



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE M'SILA

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Spécialité : Physique Théorique

Option : Physique des particules à haute énergie

Réalisé par

Hedli Meriem

THEME

L'effet de la non commutativité de l'espace-temps sur les théories de jauge abéliennes et non abéliennes avec quelques applications

Soutenu publiquement le : ...18... /..06... /2014

Devant le jury composé de :

A . METATLA

(M.C.B) Université de M'sila

Président

A.MAIRECHE

(M.C.A) Université de M'sila

Rapporteur

S.NEHAWA

(M.AA) Université de M'sila

Examineur

PROMOTION JUIN 2013/2014

Remerciements

*Je remercie tout d'abord **ALLAH** qui m'a aidé et m'a donné le courage pour terminer ce travail.*

*Je tiens à remercier très vivement mon directeur de Mémoire, Monsieur **A-MAIRECHE, M.C.A** à l'université de **M'sila** d'avoir proposé et dirigé mes travaux. Ses compétences et ses bonnes directives m'ont aidé à achever ce mémoire de master.*

Mes remerciements vont également à tous les enseignants du département de physique qui m'ont orienté et m'ont conseillé.

Je souhaite également remercier tous les enseignants de département de Physique ayant assurés mes années d'études.

Aussi, je remercie tous mes collègues du Département de Physique pour le soutien moral qu'ils m'ont apporté.

*Enfin, je ne saurais jamais suffisamment remercier **mon père** et **ma mère**, **mes frères** et **mes sœurs**, et mon amis .*

Meriem hedli

إهداء

إلى حبيبتي و نور عيوني أُمي و إلى أعز و أحب الناس إلى قلبي أبي
حبيبي

إلى أختي العزيزة و الغالية التي كانت و خير سند لي فطيمة .
ما زالت

إلى أخواتي أمينة و سهير

و إخوتي عبد الحق و خير الدين

إلي زوجي و رفيق دربي

إلى كل أساتذتي.

إلى زميلاتي، وكل صديقاتي.

إلى أعز صديقاتي : الغالية آمال كيرواني.

إلى كل أعضاء قسم الفيزياء.

Introduction générale	1
Chapitre I: Les interactions électromagnétiques et faibles dans l'espace ordinaire	
I-1- Introduction	5
I-2- Rappels sur les groupes	5
I-2-1-Les groupe de lie et algèbre de lie	6
I-2-1-1- Quelques groupe de lie matriciels.....	6
I-2-1- 2- Algèbre de lie	7
I-3- Les transformation physique	8
I-3-1-Introduction sur les interactions électromagnétique	10
I-3-1-1-Symétrie de jauge électromagnétique (groupe abélien $U(1)$).....	11
I-3-1-2-Transformation de jauge du $U(1)$	12
.I-3-2-Introduction sur l'interaction faible.....	14
I-3-3-L' algèbre du groupe unitaire uni modulaire (spéciale $SU(2)$)... ..	16
I-3-3-1- L' algèbre de $SU(2)$	16
I-3-3-2-Symétrie de jauge non abélienne (cas de $SU(2)$).....	17
a- Etude la symétrie globale	19
b- Etude la symétrie locale.....	20
I-4-Conclusion	25
Chapitre II: Formalisme mathématique de l'espace non commutatif	
II-1- Introduction	27

II-2- Le produit star	28
II-2-1- La formule de Moyal-Weyl.....	28
II-2-2- Propriétés du produit star.....	29
II-3- Les transformations de jauge non commutatif	30
II-3-1- Rappel sur les transformations dans l'espace ordinaire.....	30
II-3-2- Les transformations non commutatif	31
II-4- Les transformations des champs dans l'espace non commutatif	32
II-4-1- les champs.....	34
II-4-2- Le potentiel de jauge	35
II-5-Conclusion	36
 Chapitre III: L'effet du non commutative de l'espace temps sur les théorie de jauge	
abélienne et non abélienne avec quelques application	
III-1 –Introduction	38
III-2- Rappel sur les transformations de jauge ordinaire.....	38
III-3-Les transformations des jauge dans l'espace non commutatif.....	39
III-4-L électrodynamique quantique QED non commutatif.....	42
III-5- Les règles de feynman pour QED non commutatif.....	46
III-5-1- La théorème de Wick	47
III-5-2-La matrice S.....	52

III-6-Application sur positron	54
III-6-1-Positron dans l' espace ordinaire.....	55
III-6-2-Etude le processus d'interaction de positron dans l' espace non commutatif	57
III-6-3-Etude le processus d'interaction d'un électron dans l' espace non commutatif	60
Conclusion générale	64
Référence	65

Introduction

La théorie quantique des champs C'est la mécanique quantique d'un système avec un nombre infini de degrés de liberté. L'application qui fut développée vers la fin des années 40 par Richard Phillips Feynman, Julian Seymour Schwinger et Sin-itiro Tomonaga et complétée une année plus tard par Freeman John Dyson, est l'électrodynamique quantique, la théorie qui décrit avec une grande précision l'interaction entre les électrons et le champ électromagnétique. Elle associe une particule au champ électromagnétique, le « quantum » du champ, qu'appelé photon. L'interaction entre particules chargées est décrite comme le résultat d'échange entre elles d'un ou plusieurs photons. Feynman a trouvé une méthode systématique pour décrire cette interaction à l'aide d'images qu'on appelle « diagrammes de Feynman » [01 , 02].

Ou la théorie quantique de champs c'est le quantum Field théorie (QFT) en anglais

L 'élément clef est la mise en commun de la théorie quantique et de la relativité restreinte, En découle un champ d'application extrêmement large qui s'articule autour de trois domaines principaux :

- La physique des particules élémentaires et leurs interactions, résume par le Modèle Standard.
- Le formalisme de la physique de la matière condensée, avec des applications telles que la Supraconductivité, la superfluidité, les transitions de phase.
- La physique de l'univers proche du Big Bang : actuations primordiales dont provient laformation de la structure de l'univers, évaporation des trous noirs (rayonnement de Hawking), etc...

On se concentrera ici sur le premier domaine. La première partie élabore pas _a pas les notions essentielles : champs classiques libres, quantification et champs quantiques libres, classifications des différents types de champs, symétries discrètes et continues, Dans

la seconde partie, on introduira les interactions fondamentales entre ces champs. En particulier, on établira la théorie des diagrammes de Feynman, qui permettront de calculer des temps de vie ou des sections efficaces. On posera les principes qui régissent la construction de Lagrangiens, ce qui permettra alors de jeter les bases du Modèle Standard de la physique des particules[02,03,04].

En mécanique quantique l'espace de phase est défini en remplaçant les variables et les moments canoniques $\xi_i; \pi_\phi$ par des opérateurs hermétiques qui obéissent aux règles de commutations canonique $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}$, de même sur un espace non commutatif les coordonnées d'espace temps ordinaire x^μ sont remplacées par des coordonnées non commutatives $\hat{x}^\mu$ obéissant aux règles de commutations $[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$ où $\theta^{\mu\nu}$ sont des paramètres réels antisymétriques. Sur un espace non commutatif la construction des théories de jauge se fait de la même manière qu'en théorie de jauge sur un espace ordinaire, il suffit de remplacer les champs classiques par les champs non commutatifs » [02, 05].

Ce travail comprend trois chapitres, il est organisé de la façon suivante:

Dans le premier chapitre nous avons montré que les lois de conservation de la physique classique découlent des propriétés d'invariance par rapport à des transformations de jauge, sur les groupes abélien $U(1)$ et le groupe non- abélien $SU(2)$ dans l'espace ordinaire.

Le deuxième chapitre est consacré à une exposition des formalismes mathématiques de l'espace non commutatif en générale, en utilisant le produit de Moyal-Weyl (produit star) et transformation de Seiberg- Witten.

Introduction générale

Au troisième chapitre en appliqués les formalismes mathématiques de l'espace non commutatif sur les groupes abéliens $U(1)$ et les groupes non- abéliens $SU(2)$ et étudiés le positron et l'électron dans deux cas ordinaire et non commutatif.

En terminant notre travail par une conclusion générale exposera le travail accompli.

Chapitre I

***Les interactions
électromagnétiques et
faibles dans l'espace
ordinaire***

I-1-Introduction:

Dans ce chapitre on révisé les interactions électromagnétiques et faible on cadre des théorie de jauge (la symétrie locale et la symétrie globale) on basée sur les groupes $U(1)$ et $SU(2)$ respectivement, dans l'espace ordinaire.

I-2-Rappels sur les groupes:

En général , pour gaugée une théorie physique, il est nécessaire d'appliquées les transformations physiques , Ces transformations forment des groupes en théorie quantique des champs et théorie de jauge surtout le model standard, donc on rappelle quelques application essentiels de la théorie des groupes [06].

Soit S un ensemble non vide et $(*)$ une application:

$$S \times S \rightarrow S \quad (I.1)$$

L'ensemble S forme un groupe si :

1- La relation d'associativité:

Cette relation est réalisée par la propriété suivante:

$$(x * y) * z = x * (y * z) \quad (I.2)$$

2- L'élément neutre:

La propriété de l'élément neutre, noté par le symbole e , est :

$$\exists e \in S, e * x = x * e = x : x \in S \quad (I.3)$$

3- L'élément inverse:

Cette relation est réalisée par la propriété suivante:

$$[S, x] = Sx - xS = -\hbar \nabla \cdot x = -\hbar e \quad (I.4)$$

Le groupe sera qualifié d'abélien si .de plus :

$$x * y = y * x, \forall (x, y) \in S \quad (I.5)$$

I-2-1-Les groupes de lie et algèbre de lie:

I-2-1- 1- Quelques groupes de lie matriciels:

Les groupes de matrices jouées un rôle fondamental dans la théorie de jauge, les plus importants sont représenté comme suivant :

1-Le groupe linéaire $GL(n, R)$:

Ce groupe noté par $GL(n, R)$ et satisfait la définition [02]:

$$GL(n, R) = \{M, \text{matrice } n \times n; M_{ij} \in R \text{ et } \det M \neq 0\} \quad (I.6)$$

Les sous groupes $O(n)$, $SL(n, R)$ et $SO(n)$ sont définis par les relations suivant:

$$O(n) = \{M \in GL(n, R) : MM^+ = M^+M = \Pi_n\} \quad (I.7)$$

$$SL(n, R) = \{M \in GL(n, R); \det M = 1\} \quad (I.8)$$

Et :

$$SO(n) = O(n) \cap SL(n, R) \quad (I.9)$$

2-Le groupe linéaire $GL(n, C)$:

Ce groupe noté par $GL(n, C)$ et satisfait la définition [02]:

$$GL(n, \mathbb{C}) = \{M, \text{matrice } n \times n; M_{ij} \in \mathbb{C} \text{ et } \det M \neq 0\} \quad (\text{I.10})$$

Les sous groupes $U(n)$, $SL(n, \mathbb{C})$ et $SU(n)$ sont définis par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} U(n) &= \{M \in GL(n, \mathbb{C}) : MM^\dagger = M^\dagger M = \Pi_n\} \\ SL(n, \mathbb{C}) &= \{M \in GL(n, \mathbb{C}) : \det M = 1\} \\ SU(n) &= U(n) \cap SL(n, \mathbb{C}) \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

I-2-1-2-L'algèbre de Lie :

On dit que g est munie d'une structure d'algèbre de Lie si il existe une loi de composition interne [07] :

$$\begin{cases} g * g \rightarrow g \\ (X, Y) \rightarrow [X, Y] \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

Avec les crochets de X et Y satisfait les propriétés suivantes :

1- La relation de distributivité :

$$\forall (X, Y, Z) \in g^3, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, [\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda [X, Z] + \mu [Y, Z] \quad (\text{I.13})$$

2- La relation de L'antisymétrie :

$$\forall (X, Y) \in g \times g, [X, Y] = -[Y, X] \quad (\text{I.14})$$

3- Et en fin l'identité de Jacobi est satisfaite:

$$\forall (X, Y, Z) \in g \times g \times g, [[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0 \quad (\text{I.15})$$

Et

$$[X^\mu, X^\nu] = i \sum_{a=0}^n f_a^{\mu\nu} X^a \quad (I.16)$$

Où $f_a^{\mu\nu}$ sont les constantes de structure de l'algèbre de Lie g . Avec $\{\mu = \overline{1, n}\}$

I-3-Les transformations physiques :

La théorie de jauge est une théorie des champs qui décrit les interactions fondamentales (fortes, faibles et électromagnétique). Elle est basée sur le principe d'invariance de la densité lagrangienne lorsque cette dernière est soumise à une transformation de jauge, ces transformations sont [02,08] :

1-Transformations appliquée sur les coordonnées d'espace-temps :

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = f(x^\mu, \alpha) \quad (I.17)$$

2-Transformations des champs :

Les transformations des champs sont divisées en trois parties, le premier connu par champs physiques scalaires, le second est champs physiques fermionique et les champs vectoriels.

2-1-Champs physiques scalaires :

Les champs physiques scalaires classés en deux types réels ou complexes.

-Champs physiques scalaires non chargés et noté par : $\varphi(x^\mu, \alpha)$ ou α est un paramètre constante et x^μ Le quadrivecteur position dans l'espace de Minkowski.

-Champs physiques scalaires de spin $s=0$ et se transforme comme suivant :

$$\varphi(x^\mu, \alpha) \rightarrow \varphi'(x'^\mu, \alpha) = F(\varphi(x^\mu, \alpha), x^\mu) \quad (\text{I.18})$$

2-2-Champs physiques fermionique :

Le champ fermionique noté par $\psi(x^\mu, \alpha)$ de charge négative ou positive (électron ou positron), de spin $s=1/2$ et satisfait le statistique Fermi-Dirac et obéissant le principe de Pauli. Et se transforme comme suivant :

$$\psi(x^\mu, \alpha) \rightarrow \psi'(x'^\mu, \alpha) = e^{i\alpha} \psi(x^\mu, \alpha) \quad (\text{I.19})$$

2-3-Champs vectoriels :

Les champs vectoriels de spin $s=1$ comme le photon. Et se transforme comme suivant :

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = G^\mu(A^\mu(x), \alpha) \quad (\text{I.20})$$

De tel sort le principe de moindre action est satisfait dans les trois champs :

$$\delta \mathcal{S} = 0 \quad (\text{I.21})$$

I-3-1-Introduction sur les Interactions électromagnétiques :

L'interaction d'une particule de masse m et de la charge électrique e en l'électromagnétique (**em**) est caractérisées par les propriétés suivantes [09]:

- mettent en jeu des particules chargées électriquement ;
- couplage électromagnétique: $\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}$;
- temps d'interaction ou vie moyenne typique de $\approx 10^{-20} \text{s}$;
- section efficace typique de $\approx 10^{-33} \text{m}^2$;
- échange de photons γ ;
- portée $R = \infty$.

Exemples d'interactions électromagnétiques :

- a. Effet photoélectrique : $\gamma + e \rightarrow e$
- b. Diffusion de Rutherford : $e + e \rightarrow e + e$
- c. Rayonnement de freinage : $e + N \rightarrow e + N^* + \gamma$

I-3-1-1-Symétrie de jauge électromagnétique (groupe abélien U(1)):

Electro- Dynamique Quantique (Q.E.D) :

L'électro- Dynamique Quantique (Q.E.D) est une description quantique et relativiste de l'interaction entre le champ électromagnétique, champ de jauge abélien de symétrie U(1), véhiculé par des bosons de jauge que sont les photons, et les électrons, leptons électrisés de la première génération.

C'est la théorie physique dont les vérifications expérimentales sont à l'heure actuelle les plus précises. C'est ainsi que le moment magnétique de l'électron, exprimé avec son spin, sa charge électrique et sa masse[03]:

$$\vec{\mu} = g \frac{e\hbar}{2mc} \vec{s}$$

La dynamique du champ électromagnétique est décrite par le lagrangien quadratique:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J_{\mu} A^{\mu} \quad (\text{I.22})$$

Ou $F_{\mu\nu}$ est le tenseur antisymétrique du champ électromagnétique de rang 2, et J_{μ} le quadrivecteur courant. Si on dérive les équations de Lagrange pour A^{μ} , on trouve deux des équations de Maxwell dans le vide, à partir l'équation d'Euler-Lagrange:

$$\partial_{\mu} \frac{\partial L}{\partial(\partial_{\mu} A_{\nu})} - \frac{\partial L}{\partial A_{\nu}} = 0 \quad (\text{I.23})$$

En utilisé l'expression (I.23), le deuxième terme $\frac{\partial L}{\partial A_{\nu}}$ devient:

$$\frac{\partial L}{\partial A_{\nu}} = -J^{\mu} \frac{\partial A_{\mu}}{\partial A_{\nu}} = -J^{\mu} \delta_{\nu}^{\mu} = -J^{\nu}$$

I-3-1-2- Transformation de jauge du groupe U (1) :

Le Lagrangien libre [03,10,11]:

$$L = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \quad (I.24)$$

N'est invariant par la transformation locale [10]:

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x') = e^{i\alpha(x)}\Psi(x) \quad (I.25)$$

Réécrire du lagrangien :

L'expression du Lagrangien de l'électrodynamique quantique est donnée par la formule suivant [12,13]:

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi + e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu \quad (I.26)$$

Le terme de masse $m\bar{\Psi}\Psi$ reste bien sûr invariant par contre le terme cinétique :

$$\begin{aligned} i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi &\rightarrow i\bar{\Psi}e^{-i\alpha(x)}\gamma^\mu\left[i(\partial_\mu\alpha(x))e^{i\alpha(x)}\Psi + e^{i\alpha(x)}\partial_\mu\Psi\right] \\ &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\partial_\mu\alpha(x). \end{aligned} \quad (I.27)$$

La dérivée covariant D_μ définie par :

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \quad (I.28)$$

Pour trouver une action physique invariante par la transformation de jauge on exige de donnée la transformation $D_\mu\Psi$:

$$D_\mu\Psi \rightarrow D'_\mu\Psi' = e^{+i\alpha(x)}D_\mu\Psi \quad (I.29)$$

Où A_μ est un champ de jauge qui se transforme de la façon [11,12]:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \quad (I.30)$$

Cela permis de l'invariant de le terme $F_{\mu\nu}$ [10]:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \\ &= +\frac{1}{e} \partial_\mu (\partial_\nu \alpha(x)) + \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\nu (\partial_\mu \alpha(x)) \\ &= F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (I.31)$$

On vient donc de montre que le lagrangien est invariant sous les transformations jointe des deux champs suivante [10]:

$$\begin{cases} A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \frac{1}{e} \partial^\mu \alpha(x) \\ \Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = \exp[i\alpha(x)] \Psi(x) \end{cases} \quad (I.32)$$

Le tenseur du champ électromagnétique $F_{\mu\nu}$ est trouve par l'application de l'équation :

$$[D_\mu, D_\nu] = -ie F_{\mu\nu} \quad (I.33)$$

Tel que :

$$F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \quad (I.34)$$

On peut alors écrire le lagrangien QED comme suivant [10,11]:

$$L_{QED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i \bar{\Psi} \gamma^\mu D_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi \quad (I.35)$$

I-3-2- Introduction sur les Interactions faibles :

L'interaction nucléaire faible, responsable en particulier du phénomène de la radioactivité. On classe les interactions faibles par la nature des particules [09] :

Leptoniques : Comme un exemple la désintégration leptonique du muon :

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

Semi-Leptoniques : Comme un exemple la désintégration β du neutron :

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

Non-Leptoniques (hadroniques) : Comme un exemple la désintégration hadronique du Λ^0 :

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$$

Les interactions faibles sont caractérisées par les propriétés suivantes [09] :

- Mettent en jeu des neutrinos ou des quarks qui changent de saveur, c'est-à-dire des Particules ayant une charge faible;
- Couplage faible (entre protons):

$$\alpha_{Fermi} = \frac{G_F m_p^2}{4\pi} \approx 10^{-6}, G_F = 1.16 \cdot 10^{-5} \text{Gev}^{-2};$$

- Temps d'interaction ou vie moyenne typique de $\approx 10^{-8} \text{s}$;
- Section efficace de $\approx 10^{-44} \text{m}^2$;
- Echange de bosons $W^\pm$ (courants chargés) et Z^0 (courant neutre) ;
- portée $R = 10^{-18} \text{m}$;

Les interactions faibles décrivent par la densité lagrangien :

$$L_F = \frac{G_F}{2} j_\mu^\dagger j^\mu \quad (\text{I.36})$$

Avec le courant leptonique :

$$j^\mu = \bar{\psi}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_\nu \quad (\text{I.37})$$

Dans le cas général on peut écrire chaque spineur [02] :

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi + \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi \\ \psi &= \psi_R + \psi_L \end{aligned} \quad (\text{I.38})$$

Les parties gauches ψ_e et ψ_ν sont groupé comme suivant :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_\nu \\ \psi_e \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi_\nu \\ \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi_e \end{pmatrix} \quad (\text{I.39})$$

I-3-3- L'algèbre du groupe unitaire uni modulaire (spéciale SU(2)) :

L'algèbre de Lie $SU(n)$ du groupe spécial unitaire $SU(n)$ ne coïncide pas avec celle du groupe unitaire [02 ,09 ,12].

$$T \in SU(n) , T^\dagger + T = 0 , tr(T) = 0 \quad (I.40)$$

La dimension réelle de cette algèbre est :

$$\dim SU(n) = n^2 - 1 \quad (I.41)$$

L'algèbre $SU(n)$ est donc l'ensemble des matrices hermitiennes $n \times n$ de trace nulle.

I-3-3- 1-L'algèbre de SU(2) :

Les générateurs T^a qui forment l'algèbre $SU(2)$ sont auto-adjoints et de trace nulle [09,12]

$$\begin{cases} T^a - T^{a\dagger} = 0 \\ tr[T^a] = 0 \end{cases} \quad (I.42)$$

Le groupe $SU(2)$ est un groupe à : $2^2 - 1 = 3$ paramètres réelles, on trouve ensemble suivant [09,12] :

$$\left\{ \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \quad (I.43)$$

Sont Appelle les matrice de Pauli. De telle sorte que les générateurs T^a sont définis par :

$$T^a = \frac{1}{2} \sigma^a \quad (\text{I.44})$$

Avec σ^a satisfait l'algèbre suivant :

$$\left[\frac{\sigma^a}{2}, \frac{\sigma^b}{2} \right] = \sum_{c=1}^3 i f^{abc} \frac{\sigma^c}{2} \quad (\text{I.45})$$

Les constantes de structure de $SU(2)$ sont les composantes du tenseur antisymétrique de Levi-Civita [12] :

$$f^{abc} = \varepsilon^{abc} = \begin{cases} +1 \dots \text{Si } \{(abc) = (123), (231), (312)\} \\ -1 \dots \text{Si } \{(abc) = (132), (321), (213)\} \\ 0 \dots \dots \dots \text{autrement} \end{cases} \quad (\text{I.46})$$

I-3-3- 2-Symétrie de jauge non abélienne (cas de $SU(2)$) :

Les deux groupes $SU(2)$ et $SU(3)$ sont les groupes plus utilisés en théorie de jauge non abélienne, le premier décrit l'interaction faible et le second décrit l'interaction forte respectivement.

Puisque la dimension du groupe de jauge $SU(2)$ est $2^2 - 1 = 3$, le nombre de bosons de jauge est 3. Quant aux spineurs de la théorie, dont chacun forme un double par rapport au groupe de symétrie [02] :

$$q_i (i = \overline{1,6}), \quad q_i = \begin{pmatrix} q_i^1 \\ q_i^2 \\ q_i^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{rouge} \\ \text{vert} \\ \text{bleu} \end{pmatrix}$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (\text{I.47})$$

Qui se transforme sous la transformation de groupe $SU(2)$ [14] :

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(\alpha)\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)U(\alpha)^{-1} \end{cases} \quad (\text{I.48})$$

Avec $U(\alpha)$ prend la forme suivant [15] :

$$U(\alpha) = \exp\left(-i \sum_{a=1}^3 \alpha^a \frac{\sigma^a}{2}\right) \quad (\text{I.49})$$

Donc :

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp\left(-i \sum_{a=1}^3 \alpha^a \frac{\sigma^a}{2}\right) \psi(x) \quad (\text{I.50})$$

Où σ sont les matrices de Pauli, et $(\alpha = \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ sont les paramètres de transformation du groupe $SU(2)$.

L'expression de la densité lagrangien libre qui décrit le champ fermionique est donnée par [14] :

$$L_0 = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) \quad (I.51)$$

a)-Etude la symétrie globale dans ce cas (α est constante) :

La symétrie globale est caractérisé par α est constante.

❖ Le comportement du terme de masse :

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x)m\psi(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x)m\psi'(x) \\ &= \bar{\psi}(x)U^{-1}(\alpha)mU(\alpha)\psi(x) \\ &= \bar{\psi}(x)m\psi(x) \end{aligned} \quad (I.52)$$

❖ Le comportement du terme cinétique :

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) &\rightarrow i\bar{\psi}'(x)\gamma^\mu \partial_\mu \psi'(x) \\ &= i\bar{\psi}(x)U(\alpha)^{-1}\gamma^\mu \partial_\mu U(\alpha)\psi(x) \\ &= i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) \end{aligned} \quad (I.53)$$

Et :

$$[\gamma^\mu, U(\alpha)] = [\gamma^\mu, U(\alpha)^{-1}] = 0 \quad (I.54)$$

$$U(\alpha)U(\alpha)^{-1} = U(\alpha)^{-1}U(\alpha) = \mathbb{I} \quad (I.55)$$

Donc la densité de lagrangien (libre) est invariante par les transformations globales.

b)-Etude la symétrie locale :

L'idée de théorie de jauge c'est de rendre la symétrie globale en une symétrie locale.

Dans ce cas α est en fonction de x :

$$U(\alpha) = \exp\left(-i \sum_{a=1}^3 \alpha^a(x) \frac{\sigma^a}{2}\right) \quad (I.56)$$

On va voir maintenant les transformations des différents termes.

❖ Le comportement du terme de masse :

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x) m \psi(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) m \psi'(x) \\ &= \bar{\psi}(x) m \psi(x) \end{aligned} \quad (I.57)$$

Donc ce terme est invariant.

❖ Le comportement du terme cinétique :

$$\begin{aligned} i \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) &\rightarrow i \bar{\psi}'(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi'(x) \\ &= i \bar{\psi}(x) U(\alpha(x))^{-1} \gamma^\mu \partial_\mu [U(\alpha(x)) \psi(x)] \\ &= i \bar{\psi}(x) U(\alpha(x))^{-1} \gamma^\mu [(\partial_\mu U(\alpha(x))) \psi(x) \\ &\quad + U(\alpha(x)) (\partial_\mu \psi(x))] \end{aligned} \quad (I.58)$$

Mais ce terme n'est pas invariant sous les transformations de symétrie locale, pour restaurer l'invariance on introduit le champ vecteur A_μ^a ($a=1, 2, 3$) et la dérivée covariante D_μ suivant [02] :

$$D_\mu \psi(x) = (\partial_\mu - iA_\mu) \psi(x) = (\partial_\mu - igA_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}) \psi(x) \quad (I.59)$$

Où g est le constant de couplage et A_μ^a sont les champs des vecteurs de jauge satisfont [02] :

$$A_\mu = gA_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}, a = 1, 2, 3 \quad (I.60)$$

La dérivée covariante se transforme comme suivant [16] :

$$\begin{aligned} D_\mu \psi(x) &\rightarrow (D_\mu \psi(x)) \\ &= U(\alpha(x)) (D_\mu \psi(x)) \end{aligned} \quad (I.61)$$

Avec :

$$D'_\mu = U(\alpha(x)) D_\mu U(\alpha(x))^{-1} \quad (I.62)$$

A partir la relation (I.61), on trouve les transformations de champ A_μ :

$$\begin{aligned}
 (\partial_\mu - iA'_\mu)U(\alpha(x))\psi(x) &= U(\alpha(x))(\partial_\mu - iA_\mu)\psi(x) \\
 \Rightarrow (\partial_\mu U(\alpha(x)))\psi(x) + U(\alpha(x))(\partial_\mu \psi(x)) - iA'_\mu U(\alpha(x))\psi(x) \\
 &= U(\alpha(x))\partial_\mu \psi(x) - iU(\alpha(x))A_\mu \psi(x) \\
 \Rightarrow iA'_\mu U(\alpha(x))U(\alpha(x))^{-1} &= iU(\alpha(x))A_\mu U(\alpha(x))^{-1} \\
 &\quad + (\partial_\mu U(\alpha(x)))U(\alpha(x))^{-1} \\
 \Rightarrow A'_\mu &= U(\alpha(x))A_\mu U(\alpha(x))^{-1} - i(\partial_\mu U(\alpha(x)))U(\alpha(x))^{-1} \quad (I.63)
 \end{aligned}$$

Dans le cas des transformations infinitésimales ou $(\alpha(x)) \ll 1$ [15] :

$$\begin{aligned}
 U(\alpha(x)) &\approx 1 - i \sum_{a=1}^3 \alpha^a(x) \frac{\sigma^a}{2} + O(\alpha^2) \\
 U(\alpha(x))^{-1} &\approx 1 + i \sum_{a=1}^3 \alpha^a(x) \frac{\sigma^a}{2} + O(\alpha^2)
 \end{aligned} \quad (I.64)$$

Si on remplaçant la relation (I.64) dans (I.63) et avec l'utilise de l'équation (I.45) on trouve :

$$A'^a_\mu = A^a_\mu + \sum_{c=1}^3 \varepsilon^{abc} \alpha^b A^c_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a \quad (I.65)$$

$$\Rightarrow \delta A^a_\mu = \sum_{c=1}^3 \varepsilon^{abc} \alpha^b A^c_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a \quad (I.66)$$

Pour trouver l'expression du tenseur $F_{\mu\nu}$, nous utilisons la combinaison suivante [15] :

$$[D_\mu, D_\nu]\psi = -iF_{\mu\nu}\psi \quad (I.67)$$

En peut faire les calculs :

$$\begin{aligned} (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi &= ((\partial_\mu - iA_\mu)(\partial_\nu - iA_\nu) - (\partial_\nu - iA_\nu)(\partial_\mu - iA_\mu))\psi \\ &= (\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\mu iA_\nu - iA_\mu \partial_\nu - A_\mu A_\nu - \partial_\nu \partial_\mu + \partial_\nu iA_\mu + iA_\nu \partial_\mu + A_\nu A_\mu)\psi \\ &= -i((\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - i[A_\mu, A_\nu])\psi \\ &= -iF_{\mu\nu}\psi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - i[A_\mu, A_\nu] \quad (I.68)$$

Avec :

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= gF_{\mu\nu}^a \frac{\sigma^a}{2} \quad \text{et} \quad A_\mu = gA_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}, a=1,2,3 \\ \Rightarrow F_{\mu\nu} &= g \frac{\sigma^a}{2} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) - ig^2 \left[\frac{\sigma^b}{2}, \frac{\sigma^c}{2} \right] A_\mu^b A_\nu^c \\ \Rightarrow F_{\mu\nu} &= g \frac{\sigma^a}{2} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) + g^2 \sum_{d=1}^3 \varepsilon^{bcd} \frac{\sigma^d}{2} A_\mu^b A_\nu^c \\ \Rightarrow F_{\mu\nu} &= g \frac{\sigma^a}{2} \left((\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) + g \sum_{c=1}^3 \varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \right) \\ \Rightarrow F_{\mu\nu}^a &= \underbrace{(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)}_{\text{terme.anaLogueQED}} + \underbrace{g \sum_{c=1}^3 \varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c}_{\text{terme.nonabelien}} \quad (I.69) \end{aligned}$$

A partir les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \left([D_\mu, D_\nu] \psi(x) \right)' &= U(\alpha) [D_\mu, D_\nu] (\psi(x)) \\ D_\mu \psi(x) \rightarrow (D_\mu \psi(x))' &= U(\alpha(x)) (D_\mu \psi(x)) \end{aligned} \quad (I.70)$$

On trouve l'expression :

$$F'_{\mu\nu} \psi'(x) = U(\alpha) F_{\mu\nu} \psi(x) \quad (I.71)$$

Sous les transformations infinitésimales (I.62) on trouve :

$$\delta F_{\mu\nu}^a = \varepsilon_{abc} \alpha^b F_{\mu\nu}^c \quad (I.72)$$

Finalement on peut écrire la densité lagrangienne complet qui est invariant par les transformations de jauge (ou $\delta L = 0$):

$$L \equiv L_0 + L_{\text{photonique}} \quad (I.73)$$

Avec

$$\begin{cases} L_0 = \bar{\psi}(x) (i \gamma^\mu D_\mu - m) \psi(x) \\ L_{\text{photonique}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{cases} \quad (I.74)$$

I-4-Conclusion :

Dans ce chapitre nous étudierons les interactions électromagnétique et faible (le groupe abélien $U(1)$ et le groupe non abélien $SU(2)$) dans l'espace ordinaire ,Et nous étudierons partiellement les symétries locales et globales .

Chapitre II

Formalisme mathématique de l'espace non commutatif

II-1-Introduction :

Dans ce chapitre nous étudions les différentes formules mathématiques dans l'espace non commutatif concernant les transformations des champs fermionique et les champs des jauge. On a étudié l'algèbre de l'espace non commutatif (le produit star, la formule de Moyal – Weyl, propriétés du produit star, les transformations de jauge non commutatif...etc.).

En mécanique quantique l'espace de phase est définie en remplaçant les variables et les moments canoniques $\hat{x}_i, \hat{p}_j$ par des opérateurs hermitiques qui obéissent aux règles de commutations canoniques suivantes [17]:

$$\begin{cases} [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} \\ [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0 \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Il très important de noter que, cette algèbre est écrite dans le système ($C = \hbar = 1$). Dans l'espace non commutatif les coordonnées d'espace temps ordinaire sont remplacées par des coordonnées non commutatives obéissant aux règles de commutations suivantes [17] :

$$\begin{cases} [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} \\ [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij} \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Ici $\theta_{ij} = -\theta_{ji}$ est une matrice antisymétrique qui représente la non-commutativité de l'espace-temps.

Dans l'espace non commutatif la construction des théories de jauge se fait de la même manière qu'en théorie de jauge sur un espace ordinaire, il suffit de remplacer les champs classiques par les champs non commutatifs, le produit ordinaire commutatif par le produit de Moyal-Weyl (produit star (*)) [05].

Donc la théorie de jauge dans un espace non commutatif est formulée on basé sur l'algèbre de Sieberg-Witten.

II-2- Le produit star

II-2-1- La formule de Moyal-Weyl

Dans le cadre de la quantification canonique de la mécanique quantique Hermann Weyl a donné une prescription qui permet d'associer des opérateurs à des fonctions classiques des variables canoniques.

La transformé de Fourier de chaque fonction $f(x)$ ou $g(x)$, est note par $\tilde{f}(k)$ et $\tilde{g}(k)$ respectivement suivant l'expression [05.18.19] :

$$\begin{cases} f(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^4x e^{ikx} \tilde{f}(k) \\ g(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^4x e^{ikx} \tilde{g}(k) \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Peut être défini comme suit, nous associons à f et g les opérateurs de Weyl $W(f)$ et $W(g)$:

$$\begin{cases} W(f) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^4k e^{ik\hat{x}} \tilde{f}(k) \\ W(g) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^4k e^{ik\hat{x}} \tilde{g}(k) \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

Ensuite le produit $W(f)W(g)$ est définie par :

$$W(f)W(g) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^4k d^4p e^{ik\hat{x}} e^{ip\hat{x}} \tilde{f}(k) \tilde{g}(p) \quad (\text{II.5})$$

Utilisant la formule de Campbell-Baker-Hausdorff :

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}h^2[[A,B],B] - \frac{1}{12}h^3[[A,B],A] + \dots} \quad (\text{II.6})$$

Alors le produit de Weyl $W(f)W(g)$ prend la forme:

$$\begin{aligned}
W(f)W(g) &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^4k d^4p e^{ik\hat{x} + ip\hat{x} - \frac{i}{2}k_i p_j \theta^{ij}} \tilde{f}(k) \tilde{g}(p) \\
&= W(f * g)
\end{aligned}$$

Où $f * g$ Est une nouvelle fonction définie par:

$$(f * g) = e^{\frac{i}{2}h\theta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}} [f(x)g(y)]_{y \rightarrow x} \quad (\text{II.7})$$

Cette relation est développée comme suite :

$$(f * g)(x) = f(x)g(x) + \frac{i}{2}h\theta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} f(x) \frac{\partial}{\partial x^j} g(x) + O(\theta^2) \quad (\text{II.8})$$

II-2-2- Propriétés du produit star

Le produit star satisfait les différentes propriétés :

a-Le produit star est non commutatif [17] :

$$f(x) * g(x) \neq g(x) * f(x)$$

b-Le produit star est associatif :

$$(f(x) * g(x)) * h(x) = f(x) * (g(x) * h(x))$$

c-La relation de complexe conjugué:

$$(f(x) * g(x))^* = f(x)^* * g(x)^*$$

d- La relation d'intégrale :

$$\int d^4x (f * g)(x) = \int d^4x (g * f)(x) = \int d^4x f(x)g(x)$$

e-Permutation cyclique:

$$\int d^Dx (f * g * h)(x) = \int d^Dx (h * f * g)(x) = \int d^Dx (f * h * g)(x)$$

f-Satisfait la règle de Leibniz:

$$\partial_\mu (f * g) = \partial_\mu f * g + f * \partial_\mu g$$

Remarque:

Pour distinguer entre le cas de l'espace ordinaire et l'espace non commutatif, les quantités physiques dans l'espace ordinaire à partir de ce moment noté par $\psi, A_\mu, F_{\mu\nu}, D_\mu$ et dans l'espace non commutatif noté par $\hat{\psi}, \hat{A}_\mu, \hat{F}_{\mu\nu}, \hat{D}_\mu$.

II-3 - Les transformations des jauge non commutatives

Dans l'espace non commutatif, la théorie de jauge définie par le remplaçant toutes les multiplications par le produit star.

II-3-1- Rappel sur les transformations dans l'espace ordinaire

La théorie de jauge non abélienne est basée sur l'algèbre suivant [05.17.20] :

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, c = 1, \dots, N \quad (\text{II.9})$$

Dans l'espace ordinaire les transformations locales de champ fermionique, la dérivée covariante, le champ de jauge et le tenseur $F_{\mu\nu}$ respectivement est donnée par [13]:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha_a(x)T^a} \psi(x)$$

$$D_\mu \psi(x) \rightarrow D'_\mu \psi'(x) = U(\alpha(x)) D_\mu \psi(x)$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = U(\alpha(x)) A_\mu U(\alpha(x))^{-1} - i(\partial_\mu U(\alpha(x)) U(\alpha(x))^{-1}) \quad (\text{II.10})$$

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = U(\alpha(x)) F_{\mu\nu} U(\alpha(x))^{-1}$$

Avec :

$$F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - i[A_\mu, A_\nu]$$

Qui devient dans le cas infinitésimal:

$$\psi'(x) = (1 + i\alpha_a(x)T^a) \psi(x)$$

$$\Rightarrow \delta_\alpha \psi(x) = i\alpha_a(x)T^a \psi(x)$$

$$\Rightarrow \delta_\alpha \psi(x) = i\alpha(x) \psi(x) \quad (\text{II.11})$$

$$\delta_\alpha D_\mu \psi(x) = i\alpha(x) D_\mu \psi(x) \quad (\text{II.12})$$

$$\delta_\alpha A_\mu = \partial_\mu \alpha(x) + i[\alpha(x), A_\mu] \quad (\text{II.13})$$

$$\delta_\alpha F_{\mu\nu} = i[(\alpha(x), F_{\mu\nu})] \quad (\text{II.14})$$

On peut vérifier que La combinaison de deux transformations est donnée par [18.19.21] :

$$\begin{aligned} (\delta_\alpha \psi(x) \delta_\beta \psi(x) - \delta_\beta \psi(x) \delta_\alpha \psi(x)) &= i\alpha_a(x) T^a (i\beta_b(x) T^b) \\ &\quad - (i\beta_b(x) T^b) (i\alpha_a(x) T^a) \psi(x) \\ &= \alpha_a(x) \beta_b(x) [T^a, T^b] \psi(x) \\ &= i\alpha_a(x) \beta_b(x) f^{abc} T^c \psi(x) \\ &= [\alpha(x), \beta(x)] \psi(x) \\ &= \delta_{-i[\alpha(x), \beta(x)]} \psi(x) \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

II-3-2- Les transformations non commutatif

Dans ce cas la relation (II.11) est remplacée par [18.20] :

$$\delta_\Lambda \hat{\psi}(x) = i\Lambda(x) * \hat{\psi}(x) \quad (\text{II.16})$$

Avec :

$$\Lambda(x) = \Lambda(x)_a T^a \quad (\text{II.17})$$

Et les transformations précédentes deviennent sous la forme [13]:

Pour la dérivée covariante:

$$\hat{\delta}_\Lambda \hat{D}_\mu \hat{\psi}(x) = i\Lambda(x) * \hat{D}_\mu \hat{\psi}(x) \quad (\text{II.18})$$

Pour le champ de jauge :

$$\hat{\delta}_\Lambda \hat{A}_\mu = [x_\mu^*, \Lambda(x)] + i[\Lambda(x), \hat{A}_\mu]$$

En utilisant le produit de Moyal-Weyl le commutateur $[x_\mu^*, f(x)]$ s'écrit, pour $\theta_{\mu\nu}$ constante, sous la forme :

$$[x_{\mu}^*, f(x)] = i\theta_{\mu\nu}\partial^{\nu} f(x) \quad (\text{II.19})$$

Donc :

$$\hat{\delta}_{\Lambda} A_{\mu} = \partial_{\mu} \Lambda(x) + i[\Lambda(x), \hat{A}_{\mu}] \quad (\text{II.20})$$

pour le tenseur $\hat{F}_{\mu\nu}$ qui prend sa forme dans l'espace non commutatif :

$$\hat{F}_{\mu\nu} = (\partial_{\mu} \hat{A}_{\nu} - \partial_{\nu} \hat{A}_{\mu}) - i[\hat{A}_{\mu}, \hat{A}_{\nu}] \quad (\text{II.21})$$

Ce tenseur transforme dans l'espace non commutatif comme suivant :

$$\delta_{\Lambda} \hat{F}_{\mu\nu} = i[(\Lambda(x), \hat{F}_{\mu\nu})] \quad (\text{II.22})$$

Avec la combinaison de deux transformations est devient [19.21]:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{\Lambda} \hat{\psi}(x) \hat{\delta}_{\Sigma} \hat{\psi}(x) - \hat{\delta}_{\Sigma} \hat{\psi}(x) \hat{\delta}_{\Lambda} \hat{\psi}(x) &= (\Lambda(x) * \Sigma(x) - \Sigma(x) * \Lambda(x)) * \hat{\psi}(x) \\ &\equiv [\Lambda(x), \Sigma(x)] * \hat{\psi}(x) \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

L'expression de paramètre Ω dans l'espace non commutatif en fonction des générateurs du groupe SU (N) est développée comme suite [19.20] :

$$\Lambda(x) = \Lambda(x)_a : T^a : + \Lambda^1(x)_{ab} : T^a T^b : + \dots + \Lambda^{n-1}(x)_{a_1 \dots a_n} : T^{a_1} \dots T^{a_n} : \quad (\text{II.24})$$

Où

$$\begin{aligned} : T^a &:= T^a \\ : T^a T^b &:= \frac{1}{2} \{T^a, T^b\} \\ : T^{a_1} \dots T^{a_n} &:= \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^n T^{a_1} \dots T^{a_n} \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

II-4-Les transformations des champs dans l'espace non commutatif

Pour résoudre le problème de la charge en géométrie non-commutative en utilisant autres que les groupes unitaires U(N) les groupes SU(N) ou SO(N), et pour conserver la

forme des transformations de jauge des différents champs dynamiques, on est obligé de travailler avec les Seiberg-Witten maps de ces champs $(\hat{\psi}[\psi, A], \hat{A}_\mu[A]), \dots$ ext [17].

Donc Pour chaque paramètre il est possible de construire une théorie de jauge. Le champ spinoriel représenté dans l'équation (II.16) devient sous la forme [18.19.20] :

$$\hat{\delta}_\alpha \hat{\psi} = i\Lambda_\alpha[A] * \hat{\psi} \quad (\text{II.26})$$

Et les transformations non commutatives des relations précédentes deviennent sous les formes :

$$\hat{\delta}_\alpha (\hat{D}_\mu \hat{\psi}(x)) = i\Lambda_\alpha[A] * \hat{D}_\mu \hat{\psi}(x) \quad (\text{II.27})$$

$$\hat{\delta}_\alpha \hat{A}_\mu = \partial_\mu \Lambda_\alpha[A] + i[\Lambda_\alpha[A], \hat{A}_\mu] \quad (\text{II.28})$$

$$\hat{\delta}_\alpha \hat{F}_{\mu\nu} = i[(\Lambda[A])^*, \hat{F}_{\mu\nu}] \quad (\text{II.29})$$

Pour déterminer $\Lambda_\alpha[A]$ en fonction de $\alpha(x)$ et $A_\mu(x)$ on utilise la relation suivante:

$$[\delta_\alpha, \delta_\beta] \hat{\psi}(x) = \delta_{-i[\alpha, \beta]} \hat{\psi}(x)$$

$$\text{Avec:} \quad -i[\alpha, \beta] = \alpha \times \beta \quad (\text{II.30})$$

Avec l'équation (II.26) on peut écrire :

$$[\hat{\delta}_\alpha, \hat{\delta}_\beta] \hat{\psi}(x) = \hat{\delta}_\alpha (i\Lambda_\beta[A] * \hat{\psi}(x)) - \hat{\delta}_\beta (i\Lambda_\alpha[A] * \hat{\psi}(x)) \quad (\text{II.31})$$

On utilisant la règle de Leibniz (sixième propriétés de produit star) la relation (II.31) devient:

$$\begin{aligned} & i\hat{\delta}_\alpha \Lambda_\beta[A] * \hat{\psi}(x) + i\Lambda_\beta[A] * \hat{\delta}_\alpha \hat{\psi}(x) - i\hat{\delta}_\beta \Lambda_\alpha[A] * \hat{\psi}(x) - i\Lambda_\alpha[A] * \hat{\delta}_\beta \hat{\psi}(x) \\ &= i\hat{\delta}_\alpha \Lambda_\beta[A] * \hat{\psi}(x) + i\Lambda_\beta[A] * (i\Lambda_\alpha[A] * \hat{\psi}(x)) - i\hat{\delta}_\beta \Lambda_\alpha[A] * \hat{\psi}(x) - i\Lambda_\alpha[A] * \\ & \quad * (i\Lambda_\beta[A] * \hat{\psi}(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= i(\hat{\delta}_\alpha \Lambda_\beta[A] - \hat{\delta}_\beta \Lambda_\alpha[A]) * \hat{\psi}(x) + (\Lambda_\alpha[A] * \Lambda_\beta[A]) * \hat{\psi}(x) - \Lambda_\beta[A] * \Lambda_\alpha[A] * \hat{\psi}(x) \\
&= i(\hat{\delta}_\alpha \Lambda_\beta[A] - \hat{\delta}_\beta \Lambda_\alpha[A]) * \hat{\psi}(x) + (\Lambda_\alpha[A] * \Lambda_\beta[A] - \Lambda_\beta[A] * \Lambda_\alpha[A]) * \hat{\psi}(x) \\
&= i(\hat{\delta}_\alpha \Lambda_\beta[A] - \hat{\delta}_\beta \Lambda_\alpha[A]) * \hat{\psi}(x) + [\Lambda_\alpha[A], \Lambda_\beta[A]] * \hat{\psi}(x) = \Lambda_{[\alpha, \beta]}[A] * \hat{\psi}(x)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
i(\hat{\delta}_\alpha \Lambda_\beta[A] - \hat{\delta}_\beta \Lambda_\alpha[A]) + [\Lambda_\alpha[A], \Lambda_\beta[A]] &= \Lambda_{[\alpha, \beta]}[A] \\
&= i\Lambda_{\alpha \times \beta}[A]
\end{aligned} \tag{II.32}$$

Ensuite on développe $\Lambda_\alpha[a]$ [20]:

$$\Lambda_\alpha[A] = A(x) + h\Lambda_\alpha^1[A] + h^2\Lambda_\alpha^2[A] + \dots \tag{II.33}$$

On remplace (II.33) dans (II.32), ou premier ordre de h on trouve l'équation:

$$\begin{aligned}
i(\hat{\delta}_\alpha \Lambda_\beta^1[A] - \hat{\delta}_\beta \Lambda_\alpha^1[A]) + [\alpha, \Lambda_\beta^1[A]] - [\beta, \Lambda_\alpha^1[A]] - i\Lambda_{\alpha \times \beta}^1[A] \\
= -\frac{i}{2} \theta^{ij} \{\partial_i \alpha(x), \partial_j \beta\}
\end{aligned} \tag{II.34}$$

La solution générale de cette contrainte est donnée par:

$$\Lambda_\alpha^1[A] = \frac{1}{4} \theta^{ij} \{\partial_i \alpha(x), A_j\} = \frac{1}{2} \theta^{ij} \{\partial_i \alpha_a(x), A_{j,b}\} : T^a T^b : \tag{II.35}$$

II-4-1- les champs

En théorie de jauge non commutative le champ $\psi(x)$ transforme selon la relation

(II.26). On développe $\psi(x)$ comme suit [20]:

$$\hat{\psi}[A] = \psi + h^1 \psi^1[A] + h^2 \psi^2[A] + \dots \tag{II.36}$$

Les transformations du champ spénoriel dans l'espace non commutatif sont de la forme :

$$\hat{\delta} \hat{\psi}[a] = \delta \psi^0 + h^1 \delta \psi^1[1] + h^2 \delta \psi^2[A] + \dots \tag{II.37}$$

Ou

$$\delta \psi = i\alpha(x)\psi$$

Sont les transformations dans le cas ordinaire (zéro ordre de $\hbar$).

Si on remplace (II.36) dans (II.26) on trouve au premier ordre de $\hbar$ la transformation:

$$\delta_\alpha \psi^1[A] = i\alpha(x)\psi^1[A] + i\Lambda_\alpha^1[A]\psi - \frac{1}{2}\theta^{ij}\partial_i\alpha(x)\partial_j\psi \quad (\text{II.38})$$

Et si on prend la solution (II.35) de $\Lambda_\alpha^1[A]$, nous trouvons:

$$\psi^1[A] = -\frac{1}{2}\theta^{ij}A_i\partial_j\psi + \frac{i}{2}\theta^{ij}A_iA_j\psi \quad (\text{II.39})$$

De même pour les ordres plus supérieurs.

$$\begin{aligned} \delta_\alpha \psi^2[A] &= i\alpha(x)\psi^2[A] + i\Lambda_\alpha^1[A]\psi^1[A] + i\Lambda_\alpha^2[A]\psi - \frac{1}{2}\theta^{ij}\partial_i\Lambda_\alpha^1[A]\partial_j\psi \\ &\quad - \frac{1}{2}\theta^{ij}\partial_i\alpha(x)\partial_j\psi^1[A] - \frac{i}{8}\theta^{ij}\theta^{kl}\partial_i\partial_k\alpha(x)\partial_j\partial_l\psi \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

II-4-2- Le potentiel de jauge

On a vu le comportement du potentiel A_μ dans l'espace non commutatif. Les transformations non commutatif du potentiel de jauge sont donnée par:

$$\hat{\delta}_\alpha \hat{A}_\mu = \partial_\mu \Lambda_\alpha[A] + i[\Lambda_\alpha[A], \hat{A}_\mu]$$

Qui développe comme suit :

$$A_\mu[A] = A_\mu[a] + \hbar A_\mu^1[a] + \hbar^2 A_\mu^2[a] + \dots \quad (\text{II.41})$$

Donc:

$$\hat{\delta} \hat{A}_\mu[a] = \delta A_\mu[a] + \hbar \delta A_\mu^1[a] + \hbar^2 \delta A_\mu^2[a] + \dots \quad (\text{II.42})$$

Ou zéro ordre de $\hbar$ on trouve (II.13), et à premier ordre de $\hbar$ on trouve:

$$\delta_\alpha A_\mu^1[a] = \partial_\mu \Lambda_\alpha^1[a] + i[\Lambda_\alpha^1[a], A_\mu] + i[\alpha(x), A_\mu^1[a]] - \frac{1}{2}\theta^{kl}\{\partial_k\alpha(x), \partial_l A_\mu\} \quad (\text{II.43})$$

Avec :

$$A_\mu^1[a] = -\frac{1}{4}\theta^{kl}\{A_k, \partial_l A_\mu + F_{l\mu}\} \quad (\text{II.44})$$

De même pour le tenseur $\hat{F}_{\mu\nu}$, on trouve au premier ordre de $\hbar$:

$$F^1_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\theta^{kl}\{F_{\mu k}, F_{\nu l}\} - \frac{1}{4}\theta^{kl}\{a_k, (\partial_l + D_l)F_{\mu\nu}\} \quad (\text{II.45})$$

Finalement on écrit dans l'espace non commutatif les formules des champs précédentes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_\alpha[a] = \alpha(x) + \frac{1}{4}\theta^{ij}\{\partial_i\alpha(x), A_j\} + O(\theta^2) \\ \hat{\psi}(x) = \psi - \frac{1}{2}\theta^{ij}a_i\partial_j\psi + \frac{i}{2}\theta^{ij}a_ia_j\psi + O(\theta^2) \\ \hat{A}_\mu[a] = A_\mu - \frac{1}{4}\theta^{kl}\{A_k, \partial_l A_\mu + F_{l\mu}\} + O(\theta^2) \\ \hat{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\theta^{kl}\{F_{\mu k}, F_{\nu l}\} - \frac{1}{4}\theta^{kl}\{a_k, (\partial_l + D_l)F_{\mu\nu}\} + O(\theta^2) \end{array} \right. \quad (\text{II.46})$$

II-5-Conclusion :

Dans ce chapitre nous étudierons les formalismes mathématiques de l'espace non commutatif, et nous avons déterminé la relation suivante :

$$Terme_{NON.COMMUTATIF} = Terme_{ORDINAIRE} + corrections$$

Chapitre III

***L'effet du non
commutativité de l'espace-
temps sur les théories de
jauge abéliennes et non
abéliennes avec quelques
applications***

III-1- Introduction :

Dans ce chapitre on applique les formalismes mathématiques de l'espace non commutatif sur la théorie de jauge de l'interaction électromagnétique et faible, et plus on déterminé les règles de Feynman correspond quelque processus physique élémentaire dans l'espace non commutatif.

III-2-Rappelle sur les transformations de jauge ordinaire :

On a vue que les expressions des dérivés covariants correspond les groupes des jauges $U(1)$ et $SU(2)$ dans l'espace ordinaire respectivement sont donnée par [12,13] :

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \quad (\text{III.1})$$

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu = \partial_\mu - ig \sum_{a=1}^3 \frac{\sigma^a}{2} A_\mu^a \quad (\text{III.2})$$

Les effets des dérivées covariantes sur les différents champs spinoriels sont donnée par [02] :

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu - ieA_\mu) \psi \quad (\text{III.3})$$

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu - ig \sum_{a=1}^3 \frac{\sigma^a}{2} A_\mu^a) \psi \quad (\text{III.4})$$

respectivement. Les champs de jauge transformés correspondent les groupes $U(1)$ et $SU(2)$ [11, 12,15] :

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \quad (\text{III.5})$$

$$A_\mu^{'a} = A_\mu^a + \sum_{c=1}^3 \varepsilon^{abc} \alpha^b A_\mu^c - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a \quad (\text{III.6})$$

On peut donner la représentation explicite des tenseurs $F_{\mu\nu}$ en termes des champs correspond les groupes $U(1)$ et $SU(2)$ respectivement [02,15] :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (\text{III.7})$$

$$F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - i[A_\mu, A_\nu] \quad (\text{III.8})$$

Avec :

$$F_{\mu\nu} = g F_{\mu\nu}^a \frac{\sigma^a}{2} \quad \text{et} \quad A_\mu = g A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}, a=1,2,3 \quad (\text{III.9})$$

Donc :

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (\text{III.10})$$

Les tenseur antisymétries des champs des jauge correspond les deux groupes $U(1)$ et $SU(2)$ respectivement donnée par :

$$[D_\mu, D_\nu] = -ie F_{\mu\nu} \quad (\text{III.11})$$

$$[D_\mu, D_\nu] = -ig F_{\mu\nu} \quad (\text{III.12})$$

III-3-Les transformations des jauge dans l'espace non commutatif :

On vu que les transformations de jauge des champs spinoriel, le champ de jauge et la tenseur $F_{\mu\nu}$ dans l'espace ordinaire sont donnée respectivement [13]:

$$\delta_\alpha \psi(x) = i\alpha(x) \psi(x) \quad (\text{III.13})$$

$$\delta_\alpha A_\mu = \partial_\mu \alpha(x) + i[\alpha(x), A_\mu] \quad (\text{III.14})$$

$$\delta_\alpha F_{\mu\nu} = i[(\alpha(x), F_{\mu\nu})] \quad (\text{III.15})$$

D'après les connaissances de l'espace temps non commutatif vu dans le chapitre II, pour obtenir les formalismes des transformations appliquées aux champs spinoriels. On remplace le produit ordinaire par le produit star(*), les champs Ψ par l'opérateur $\hat{\Psi}$, le paramètre α est remplacé par l'opérateur Λ donc les transformations deviennent dans l'espace temps non commutatif [05, 20, 22]:

$$\hat{\delta}_\Lambda \hat{\psi}(x) = i\hat{\Lambda}(x) * \hat{\psi}(x) \quad (\text{III.16})$$

$$\hat{\delta}_\Lambda \hat{A}_\mu = -i[x_\mu, \hat{\Lambda}(x)] + i[\hat{\Lambda}(x), \hat{A}_\mu] \quad (\text{III.17})$$

$$\hat{\delta}_\Lambda \hat{F}_{\mu\nu} = i[(\hat{\Lambda}(x), \hat{F}_{\mu\nu})] \quad (\text{III.18})$$

Avec $\Lambda(x)$ le paramètre des transformations infinitésimales tel que :

$$\hat{\Lambda}(x) = \Lambda(x)_a T^a \quad (\text{III.19})$$

Le commutateur $[x_\mu, \Lambda(x)]$ s'écrit :

$$[x_\mu, \Lambda(x)] = i\theta_{\mu\nu} \partial^\nu \Lambda(x) \quad (\text{III.20})$$

Ce qui permet de trouver l'expression de transformation $\hat{\delta}_\Lambda \hat{A}_\mu$ et $\hat{F}_{\mu\nu}(x)$ dans l'espace non commutatif :

$$\hat{\delta}_\Lambda \hat{A}_\mu = \partial_\mu \hat{\Lambda}(x) + i[\hat{\Lambda}(x), \hat{A}_\mu] \quad (\text{III.21})$$

$$\hat{F}_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \hat{A}_\nu(x) - \partial_\nu \hat{A}_\mu(x) - i[\hat{A}_\mu(x), \hat{A}_\nu(x)] \quad (\text{III.22})$$

Avec :

$$\hat{A}(x) = i\theta_{\mu\nu} \hat{A}^\nu(x) \quad , \quad \hat{F}_{\mu\nu}(x) = i\theta_{\mu k} \theta_{\nu l} \hat{F}^{kl}(x) \quad (\text{III.23})$$

Concernant l'expression $\hat{D}_\mu \hat{\psi}$ dans l'espace non commutatif, on applique les transformations que on vu dans le deuxième chapitre, on peut trouver facilement :

$$\hat{D}_\mu \hat{\psi} = (\partial_\mu - i\hat{A}_\mu) * \hat{\psi} \quad (\text{III.24})$$

$$\hat{D}_\mu \hat{\psi} = \partial_\mu \hat{\psi} - i\hat{A}_\mu * \hat{\psi} \quad (\text{III.25})$$

Donc :

$$\hat{\delta}_\alpha (\hat{D}_\mu \hat{\psi}(x)) = i\hat{\Lambda}_\alpha(x) * \hat{D}_\mu \hat{\psi}(x) \quad (\text{III.26})$$

Et le tenseur de courbure non commutatif $F_{\mu\nu}(x)$ est défini par la relation suivant:

$$\hat{F}_{\mu\nu}(x) = i[\hat{D}_\mu, \hat{D}_\nu] \quad (\text{III.27})$$

Donc finalement les transformations de Seiberg-Witten :

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_\alpha[A] &= \alpha(x) + \frac{1}{4} \theta^{ij} \{ \partial_i \alpha(x), A_j \} + O(\theta^2) \\ \hat{\psi}(x) &= \psi - \frac{1}{2} \theta^{ij} A_i \partial_j \psi + \frac{i}{4} \theta^{ij} A_i A_j \psi + O(\theta^2) \\ \hat{A}_\mu[A] &= A_\mu - \frac{1}{4} \theta^{kl} \{ A_k, \partial_l A_\mu + F_{l\mu} \} + O(\theta^2) \\ \hat{F}_{\mu\nu}[A] &= F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \theta^{kl} \{ F_{\mu k}, F_{\nu l} \} - \frac{1}{4} \theta^{kl} \{ A_k, (\partial_l + D_l) F_{\mu\nu} \} + O(\theta^2) \\ \hat{\delta}_\Lambda \hat{D}_\mu \hat{\psi}(x) &= i\hat{\Lambda}(x) * \hat{D}_\mu \hat{\psi}(x) \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

III-4-L'électrodynamique quantique QED non commutative:

Dans un espace temps non commutatif on va garder la même forme du lagrangien, mais les champs ψ , $\bar{\psi}$ et A_μ seront des opérateurs qui dépendent des coordonnées $\hat{x}_\mu$ Qui sont eux-mêmes non commutatif [17]:

$$\hat{L} = -\frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu} + \hat{\bar{\psi}} (i \hat{D} - m) \hat{\psi} \quad (\text{III.29})$$

Avec

$$\hat{D} = \partial - ie\hat{A} \quad (\text{III.30})$$

L'action S définit par :

$$S = Tr \hat{L} \quad (\text{III.31})$$

En utilisant la transformation de Weyl $\hat{L}$ est le transforme de L donné par[17] :

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\partial + eA - m) * \psi \quad (\text{III.32})$$

Et l'action S :

$$S = \int d^4x L \quad (\text{III.33})$$

Soit U est un opérateur unitaire, Dans le cas de la QED sur un espace temps ordinaire (Commutatif) lagrangien L est invariant par les transformations $U = e^{i\alpha(x)}$ élément du groupe $U(1)$, On exige de même pour le cas non commutatif. Soit la transformation [17]:

**Chapitre III: L'effet du non commutativité de l'espace-temps sur les théories de
jauges abéliennes et non abéliennes avec quelques applications**

$$\psi \rightarrow \psi' = U * \psi = e^{i\alpha(x)} * \psi \quad (\text{III.34})$$

Dans le cas non commutatif :

$$\bar{\psi}' * (i\mathcal{D} - m) * \psi' = \bar{\psi} * (i\mathcal{D} - m) * \psi \quad (\text{III.35})$$

Avec :

$$\psi' = U * \psi \quad (\text{III.36})$$

Et :

$$\partial_\mu \psi' = \partial_\mu U * \psi + U * \partial_\mu \psi \quad (\text{III.37})$$

Avec :

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi} * U^+ \quad (\text{III.38})$$

$$\mathcal{D}' = \gamma^\mu \partial'_\mu + ie\gamma^\mu A'^\mu \quad (\text{III.39})$$

Donc:

$$\bar{\psi} * U^+ * (i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A'^\mu) * U * \psi = \bar{\psi} * (i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A^\mu) * \psi \quad (\text{III.40})$$

En utilisant:

$$\begin{aligned} U(x) * U^+(x) &= U^+(x) * U(x) = 1 \\ iU^+ * \partial_\mu U - eU^+ * A'_\mu * U &= -eA_\mu \end{aligned} \quad (\text{III.41})$$

Donc:

$$A'_\mu = U * A_\mu * U^+ + \frac{i}{e} \partial_\mu U * U^+ \quad (\text{III.42})$$

Chapitre III: L'effet du non commutativité de l'espace-temps sur les théories de jauge abéliennes et non abéliennes avec quelques applications

Le tenseur $F_{\mu\nu}$ ordinaire:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (\text{III.43})$$

Est un invariant de jauge :

$$F_{\mu\nu} = F'_{\mu\nu} \quad (\text{III.44})$$

Ou :

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \quad (\text{III.45})$$

Mais si on définit $F_{\mu\nu}$ comme suit:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ie[A_\mu^*, A_\nu] \quad (\text{III.46})$$

Pour une transformation de jauge

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = U * F_{\mu\nu} * U^+ \quad (\text{III.47})$$

Le lagrangien de Maxwell se transforme comme suit [17] :

$$-\frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} U * F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} * U^+ \quad (\text{III.48})$$

Donc, on peut écrire l'expression de l'action comme suit :

$$S'_{\text{Maxwell}} = \int -\frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} d^4x \quad (\text{III.49})$$

En utilisant la propriété de cyclicité de la trace :

$$\begin{aligned} S'_{Maxwell} &= \int -\frac{1}{4} U^+ * U * F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} d^4x \\ &= S_{Maxwell} \end{aligned} \quad (III.50)$$

$S_{Maxwell}$ Est un invariant de jauge, et par conséquent, l'action totale de QED sur un espace temps non Commutatif est un invariant de jauge, Pour le différentier du groupe $U(1)$ ordinaire généré par les éléments de type $e^{i\alpha}$, on le nomme $U_{NC}(1)$ qui est dégénéré par les éléments de type $e_*^{i\alpha(x)}$ ou $(e^{i\alpha(x)})_*$ ou $e^{*i\alpha(x)}$.

$$e_*^{i\alpha(x)} = 1 + i\alpha(x) + \left(\frac{i}{2}\right)^2 \alpha(x) * \alpha(x) + \dots \quad (III.51)$$

Le groupe $U_{NC}(1)$ est non abélien puisque si U_1 et U_2 deux éléments de $U_{NC}(1)$ Alors :

$$U_1 * U_2 \neq U_2 * U_1 \quad (III.52)$$

En fin, pour trouver l'expression de la densité Lagrangienne (QED) non commutatif, il faut écrire les expressions $\hat{\psi}, \hat{A}_\mu$ et $\hat{F}_{\mu\nu}$ comme suit [23] :

$$\begin{cases} \hat{\psi} = \psi + \psi'(\psi, A_\nu; \theta^{\rho\sigma}) + O(\theta^2) \\ \hat{A}_\mu = A_\mu + A'_\mu(A_\nu; \theta^{\rho\sigma}) + O(\theta^2) \\ \hat{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + \theta^{\rho\sigma} (F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} - A_\rho \partial_\sigma F_{\mu\nu}) + O(\theta^2). \end{cases} \quad (III.53)$$

Avec:

$$\begin{cases} \psi' = -\frac{1}{2}\theta^{\rho\sigma}A_\rho(\partial_\sigma A_\mu + F_{\sigma\mu}) \\ A'_\mu = -\frac{1}{2}\theta^{\rho\sigma}A_\rho(\partial_\sigma \psi) \\ F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \end{cases} \quad (III.54)$$

D'après les équations (III.52), (III.53) et (III.54) on trouve la densité Lagrangienne (QED) non commutatif :

$$L_{QED-NC} = L_{QED-Or} + L_{Core} \quad (III.55)$$

Où L_{Core} est donnée par :

$$\begin{aligned} L_{Core} = & -\frac{1}{2}\theta^{\rho\sigma}(\partial_\mu A_\rho \partial_\sigma \psi + A_\rho \partial_\mu \partial_\sigma \psi) + \frac{i}{2}\theta^{\rho\sigma}(A_\rho(\partial_\sigma A_\mu + F_{\sigma\mu})\psi + A_\mu A_\rho \partial_\sigma \psi - i\partial_\rho A_\mu \partial_\sigma \psi) \\ & -\frac{1}{2}\theta^{\rho\sigma}A_\rho \partial_\sigma \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi + \frac{1}{2}m\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho A_\sigma \bar{\psi} \psi - \frac{1}{2}\theta^{\rho\sigma}(F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\rho\sigma}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (III.56)$$

III-5- Les règles de Feynman pour QED non commutative :

La densité lagrangien d'un champ fermionique en interaction avec un champ photoniques est la somme deux termes, le premier décrie Lagrangienne libre et le second l'interaction entre champs fermionique et photonique [17]:

$$L = L_0 + L_I \quad (III.57)$$

Où L_0 et L_I est donnée par:

$$\begin{aligned} L_0 &= \bar{\psi}(x)(i\partial - m)\psi(x) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ L_I &= -e\bar{\psi}A\psi \end{aligned} \quad (III.58)$$

L'expression de la matrice Dyson S est donnée par:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n T\{H_I(x_1)H_I(x_2)\dots H_I(x_n)\} \quad (III.59)$$

Ou T est le produit chronologique définit par:

$$T = \{\phi(x)\phi(x')\} = \begin{cases} \phi(x)\phi(x'), t \succ t' \\ \phi(x')\phi(x), t' \succ t \end{cases} \quad (\text{III.60})$$

Si , l'opérateur T appliqué sur les champs spinoriel :

$$T = \{\Psi(x)\Psi(x')\} = \begin{cases} \Psi(x)\Psi(x'), t \succ t' \\ -\psi(x')\psi(x), t' \succ t \end{cases} \quad (\text{III.61})$$

III-5-1-Théorème de Wick :

L'opérateur T appliqué sur les opérateurs A, B, C, D, W, X, Y et Z est donnée par [17]:

$$\begin{aligned} T(ABCD...WXYZ) &= N(ABDW...WXYZ) + N(\overleftrightarrow{AB}CD...WXYZ) \\ &+ N(\overleftrightarrow{ABC}D...WXYZ) + N(\overleftrightarrow{ABCD}...WXYZ) + N(AB...\overleftrightarrow{WX}\overleftrightarrow{YZ}) + ... \end{aligned} \quad (\text{III.62})$$

Ou $\overleftrightarrow{AB}$ signifie la contraction de deux champs A et B de même type (photonique-photonique et fermionique-fermionique) est donnée par :

$$\overleftrightarrow{A(x_1)B(x_2)} \equiv \langle 0 | \{A(x_1)B(x_2)\} | 0 \rangle \quad (\text{III.63})$$

En particulier pour les champs spinoriel et photonique:

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)} &= iS_F(x_1 - x_2) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p \tilde{S}_F(p) e^{-ip(x_1 - x_2)} \\ \overleftrightarrow{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)} &= i\Delta_F^{\mu\nu}(x_1 - x_2) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 k \Delta_F^{\mu\nu}(K) e^{-ik(x_1 - x_2)} \end{aligned} \quad (\text{III.64})$$

Il est très important de noter que, le propagateur représenté le médiateur de l'interaction entre deux points de l'espace-temps. En représentation d'impulsion, les deux propagateurs spinoriel et photonique[02,03,17,23,24]:

$$iS_F(p) = \frac{i(p+m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = \frac{i}{p - m + i\varepsilon} \quad (\text{III.65})$$

$$i\Delta_F^{\mu\nu} = \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon}$$

Avec :

$$\psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3 p}{(2\Pi)^3 2E} [a_s(p) u(p, s) e^{-ipx} + b_s^+(p) v(p, s) e^{ipx}] \quad (\text{III.66})$$

$$\psi(x) = \psi^+(x) + \psi^-(x)$$

Avec la notation :

$$\int \frac{d^3 p}{(2\Pi)^3 2E} = \int_p \quad (\text{III.67})$$

Donc on a trouve :

$$\psi(x) = \sum_s \int_p [a_s(p) u(p, s) e^{-ipx} + b_s^+(p) v(p, s) e^{ipx}] \quad (\text{III.68})$$

On a :

$$\sum_s \int_p = \int_{p,s} \quad (\text{III.69})$$

Donc on peut écrire :

$$\psi(x) = \int_{p,s} [a_s(p) u(p, s) e^{-ipx} + b_s^+(p) v(p, s) e^{ipx}] \quad (\text{III.70})$$

Ou :

$$\begin{aligned} \psi^+(x) | e^-, p, s \rangle &= u(p, s) e^{-ipx} | 0 \rangle \\ \psi^-(x) | 0 \rangle &= \int_{p,s} v(p, s) e^{ipx} | e^+, p, s \rangle \end{aligned} \quad (\text{III.71})$$

Et

$$\bar{\psi}(x) = \sum_s \int \frac{d^3 p}{(2\Pi)^3 2E} [b_s \bar{v}(p, s) e^{-ipx} + a_s^+(p) \bar{u}(p, s) e^{ipx}] \quad (\text{III.72})$$

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^+(x) + \bar{\psi}^-(x)$$

On utilise l'équation (III.67) et (III.69) pour trouve:

$$\bar{\psi}(x) = \int_{p,s} [b_s(p) \bar{v}(p,s) e^{-ipx} + a_s^+(p) \bar{u}(p,s) e^{ipx}] \quad (\text{III.73})$$

Avec :

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^+(x) | e^+, p, s \rangle &= \bar{v}(p,s) e^{-ipx} | 0 \rangle \\ \bar{\psi}^-(x) | 0 \rangle &= \int_{p,s} \bar{u}(p,s) e^{ipx} | e^-, p, s \rangle \end{aligned} \quad (\text{III.74})$$

Où $u(p,s)$ et $v(p,s)$ sont des spineurs qui vérifient l'équation de Dirac

$$\begin{aligned} (p - m)u(p,s) &= 0 \\ (p - m)v(p,s) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.75})$$

Ou $u(p,s)$ et $v(p,s)$:

$$\begin{aligned} u(p,s) &= \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \varphi^s \\ \frac{\vec{\sigma} \vec{p}}{E+m} \varphi^s \end{pmatrix} \\ v(p,s) &= \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \vec{p}}{E+m} \chi^s \\ \chi^s \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III.76})$$

Avec les conditions :

$$\varphi^s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ ou } \varphi^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{III.77})$$

$$\chi^s = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ ou } \chi^s = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.78})$$

$$\begin{aligned}
 u^+(p, r)u(p, s) &= v^+(p, r)v(p, s) = \frac{E_p}{m} \delta_{rs} \\
 u^+(p, r)v(p, s) &= 0 \\
 \bar{u}(p, s) &= u^+(p, s)\gamma^0 \\
 \bar{v}(p, s) &= v^+(p, s)\gamma^0
 \end{aligned} \tag{III. 79}$$

Ou $\bar{u}(p, s)$ et $\bar{v}(p, s)$:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(p, s) &= \gamma^0 u^+(p, s) = \gamma^0 \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \varphi^{*s} & \frac{\vec{\sigma} \vec{p}}{E+m} \varphi^{*s} \end{pmatrix} \\
 \bar{v}(p, s) &= \gamma^0 v^+(p, s) = \gamma^0 \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \vec{p}}{E+m} \chi^{*s} & \chi^{*s} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{III.80}$$

Avec $a_s(p)$ et $(b_s(p))$ Sont les opérateurs de destruction d'un électron (d'un Positron) de spin s et d'impulsion p et $a_s^+(p)(b_s^+(p))$ Sont les opérateurs de création d'un électron (d'un positron) de spin s et d'impulsion p .

Les relations d'anti commutation suivantes [17,23,24,25,26.27]:

$$\{a_r(p), a_s^+(p)\} = \{b_r(p), b_s^+(p)\} = \delta_{rs} \delta_{pp} \tag{III.81}$$

Avec $\delta_{rs} \delta_{pp}$:

$$\begin{aligned}
 \delta_{rs} &= \begin{cases} 0 & r \neq s \\ 1 & r = s \end{cases} \\
 \delta_{pp} &= 2E(\vec{p}) \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')
 \end{aligned} \tag{III.82}$$

Les autres antis commutateurs sont nuls, Les opérateurs nombres des particules définissent par:

$$N_s(p) = a_s^+(p) a_s(p) \tag{III.83}$$

Et les opérateurs nombres des antis particules définit par:

$$\bar{N}_s(p) = b_s^+(p) b_s(p) \tag{III.84}$$

L'état du vide $|0\rangle$ est défini par:

$$\begin{aligned} a_s(p)|0\rangle &= 0 \\ b_s(p)|0\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.85})$$

En d'autres termes on a:

$$\begin{aligned} \psi^+(x)|0\rangle &= 0 \\ \bar{\psi}^+(x)|0\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.86})$$

Le champ $A_\mu(x)$, il est donné par :

$$A^\mu(x) = A^{\mu+}(x) + A^{\mu-}(x) \quad (\text{III.87})$$

Avec :

$$\begin{aligned} A^{\mu+}(x) &= \sum_\lambda \int \frac{d^3k}{(2\Pi)^3 2E} \varepsilon_\lambda^\mu c_\lambda(k) e^{-ikx} \\ A^{\mu-}(x) &= \sum_\lambda \int \frac{d^3k}{(2\Pi)^3 2E} \varepsilon_\lambda^{*\mu} c_\lambda^+(k) e^{+ikx} \end{aligned} \quad (\text{III.88})$$

On utilise l'intégrale :

$$\int \frac{d^3k}{(2\Pi)^3 2E} = \int_k \quad (\text{III.89})$$

Et :

$$\sum_\lambda \int \frac{d^3k}{(2\Pi)^3 2E} = \int_{\lambda,k} \quad (\text{III.90})$$

Donc, on peut écrire:

$$\begin{aligned} A^{\mu+}(x) &= \int_{\lambda,k} \varepsilon_\lambda^\mu c_\lambda(k) e^{-ikx} \\ A^{\mu-}(x) &= \int_{\lambda,k} \varepsilon_\lambda^{*\mu} c_\lambda^+(k) e^{+ikx} \end{aligned} \quad (\text{III.91})$$

Les conditions:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\lambda}^{\mu}(k)\varepsilon_{\lambda}^{\mu} &= g_{\lambda\lambda} \\ \sum_{\lambda}\varepsilon_{\lambda}^{\mu}(k)\varepsilon_{\lambda}^{\mu} &= -g^{\mu\nu}\end{aligned}\quad (\text{III.92})$$

L'opérateur destruction d'un photon de polarisation λ et d'impulsion k est $c_{\lambda}(k)$, l'opérateur de création d'un photon de polarisation λ et d'impulsion k est $c_{\lambda}^{+}(k)$, Les lois de commutations vérifient que :

$$[c_{\lambda}(k), c_{\lambda}^{+}(k)] = -g_{\lambda\lambda} \varepsilon_{kk} \quad (\text{III.93})$$

Les autres commutateurs sont nuls. L'état du vide $|0\rangle$ est défini par :

$$\begin{aligned}c_{\lambda}(k)|0\rangle &= 0 \\ A_{\mu}^{+}(k)|0\rangle &= 0\end{aligned}\quad (\text{III.94})$$

III-5-2-La matrice S :

L'élément $S_{fi}^{(n)}$ est définie par:

$$S_{fi}^{(n)} = \langle f | S^{(n)} | i \rangle \quad (\text{III.95})$$

Pour le ou $n=1$, on a

$$S_{fi}^{(1)} = \langle f | S^{(1)} | i \rangle \quad (\text{III.96})$$

Et d'après la relation Dyson on peut trouver :

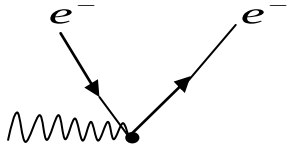
$$S^{(1)} = -i \int dx H_I(x) = -i \int dx e : \bar{\psi} A \psi : \quad (\text{III.97})$$

Alor, on peut écrire :

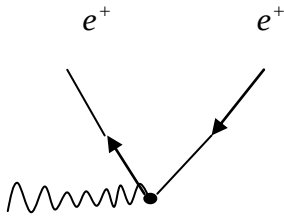
$$\langle f | S^{(1)} | i \rangle = -ie \int dx \langle f | : \bar{\psi} \gamma^{\mu} A_{\mu} \psi : | i \rangle \quad (\text{III.98})$$

Chapitre III: L'effet du non commutativité de l'espace-temps sur les théories de jauge abéliennes et non abéliennes avec quelques applications

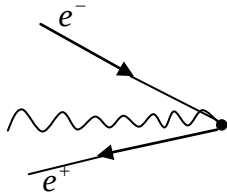
Le terme contient donc 8 processus, sont représenté par les diagrammes suivant :



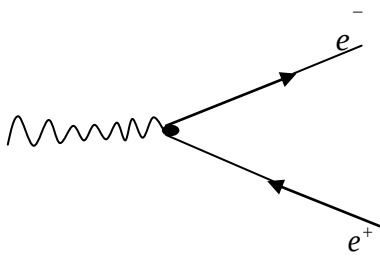
$$e^- + \gamma \rightarrow e^-$$



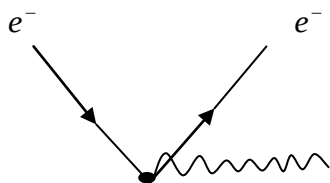
$$e^+ + \gamma \rightarrow e^+$$



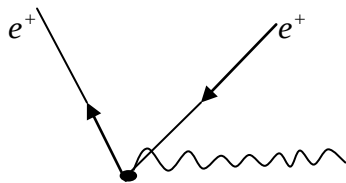
$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma$$



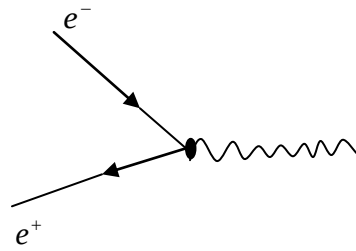
$$\gamma \rightarrow e^- + e^+$$



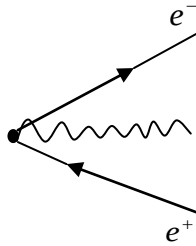
$$e^- \rightarrow e^- + \gamma$$



$$e^+ \rightarrow e^+ + \gamma$$



$$e^- + e^+ \leftarrow \gamma$$



$$vide \leftarrow \gamma + e^- + e^+$$

Qui devient dans le cadre de la géométrie non commutative de la forme:

$$S^{(1)} = -i \int dx H_I(x) = -i \int dx e : \bar{\psi} * A * \psi : \quad (\text{III.99})$$

Alor, on peut écrire :

$$\prec f | S^{(1)} | i \succ = -ie \int dx \prec f | : \bar{\psi} * \gamma^\mu A_\mu * \psi : | i \succ \quad (\text{III.100})$$

H_I Définit Hamiltonien représente les différentes interactions possible

$: H_I :$ Définit le produit normal

III-6-Application sur le positron :

Les règles de Feynman associe un diagramme l'état initial $|i\rangle$ est constitué d'un positron de spin S et d'impulsion P_i , l'état final $|f\rangle$ est constitué d'un positron de spin S' et d'impulsion p_f et d'un photon de polarisation λ et d'impulsion k_f .

III-6-1-Positron dans l'espace commutatif (ordinaire):

Pour déterminé l'élément $S_{fi}^{(1)}$ qui correspond ce processus, il faut considérer l'opérateur d'annulation d'un positron initial et l'opérateur de création d'un positron final et l'opérateur de création d'un photon final.

On utilise l'expression (III.97) pour trouve suivant [17,23,24,26] :

$$S^{(1)} = -ie \int d^4x : \bar{\psi}^+ A_\mu^- \psi^- : \quad (\text{III.101})$$

Avec

$$A_\mu = \gamma^\mu A_\mu \quad (\text{III.102})$$

Avec l'effet de $\bar{\psi}^+(x)$ sur l'état $|e^+, p_f, s' \rangle$ est donnée par:

$$\bar{\psi}^+(x) |e^+, p_f, s' \rangle = \bar{v}(p_f, s') e^{-ip_f x} |0 \rangle \quad (\text{III.103})$$

$$A^{\mu-}(x) |0 \rangle = \int_{k_f, \lambda} \varepsilon_\lambda^{*\mu}(\vec{k}_f) e^{+ik_f x} | \gamma, k_f, \lambda \rangle \quad (\text{III.104})$$

$$\psi^-(x) |0 \rangle = \int_{p_i, s} v(p_i, s) e^{ip_i x} |e^+, p_i, s \rangle \quad (\text{III.105})$$

Donc :

$$|i \rangle = |e^+, p_i, s \rangle = b_s(p_i) |0 \rangle \quad (\text{III.106})$$

Et :

$$|f \rangle = |e^+, p_f, s', \gamma, k_f, \lambda \rangle = c_\lambda^+(k_f) b_s^+(p_f) |0 \rangle \quad (\text{III.107})$$

Donc, on a:

$$S_{fi}^{(1)} = - \langle e^+, p_f, s', \gamma, k_f, \lambda | ie \int d^4x \bar{\psi}^+(x) \gamma^\mu A_\mu^-(x) \psi^-(x) | e^+, p_i, s \rangle \quad (\text{III.108})$$

L'équation (III.108) réduit ce la forme :

$$S_{fi}^{(1)} = -ie \int d^4x [\bar{v}(p_f, s') e^{-ip_f x}] [\gamma^\mu \varepsilon_\lambda^{*\mu}(\vec{k}_f) e^{+ik_f x}] [v(p_i, s) e^{ip_i x}] \quad (\text{III.109})$$

On peut simplifier l'équation (III.109) :

$$S_{fi}^{(1)} = -ie \int d^4x e^{i(p_i - p_f + k_f)x} [\bar{v}(p_f, s') \gamma^\mu \varepsilon_\lambda^{*\mu}(\vec{k}_f) V(p_i, s)] \quad (\text{III.110})$$

En utilisant l'intégral [17] :

$$\int d^4x e^{i(p_i - p_f + k_f)x} = 2\pi^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f + k_f) \quad (\text{III.111})$$

Pour trouver :

$$S_{fi}^{(1)} = 2\pi^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f + k_f) M_{or}^{(1)} \quad (\text{III.112})$$

Ou $M_{or}^{(1)}$ est l'amplitude de Feynman dans l'espace-temps ordinaire, qui donnée par :

$$M_{or}^{(1)} = -ie \bar{v}(p_f, s') \gamma^\mu \varepsilon_\lambda^{*\mu}(\vec{k}_f) v(p_i, s) \quad (\text{III.113})$$

On trouve les règles de Feynman suivantes dans l'espace temps ordinaire :

1 . Pour chaque vertex entre deux fermions et un photon, écrire un facteur :

L'impulsion de positron initial est p_i .

L'impulsion de positron final est p_f

2. Pour chaque ligne interne de photon, marqué par l'impulsion k , écrire un facteur

Et :

$$|f\rangle = |e^+(p_f, s')\gamma(k_f, \lambda) = c_\lambda^+(k_f)b_{s'}^+(p_f)|0\rangle \quad (\text{III.116})$$

Donc :

$$\langle f | S^{(1)} | i \rangle = -ie \int dx \langle f | : \bar{\psi}^+ * \gamma^\mu A_\mu^- * \psi^- : | i \rangle \quad (\text{III.117})$$

Et en utilisant les propriétés de produit star :

$$\bar{\psi}^+(x) * A^-(x) * \psi^-(x) \approx b^+ c^+ b \quad (\text{III.118})$$

Et :

$$\psi^-(x) | i \rangle = v_s(p_i) \exp[ip_i x] | 0 \rangle \quad (\text{III.119})$$

Et :

$$A^-(x) * \psi^-(x) | i \rangle = \int \varepsilon_\lambda^{*\mu}(k_f) \gamma_\mu v_s(p_i) \exp(ik_f x) * \exp(ip_i x) | \gamma(\lambda, k_f) \rangle \quad (\text{III.120})$$

Alors :

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}^+(x) * A^-(x) * \psi^-(x) | i \rangle \\ &= \int \bar{v}_{s'}(p_f) \varepsilon_\lambda^{*\mu}(k_f) \gamma_\mu v_s(p_i) \exp(-ip_f x) * \exp(ik_f x) * \exp(ip_i x) e^+(p_f, s') \gamma | \lambda, k_f \rangle \end{aligned} \quad (\text{III.121})$$

Pour la transition $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$, ou les états initiaux et finals sont indiqués par les impulsions des particules actuelles, les éléments de S -matrice donnés :

$$\prec f | S_{fi}^{(1)} | i \succ = -ie\bar{v}(p_f, s')\gamma^\mu \varepsilon_{\lambda}^{*\mu}(\vec{k})v(p_i, s) \int d^4x [e^{-ip_f x}] * [e^{+ik_f x}] * [e^{ip_i x}]$$

(III.122)

Le terme :

$$\begin{aligned} \int d^4x \exp[-ip_f x] * \exp[ik_f x] * \exp[ip_i x] &= \int d^4x \exp[k_f \wedge p_i] \exp[-ip_f \wedge (k_f + p_i)] \exp[i(k_f - p_f + p_i)] \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_f - p_f + p_i) \exp[i(k_f \wedge p_i)] \exp[-ip_f \wedge (k_f + p_i)] \end{aligned}$$

(III.123)

Il faut que :

$$k_f + p_f = p_i \quad (III.124)$$

Satisfait le principe de conservation d'impulsion énergie, en utilisant les propriétés
Suivants [17, 24, 27]:

$$\begin{aligned} k_f \wedge p_i &= (p_i - p_f) \wedge p_i = -p_f \wedge p_i \\ p_f \wedge (k_f - p_i) &= p_f \wedge p_f = 0 \\ \int d^4x \exp[-ip_f x] * \exp[ik_f x] * \exp[ip_i x] &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_f - p_f + p_i) \exp[ip_i \wedge p_f] \end{aligned}$$

(III.125)

On trouve $M_{NC}^{(1)}$ (l'amplitude de Feynman dans l'espace-temps non commutatif):

$$M_{NC}^{(1)} = \bar{v}_{s'}(p_f) \varepsilon_{\lambda}^{*\mu}(k_f) (-ie\gamma_\mu \exp[i(p_i \wedge p_f)]) v_s(p_i) \quad (III.126)$$

On trouve les règles de Feynman suivantes :

1 . Pour chaque vertex entre deux fermions et un photon, écrire un facteur :

$$-ie\gamma^\mu \exp[i(p_i \wedge p_f)]$$

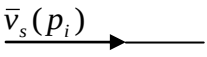
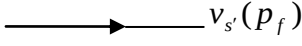
L'impulsion de positron initial est p_i .

L'impulsion de positron final est p_f .

C'est $\theta \rightarrow 0$ alors $p_i \wedge p_f \rightarrow 0$ et on retrouve l'expression du vertex QED

Commutatif $(-ie\gamma_\mu)$.

2. Pour chaque ligne externe, un des facteurs suivants :

- Positron initiale: $\bar{v}_s(p_i)$ 
- Positron finale: $v_{s'}(p_f)$ 
- Photon initiale: $\varepsilon_\lambda^\mu(p_i)$ 
- Photon finale: $\varepsilon_\lambda^\mu(k_f)$ 

III-6-3-Etude le processus d'interaction d'un électron dans l'espace

Non commutatif:

Le processus d'interaction d'un électron dans l'espace ordinaire devient dans l'espace-temps non commutatif comme suit :

$$S^{(1)} = -ie \int dx : \bar{\psi}^- * \gamma^\mu A_\mu^- * \psi^+ : \quad (\text{III.127})$$

Ou :

$$|i\rangle = |e^-(p_i, s)\rangle = a_s(p_i) |0\rangle \quad (\text{III.128})$$

Chapitre III: L'effet du non commutativité de l'espace-temps sur les théories de jauge abéliennes et non abéliennes avec quelques applications

Et :

$$|f\rangle = |e^-(p_f, s')\gamma(k_f, \lambda)\rangle = c_\lambda^+(k_f)a_{s'}^+(p_f)|0\rangle \quad (\text{III.129})$$

Donc:

$$\langle f | S^{(1)} | i \rangle = -ie \int dx \langle f | : \bar{\psi}^- * \gamma^\mu A_\mu^- * \psi^+ : | i \rangle \quad (\text{III.130})$$

Et en utilisant les propriétés de produit star :

$$\bar{\psi}^-(x) * A^-(x) * \psi^+(x) \approx a^+ c^+ a \quad (\text{III.131})$$

Et :

$$\psi^+(x) | i \rangle = u_s(p_i) \exp[-ip_i x] | 0 \rangle \quad (\text{III.132})$$

Et :

$$A^-(x) * \psi^+(x) | i \rangle = \int \varepsilon_\lambda^{*\mu}(k_f) \gamma_\mu u_s(p_i) \exp(ik_f x) * \exp(-ip_i x) | \gamma(\lambda, k_f) \rangle \quad (\text{III.133})$$

Alors :

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}^-(x) * A^-(x) * \psi^+(x) | i \rangle \\ &= \int \bar{u}_{s'}(p_f) \varepsilon_\lambda^{*\mu}(k_f) \gamma_\mu u_s(p_i) \exp(ip_f x) * \exp(ik_f x) * \exp(-ip_i x) e^-(p_f, s') \gamma | \lambda, k_f \rangle \end{aligned} \quad (\text{III.134})$$

Pour la transition $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$, ou les états initiaux et finals sont indiqués par les impulsions des particules actuelles, les éléments de S -matrice donnés :

$$\langle f | S_{fi}^{(1)} | i \rangle = -ie \bar{u}(p_f, s') \gamma^\mu \varepsilon_\lambda^{*\mu}(\vec{k}_f) u(p_i, s) \int d^4x [e^{+ip_f x}]^* [e^{+ik_f x}] [e^{-ip_i x}] \quad (\text{III.135})$$

Le terme :

$$\begin{aligned} \int d^4x \exp[ip_f x] \exp[ik_f x] \exp[-ip_i x] &= \int d^4x \exp[k_f \wedge p_i] \exp[ip_f \wedge (k_f - p_i)] \exp[i(k_f + p_f - p_i)] \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_f + p_f - p_i) \exp[i(k_f \wedge p_i)] \exp[ip_f \wedge (k_f - p_i)] \end{aligned} \quad (\text{III.136})$$

Il faut que :

$$k_f + p_f = p_i \quad (\text{III.137})$$

Satisfait le principe de conservation d'impulsion énergie, en utilisant les propriétés

Suivants :

$$\begin{aligned} k_f \wedge p_i &= (p_i - p_f) \wedge p_i = -p_f \wedge p_i \\ p_f \wedge (k_f - p_i) &= p_f \wedge p_f = 0 \\ \int d^4x \exp[ip_f x] \exp[ik_f x] \exp[-ip_i x] &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_f + p_f - p_i) \exp[ip_i \wedge p_f] \end{aligned} \quad (\text{III.138})$$

On trouve $M_{NC-e}^{(1)}$ (l'amplitude de Feynman dans l'espace-temps non commutatif):

$$M_{NC-e}^{(1)} = \bar{u}_{s'}(p_f) \varepsilon_\lambda^{*\mu}(k_f) (-ie \gamma_\mu \exp[i(p_i \wedge p_f)]) u_s(p_i) \quad (\text{III.139})$$

On trouve les règles de Feynman suivantes :

1 . Pour chaque vertex entre deux fermions et un photon, écrire un facteur :

$$-ie \gamma^\mu \exp[i(p_i \wedge p_f)]$$

L'impulsion d'électron initial est p_i .

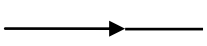
L'impulsion d'électron final est p_f

Chapitre III: L'effet du non commutativité de l'espace-temps sur les théories de jauge abéliennes et non abéliennes avec quelques applications

C'est $\theta \rightarrow 0$ alors $p_i \wedge p_f \rightarrow 0$ et on retrouve l'expression du vertex QED

Commutatif $(-ie\gamma_\mu)$.

2. Pour chaque ligne externe, un des facteurs suivants :

- Electron initiale: $u_s(p_i)$ 
- Electron finale: $\bar{u}_{s'}(p_f)$ 
- Photon initiale: $\varepsilon_\lambda^\mu(k_i)$  (λ)
- Photon finale: $\varepsilon_\lambda^\mu(k_f)$  (k_f)

Conclusion :

A travers ce mémoire de master en physique théorique intitulé par :

L'effet du non commutativité de l'espace-temps sur les théories de jauge abéliennes et non abéliennes avec quelques applications.

Nous avons présenté la théorie de jauge sur les groupes abélienne et non abélienne $U(1)$ et $SU(2)$ respectivement dans les deux espaces ordinaire et non commutatif. En plus on révisé les formalismes mathématiques de l'espace-temps non commutatif.

En troisième chapitre, nous avons étudié une extension dans le contexte de l'espace-temps non commutatif. Nous avons appliquée l'idée du non commutativité de l'espace temps dans le cadre de l'électrodynamique quantique. L'action physique non commutatif est construit. On termine notre étude par deux applications pour générer les règles de Feynman dans l'espace-temps non commutatif, la première application est consacré sur l'interaction d'un positron avec un champ électromagnétique et le second sur l'interaction d'un électron avec un champ électromagnétique. D'après les amplitudes de Feynman trouvé on déduire quelque règles de Feynman.

Références :

- [01] Relativité et interactions fondamentales, Jean Iliopoulos, Laboratoire de physique théorique. CNRS/Ecole Normal Supérieur.
- [02] M. Shaposhinkove, Champ quantique relativiste, Notes du cours : Ecole Polytechnique, 2005.
- [03] EdGARd ELBAZ, Quantique : Ellipses , France, 1995.
- [04] Winston FAIRBAIR et Catherinre MEUSBURGER , Crochets de Poisson , théorie de jauge et quantification.
- [05] Khelili Farid, Université Arizona, ASPECTS MATHEMATIQUES ET PHYSIQUE DE LA GEOMETRIE NON COMMUTATIVE, 2007.
- [06] S. DAVID . Introduction a la théorie de groupe , module licence L3 LM325 version préliminaire du octobre 3, 2007. Université pierre ETMARIE CURIE .
- [07] F. Delduc, introduction aux Groupes de Lie destinée aux physiciens, Laboratoire de Physique de l'ENS Lyon, septembre 2008.
- [08] F. AfAsion, théorie de jauge. Paradis 2004.
- [09] L. Marleau, introduction à la physique des particules, université LAVAL, Québec, Canada, 1998-2003.

- [10] Notes du cours professeur Mikhail Shaposhnikov Sven Bachmann, Champs Quantiques Relativistes, 2005.
- [11] Le Modèle Standard et ses extensions, QED et QCD: un rappel à partir de mes cours 2005 et 2006, Cours II: 8 février 2008.
http://www.college-de-france.fr/site/par_ele/p1089183508965.htm
- [12] F. Delduc, Introduction aux Groupes de Lie destinée aux physiciens, Laboratoire de physique de l'ENS Lyon Septembre 2008.
- [13] X. Calmet, B. Jurco, P. Schupp, J. Wess, M. Wohlgenannt, The Standard Model on Non-Commutative Space-Time. Eur. Phys. J. C 23 363 (2002) , [arXiv : hep-ph/0111115]
- [14] T-P. Cheng and L-Fong Li, Gauge theory of elementary particle physics, Oxford September 1982.
- [15] T. Morii and C. S. Lim and S. N. Mukherjee, the Physics of the Standard Model and Beyond .2004.
- [16] D. BAILIN & A. LOVE, Introduction to Gauge Field Theory, ISBN. 1993.
- [17] H. Menigher, au-delà du modèle standard et applications, mémoire de magister, Université Mentouri-Constantine, 17/10/2007.
- [18] J. Madore, S. Schraml, P. Schupp, J. Wess, Gauge Theory on Noncommutative Spaces. Eur. Phys. J. C 16, 161 (2000) [hep-th/0001203] .
- [19] Xavier Calmet, Michale Wohlgenannt, Effective Field Theories on Non-commutative Space- Time.

- [20] B. Jurco¹, L. Moller, S. Schraml, P. Schupp, J. Wess, Construction of non-Abelian gauge theories on noncommutative space, 2001, [arXiv:hep-th/0104153v4]
- [21] Stefan Schraml and lutz moller with Branislav Jurco Madore, Peter Schupp and Julius Wess, Non-Abelian Gauge Theories on Noncommutatif Spaces Part III
[arXiv: hep-th/0104153, 0006246, 0001203]
- [22] P. Schupp, non-Abelian gauge theory on noncommutative spaces, 2001,
[arXiv: hep-th/0111038 V1].
- [23] A .A. Bichl¹, J..M.Grimstrup², L..Popp³, M.Schweda⁴, R.Wulkenhaar⁵, Deformed QED via Seiberg - Witten Map .[arXiv : hep-th/0102103 v1 16 Feb 2001]
- [24] Michio KAKU . Quantum Field Theory , University of New York .1993 .
- [25] Jean Louis . MECANIQUE QUANTIQUE . Ecole Polytechnique.1986.
- [26] David ATKINSON and Porter wear JOHNSON. Exercises in Quantum Field Theory: Rinton Press, Inc.2003.
- [27] W. Greiner. RELATIVISTIC Quantum Mechanics .Springer 1987

ملخص

تطرقنا في هذه الدراسة الفيزيائية الخاصة بمذكرة الماستر في فيزياء الجسيمات عالية الطاقة إلى التفاعلين الكهرومغناطيسي و الضعيف, هاتاه التفاعلات تعتمد على زمريتين أساسيتين هما $U(1)$ و $SU(2)$ في الفضاء العادي , و بعدها قمنا بمراجعة الصيغ الرياضية الخاصة بالفضاء اللاتبادلي . وجدنا بعض قواعد Feynman بدراسة البوزترون و الإلكترون في الفضائين العادي و اللاتبادلي .

كلمات مفتاحيه

نظرية العيار, تحويلات العيار, تفاعل الكهرومغناطيسية, تفاعل ضعيف, فضاء اللاتبادلي , فضاء عادي , جداء ميال ويل, طريقة زيبارغ-ويتن .

Mots clés

Théorie de jauge, transformations de jauge, interactions électromagnétiques, interactions faible, espace non commutatif, espace ordinaire ,produit Moyal -Weyl ,méthode de seiberg-witten .

Abstract

In this physical study of the report for master in theoretical physics of particle physics at high energy, the electromagnetic and the weak interactions are review, these interactions based on the two principal groups $U(1)$ and $SU(2)$ in ordinary space.

We review the mathematical and physical structure in noncommutative space-time; finally we apply the noncommutative spaces formulation to generate some Feynman rules.

Key word

Gauge theory, gauge transformation, electromagnetic interaction, weak interaction, noncommutative space, ordinary space, produced Moyal - Weyl, method of seiberg-witten.