

UNIVERSITÉ DE M'SILA
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES



Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine: Mathématiques et Informatiques

Filière: Mathématiques

Option: Mathématiques Appliquées

Par

MESSAD Zahia

THÈME

**Sur les équations intégrales non-linéaires .Application :
Equation de Uryshon**

Soutenu le : 01/05/ 2016

Devant le jury composé de :

- | | |
|--------------------|--------------------------------|
| 1)Abdelkader GASMI | Prof. Univ de M'sila Préside |
| 2)Bachir GAGUI | MCB. Univ de M'sila Rapporteur |
| 3)Mostefa NADIR | Prof. Univ de M'sila Examineur |

Dirigé par:
Mr. B.GAGUI

Année: 2015/2016

Remerciements

Je tiens à remercier, en premier lieu, **Mon Dieu** qui m'a donné la force de rédiger ce modeste travail.

Je tiens à remercier les membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de mémoire.

Je tiens à remercier Mr.**B.GAGUI** directeur de mon mémoire, pour sa disponibilité et ses conseils judicieux tout au long de ce travail.

Je tiens à exprimer tous mes respects à mes parents, mon frère **Mokhtar** qui m'ont toujours encouragé.

Je remercie tous les professeurs du département de Mathématiques, sans oublier aussi mes collègues et amies, ainsi tous ceux qui ont participé de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

-A mes parents ma mère et mon père.

- A mes sœurs

-A mes frères.

-A toute la famille.

-A toute mes amies.

- Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

Résumé

Dans ce travail on s'intéresse à la résolution des équations intégrales non linéaires de type Uryshon, qui consiste à prouver l'existence des solutions, en utilisant la théorie du point fixe et pour trouver la solution exacte et approchée en utilisant la méthode des approximations successives, pour évaluer la solution approchée on donne des résultats numériques et quelques exemples avec une comparaison entre les résultats approchés et exactes.

Mots clés: Equation intégrale non linéaires, équation d'Uryshon, point fixe.

Abstract

In this work we interesting about the solution of a nonlinear integral equations of Uryshon type, which consists a proving the existence of the solution using the fixed point theory and the finding of the exact and approximate solution by using the successive approximation method, and when we evaluate the approximate solution, we give a numerical results, finally we give a some examples in order to make a comparison between the approaches and exacts results.

Keywords: Integral equation nonlinear, Uryshon equation, fixed point.

NOTATIONS

$C([a, b])$	L'espace des fonctions continue sur l'intervalle $[a, b]$
$[a, b]$	L'intervalle réel
A	Opérateur linéaire
φ	Fonction inconnue
φ_n	suit d 'approximation de φ
I	Opérateur d'identité
$K(x,y)$	Noyau de l'intégrale linéaire
$K(x,y,\varphi(y))$	Noyau de l'intégrale non-linéaire
T	Opérateur intégrale ou $T = I - A$
T^{-1}	L'inverse de l'opérateur T
$KerT$	Le noyau de opérateur T
ImT	L'image de opérateur T

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaire	3
1.1 Espaces de Banach	3
1.2 Espaces de Hilbert	3
1.3 Opérateurs compacts	4
1.4 Principe du point fixe	7
1.4.1 Théorème d'existence	11
1.5 La théorie des équations intégrales	12
1.6 Classifications des équations intégrales	12
1.6.1 Equations intégrales linéaires	12
1.6.2 Équations intégrales non-linéaires	13
1.7 Existence et unicité des solutions des'équations intégrales	16
1.7.1 La théorie de Reisz et l'alternative de Fredholm	16
2 Résolution des équations intégrales non-linéaires d'Uryshon	19
2.1 Existence de la solution de l'équation non-linéaire de Volterra et Fredholm de type Uryshon	19
2.2 Théorie du point fixe	20
2.2.1 Sur les équations intégrales linéaires	20
2.2.2 Sur les équations intégrales non linéaires	23
2.3 La théorie de Krasnoselskii	26

3 Applications sur les'équations intégrales non-linéaires d'Uryshon	29
3.1 Méthode des approximations successives	29
3.1.1 Equation intégrale de Volterra	30
3.1.2 Equations intégrales de Fredholm	31
3.2 Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte	32
 Conclusion générale	 39
 Bibliographie	 40

Introduction

Les équations intégrales jouent un rôle très important dans l'analyse fonctionnelle, ainsi que dans la résolution des problèmes de la physique.

Les principaux fondateurs de la théorie d'équations intégrales sont Vito Volterra(1860,1940), et Ivar Fredholm (1866-1927), ainsi que David Hilbert (1862-1943) et Erhard Schmidt (1876). Volterra était le premier à avoir identifié l'importance de la théorie et pour la considérer systématiquement, mais la contribution de Fredholm a permis le franchissement, de la difficulté liée à la disparition du «déterminante des coefficients. » néanmoins, la priorité de Volterra généralement aurait été reconnue si son premier papier sur le sujet (1896) avait été présenté différemment.

Mais Volterra au lieu de déduire ses résultats par les mêmes méthodes qu'il a employées pour leur découverte (qui étaient identiques à ceux utilisées plus tard tellement avec succès par Fredholm) a simplement édité une vérification de sa solution.

La théorie des équations intégrales intervient dans plusieurs domaines des mathématiques, beaucoup de problèmes dans le domaine des équations différentielles ordinaires et partielles, la physique mathématique, les problèmes de contacts et de l'astrophysique peut être formulés comme une équation intégrale. Ainsi, la théorie de l'équation intégrale a été un domaine de recherche actif dans la mathématique appliquée et la physique mathématique.

L'importance des équations intégrales dans toutes les branches de la science et l'ingénierie nous amène à étudier certaines de ces équations et les réaliser numériquement.

Dans ce mémoire, nous allons traiter quelques équations intégrales non-linéaires de type Uryshon, où on étudie l'existence des solutions de ces équations.

Notre travail est reparti en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous rappelons les notions de les espaces fonctionnelle, on représenté les opérateurs compacts, principe du point fixe, la classification des équations intégrales linéaires et non-linéaires.

Le deuxième chapitre, on présente quelques résultats de la théorie du point fixe tels que théorèmes de Banach, et Krasnoselskii. Pour le premier théorie, il suffit de vu que l'opérateur contractant,et pour la deuxième opérateur s'écrire par somme de deux opérateurs.

Dans le troisième chapitre on traite les équations intégrales non linéaires d'Uryshon analytiquement et numériquement, pour éffeectue les résultat de l'existence et l'unicité de la solution de cette équation avec quelques exemples. On termine notre mémoire par une conclusion générale.

Chapitre 1

Préliminaire

Ce premier chapitre contient les définitions et les propriétés des objets que nous utiliserons par la suite : espaces de Banach, espaces de Hilbert, opérateurs compacts, principe du point fixe, introduction à la théorie des équations intégrales, classifications des équations intégrales, l'existence et l'unicité de la solution des équations intégrales.

1.1 Espaces de Banach

Définition 1.1.1

i) . Soit E un espace vectoriel normé. On dit que E est complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente dans E .

ii) . Un espace de Banach est un espace normé complet.

Exemple 1.1.1

$(C([a; b]; R); \|\cdot\|_\infty)$ Est un espace de Banach.

1.2 Espaces de Hilbert

Définition 1.2.1 (*Espace préhilbertien*).

Un espace préhilbertien est un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire, c'est à dire , une application $h : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes:

Pour tous $u, v, w \in E, \lambda, p \in \mathbb{C}$ on a :

1. $h(\lambda u + pv, w) = \lambda h(u, w) + ph(v, w)$
2. $h(u, \lambda v + pw) = \bar{\lambda}h(u, v) + \bar{p}h(v, w)$
3. $h(u, v) = \overline{h(v, u)}$
4. $h(u, u) = 0 \iff u = 0$

Définition 1.2.2 (Espaces de Hilbert)

Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien sur le corps K complet pour la norme par le produit scalaire

Exemple 1.2.1

Les espaces euclidiens sont bien-sûr des Hilbert l'exemple est $L_2(\Omega)$

Définition 1.2.3 (convexité)

Soit E un espace vectoriel et $G \subset E$ ($G \neq \emptyset$) est convexe si seulement si $\forall x, y \in G$, $\forall \lambda \in [0, 1]$ on a :

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \quad , \quad y \in G$$

1.3 Opérateurs compacts

Définition 1.3.1 (ε -réseau)

Soit un ensemble fini de points $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ de l'espace normé E , on dit que ε -réseau de un sous-ensemble G de E si pour chaque points ψ dans G il existe un φ_j tels que

$$\|\psi - \varphi_j\| \leq \varepsilon$$

Définition 1.3.2

Un opérateur intégral linéaire A est un opérateur qui admet une formulation de la forme

$$(A\varphi)x = \int_a^b K(x, t)\varphi(t) dt$$

La fonction K étant appelée noyau de l'opérateur A .

Définition 1.3.3 (Compacité)

Soit U un ensemble d'un espace normé X , U est dit compact si de tout recouvrement de U par des ouverts de U on peut extraire un sous-recouvrement fini

$$\forall V_j, j \in J(\text{ouverts}), U \subset \bigcup_{j \in J} V_j, \exists V_{j(k)}, j(k) = 1, 2, \dots, n \text{ telle que } U \subset \bigcup_{k=1}^n V_{j(k)}$$

Définition 1.3.4

Un sous ensemble d'un espace normé est dit relativement compact si son adhérence est compacte.

Définition 1.3.5 (Opérateur compact)

Soit T un opérateur d'un espace normé X dans un espace normé Y , on dit que T est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné dans X à un ensemble relativement compact dans Y .

Définition 1.3.6 (opérateur complètement continu)

L'opérateur T est dite complètement continue, si elle est continue et compact.

Définition 1.3.7

L'opérateur T est compact, si et seulement si pour toute suite bornée $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$, la suite $\{Tx_n\}_{n \geq 1}$ admet une sous suite convergente dans Y .

Dans le cas particulier où $X = C([a; b])$, le théorème suivant d'Arzela-Ascoli est généralement utilisé pour prouver la compacité de T .

Théorème 1.3.1 (Arzela-Ascoli)

Une condition nécessaire et suffisante qu'une famille des fonctions continues définies sur l'intervalle compact $[a; b]$, est compacte dans $C([a; b])$ est que cette famille est uniformément bornée et équicontinue

Théorème 1.3.2

L'opérateur intégral A de $C([a; b])$ dans $C([a; b])$ à noyau continu est un opérateur compact.

Preuve.

Soit E un ensemble borné de $C([a,b])$ alors, on a $\|\varphi\| \leq M$, pour tous $\varphi \in E$, de plus

$$|A\varphi(x)| \leq M |b - a| \max_{x,t \in [a;b]} |K(x,t)|, \forall x \in [a,b] \text{ et } \forall \varphi \in E$$

d'où l'ensemble $A(E)$ uniformément borné.

D'autre part, le noyau K est uniformément continu sur le compact $[a,b] \times [a,b]$, d'où pour tout x,t,z de $[a,b]$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que } |x - t| < \delta \Rightarrow |K(x,z) - K(t,z)| < \frac{\varepsilon}{M |b - a|}$$

D'où, $|A\varphi(x) - A\varphi(t)| < \varepsilon$, pour tout $\varphi \in E$ et $x, t \in [a,b]$ avec $|x - t| < \delta$.

Ceci exprime que l'ensemble $A(E)$ est équicontinu, d'où $A(E)$ est relativement compact par le théorème d'Arzela-Ascoli, alors A est compact. ■

Théorème 1.3.3

Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.

Preuve.

En effet, si on désigne par

$$B(0; 1) = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$$

alors, $T(B(0; 1))$ est relativement compact d'où

$$\|Tx\| \leq C, \forall x \in B(0; 1)$$

alors T est borné.

Réciproquement, l'opérateur identique I de E dans E est borné, mais il n'est pas compact car $I(B(0; 1)) = B(0; 1)$, n'est pas relativement compacte sauf si E est de dimension finie.

■

1.4 Principe du point fixe

En analyse, les théorèmes de point fixe sont résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet sous certaines conditions un point fixe. Ces les théorèmes se révèlent être des outils très utiles en mathématiques, Le théorème du point fixe de Banach donne un critère général dans les espaces métriques complets pour assurer que le procédé d'itération d'une fonction tend vers un point fixe.

Définition 1.4.1

Soit T un opérateur défini dans un espace de Banach E dans lui-même, alors pour tout $x \in E$, tel que $x = T(x)$, s'appelle un point fixe de l'opérateur T .

Théorème 1.4.1

Soit T un opérateur continu dans un espace de Banach E dans lui-même, et on définit la suite (x_n) par

$$x_{n+1} = T(x_n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.1)$$

qui converge vers $x = x^*$, pour $x_0 \in E$, alors x^* c'est le point fixe de l'opérateur T , c'est-à-dire,

$$x^* = T(x^*) \quad (1.2)$$

Preuve.

On peut le voir directement d'après l'équation (1.1), et que l'opérateur T est continu

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = T(x^*)$$

■

Théorème 1.4.2 (Théorème de l'application contractante)

Soit T un opérateur d'un espace de Banach E dans lui-même, T est une contraction (ou application contractante), s'il existe une constante $0 < k < 1$ telle que, pour tout $x, y \in E$, on ait

$$\|T(x) - T(y)\| < k \|x - y\| \quad (1.3)$$

Remarque 1.4.1

- (i) Si $k \geq 0$ dans la relation (1.3), T est dit Lipchitzienne.
- (ii) L'application Lipchitzienne. est nécessairement continue.
- (iii) Si $k < 1$ dans la relation (1.3), T est dit contraction.
- (iv) Si $k = 1$ dans la relation (1.3), T est dit nonexpansive.

Théorème 1.4.3

Soit E un espace de Banach et F un sous-ensemble fermé de E .

Soit f une application contractante de F dans E , alors il existe un unique $z \in F$, tel que

$$f(z) = z$$

Théorème 1.4.4 (Banach)

Soit F un sous-ensemble fermé dans un espace de Banach et soit $T : F \rightarrow F$ une application contractante, alors

- (a) L'équation $Tx = x$, a une seule unique solution.
- (b) La solution unique x peut être obtenu par la limite de la suite $\{x_n\}$ de F définie par $x_n = Tx_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$, où x_0 est un élément arbitraire de F ,

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n x_0$$

Preuve.

On montre d'abord l'un point fixe , puis son existence

L'unicite:

Supposons qu'il existe $x, y \in E$, $x \neq y$, tels qu'on ait $T(x) = x$ et $T(y) = y$

alors on a

$$\|x - y\| = \|T(x) - T(y)\| < k \|x - y\|$$

$\|x - y\| = 0$ i.e. $x = y$ (Puisque T application contractante et $k < 1$)

L'existence

Soit $y \in E$ un point arbitraire dans E , Considérons la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ donnée par

$$\begin{cases} x_0 = y \\ x_{n+1} = T(x_n), n \geq 1 \end{cases}$$

on doit prouver que (x_n) est une suite de Cauchy dans E

pour $p < q$ on utilise l'inégalité triangulaire

$$\|x_p - x_q\| \leq \|x_p - x_{p+1}\| + \|x_{p+1} - x_{p+2}\| + \dots + \|x_{q-1} - x_q\|$$

puisque T est une contraction, on a

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|T(x_{n-1}) - T(x_n)\| \leq k \|x_{n-1} - x_n\| \text{ pour } n \geq 1$$

En répétant cette inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} \|x_p - x_q\| &\leq (k^p + k^{p+1} + \dots + k^{q-1}) \|x_0 - x_1\| \\ &\leq k^p (1 + k + \dots + k^{p-q-1}) \|x_0 - x_1\| \\ &\leq \frac{k^p}{(1-k)} \|x_0 - x_1\| \end{aligned}$$

On déduit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E qui est complet, donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x dans E

Par ailleurs puisque T est continue, on a

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(x_{n-1}) = T(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n-1}) = T(x)$$

donc x est un point fixe de T (i.e. $T(x) = x$) ■

Théorème 1.4.5

Si T un opérateur continu dans un espace de Banach E , tel que pour $n \in \mathbb{N}$, l'opérateur T^n est contractant, alors l'équation $T^n x = x$, admet une seule solution, cette solution c'est le point fixe

Preuve.

Théorème précédent nous pouvons affirmer que l'équation

$$T^n x = x$$

Admet une solution unique. En fait, nous pouvons obtenir la solution par la conclusion

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} T^{kn} x_0$$

pour une valeur initiale arbitraire x_0 . en particulier, nous voir cela, en laissant

$$x_0 = Tx$$

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} T^{kn} Tx$$

Mais puisque $T^n x = x$ nous avons également $T^{kn} x = x$ de sorte que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^{kn} Tx = \lim_{k \rightarrow \infty} TT^{kn} x = \lim_{k \rightarrow \infty} Tx = Tx$$

donc

$$Tx = x$$

Pour nous montrer que cette solution est unique notons cela si

$$Tx = x \quad \text{et} \quad Ty = y$$

et on a

$$T^n x = x \quad \text{et} \quad T^n y = y$$

et puisque T^n est un opérateur contraction avec un point fixe unique $y = x$ ■

Théorème 1.4.6

Soit T un opérateur sur E , tel que T^n est un opérateur contractant. Alors l'équation

$$T\varphi = \varphi$$

admet une solution unique sur E

Preuve.

Puisque T^n est contractant, admet un point fixe unique noté par φ_0 . alors

$$\|T(\varphi_0) - \varphi_0\| = \|T^n(T(\varphi_0)) - T^n\varphi_0\| \leq k \|T(\varphi_0) - \varphi_0\|$$

ce qui implique $T(\varphi_0) = \varphi_0$ puisque $0 < k < 1$, L'unicité du point fixe de T découle du fait qu'il est aussi point fixe de T^n ■

Théorème 1.4.7 (Théorème du point fixe de Schauder)

Soit C un sous-ensemble de E ferme et convexe et $f : C \rightarrow C$ une application continue telle que $f(C)$ est relativement compact. Alors f possède un point fixe. Plus généralement, si C est un compact convexe alors toute fonction continue de C sur C possède un point fixe.

Preuve.

Pour la preuve voir [1]. ■

1.4.1 Théorème d'existence

Dans cette partie nous serons concernés par des équations du type

$$\varphi - \lambda K\varphi = f$$

telle que f est définie dans un espace de Banach et K un opérateur borné, tel que

$$\|K\varphi_1 - K\varphi_2\| \leq M \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

Théorème 1.4.8

Soient A un opérateur borné dans un espace de Banach E dans lui-même et g un élément de E , alors l'opérateur défini par

$$T\varphi = \lambda A\varphi + g$$

a un point fixe, pour $|\lambda|$ suffisamment petit, de plus, si k est une constante positive, telle que

$$\|A\varphi\| \leq k \|\varphi\|, \quad \varphi \in E$$

alors $T\varphi = \varphi$ admet une solution unique pour $|\lambda|k < 1$.

Preuve.

Puisque l'opérateur A est borné, alors il existe une constante k , telle que

$$\|A\varphi_1 - A\varphi_2\| \leq k \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

pour $\varphi_1, \varphi_2 \in E$

ainsi

$$\|T\varphi_1 - T\varphi_2\| = |\lambda| \|A\varphi_1 - A\varphi_2\| \leq |\lambda| k \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

et par conséquent T est une contraction, lorsque $|\lambda|k < 1$.

Dans ce cas et par le théorème précédent, T admet un point fixe unique. ■

1.5 La théorie des équations intégrales

Définition 1.5.1

On appelle équation intégrale, toute équation de la forme

$$\int_{\Omega} K(x, y, \varphi(y)) dy = \lambda \varphi(x) + f(x) \quad (1.4)$$

où Ω est un espace mesuré, $f(x)$ est une fonction mesurable donnée sur Ω , λ un scalaire donné qui peut être réel ou complexe et $K(x, y, \varphi(y))$ une fonction mesurable $\Omega \times \Omega$ appelée le noyau de l'équation intégrale.

Avec toutes ces données, notre problème est de chercher la fonction φ qui satisfait (1.4)

-Nous allons s'intéresser beaucoup plus aux équations intégrales non-linéaires.

Remarque 1.5.1 1. Si on prend

$$K(x, y, \varphi(y)) = K(x, y)\varphi(y)$$

L'équation (1.4) devient linéaire, est sinon devient équation intégrale non linéaire.

2. Notons que l'équation peut être écrite sous forme d'opérateur

$$T\varphi = \lambda\varphi + f$$

où l'opérateur T s'écrit comme

$$T\varphi(x) = \int_E K(x, y, \varphi(y))$$

1.6 Classifications des équations intégrales

1.6.1 Equations intégrales linéaires

Les équations intégrales linéaires sont classées par :

a) L'équations intégrales linéaires de Fredholm

1. On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme

$$\lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = \varphi(x) + f(x) \quad (1.5)$$

2. On appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce une équation de la forme

$$\lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x) \quad (1.6)$$

b) Equations intégrales de Volterra

1. On appelle équation intégrale de Volterra de seconde espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy = f(x) \quad (1.7)$$

2. On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce une équation de la forme

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy \quad (1.8)$$

Remarque 1.6.1

Si $f(x) \neq 0$, les équations (1.5) et (1.7) est dite non homogène

Si $f(x) = 0$, les équations (1.5) et (1.7) est dite homogène

1.6.2 Équations intégrales non-linéaires

Les équation intégrales non-linéaires (intéressant sur les équations non linéaire de Uryshon) sont classées par:

Équations non-linéaires avec la limite variable de l'intégration (équations de Volterra)

Des équations intégrales non-linéaires de Volterra peuvent être représentées sous la forme

$$\int_a^x K(x, y, \varphi(y)) dy = F(x, \varphi(x)) \quad (1.9)$$

où $K(x, y, \varphi(y))$ est le noyau de l'équation intégrale et $\varphi(x)$ est la fonction inconnue ($a \leq x \leq b$).

On assume qu'habituellement toutes les fonctions en (1.9) sont continues.

La forme (1.9) ne couvre pas toutes les formes possibles d'équations intégrales non-linéaires de Volterra; cependant,

Elle inclut les types d'équations non-linéaires qui sont employées et le plus fréquemment étudiées.

Une équation intégrale non-linéaire (1.9) s'appelle une équation intégrale de Volterra de type Uryshon.

Dans certains cas, l'équation (1.9) peut être réécrite dans la forme.

$$\int_a^x K(x, y, \varphi(y)) dy = f(x) \quad (1.10)$$

L'équation (1.10) s'appelle l'équation l'intégrale de Volterra de première espèce de type Uryshon . De même,

$$\varphi(x) - \int_a^x K(x, y, \varphi(y)) dy = f(x) \quad (1.11)$$

s'appelle l'intégral de volterra de deuxième espèce de type Uryshon.

Equations intégrales non-linéaires avec des limite constantes d'intégration (équation de Fredholm)

Des équations intégrales non-linéaires avec des limites constantes d'intégration de Fredholm représentées sous la forme

$$\int_{\alpha}^{\beta} K(x, y, \varphi(y)) dy = F(x, \varphi(x)), \quad a \leq x \leq b \quad (1.12)$$

où $K(x, y, \varphi(y))$ est noyau de l'équation intégrale et $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, habituellement, on assume que toutes les fonctions en (1.12) sont continues et le cas de $\alpha = a$ et $\beta = b$ est considéré.

La forme (1.12) ne couvre pas toutes les formes possibles d'équations intégrales non-linéaires de limites constantes d'intégration; cependant, juste comme la forme (1.9) pour les équations de Volterra, elle inclut les types le plus fréquemment utilisés et la plupart des études de ces équations.

Une équation intégrale non-linéaire (1.12) avec des limites constantes de l'intégration s'appelle l'équations intégral non-linéaire de type Uryshon.

-L' équation intégrale non-linéaire est dit intégrale de Fredholm de type Uryshon si équation (1.12) peut être récrit sous la forme

$$\int_a^b K(x, y, \varphi(y)) dy = f(x) \quad (1.13)$$

alors (1.13) s'appelle intégral de Fredholm de première espèce de type Uryshon

De même, l'équation

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x, y, \varphi(y)) dy = f(x) \quad (1.14)$$

S'appelle l'intégral de Fredholm de deuxième espèce de type Uryshon.

Remarque 1.6.2

L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prend le noyau $K(x, y) = 0$ pour $y > x$.

1.7 Existence et unicité des solutions des'équations intégrales

1.7.1 La théorie de Reisz et l'alternative de Fredholm

Dans ce paragraphe, on désigne par $A : E \rightarrow E$ l'opérateur linéaire compact dans un espace normé dans lui-même.

Nous présentons la théorie de base pour une équation

$$\varphi - A\varphi = f$$

On définit l'opérateur L , par

$$L = I - A$$

où I désigne l'opérateur d'identité.

Théorème 1.7.1 (Premier Théorème de Riesz)

L'espace nul de l'opérateur L , i.e. le noyau de l'opérateur L

$$\ker(L) = \{\varphi \in X : L\varphi = 0\}$$

est un sous-espace de dimension fini.

Preuve. Le noyau de l'opérateur linéaire borné L est un sous-espace fermé de E . Puisque pour chaque suite $\varphi_n \rightarrow \varphi$, $n \rightarrow \infty$ et $L\varphi_n = 0$, alors on a $L\varphi = 0$, donc

$$\varphi \in \ker(L) \text{ est équivalent à } A\varphi = \varphi$$

Et donc la restriction de A sur $\ker(L)$ coïncide avec l'opérateur d'identité sur $\ker(L)$, l'opérateur A est compact dans E et donc rendre compact de $\ker(L)$ sur $\ker(L)$, puisque $\ker(L)$ est fermé. Par conséquent $\ker(L)$ est de dimension fini. ■

Théorème 1.7.2 (Deuxième Théorème de Riesz)

L'image de l'opérateur L , i.e.

$$\text{Im}(L) = \{L\varphi : \varphi \in E\}$$

est un sous-espace linéaire fermé et de dimension finie

Preuve. pour la preuve voir [4] ■

Théorème 1.7.3 (Troisième Théorème de Riesz)

Il existe un unique $r \in \mathbb{N}$ appelé nombre de Riesz de l'opérateur L tel que :

$$\{0\} = \ker(L^0) \subset \ker(L^1) \subset \dots \subset \ker(L^r) = \ker(L^{r+1}) = \dots$$

$$E = \text{Im}(L^0) \supset \text{Im}(L^1) \supset \dots \supset \text{Im}(L^r) = \text{Im}(L^{r+1}) = \dots$$

Et on a la somme directe

$$E = \ker(L^r) \oplus \text{Im}(L^r).$$

Preuve. pour la preuve voir [4] ■

Théorème 1.7.4

Soit A un opérateur compact d'un espace normé E dans lui-même alors l'opérateur $T = I - A$ injectif si et seulement si il est surjectif et par conséquent il est bijectif, de plus l'opérateur inverse $T^{-1} = (I - A)^{-1}$ défini de E dans E est borné.

Théorème 1.7.5

Soit A un opérateur compact d'un espace normé E dans lui-même, alors pour que l'équation non-homogène

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = f \tag{(1.15)}$$

admet une solution unique $\varphi \in E$, pour tout $f \in E$, il faut et il suffit que l'équation homogène

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = 0 \tag{(1.16)}$$

admet la solution triviale $\varphi = 0$

Preuve.

En effet, si (1.15) admet une solution pour tout $f \in E$, on a alors $T\varphi = f$ d'où la surjectivité de T le nombre de Riesz $r = 0$ implique l'injectivité de T c'est à dire l'équation (1.16) admet la solution triviale $\varphi = 0$.

Réciproquement, si l'équation (1.16) admet uniquement la solution triviale $\varphi = 0$ on a alors T injective, T surjective et T bijective d'où l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (1.15) ■

Théorème 1.7.6

Soit A un opérateur compact d'un espace normé E dans lui-même, alors pour que l'équation homogène

$$\varphi - A\varphi = 0$$

admet un nombre fini de solutions linéairement indépendantes $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ alors l'équation non-homogène

$$\varphi - A\varphi = f$$

admet une solution $\varphi \in E$ de la forme

$$\varphi(x) = \psi(x) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont arbitraires et ψ une solution particulière de l'équation non-homogène.

Théorème 1.7.7

Soient $K \in L^2([a,b]^2)$ et $f \in L^2([a,b])$. L'équation de Fredholm de seconde espèce

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = f(x)$$

admet une solution et une seule dans $L^2([a,b])$ donnée par la formule

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b R(x,y,\lambda)\varphi(y)dy = f(x)$$

où la résolvante $R(x,y,\lambda)$ est donnée par la série

$$R(x,y,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x,y)$$

telle que $K_n(x,y)$ est le noyau itéré de $K(x,y)$ à l'ordre n . Le rayon de convergence $|\lambda|$ de la série vérifie la condition suivante $0 < \lambda < \frac{1}{\|K\|_{L^2([a,b]^2)}}$.

Chapitre 2

Résolution des équations intégrales non-linéaires d'Uryshon

Cette partie est consacré à établir certains résultats d'existence et d'unicité pour la résolution d'une équation de la forme $\varphi = f + A\varphi$, où A est un opérateur défini sur un espace de Banach E , ces résultats sont basé sur le théorème du point fixe de Banach. Nous allons voir que si A est un opérateur contractant ; alors cette équation admet une solution unique pour tout f dans E .

2.1 Existence de la solution de l'équation non-linéaire de Volterra et Fredholm de type Uryshon

On considère l'équation intégrale non-linéaire d'Uryshon

$$\int_E G(x, y, \varphi(y)) dy + f(x) = \varphi(x) \quad ((2.1))$$

L'équation (2.1) de type Volterra ou Fredholm admet une solution si,

- la fonction $f(x)$ est intégrable et bornée dans $a < x < b$.
- la fonction $f(x)$ doit être satisfaite la condition de Lipschitz dans l'intervalle $[a, b]$ i.e:

$$|f(x) - f(y)| < k|x - y|$$

- la fonction $G(x, y, \varphi(y))$ est intégrable et bornée,

$$|G(x, y, \varphi(y))| < k, \text{ dans } a \leq x, y \leq b.$$

- la fonction $G(x, y, \varphi(y))$ satisfait la condition de Lipschitz

$$|G(x, y, z_1) - G(x, y, z_2)| < |z_1 - z_2|.$$

2.2 Théorie du point fixe

2.2.1 Sur les équations intégrales linéaires

Théorème 2.2.1

Soit $K(x, y)$ une fonction continue pour $x, y \in [a, b]$, alors l'équation de Volterra

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, y) \varphi(y) dy \quad ((2.2))$$

admet une solution unique $\varphi(x)$ pour toute f dans $L_2([a, b])$ et λ dans \mathbb{R}

Preuve.

Pour l'équation intégrale de Volterra nous considérons l'opérateur

$$T\varphi(x) = f(x) + \lambda A\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, y) \varphi(y) dy$$

avec

$$A\varphi(x) = \int_0^x K(x, y) \varphi(y) dy$$

et nous essayons de prouver que l'opérateur T^n est une contraction pour un certain $n \in \mathbb{N}$, donc $T\varphi$ admet un point fixe, qui doit être une solution de l'équation (2.2)

$$\begin{aligned} T\varphi &= f + \lambda A\varphi \\ T^2\varphi &= T(f + \lambda A\varphi) = f + \lambda A(f + \lambda A\varphi) = f + \lambda Af + \lambda^2 A^2\varphi \\ &\quad \cdot \cdot \\ &\quad \cdot \cdot \\ &\quad \cdot \cdot \\ T^n\varphi &= f + \lambda Af + \lambda^2 A^2f + \dots + \lambda^{n-1} A^{n-1}f + \lambda^n A^n\varphi \end{aligned}$$

d'autre part

$$\|T^n \varphi_1 - T^n \varphi_2\| = \|\lambda^n A^n \varphi_1 - \lambda^n A^n \varphi_2\| = |\lambda^n| \left\| \int_0^x K_n(x,y)(\varphi_1(y) - \varphi_2(y))dy \right\|$$

Rappelons que $K_n(x,y)$ est le noyau itéré d'ordre n donné par

$$K_n(x,y) = \int_x^y K(x,z)K_{n-1}(y,z)dz$$

puisque on a par hypothèse

$$|K(x,y)| \leq M$$

alors

$$|K_n(x,y)| \leq \frac{M^n(x-y)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad a \leq y \leq x \leq b \quad ((2.3))$$

Pour $n = 1$ l'expression (2.3) est évidente.

Supposons qu'elle est vraie pour $n \in \mathbb{N}$

$$|K_n(x,y)| \leq \frac{M^n(x-y)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad a \leq y \leq x \leq b$$

alors

$$\begin{aligned} |K_{n+1}(x,y)| &= \left| \int_x^y K(x,z)K_n(y,z)dz \right| \\ &\leq \int_x^y |K(x,z)K_n(y,z)| dz \\ &\leq \frac{M^{n+1}}{(n-1)!} \int_x^y (x-z)^{n-1} dz \\ &\leq \frac{M^{n+1}}{(n)!} (x-y)^n \end{aligned}$$

tel que

$$\|T^n \varphi_1 - T^n \varphi_2\| \leq \frac{|\lambda^n| M^n}{(n-1)!} \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand on obtient

$$\frac{|\lambda^n| M^n}{(n-1)!} \leq 1$$

ainsi que l'opérateur T^n est contractant ce qui implique que T admet un point fixe, on écrit

$$T\varphi = \varphi \iff \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,y)\varphi(y)dy$$

■

Théorème 2.2.2

Soit l'équation suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy \quad ((2.4))$$

admet une solution unique $\varphi \in L_2([a, b])$, avec le noyau K est continu sur l'intervalle $[a, b]$,

$$f \in L_2([a, b]) \text{ et } |\lambda| k < 1, \text{ avec } k = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dx dy}$$

Preuve.

On considère l'équation

$$(T\varphi)(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy$$

puisque $f \in L_2([a, b])$, $T\varphi \in L_2([a, b])$. Si

$$\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy \in L_2([a, b])$$

En utilisant l'inégalité de Schwartz, donc

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy \right| &\leq \int_a^b |K(x,y)\varphi(y)| dy \\ &\leq \left(\int_a^b |K(x,y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |\varphi(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

donc

$$\left| \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy \right|^2 \leq \left(\int_a^b |K(x,y)|^2 dy \right) \left(\int_a^b |\varphi(y)|^2 dy \right)$$

alors

$$\begin{aligned} \int_a^b \left| \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy \right|^2 dx &\leq \int_a^b \left(\int_a^b |K(x,y)|^2 dy \right) \left(\int_a^b |\varphi(y)|^2 dy \right) dx \\ &\leq \int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dy dx \int_a^b |\varphi(y)|^2 dy. \end{aligned}$$

Puisque

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dy dx < \infty \quad \text{et} \quad \int_a^b |\varphi(y)|^2 dy < \infty,$$

alors l'équation (2.4) est satisfaisante et T de $L^2([a, b])$ dans lui-même.

Notons que la démonstration ci-dessous est également que l'opérateur défini par

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy$$

est borné, donc par le théorème (1.4.8) l'équation $T\varphi = \varphi$ admet une solution unique, pour $|\lambda|k < 1$. ■

2.2.2 Sur les équations intégrales non linéaires

Théorème 2.2.3

Soit $K : [0, T] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et lipchitzienne,

$$|k(x, y, t) - k(x, y, z)| \leq L |t - z|$$

Pour tout $(x, y) \in [0, T] \times [0, T]$ et $(t, z) \in \mathbb{R}^2$,

alors pour tout $f \in C[0, T]$ l'équation

$$\varphi(x) = \int_0^x K(x, y, \varphi(y))dy + f(x) \quad 0 \leq x \leq T \quad (2.5)$$

admet une solution unique $\varphi \in C[0, T]$. De plus pour tout $\varphi_0 \in C[0, T]$ la suite des fonctions définies par

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_0^x K(x, y, \varphi_n(y))dy + f(x) \quad 0 \leq x \leq T \quad ((2.6))$$

converge uniformément dans $C[0, T]$ vers une solution unique.

Preuve.

Soit E est l'espace de Banach de $C([0, T])$, muni de la norme

$$|g| = \max_{0 \leq x \leq T} |g(x)| \exp(-Lx)$$

On définit $F : E \rightarrow E$ par

$$F(\varphi)(x) = \int_0^x K(x, y, \varphi(y))dy + f(x)$$

A fin de prouver que l'équation admet une solution, il faut montrer que la fonction F admet un point fixe. En effet F est contractante

$$\begin{aligned}
 |F(\varphi_1) - F(\varphi_2)| &\leq \max_{0 \leq x \leq T} \int_0^x |K(x, y, \varphi_1(y)) - K(x, y, \varphi_2(y))| dy \exp(-Lx) \\
 &\leq L \max_{0 \leq x \leq T} \int_0^x |\varphi_1(y) - \varphi_2(y)| dy \exp(-Lx) \\
 &= L \max_{0 \leq x \leq T} \int_0^x \exp(-Ly) \exp(Ly) |\varphi_1(y) - \varphi_2(y)| dy \exp(-Lx) \\
 &\leq L |\varphi_1 - \varphi_2| \max_{0 \leq x \leq T} \exp(-Lx) \int_0^x \exp(Ly) dy \\
 &\leq L |\varphi_1 - \varphi_2| \max_{0 \leq x \leq T} \exp(-Lx) \frac{\exp(Lx) - 1}{L} \\
 &\leq (1 - \exp(-LT)) |\varphi_1 - \varphi_2|
 \end{aligned}$$

Puisque $(1 - \exp(-LT)) < 1$, alors F est contractante, d'après le principe de Banach F admet un point fixe unique de plus la suite $\{\varphi_n\}$ définie ci-dessus converge uniformément vers le point fixe φ . ■

Théorème 2.2.4

Soit l'équation intégrale suivante

$$\varphi(x) = \int_a^x K(x, y, \varphi(y)) dy + f(x) \quad , \quad a \leq x \leq b \quad (2.7)$$

Telle que $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue vérifie les conditions suivantes :

1. $K(x, y, 0) = 0$ pour tout : $x, y \in [a, b]$

2. $\frac{\partial K(x, y, z)}{\partial z} < \left| \frac{1 - \|f\|}{b - a} \right|$

alors pour tout $f \in C([a, b])$ telle que $\|f\| < 1$ l'équation (2.7) admet une solution unique $\varphi \in [a, b]$.

Preuve.

On va montrer que $T(B(0, 1)) \subset B(0, 1)$ i.e., pour si $\|\varphi\| \leq 1$, alors $\|T\varphi\| \leq 1$.

En effet,

$$\begin{aligned}
 \|T\varphi\| &= \left\| f(x) + \int_a^x K(x, y, \varphi(y)) dy \right\| \\
 &\leq \|f(x)\| + \left\| \int_a^x K(x, y, \varphi(y)) dy \right\| \\
 &\leq \|f(x)\| + \int_a^x |K(x, y, \varphi(y))| dy \\
 &\leq \|f(x)\| + \int_a^x |K(x, y, \varphi(y)) - K(x, y, 0)| dy \\
 &\leq \|f(x)\| + \int_a^x \left| (\varphi - 0) \frac{\partial K(x, y, \varphi(y))}{\partial \varphi} \right| dy \\
 &\leq \|f(x)\| + \|\varphi\| \frac{1 - \|f\|}{b - a} (b - a) < 1
 \end{aligned}$$

D'après le Théorème de Schauder, T admet un point fixe, d'où l'équation admet une solution unique. ■

Théorème 2.2.5

On suppose que le noyau K est continu, $f(x) \in L^2([a, b])$ et

1. $\left\| \int_a^b K(x, y, \varphi(y)) dy \right\| \leq M \|\varphi(y)\|.$
2. $|K(x, y, z_1) - K(x, y, z_2)| < N(x, y) |z_1 - z_2|, \quad x, y, z_1, z_2 \in [a, b].$
3. $\int_a^b \int_a^b |N(x, y)|^2 dx dy = k^2 < \infty.$

Alors l'équation non-linéaire de type Fredholm

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y, \varphi(y)) dy = f(x)$$

admette une solution dans $L^2([a, b])$, avec $|\lambda|k < 1.$

Preuve.

On considère l'opérateur

$$T\varphi = f + \lambda A\varphi,$$

où

$$(A\varphi)(x) = \lambda \int_a^b K(x, y, \varphi(y)) dy$$

alors

$$\begin{aligned} \|T\varphi_1 - T\varphi_2\| &= |\lambda| \left\| \int_a^b [K(x, y, \varphi_1(y)) - K(x, y, \varphi_2(y))] dy \right\| \\ &\leq |\lambda| \left[\int_a^b \left(\int_a^b [K(x, y, \varphi_1(y)) - K(x, y, \varphi_2(y))]^2 dy \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |\lambda| \left[\int_a^b \left(\int_a^b N(x, y) |\varphi_1(y) - \varphi_2(y)| dy \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |\lambda| k \|\varphi_1 - \varphi_2\| \end{aligned}$$

Il est clair que, si $|\lambda|k < 1$, T est un opérateur contractant, de sorte qui admet un point fixe, ce point c'est la solution de l'équation non-linéaire. ■

2.3 La théorie de Krasnoselskii

Parmi des méthodes de point fixe existes pour résoudre un problème non-linéaire, on trouve la décompositions de Krasnoselskii, qui est décompose l'opérateur non-linéaire A en somme deux opérateurs A_1 et A_2 qui sont vérifiant des conditions pour appliquer la théorie de point fixe.

Théorème 2.3.1

Soit F un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de E et T, A deux opérateurs, tels que

- (i) $T(F) + A(F) \subset F$,
- (ii) T est une application contractante,

(iii) A est compact et continu,

Alors, il existe un $x \in F$ tel que $Tx + Ax = x$.

Preuve.

Soit y fixé dans F et comme T est une application contraction, l'équation

$$x = Tx + Ay$$

admet une solution unique x dans F .

On définit l'application par

$$\begin{aligned} L & : F \rightarrow F \\ y & \rightarrow Ly = x \end{aligned}$$

Alors

$$Ly = TLy + Ay \tag{((2.3.1))}$$

On a $LF \subset F$

On montre que L est compact et continue.

► D'après le théorème de Schauder, il existe $y \in F$ tel que

$$Ly = y$$

D'où

$$Ty + Ay = y$$

Soit y_n un point arbitraire de F , alors l'équation (2.3.1) devient

$$Ly_n = TLy_n + Ay_n$$

alors

$$Ly - Ly_n = TLy - TLy_n + Ay - Ay_n$$

et

$$\|Ly - Ly_n\| \leq \|TLy - TLy_n\| + \|Ay - Ay_n\|$$

puisque T est une contraction on a

$$\begin{aligned} \|Ly - Ly_n\| &\leq k \|Ly - Ly_n\| + \|Ay - Ay_n\| \\ &\leq \frac{1}{(1-k)} \|Ay - Ay_n\| \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

D'où la continue de L .

► Il reste à montrer que LF est relativement compact.

En effet comme AF est relativement compact,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists (1-k)\varepsilon - \text{réseau } Ay_1, \dots, Ay_n$$

C.-à-d. les boules

$$B(Ay_k, (1-k)\varepsilon), (1 \leq k \leq n)$$

Tel que

$$AF \subset \cup_{k=1}^n B(Ay_k, (1-k)\varepsilon).$$

Alors, de (2.3.2) $Ly_1 \dots Ly_n$ est une ε - *réseau* de LF . ■

Remarque 2.3.1

Si $A = 0$ Alors ce théorème coïncide avec le principe de l'application contractante de Banach et si $T = 0$ il coïncide avec le théorème de Schauder.

Chapitre 3

Applications sur les'équations intégrales non-linéaires d'Uryshon

Dans cette partie, on va résoudre numériquement les équations non-linéaire, c'est-à-dire trouver une solution approchée et comparé enter la solution exacte de cette équation.

Pour le faire, on a toujours besoin de discrétiser l'intervalle $[a, b]$ en des sous- intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ $i = 1 \dots n$, équidistants, i.e.,

$$x_j = a + (j - 1)h, \quad j = 1 \dots n + 1$$

3.1 Méthode des approximations successives

Dans beaucoup de cas, la méthode successive d'approximation peut être avec succès appliquée pour résoudre de divers types d'équations intégrales. Les principes de construire le procédé d'itération sont les mêmes que dans le cas des équations linéaires. Pour Volterra les équations de la deuxième sorte dans l'Uryshon forment

$$\varphi(x) = \int_a^x K(x, y, \varphi(y))dy + f(x) \tag{3.1}$$

L'expression récursive correspondante a la forme

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_a^x K(x, y, \varphi(y))dy + f(x) \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Il est usuel de prendre l'approximation initiale sous la forme $\varphi_0(x) = 0$ ou sous la forme $\varphi_0(x) = f(x)$.

Contrairement au cas des équations linéaires, la méthode successive d'approximation a un plus petit domaine de convergence. Présentons les conditions de convergence pour le procédé d'itération (3.2), ce qui est simultanément les conditions d'existence pour une solution d'équation (3.1). Pour être spécifiques, nous assumons cela $\varphi_0(x) = f(x)$.

3.1.1 Equation intégrale de Volterra

Rappelons que l'équation non linéaire de Volterra s'écrit comme suit :

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, y, \varphi(y))dy + f(x) \quad (3.3)$$

On prend dans cette partie $\lambda = 1$

Maintenant, on applique la méthode des approximations successives sur cette équation:

$$\varphi_{i+1}(x) = \int_a^x K(x, y, \varphi_i(y))dy + f(x) \text{ tel que } i = 1 \dots m \quad (3.4)$$

Notons qu'on va calculer la solution approchée en tous les nœuds $x_j, j = 1 \dots n$, donc on écrit l'équation comme suit :

$$\varphi_{i+1}(x) = \int_a^{x_j} K(x_j, y, \varphi_i(y))dy + f(x) \text{ tel que } j = 1 \dots n$$

Approchons numériquement l'intégrale en utilisant la méthode du trapèze

$$\begin{aligned} \varphi_{i+1}(x_{j+1}) &= \sum_{i=1}^j \int_{x_i}^{x_{i+1}} K(x_j, y, \varphi_i(y))dy + f(x_{j+1}) \\ \varphi_{i+1}(x_{j+1}) &= h/2 \sum_{i=1}^j [K(x_{j+1}, x_{i+1}, \varphi_i(x_{i+1})) + K(x_{j+1}, x_i, \varphi_i(x_i))] + f(x_{j+1}) \end{aligned}$$

On simplifie la formule, on obtient :

$$\varphi_{i+1} = h/2K_{j+1 \cdot 1 \cdot i} + h/2K_{j+1 \cdot j+1 \cdot i} + h/2 \sum_{i=2}^j K_{j+1 \cdot i \cdot i} + f_{j+1}$$

$$\varphi_i = \varphi_i(x_j) \text{ et } f_j = f(x_j) \text{ et } K_{j \cdot i \cdot i} = K(x_j, x_i, \varphi_i(x_i))$$

Il est clair qu'on peut calculer la solution à partir de cet algorithme, mais à condition qu'on donne une valeur initiale, on prend

$$\varphi_0(x) = f(x) \text{ ou } \varphi_0(x) = 0$$

3.1.2 Equations intégrales de Fredholm

Considérons équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce

$$\int_0^1 K(x, y, \varphi(y)) dy = \varphi(x) + f(x) \quad x \in [0; 1] \quad (3.5)$$

Pour le choix des points $a = x_0 < x_1 < \dots < x_j < x_n = b$ on a

$$\varphi(x_j) = \sum_{i=0}^{j-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} K(x_j, y, \varphi(y)) dy + f(x_j) \quad (3.6)$$

Utilisons la règle de Trapèze, alors

$$\varphi(x_j) = h/2 \sum_{i=0}^{j-1} [K(x_j, y_{i+1}, \varphi(y_{i+1})) + K(x_j, y_i, \varphi(y_i))] + f(x_j) \quad (3.7)$$

On notons $\varphi_j = \varphi(x_j)$ et $f_j = f(x_j)$ et $K_{j,i}(\varphi_i) = K(x_j, y_i, \varphi(y_i))$ alors la formule (3.7) devient

$$\varphi_j = h/2 \sum_{i=0}^{j-1} [K_{j,i+1}(\varphi_{i+1}) + K_{j,i}(\varphi_i)] + f_j$$

3.2 Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte

Exemple 3.2.1 Soit l'équation intégrale de Volterra

$$\varphi(x) = e^{-x} + \frac{1}{3}x(1 - e^{-3x}) - \int_0^x x\varphi^3(t)dt$$

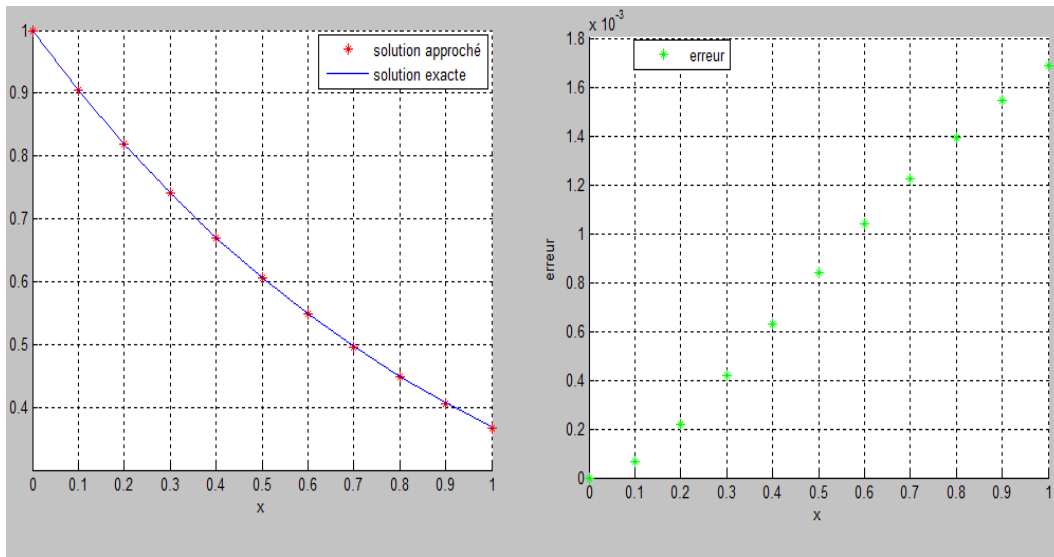
avec la solution exacte est donnée par

$$\varphi(x) = e^{-x}$$

► pour $n = 10$

x	<i>exacte</i>	<i>approchée</i>	<i>erreur</i>
0	1.0000e + 000	1.0000e + 000	0
0.1	9.0484e - 001	9.0477e - 001	6.3914e - 005
0.2	8.1873e - 001	8.1851e - 001	2.1774e - 004
0.3	7.4082e - 001	7.4040e - 001	4.1629e - 004
0.4	6.7032e - 001	6.6969e - 001	6.2961e - 004
0.5	6.0653e - 001	6.0569e - 001	8.4010e - 004
0.6	5.4881e - 001	5.4777e - 001	1.0389e - 003
0.7	4.9659e - 001	4.9536e - 001	1.2225e - 003
0.8	4.4933e - 001	4.4794e - 001	1.3908e - 003
0.9	4.0657e - 001	4.0502e - 001	1.5454e - 003
1	3.6788e - 001	3.6619e - 001	1.6883e - 003

3.2. Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte



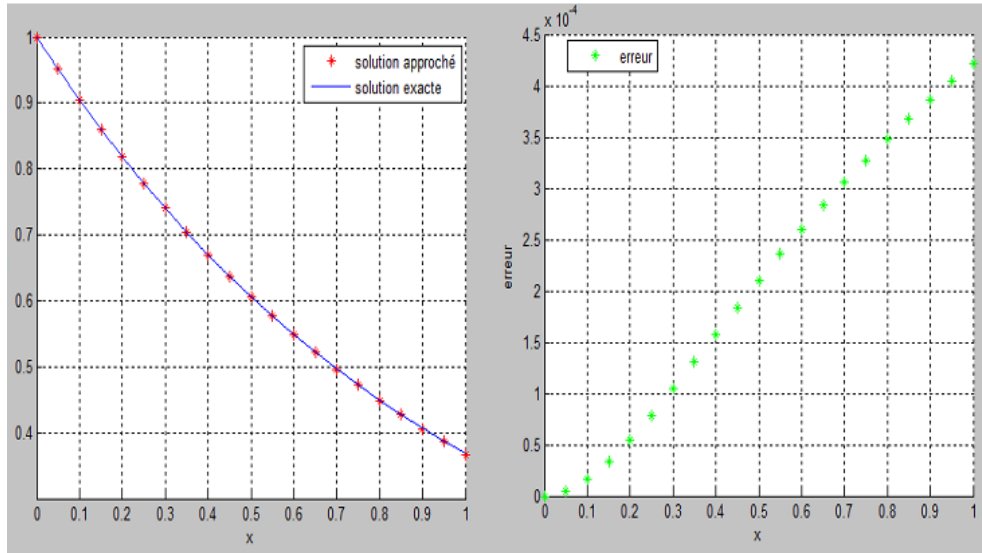
Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte $n=10$

3.2. Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte

► Pour $n = 20$

x	<i>exacte</i>	<i>approchée</i>	<i>erreur</i>
0	$1.0000e + 000$	$1.0000e + 000$	0
0.05	$9.5123e - 001$	$9.5123e - 001$	$4.3365e - 006$
0.10	$9.0484e - 001$	$9.0482e - 001$	$1.6035e - 005$
0.15	$8.6071e - 001$	$8.6067e - 001$	$3.3298e - 005$
0.20	$8.1873e - 001$	$8.1868e - 001$	$5.4577e - 005$
0.25	$7.7880e - 001$	$7.7872e - 001$	$7.8582e - 005$
0.30	$7.4082e - 001$	$7.4071e - 001$	$1.0427e - 004$
0.35	$7.0469e - 001$	$7.0456e - 001$	$1.3083e - 004$
0.40	$6.7032e - 001$	$6.7016e - 001$	$1.5762e - 004$
0.45	$6.3763e - 001$	$6.3744e - 001$	$1.8421e - 004$
0.50	$6.0653e - 001$	$6.0632e - 001$	$2.1025e - 004$
0.55	$5.7695e - 001$	$5.7671e - 001$	$2.3553e - 004$
0.60	$5.4881e - 001$	$5.4855e - 001$	$2.5992e - 004$
0.65	$5.2205e - 001$	$5.2176e - 001$	$2.8335e - 004$
0.70	$4.9659e - 001$	$4.9628e - 001$	$3.0581e - 004$
0.75	$4.7237e - 001$	$4.7204e - 001$	$3.2730e - 004$
0.80	$4.4933e - 001$	$4.4898e - 001$	$3.4787e - 004$
0.85	$4.2741e - 001$	$4.2705e - 001$	$3.6757e - 004$
0.90	$4.0657e - 001$	$4.0618e - 001$	$3.8647e - 004$
0.95	$3.8674e - 001$	$3.8634e - 001$	$4.0464e - 004$
1.00	$3.6788e - 001$	$3.6746e - 001$	$4.2216e - 004$

3.2. Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte



Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte pour $n=20$

Exemple 3.2.2 Soit l'équation intégrale de Fredholm

$$\varphi(x) = \cos x - \frac{\pi}{448} + \frac{1}{50} \int_0^1 t\varphi^2(t)dt$$

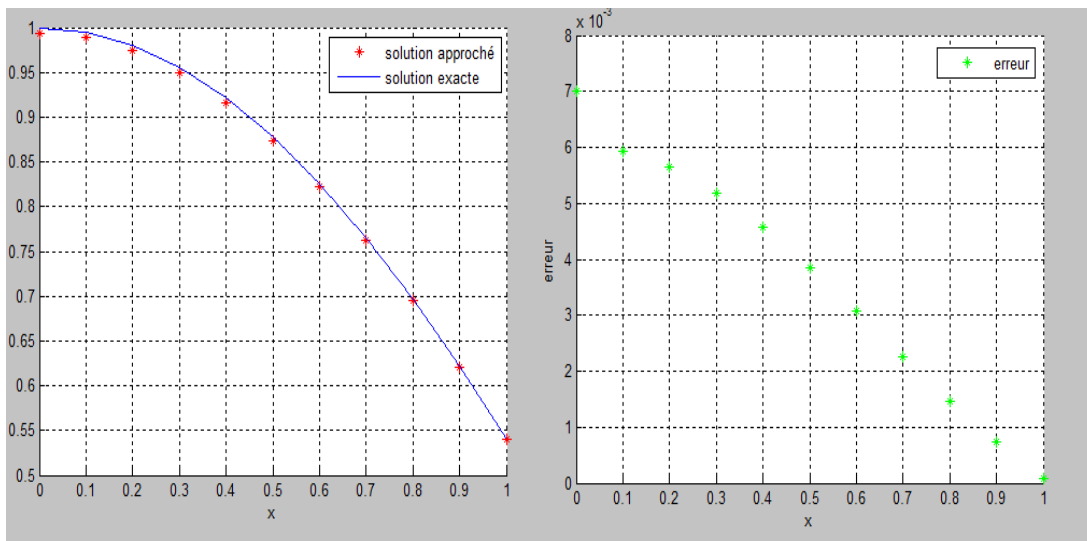
avec la solution exacte est donnée par

$$\varphi(x) = \cos(x)$$

3.2. Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte

► Pour $n = 10$

x	<i>exacte</i>	<i>approchée</i>	<i>erreur</i>
0	$1.0000e + 000$	$9.9299e - 001$	$7.0125e - 003$
0.1	$9.9500e - 001$	$9.8908e - 001$	$5.9287e - 003$
0.2	$9.8007e - 001$	$9.7443e - 001$	$5.6410e - 003$
0.3	$9.5534e - 001$	$9.5016e - 001$	$5.1803e - 003$
0.4	$9.2106e - 001$	$9.1649e - 001$	$4.5736e - 003$
0.5	$8.7758e - 001$	$8.7373e - 001$	$3.8561e - 003$
0.6	$8.2534e - 001$	$8.2227e - 001$	$3.0689e - 003$
0.7	$7.6484e - 001$	$7.6259e - 001$	$2.2564e - 003$
0.8	$6.9671e - 001$	$6.9524e - 001$	$1.4628e - 003$
0.9	$6.2161e - 001$	$6.2088e - 001$	$7.2943e - 004$
1	$5.4030e - 001$	$5.4021e - 001$	$9.0880e - 005$



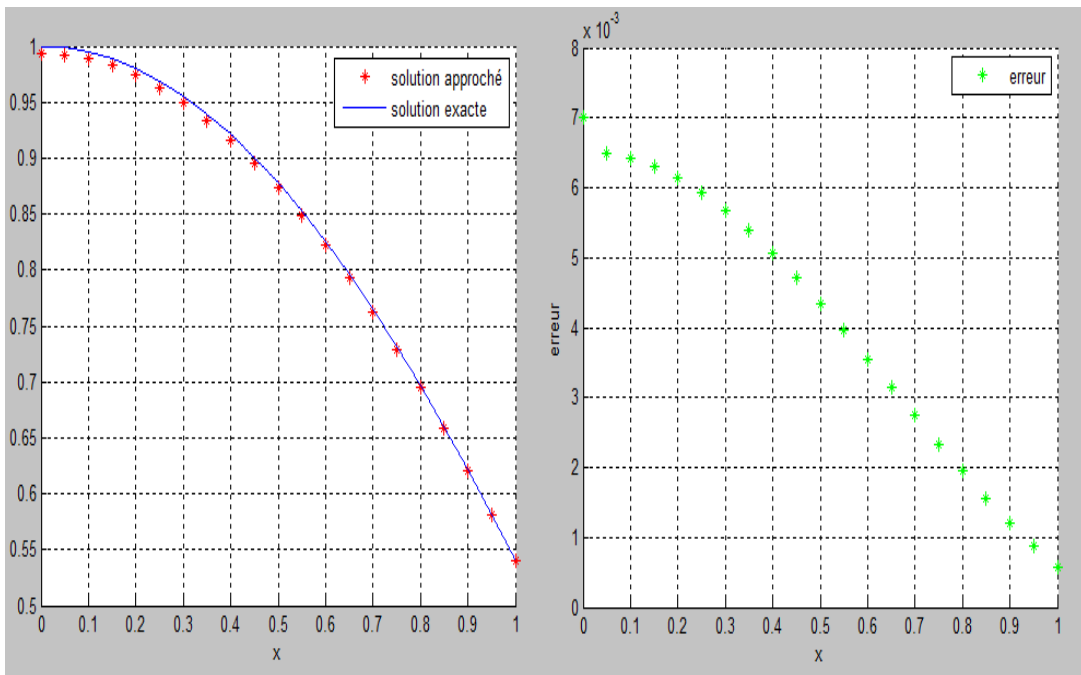
Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte pour $n=10$

3.2. Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte

► Pour $n = 20$

x	<i>exacte</i>	<i>approchée</i>	<i>erreur</i>
0	$1.0000e + 000$	$9.9299e - 001$	$7.0125e - 003$
0.05	$9.9875e - 001$	$9.9226e - 001$	$6.4949e - 003$
0.10	$9.9500e - 001$	$9.8858e - 001$	$6.4214e - 003$
0.15	$9.8877e - 001$	$9.8247e - 001$	$6.3001e - 003$
0.20	$9.8007e - 001$	$9.7393e - 001$	$6.1329e - 003$
0.25	$9.6891e - 001$	$9.6299e - 001$	$5.9221e - 003$
0.30	$9.5534e - 001$	$9.4967e - 001$	$5.6709e - 003$
0.35	$9.3937e - 001$	$9.3399e - 001$	$5.3830e - 003$
0.40	$9.2106e - 001$	$9.1600e - 001$	$5.0626e - 003$
0.45	$9.0045e - 001$	$8.9573e - 001$	$4.7142e - 003$
0.50	$8.7758e - 001$	$8.7324e - 001$	$4.3431e - 003$
0.55	$8.5252e - 001$	$8.4857e - 001$	$3.9545e - 003$
0.60	$8.2534e - 001$	$8.2178e - 001$	$3.5539e - 003$
0.65	$7.9608e - 001$	$7.9294e - 001$	$3.1470e - 003$
0.70	$7.6484e - 001$	$7.6210e - 001$	$2.7394e - 003$
0.75	$7.3169e - 001$	$7.2935e - 001$	$2.3366e - 003$
0.80	$6.9671e - 001$	$6.9476e - 001$	$1.9441e - 003$
0.85	$6.5998e - 001$	$6.5842e - 001$	$1.5668e - 003$
0.90	$6.2161e - 001$	$6.2040e - 001$	$1.2094e - 003$
0.95	$5.8168e - 001$	$5.8081e - 001$	$8.7597e - 004$
1.00	$5.4030e - 001$	$5.3973e - 001$	$5.7011e - 004$

3.2. Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte



Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte $n=20$

Conclusion générale

Dans notre travail, on étudié les équations intégrales non-linéaires particulièrement les équations intégrales de type Uryshon.

Cette étude trouver la solution de ces équations basé sur la technique du point fixe (de Banach, Krasnoselski, approximations successives). où la forme générale de cette équation est

$$\int_{\Omega} K(x, y, \varphi(y)) dy = \lambda\varphi(x) + f(x) \quad ((1))$$

avec, la note de

$$A\varphi(x) = \int_{\Omega} K(x, y, \varphi(y)) dy$$

Alors l'équation (1) divient :

$$\begin{aligned} \varphi = f + A\varphi &\implies \varphi - A\varphi = f \\ &\implies (I - A)\varphi = f \end{aligned} \quad ((2))$$

Dans le cas : A linéaires, si A est un operateur compact donc (2) devient de Fredholm, alors il suffit de prouver que A est compact.

Le cas : A est non linéaires, on utilise la technique du point fixe.

Bibliographie

- [1] R.P.AGARWA,M.MEEHAN et D.O'REGAN : Fixed point theory and applications, Cambridge tracts in mathematics, 2001
- [2] *B.GAGUI* : Sur les équations intégrales dans les espace d'Orlicz,Thèse doctorat, université de M'sila,2015
- [3] *H.HOCHSTADT*: Integral equations, Department of Mathematics, Polytechnic Institute of Brooklyn, New York 1973
- [4] *R.KRESS*: Linear Integral Equations, Springer-Verlag, NewYork,1999.
- [5] *A.KHIRANI*: Résolution des équations intégrales non linéaire type Volterra, Mémoire de magister université de M'sila 2011.
- [6] *M.NADIR* : Cours d'analyse fonctionnelle, université de M'sila, 2004
- [7] *M.NADIR* : Cours sur les équations intégrales, université de M'sila, 2008.
- [8] *A.D.POLYANIN,A.V.MANZHIROV* : Hand book of Integral equations, CRC press, 1998
- [9] *A.M.WAZWAZ* : Linear and Nonlinear Integral Equations,Université De Saint Xavier Chicago, 20 Avril 2011