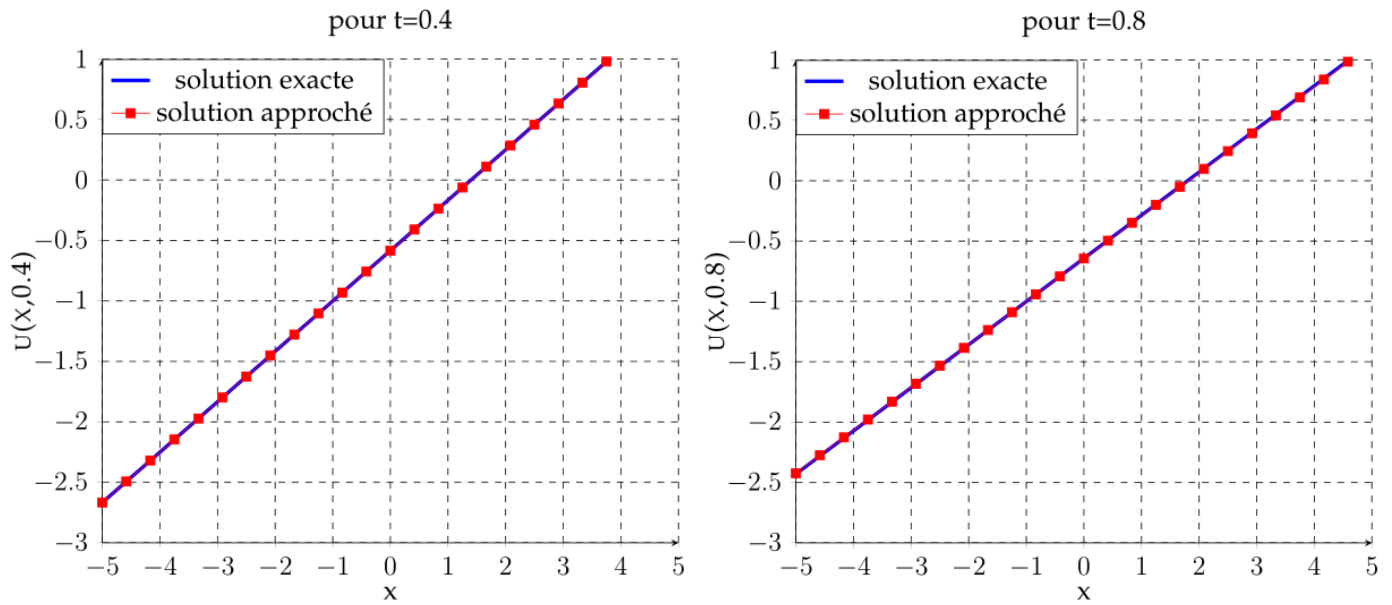
Donc

$$\begin{aligned} \tilde{u}_5(x, t) &= \sum_{k=0}^5 U_k(x) t^k \\ \tilde{u}_5(x, t) &= U_0(x) + U_1(x) + U_2(x) + U_3(x) + U_4(x) + U_5(x) \\ \tilde{u}_5(x, t) &= \left( \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left( -\frac{x}{4} - \frac{1}{4} \right) t + \left( \frac{x}{8} + \frac{1}{8} \right) t^2 + \left( -\frac{x}{16} - \frac{1}{16} \right) t^3 \\ &\quad + \left( \frac{x}{32} + \frac{1}{32} \right) t^4 + \left( -\frac{x}{64} - \frac{1}{64} \right) t^5. \end{aligned}$$

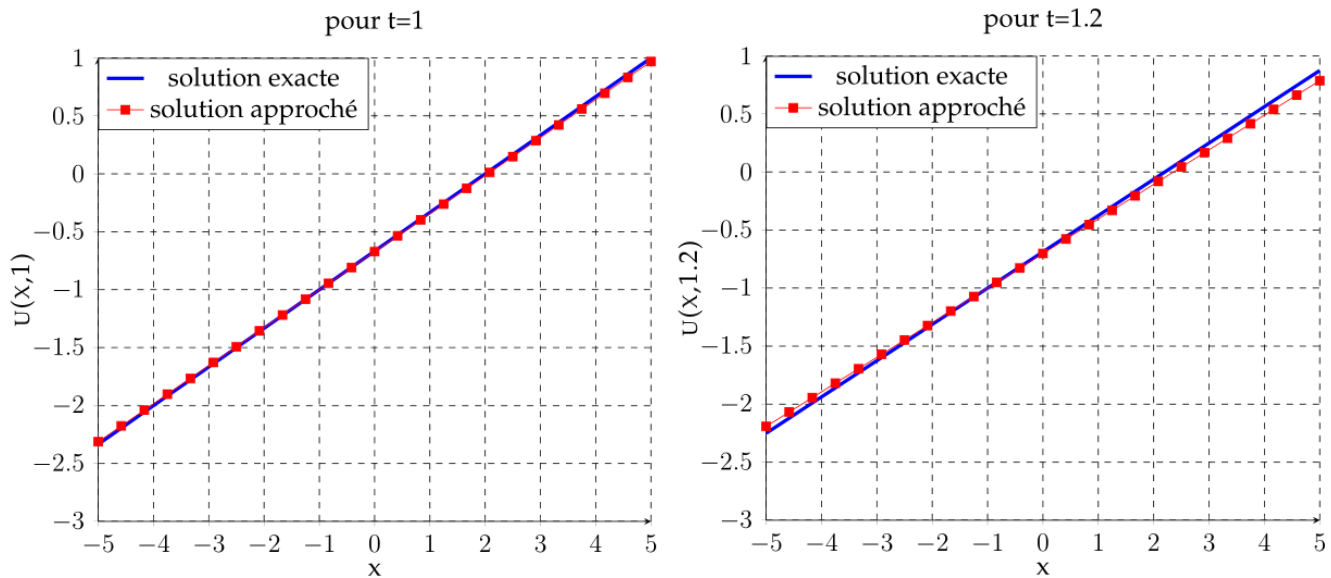
La solution exact de problème (2.18) donne par

$$u(x, t) = \frac{x - t - 1}{t + 2}$$

La série  $\sum_{k=0}^5 U_k(x) t^k$  est converge à  $u(x, t)$  si  $0 \leq t < 1$ .

FIGURE 2.1 – solution exacte et approché pour  $t = 0.4$  et  $t = 0.8$ 

pour le domaine de  $t \geq 1$  la solution approché n'est pas converge vers la solution exacte.

FIGURE 2.2 – solution exacte et approché pour  $t = 1$  et  $t = 1.2$ 

*Démonstration.* voir [2] Les Séries entières

□

**Exemple 2.6.** (problème non linéaire non homogène )

$$P5 \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u + u^2 - xt - x^2 t^2, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ C.I : u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = x \end{cases} \quad (2.21)$$

On utilisant la méthode de RDT pour l'équation (2.21) parmi condition initiale, on obtient,

$$\frac{(k+2)!}{k!} U_{k+2}(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_k(x) + U_k(x) + \sum_{r=0}^k U_r(x) U_{k-r}(x) - x\delta(k-1) - x^2\delta(k-2) \quad (2.22)$$

et

$$U_0(x) = 0, \quad U_1(x) = x \quad (2.23)$$

pour  $k = 0$ , on remplace (2.23) dans (2.22), on a :

$$2U_2(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_0(x) + U_0(x) + \sum_{r=0}^0 U_0(x) U_0(x) - x\delta(-1) - x^2\delta(-2)$$

$$U_2(x) = 0$$

pour  $k = 1$ , on a :

$$3!U_3(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_1(x) + U_1(x) + \sum_{r=0}^1 U_r(x) U_{1-r}(x) - x\delta(0) - x^2\delta(-1)$$

$$U_3(x) = x - x$$

$$U_3(x) = 0$$

Donc :

$$U_k(x) = 0, \quad \text{si } k = 2, 3, \dots$$

Alors par transformation inverse (formule (2.4)) on a :

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) t^k$$

$$u(x, t) = xt.$$

$u(x, t) = xt$  est une solution exacte de (2.21).

**Exemple 2.7.** (problème non linéaire non homogène)

$$P6 \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u^2 = -x \cos(t) + x^2 \cos^2(t), & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = x, & u_t(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

On utilisant la méthode de RDT pour l'équation (2.24) parmi condition initiale, on obtient

$$\frac{(k+2)!}{k!} U_{k+2}(x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_k(x) + N_k(x) = F_k(x) \quad (2.25)$$

où  $N_k(x)$  et  $F_k(x)$  est la transformée de  $u^2(x, t)$  et  $-x \cos(t) + x^2 \cos^2(t)$  respectivement

$$N_0(x) = U_0^2(x)$$

$$N_1(x) = 2U_0(x) U_1(x)$$

$$N_2(x) = 2U_0(x) U_2(x) + U_1^2(x)$$

$$N_3(x) = 2U_0^2(x) U_3(x) + 2U_1(x) U_2(x)$$

$\vdots$

et

$$\begin{aligned} F_0(x) &= -x + x^2 \\ F_1(x) &= 0 \\ F_2(x) &= \frac{x}{2} - x^2 \\ F_3(x) &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

la transformation de la condition initiale

$$U_0(x) = x, \quad U_1(x) = 0 \quad (2.26)$$

pour  $k = 0$ , on remplace (2.26) dans (2.25), on a :

$$\begin{aligned} 2U_2(x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}U_0(x) + N_0(x) &= F_0(x) \\ 2U_2(x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}U_0(x) - U_0^2(x) + F_0(x) \\ 2U_2(x) &= \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} - x^2 - x + x^2 \\ U_2(x) &= -\frac{x}{2} \end{aligned}$$

pour  $k = 1$ , on a :

$$\begin{aligned} 3!U_3(x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}U_1(x) + N_1(x) &= F_1(x) \\ 3!U_3(x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}U_1(x) - U_1^2(x) + F_1(x) \\ 3!U_3(x) &= 0 \\ U_3(x) &= 0 \end{aligned}$$

pour  $k = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} U_4(x) &= \frac{x}{24}, \quad U_5(x) = 0, \\ U_6(x) &= -\frac{x}{720}, \quad U_7(x) = 0, \dots \end{aligned}$$

Donc :

$$U_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ impair} \\ \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{k!}x & \text{si } k \text{ paire} \end{cases}$$

Alors par transformation inverse (formule (2.4)), on a :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) t^k \\ u(x, t) &= x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{k!} t^k \\ u(x, t) &= x \cos(t). \end{aligned}$$



$u(x, t) = x \cos(t)$  est une solution exacte de (2.24).

## 2.4 Méthode de transformation différentielle de deux dimensions

**Définition 2.3.** (voir[21]). La transformation différentielle de deux dimensions de la fonction  $w(x, t)$  est définie par

$$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial t^h} w(x, t) \right]_{(x_0, t_0)}, k, h \in \mathbb{N} \quad (2.27)$$

avec  $w(x, t)$  est la fonction originale et  $W(k, h)$  est une fonction transformée .

L'inverse de transformation différentielle de deux dimensions de  $w(k, h)$  définie par

$$w(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} W(k, h) (x - x_0)^k (t - t_0)^h \quad (2.28)$$

par la combinaison de (2.27) et (2.28), on obtient,

$$w(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial t^h} w(x, t) \right]_{(x_0, t_0)} (x - x_0)^k (t - t_0)^h$$

par conséquent, nous pouvons obtenir la base des opérations mathématiques de la transformations différentielle à deux dimensions dans le proposition suivant

**Proposition 2.11.** (voir[21]). Si

$$w(x, t) = au(x, t) \pm bv(x, t) \text{ et } a, b \in \mathbb{R}$$

Alors

$$W(k, h) = aU(k, h) \pm bV(k, h)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} W(k, h) &= \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial t^h} (au(x, t) \pm bv(x, t)) \right]_{(0,0)} \\ &= \frac{a}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial t^h} u(x, t) \right]_{(0,0)} \pm \frac{b}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial t^h} v(x, t) \right]_{(0,0)} \\ &= aU(k, h) \pm bV(k, h) \end{aligned}$$

□

**Proposition 2.12.** (voir[21]). Si

$$w(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

Alors

$$W(k, h) = (k + 1) U(k + 1, h)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} W(k, h) &= \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial t^h} \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) \right]_{(0,0)} \\ &= \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+1+h}}{\partial x^{k+1} \partial t^h} u(x, t) \right]_{(0,0)} \\ &= \frac{(k+1)!}{(k+1)!} \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+1+h}}{\partial x^{k+1} \partial t^h} u(x, t) \right]_{(0,0)} \\ &= \frac{(k+1)!}{k!} \frac{1}{(k+1)!h!} \left[ \frac{\partial^{k+1+h}}{\partial x^{k+1} \partial t^h} u(x, t) \right]_{(0,0)} \\ &= \frac{(k+1)!}{k!} U(k+1, h) \\ &= \frac{(k+1)k!}{k!} U(k+1, h) \\ &= (k+1) U(k+1, h). \end{aligned}$$

□

**Proposition 2.13.** (voir[21]). Si

$$w(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$

Alors

$$W(k, h) = (h + 1) U(k, h + 1)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
 W(k, h) &= \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial t^h} \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right) \right]_{(0,0)} \\
 &= \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h+1}}{\partial x^k \partial t^{h+1}} u(x, t) \right]_{(0,0)} \\
 &= \frac{(h+1)!}{(h+1)!} \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h+1}}{\partial x^k \partial t^{h+1}} u(x, t) \right]_{(0,0)} \\
 &= \frac{(h+1)!}{h!} \frac{1}{(h+1)!k!} \left[ \frac{\partial^{k+h+1}}{\partial x^k \partial t^{h+1}} u(x, t) \right]_{(0,0)} \\
 &= \frac{(h+1)!}{h!} U(k, h+1) \\
 &= \frac{(h+1)h!}{h!} U(k, h+1) \\
 &= (h+1) U(k, h+1).
 \end{aligned}$$

□

**Proposition 2.14.** (voir[21]). Si

$$w(x, t) = \frac{\partial^{r+s} u(x, t)}{\partial x^r \partial t^s} \quad \text{et } r, s \in \mathbb{N}$$

Alors

$$W(k, h) = \frac{(k+r)!}{k!} \frac{(h+s)!}{h!} U(k+r, h+s)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
W(k, h) &= \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial t^h} \left( \frac{\partial^{r+s} u(x, t)}{\partial x^r \partial t^s} \right) \right]_{(0,0)} \\
&= \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+r+h+s}}{\partial x^{k+r} \partial t^{h+s}} u(x, t) \right]_{(0,0)} \\
&= \frac{(k+r)! (h+s)!}{(k+r)! (h+s)!} \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+r+h+s}}{\partial x^{k+r} \partial t^{h+s}} u(x, t) \right]_{(0,0)} \\
&= \frac{(k+r)! (h+s)!}{k!h!} \frac{1}{(k+r)! (h+s)!} \left[ \frac{\partial^{k+r+h+s}}{\partial x^{k+r} \partial t^{h+s}} u(x, t) \right]_{(0,0)} \\
&= \frac{(k+r)! (h+s)!}{k!h!} U(k+r, h+s)
\end{aligned}$$

□

**Proposition 2.15.** (voir[21]). Si

$$w(x, t) = u(x, t) v(x, t)$$

Alors

$$\begin{aligned}
W(k, h) &= U(k, h) \otimes V(k, h) \\
&= \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s) V(k-r, s)
\end{aligned}$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
w(x, t) &= u(x, t) v(x, t) \\
w(x, t) &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k, h) x^k t^h \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} V(k, h) x^k t^h \right) \\
w(x, t) &= [U(0, 0) + U(0, 1)t + U(0, 2)t^2 + \dots + U(1, 0)x + U(1, 1)xt + U(1, 2)xt^2 + \dots + \dots] \times \\
&\quad [V(0, 0) + V(0, 1)t + V(0, 2)t^2 + \dots + V(1, 0)x + V(1, 1)xt + V(1, 2)xt^2 + \dots + \dots] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s) V(k-r, s)}_{W(k, h)} x^k t^h
\end{aligned}$$

Donc

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s) V(k-r, s)$$

□

## RDTM POUR UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES FRACTIONNAIRES

---

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la méthode de (RDTM) pour les équations aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire a travers des exemples choisis.

### 3.1 Méthode de transformation différentielle réduite fractionnaire

**Définition 3.1.** (voir[17]). Si la fonction  $u(x, t)$  est analytique et continue différentiable pour  $t$ , on a :

$$U_k(x) = \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} \left[ \frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} u(x, t) \right]_{t=t_0}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.1)$$

où  $\alpha$  est un paramètre décrivant l'ordre de la dérivée fractionnaire dans le temps et la  $t$ -dimensionnelle fonction spectrale  $U_k(x)$  est la fonction transformée.

**Définition 3.2.** (voir[17]). La transformée inverse différentielle de  $U_k(x)$  est définie par

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) (t - t_0)^{k\alpha}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.2)$$

combinaison l'équation (3.2) et (3.1), on obtient

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} \left[ \frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} u(x, t) \right]_{t=t_0} (t - t_0)^{k\alpha}$$

#### 3.1.1 Théorèmes de Méthode de transformation différentielle réduite fractionnaire

**Théorème 3.1.** (voir[4]). Si

$$w(x, t) = u(x, t) \pm v(x, t)$$

Alors

$$W_k(x) = U_k(x) \pm V_k(x)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} W_k(x) &= \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} \left[ \frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} w(x, t) \right]_{t=0} \\ &= \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} \left[ \frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} u(x, t) \pm v(x, t) \right]_{t=t_0} \\ &= \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} \left[ \frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} u(x, t) \right]_{t=0} \pm \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} \left[ \frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} v(x, t) \right]_{t=0} \\ &= U_k(x) \pm V_k(x). \end{aligned}$$

□

**Théorème 3.2.** (voir[4]). Si

$$W(x, t) = au(x, t) \quad a \in \mathbb{R}$$

Alors

$$W_k(x) = aU_k(x)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
 W_k(x) &= \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} \left[ \frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} w(x, t) \right]_{t=0} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} \left[ \frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} (au(x, t)) \right]_{t=0} \\
 &= \frac{a}{\Gamma(k\alpha + 1)} \left[ \frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} u(x, t) \right]_{t=0} \\
 &= aU_k(x).
 \end{aligned}$$

□

**Théorème 3.3.** (voir[4]). Si

$$w(x, t) = u(x, t) v(x, t)$$

Alors

$$W_k(x) = \sum_{l=0}^k U_l(x) V_{k-l}(x)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
 w(x, t) &= u(x, t) v(x, t) \\
 &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) t^{k\alpha} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} V_k(x) t^{k\alpha} \right) \\
 &= (U_0(x) + U_1(x) t^\alpha + U_2(x) t^{2\alpha} + \dots) (V_0(x) + V_1(x) t^\alpha + V_2(x) t^{2\alpha} + \dots) \\
 &= U_0(x) V_0(x) + (U_1(x) V_0(x) + V_1(x) U_0(x)) t^\alpha \\
 &\quad + (U_2(x) V_0(x) + V_2(x) U_0(x) + U_1(x) V_1(x)) t^{2\alpha} + \dots \\
 &\quad + (U_0(x) V_k(x) + U_1(x) V_{k-1}(x) + \dots + U_{k-1}(x) V_1(x) + U_k(x) V_0(x)) t^{k\alpha} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{l=0}^k U_l(x) V_{k-l}(x)}_{W_k(x)} t^{k\alpha}
 \end{aligned}$$

Donc d'après (3.2), on a :

$$W_k(x) = \sum_{l=0}^k U_l(x) V_{k-l}(x).$$

□

**Théorème 3.4.** (voir[4]). Si

$$w(x, t) = \frac{\partial^{n\alpha}}{\partial t^{n\alpha}} u(x, t) \quad \text{et } n \in \mathbb{N}$$

Alors

$$W_k(x) = \frac{\Gamma(1 + (k+n)\alpha)}{\Gamma(k\alpha + 1)} U_{k+n}(x)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
 W_k(x) &= \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} \left[ \frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} w(x, t) \right]_{t=0} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} \left[ \frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} \left( \frac{\partial^{n\alpha}}{\partial t^{n\alpha}} u(x, t) \right) \right]_{t=0} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} \left[ \frac{\partial^{(k+n)\alpha}}{\partial t^{(k+n)\alpha}} u(x, t) \right]_{t=0} \\
 &= \frac{\Gamma(1 + (k+n)\alpha)}{\Gamma(k\alpha + 1)} \frac{1}{\Gamma(1 + (k+n)\alpha)} \left[ \frac{\partial^{(k+n)\alpha}}{\partial t^{(k+n)\alpha}} u(x, t) \right]_{t=0} \\
 &= \frac{\Gamma(1 + (k+n)\alpha)}{\Gamma(k\alpha + 1)} U_{k+n}(x)
 \end{aligned}$$

□

**Théorème 3.5.** (voir[4]). Si

$$w(x, t) = \frac{x^{m\alpha}}{\Gamma(1 + m\alpha)} \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1 + n\alpha)} \quad \text{et } m, n \in \mathbb{N}$$

Alors

$$W_k(x) = \frac{x^{m\alpha}}{\Gamma(1 + m\alpha)} \frac{\delta_\alpha(k - n)}{\Gamma(1 + \alpha)}$$

où la fonction delta Dirac fractionnaire  $\delta_\alpha$

$$\delta_\alpha(k - n) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases}$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
 W_k(x) &= \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} \left[ \frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} w(x, t) \right]_{t=0} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} \left[ \frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} \left( \frac{x^{m\alpha}}{\Gamma(1 + m\alpha)} \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1 + n\alpha)} \right) \right]_{t=0} \\
 &= \frac{x^{m\alpha}}{\Gamma(1 + m\alpha)} \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} \left[ \frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} \left( \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1 + n\alpha)} \right) \right]_{t=0} \\
 &= \frac{x^{m\alpha}}{\Gamma(1 + m\alpha)} \frac{\delta_\alpha(k - n)}{\Gamma(1 + \alpha)}.
 \end{aligned}$$

□



**Théorème 3.6.** (voir[4]). Si

$$w(x, t) = \frac{\partial^{n\alpha}}{\partial x^{n\alpha}} u(x, t) \quad \text{et } n \in \mathbb{N}$$

Alors

$$W_k(x) = \frac{\partial^{n\alpha}}{\partial x^{n\alpha}} U_k(x)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} W_k(x) &= \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} \left[ \frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} w(x, t) \right]_{t=0} \\ &= \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} \left[ \frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} \left( \frac{\partial^{n\alpha}}{\partial x^{n\alpha}} u(x, t) \right) \right]_{t=0} \\ &= \frac{\partial^{n\alpha}}{\partial x^{n\alpha}} \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} \left[ \frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} u(x, t) \right]_{t=0} \\ &= \frac{\partial^{n\alpha}}{\partial x^{n\alpha}} U_k(x). \end{aligned}$$

□

**Propriétés 3.1.** (voir[19]). On appelle  $R_D$  la méthode RDT.

1.  $R_D [e^{\lambda t}] = \frac{\lambda^k}{k!}$
2.  $R_D [\sin(ax + by + wt)] = \frac{w^k}{k!} \sin\left(\frac{\pi k}{2!} + ax + by\right)$
3.  $R_D [\cos(ax + by + wt)] = \frac{w^k}{k!} \cos\left(\frac{\pi k}{2!} + ax + by\right)$

## 3.2 Quelques Exemples

**Exemple 3.1.** ( problème linéaire homogène)

$$P1 \begin{cases} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) & x > 0, t > 0, 0 < \alpha \leq 1 \\ u(x, 0) = x^2 \end{cases} \quad (3.3)$$

On utilisant la méthode de RDT fractionnaire pour l'équation (3.3) parmi condition initiale, on obtient

$$U_{k+1}(x) = \frac{\Gamma(k\alpha + 1)}{\Gamma(k\alpha + \alpha + 1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_k(x) \quad (3.4)$$

et

$$U_0(x) = x^2 \quad (3.5)$$

pour  $k = 0$ , on remplace (3.5) dans (3.4), on a :

$$\begin{aligned} U_1(x) &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_0(x) \\ &= \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)} \end{aligned}$$

pour  $k = 1$

$$\begin{aligned} U_2(x) &= \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(2\alpha+1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_1(x) \\ &= \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(2\alpha+1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

pour  $k = 2, 3, \dots$ , on obtient

$$U_k(x) = 0$$

pour démontre la solution du problème (3.3) on utilise la transformation inverse (formule (3.2))

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) t^{k\alpha} \\ u(x, t) &= x^2 + \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha. \end{aligned}$$

**Remarques 3.1.** 1. pour  $\alpha = 1$ ,  $u(x, t) = x^2 + 2t$  est une solution exacte de problème

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = x^2 \end{cases}$$

2. Pour compenser la solution dans l'équation (3.3), nous trouvons que

(a) avec la dérivé fractionnaire ou sens de Caputo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u(x, t) &= \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left( x^2 + \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha \right) \\ &= \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} x^2 + \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left( \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha \right) \\ &= 0 + \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} t^\alpha \end{aligned}$$

d'après la Propriété 1.4 pour  $\beta = \alpha + 1$  et  $a = 0$ , on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} t^\alpha &= \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{\Gamma(\alpha + 1 - \alpha)} t^{\alpha+1-\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{\Gamma(1)} t^0 \\ &= \Gamma(1 + \alpha)\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u(x, t) &= \frac{2}{\Gamma(\alpha + 1)} \Gamma(1 + \alpha) \\ &= 2\end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \\ &= 2\end{aligned}$$

pour  $t = 0$

$$u(x, 0) = x^2$$

(b) avec la dérivé fractionnaire ou sens de Riemann-Liouville,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u(x, t) &= \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left( x^2 + \frac{2}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha \right) \\ &= \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} x^2 + \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left( \frac{2}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha \right) \\ &= \frac{x^2}{\Gamma(1 - \alpha)} t^{-\alpha} + 2 \quad (\text{d'après la Propriété 1.3 et la remarque 1.3})\end{aligned}$$

on remarque que la dérivé fractionnaire ou sens de Riemann-Liouville d'une fonction constant n'est pas nulle.

Donc :

$$\frac{x^2}{\Gamma(1 - \alpha)} t^{-\alpha} + 2 \neq 2$$

Dans les exemples suivants, tous les dérivés fractionnaires ou sens de Caputo.

**Exemple 3.2.** ( problème linéaire homogène)

$$P2 \begin{cases} \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial t^{2\alpha}} u(x, t) + \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{2\alpha}} u(x, t) = u(x, t) & t > 0, 0 < \alpha \leq 1 \\ u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u(x, 0) = E_\alpha(x^\alpha) \end{cases} \quad (3.6)$$

Pour obtenir la solution de problème P2 en utilisant le RDTM, nous pouvons transformer le problème (3.6) à relation d'itération suivante :

$$U_{k+2}(x) = \frac{\Gamma(k\alpha + 1)}{\Gamma((k+2)\alpha + 1)} \left( U_k(x) - \frac{\partial^{2\alpha} U_k(x)}{\partial x^{2\alpha}} \right) \quad (3.7)$$

parmi la condition initiale, on obtient :

$$U_0(x) = 0, \quad U_1(x) = \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} E_\alpha(x^\alpha) \quad (3.8)$$

pour  $k = 0$ , on remplace (3.8) dans (3.7) on a :

$$\begin{aligned} U_2(x) &= \frac{1}{\Gamma(2\alpha + 1)} \left( U_0(x) - \frac{\partial^{2\alpha} U_0(x)}{\partial x^{2\alpha}} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pour  $k = 1$

$$\begin{aligned} U_3(x) &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(3\alpha + 1)} \left( U_1(x) - \frac{\partial^{2\alpha} U_1(x)}{\partial x^{2\alpha}} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pour  $k = 2$

$$\begin{aligned} U_4(x) &= \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(4\alpha + 1)} \left( U_2(x) - \frac{\partial^{2\alpha} U_2(x)}{\partial x^{2\alpha}} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pour  $k = 2, 3, \dots$ , on obtient,

$$U_k(x) = 0$$

pour démontre la solution du problème (3.6) on utilise la transformation inverse (formule (3.2))

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) t^{k\alpha} \\ u(x, t) &= \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} E_\alpha(x^\alpha). \end{aligned}$$

**Exemple 3.3.** ( problème linéaire non homogène)

$$P3 \begin{cases} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + \sin(x) & 0 < x < \pi, t > 0, 0 < \alpha \leq 1 \\ u(x, 0) = \cos(x) \end{cases} \quad (3.9)$$

En appliquant la transformation différentielle réduite pour le problème (3.9), nous obtenons la relation d'itération suivante,

$$U_{k+1}(x) = \frac{\Gamma(k\alpha + 1)}{\Gamma(k\alpha + \alpha + 1)} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_k(x) + \sin(x) \right) \quad (3.10)$$

à partir la condition initiale, à sons forme :

$$U_0(x) = \cos(x) \quad (3.11)$$

En utilisant l'équation d'itération, nous obtenons les valeurs suivants successivement

$$\begin{aligned} U_1(x) &= \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\Gamma(\alpha + 1)}, U_2(x) = \frac{\cos(x) - \sin(x)}{\Gamma(2\alpha + 1)}, U_3(x) = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\Gamma(3\alpha + 1)}, \\ U_4(x) &= \frac{\cos(x) - \sin(x)}{\Gamma(4\alpha + 1)}, U_5(x) = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\Gamma(5\alpha + 1)}, \dots \end{aligned}$$

La solution  $u(x, t)$  donnée par :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) t^{k\alpha} \\ &= \cos(x) + \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\Gamma(\alpha + 1)} t^\alpha + \frac{\cos(x) - \sin(x)}{\Gamma(2\alpha + 1)} t^{2\alpha} + \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\Gamma(3\alpha + 1)} t^{3\alpha} + \dots \\ &= \cos(x) + [\cos(x) - \sin(x)] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} \\ &= \cos(x) + [\cos(x) - \sin(x)] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} + \cos(x) - \sin(x) - \cos(x) + \sin(x) \\ &= [\cos(x) - \sin(x)] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} + \sin(x) \\ &= [\cos(x) - \sin(x)] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k\alpha}{\alpha}} t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} + \sin(x) \\ &= [\cos(x) - \sin(x)] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((-1)^{\frac{1}{\alpha}} t)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} + \sin(x) \\ &= e^{t(-1)^{\frac{1}{\alpha}}} (\cos(x) - \sin(x)) + \sin(x) \end{aligned}$$

La solution exact de problème (3.9) pour  $\alpha = 1$  donne par :

$$u(x, t) = e^{-t} (\cos(x) - \sin(x)) + \sin(x)$$

**Exemple 3.4.** (équation télégraphique fractionnaire dans le temps (TFTE) non linéaire non homogène)

$$P4 \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^{2\alpha} u}{\partial t^{2\alpha}} + 2 \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + u^2 - e^{2x-4t} + e^{x-2t}, & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = e^x, & u_t(x, 0) = -2e^x \end{cases} \quad (3.12)$$

avec  $0 < \alpha \leq 1$

On utilisant la méthode de FRDT pour l'équation (3.12) parmi condition initiale, on obtient,

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(k\alpha + 2\alpha + 1)}{\Gamma(k\alpha + 1)} U_{k+2}(x) + 2 \frac{\Gamma(k\alpha + \alpha + 1)}{\Gamma(k\alpha + 1)} U_{k+1}(x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_k(x) \\ - \sum_{r=0}^k U_r(x) U_{k-r}(x) + e^{2x} \left( \frac{(-4)^k}{k!} \right) - e^x \left( \frac{(-2)^k}{k!} \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

et

$$U_0(x) = e^x, \quad U_1(x) = -2e^x \quad (3.14)$$

on remplace (3.14) dans (3.13), on a :

$$U_k(x) = \frac{(-2)^k}{\Gamma\left(\frac{k}{\lambda} + 1\right)} \Gamma\left(\frac{\lambda + 1}{\lambda}\right) e^x, \quad k \geq 2$$

avec  $\alpha = \frac{1}{\lambda}$

Pour démontre la solution de problème P4, on utilise la transformation inverse (formule (2.4))

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) t^{k\alpha} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) t^{\frac{k}{\lambda}} \\ &= e^x \left[ 1 + (-2) t^{\frac{1}{\lambda}} + \Gamma\left(\frac{\lambda + 1}{\lambda}\right) \left\{ \frac{(-2)^2}{\Gamma\left(\frac{2}{\lambda} + 1\right)} t^{\frac{2}{\lambda}} + \frac{(-2)^3}{\Gamma\left(\frac{3}{\lambda} + 1\right)} t^{\frac{3}{\lambda}} + \dots \right\} \right]. \end{aligned}$$

**Remarque 3.1.** Si  $\lambda = 1$

$$u(x, t) = e^{x-2t}$$

est une solution exacte de l'équation non fractionnaire (3.12), telle que  $\alpha = \frac{1}{\lambda}$ .

---

# Conclusion générale

---

Dans ce mémoire, nous avons appliqué la méthode de transformation différentielle réduite (RDTM) pour trouver des solutions des équations aux dérivées partielles d'ordre entière et fractionnaire. On peut en conclure que cette méthode est très puissante et efficace pour trouver la solution analytique pour une large classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre entière et fractionnaire. Les résultats obtenus montrent que la méthode (RDTM) est précise, efficace et nécessite moins d'effort par rapport aux autres méthodes analytiques et numériques.

Ce travail se déroule en deux étapes :

- ✓ **RDTM pour une équation aux dérivées partielles** : nous avons appliqué la méthode (RDTM) pour des équations aux dérivées partielles d'ordre entière en dimension 1 et 2. De plus, nous avons cherché des solutions exactes et approchés par des exemples données.
- ✓ **RDTM pour une équation aux dérivées partielles fractionnaires** : nous avons appliqué le même méthode de (RDTM) pour les équations aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire a travers des exemples choisis.

Comme perspectives, nous avons les problèmes ouverts suivants :

- ☞ Application de la méthode RDTM pour des EDPs fractionnaires d'ordre  $\alpha > 1$ .
- ☞ Application de la méthode RDTM pour des EDPs fractionnaires définies dans un domaine de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ .

---

# Bibliographie

---

- [1] S. Abbasbandy. Numerical solutions of nonlinear klein-gordon equation by variational iteration method, *internat. J. Numer. Math.Engrg*, ,(70) :876–881, 2007.
- [2] K. Allab. *Eléments d'Analyse*. OPU, 1986.
- [3] J. H. He. Some applications of nonlinear fractional differential equations and their approximations. *Bull. Sci. Technol*, 15(2) :86–90, 1999.
- [4] Hassan K Jassimr Hossein Jafari. Reduced differential transform method for partial differential equations within local fractional derivative operators. *Advances in Mechanical Engineering*, 8(4) :1–6, 2016.
- [5] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J.J. Trujillo. *THEORY AND APPLICATIONS OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS*. ELSEVIER, 2006.
- [6] Kurnaz and G. Oturance. The differential transform approximation for the system of ordinary differential equations. *Int. J. of Comp. Math*, 82(6) :709–719, 2005.
- [7] C.L.Chen MJ. Jang and Y.C.Liu. Two dimensional differential transform for partial differential equations. *Appl. Math.Computl*, 181(1) :767–774, 2006.
- [8] M.M. Khader N. H. Sweliam. Chaos. *Solitons Fractals*, 32(1)(145), 2007.
- [9] M .A. Noor and S. T. Mohyud-Din. Modified variational iteration method for heat and wave-like equations. *Acta Applicandae Mathematicae*, 104(3) :257–269, 2008.
- [10] Maysaa Mohamed Al Qurashi Omer Acan and Dumitru Baleanu. Reduced differential transform method for solving time and space local fractional partial differential equations. *Journal of Nonlinear Sciences and Applicationl*, 10 :5230–5238, 2017.
- [11] I. Podlubny. *Fractional differential equations*. Academic Press, 1999.
- [12] K. Al-Khaled S. Momani. Numerical solution for systems of fractional differential equations by the decomposition method. *Appl. Math.Comput*, 162(3) :65–1351, 2005.
- [13] A. Waheed S. T. Mohyud-Din, M.A. Noor. Variation of parameter method for initial and boundary value problems. *World Applied Sciences Journal*, 11(5) :622–639, 2010.
- [14] Ahmad Haghbin Saeideh Hesam, Alireza Nazemi. Reduced differential transform method for solving the fornberg-whitham type equation. *International Journal of Nonlinear Science*, 13 :158–162, 2012.
- [15] S.G.Samko, A.A.Kilbas, and O.I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [16] Mohamed Gubara Sharaf Mohmoud. Reduced differential transform method for solving linear and nonlinear goursat problem. *in SciRes*, pages 1049–1056, 2016.



- [17] Muhammad Sohail and Syed Tauseef Mohyud-Din. Reduced differential transform method for time-fractional heat equations. *International Journal of Modern Theoretical Physics*, 1(1) :13–22, 2012.
- [18] A. A. Soliman. Chaos. *Solitons Fractals*, 29(2)(294), 2006.
- [19] Sunil Kumar Vineet K. Srivastava, Mukesh K. Awasthi. Analytical approximations of two and three dimensional time-fractional telegraphic equation by reduced differential transform method. *journal homepage*, pages 1–7, 2014.
- [20] G. OTURANC Y. KESKIN. Reduced differential transform method for solving linear and nonlinear wave equations. *Iranian Journal of Science Technology, Transaction A*, 34, 2010.
- [21] G Oturang Y Keskin. Reduced differential transform method for partial differential equations. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 10(6) :741–749, 2009.
- [22] Sema Servi Y. Keskin and Galip Oturanc. Reduced differential transform method for solving klein gordon equations. *Proceedings of the World Congress on Engineering*, 1, 2011.

**ملخص:** في هذه المذكرة ، قمنا بحل بعض المعادلات التفاضلية الجزئية العادية والكسرية وذلك باستخدام طريقة التحول التفاضلي المنخفض (RDTM). فكرة هذه الطريقة هي اعتبار أن الحل على شكل سلسلة تايلور تتقارب نحو الحل الدقيق. هذه الطريقة شبه تحليلية وتستخدم على نطاق واسع من قبل العديد من الباحثين لحل المعادلات التفاضلية الجزئية العادية والكسرية ، الخطية وغير الخطية ، متجانسة وغير متجانسة. أظهرت النتائج التي تم الحصول عليها أن طريقة (RDTM) دقيقة وفعالة وتتطلب جهداً أقل مقارنة بالطرق التحليلية والعديدية الأخرى.

**كلمات مفتاحية:** الحساب الكسري ، معادلة تفاضلية جزئية كسرية ، طريقة التحول التفاضلي المنخفض.

---

In this memoir, we have solved some of the classical and fractional partial differential equations by using the reduced differential transformation method (RDTM). The idea of this method is to consider the solution in the form of a Taylor series that converges to the exact solution. This method is semi-analytical and widely used by many researchers for the resolution of classical or fractional partial differential equations, linear and non-linear, homogeneous and non-homogeneous. The results obtained show that the method (RDTM) is accurate, efficient and requires less effort compared to other analytical and numerical methods.

**Keywords :** Fractional calculus, Fractional partial differential equation, Reduced differential transformation method.

---

Dans ce mémoire, nous avons résolu quelques des équations aux dérivées partielles d'ordre entière ou fractionnaire par l'utilisation de la méthode de transformation différentielle réduite (RDTM). L'idée de cette méthode est de considérer la solution sous la forme d'une série de Taylor qui converge vers la solution exacte. Cette méthode est semi-analytique et largement utilisée par de nombreux chercheurs pour la résolution des équations aux dérivées partielles classique ou fractionnaire, linéaires et non linéaires, homogènes et non homogènes. Les résultats obtenus montrent que la méthode (RDTM) est précise, efficace et nécessite moins d'effort par rapport aux autres méthodes analytiques et numériques.

**Mots-Clés :** Calcul fractionnaire, équation aux dérivées partielles fractionnaire, Méthode de transformation différentielle réduite.