Remerciements

Nous remercions tout d'abord et avant tout le tout puissant ALLAH qui nous a réussi à achever ce travail.

Je tiens à remercier **Mr.Aissa Djeriou** qui a accepté de bon coeur et de bienveillance, de diriger ce travail et de me suivre patiemment dans toutes les étapes de cette étude.

Je lui suis reconnaissant de ses remarques nombreuses, sa gentillesse et sa patience.

Je remercie aussi tous les membres du Jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait, en acceptant de juger ce modeste travail.

je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à mes familles et mes amis.

Notations

- Tous les espaces dans ce mémoire sont définis sur $\mathbb{R}^n$.
- Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la longueur de α est $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$.
- la dérivée partielle de f est $\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 ... \partial^{\alpha_n} x_n}$.
- $(fg)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} C_\beta^\alpha (f)^{(\beta)} (g)^{(\alpha-\beta)}$ est la formule de Leibniz .
- $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! ... \alpha_n!$.
- Laplacient de f est $\Delta f = \sum_{i=0}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.
- Si $x \in \mathbb{R}^n$ $[x]$ est sa partie entière.
- Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est une fonction, alors le support de f est $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$.
- $f * g = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) \mathrm{d}y$ est le produit du convolution des fonctions f et g.
- $x \cdot \xi = \sum\limits_{j=0}^{n} x_j \cdot \xi_j$ est le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$.
- $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions mesurables, intégrables sur tout compact de $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact .
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Schwartz des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à décroissance rapide .
- $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ désignent respectivement l'espace des distributions et distributions tempérées .
- $W_p^m(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Sobolev tel que $W_p^m = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \partial^\alpha f \in L_p, \quad |\alpha| \leq m\}$
- C_b^m l'ensemble des fonctions de classe C^m telle que toute leur dérivées sont bornées et $\|f\|_{C_b^m} = \sum\limits_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|$.
- $\|f\|_{L_p} = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \,\mathrm{dx})^{\frac{1}{p}}$.
- $\|f\|_{L_p(\ell_q)} = (\int_{\mathbb{R}^n} (\sum\limits_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|^q)^{\frac{p}{q}} \mathrm{dx})^{\frac{1}{p}}$, pour $0 < p, q \leq \infty$ et $f = (f_k(x))_{k=0}^\infty$.
- $\|f\|_{\ell_q(L_p)} = (\sum\limits_{k=0}^{\infty} (\int_{\mathbb{R}^n} |f_k(x)|^p \,\mathrm{dx})^{\frac{q}{p}})^{\frac{1}{q}}$, pour $0 < p, q \leq \infty$ et $f = (f_k(x))_{k=0}^\infty$.
- Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors sa transformation de Fourier est :

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x) \mathrm{d}x$$

  est sa transformation de Fourier inverse est :

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x) \mathrm{d}\xi.$$

Table des matières

Introduction

L'objectif de ce mémoire est d'étudier la continuité des opérateurs pseudo-différentiels dans l'espace de Trieble-Lizorkin usuel $F^s_{p,q}$, avec des symboles non réguliers, ces opérateurs ont introduit comme outil dans la dévelopement de la théory des EDP, de plus ils peuvent former une nouvelle base des techniques numériques utilisées dans l'analyse et simulation des systèmes physiques.

L'étude de la continuité des opérateurs pseudo-différentiels fait dans plusieur espaces comme l'espace de Lebesgue L^p, l'espace de Besov $B^s_{p,q}$, l'espace de Bassel H^s_p..., Notre but dans ce mémoire est de prouver la continuité des $o.ps.d$ dans l'espace $F^s_{p,q}$ avec une condition suffisante et optimale, Djeriou et Moussai dans [5] ont étudiés ce probleme dans l'espace de Trieble-Lizorkin généralisé $F^{\upsilon_\mu}_{p,q}$ avec la fonction $\upsilon_\mu : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ vérifie :

$$\sup_{0<t<1} t^{-\mu} \sup_{0<s\leq 1} \frac{\upsilon_\mu(s)}{\upsilon_\mu(ts)} < \infty \ ,$$

dans ce travail nous avons pris

$$\upsilon_\mu(t) = t^{-\mu} \quad \text{avec } t = 2^{-j} \text{ et } \mu = s.$$

Ce mémoire se compose de trios chapitres et d'une bilbiographie avec la façon suivante :

Le premier chapitre est constitué des notions fondamentals sur quelques espaces fonctionnels et inégalités qui seront utilisés dans les chapitres suivants.

Dans le deuxième chapitre on va présenter quelques définitions essentielles et la décomposition en symboles élémentaires de ces opérateurs.

Dans le troisième chapitre nous démontrons la continuité des $o.ps.d$ dans l'espace $F^s_{p,q}$ avec une condition suffisante et optimale.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre on va présenter quelques définitions des espaces fonctionnels, en particulier l'espace de Triebel Lizorkin, et quelques résultas préliminaires utiles pour les chapitres suivantes .

1.1 La décomposition de Littlewood-Paley

La décomposition de Littlewood-Paley est un technique très utile pour étudier les symboles dans les espaces comme l'espaces de Triebel Lizorkin. On va définir cette décomposition et étudier ses propriétés fondamentales.

Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que :

– supp $\chi \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2\right\}$

– $0 < \chi \leq 1$, $\xi \in \mathbb{R}^n$

et soit la fonction $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ définit par :

$$\gamma(\xi) = \frac{\chi(\xi)}{\sum_{j \in \mathbb{Z}} \chi(2^{-j}\xi)}, \quad \xi \neq 0$$

telles que :

supp $\gamma \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2\right\}$ et $\gamma(\xi) > 0$, pour $\frac{1}{2} < |\xi| < 2$,

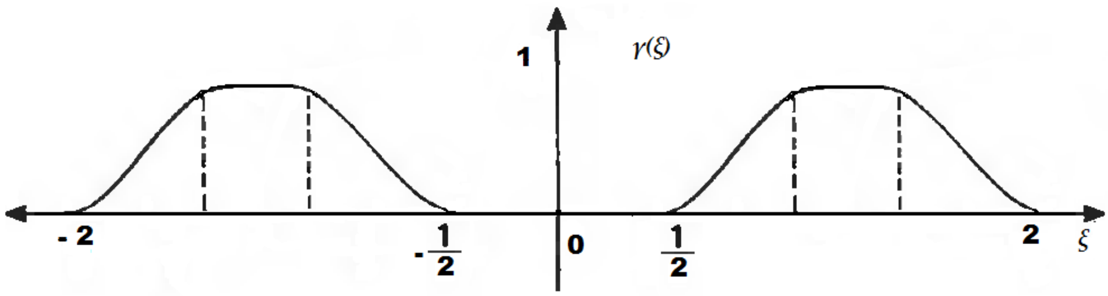

Fig 1

On pose $\rho(\xi) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(2^{-k}\xi)$, on obtient la fonction " cut-off " telle que :

- $\rho \in C^{\infty}$,
- ρ est paire,
- $0 \leq \rho \leq 1$,
- supp $\rho \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 2\}$.

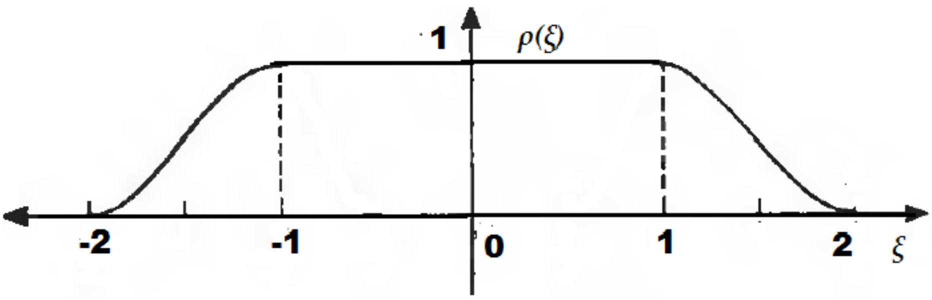

Fig 2

de plus, on a :

$$\rho(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(2^{-k}\xi) = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma(2^{-k}\xi) = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{1.2}$$

Avec (1.1) converge dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

- (1.1) est appellé partition de l'unité non homogéne.
- (1.2) est appellé partition de l'unité homogéne.

On définit les opérateurs de convolutions,

$$\begin{aligned} S_k &: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n) \\ Q_j &: \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

telles que :

$$\begin{cases} (S_k f)(x) = (\mathcal{F}^{-1}(\gamma(2^{-k}.)) * f)(x) & \text{pour } k = 1, 2, 3.. \\ (Q_j f)(x) = (\mathcal{F}^{-1}(\rho(2^{-j}.)) * f)(x) & \text{pour } j = 0, 1, 2... \end{cases}$$

avec $S_0 = Q_0$.

Ecrivons la relation (1.1) au point $2^{-j}\xi$:

$$\rho(2^{-j}\xi) + \sum_{k=1+j}^{\infty} \gamma(2^{-k-j}\xi) = 1.$$

Si on pose $l = k + j$,

$$\rho(2^{-j}\xi) + \sum_{l=1+2j}^{\infty} \gamma(2^{-l}\xi) = 1.$$

Il vient

$$\rho(2^{-j}\xi) + \sum_{k=1+j}^{\infty} \gamma(2^{-k}\xi) = 1.$$

En multipliant par $\mathcal{F}f$ on obtient

$$\rho(2^{-j}\xi)\mathcal{F}f + \sum_{k=1+j}^{\infty} \gamma(2^{-k}\xi)\mathcal{F}f = \mathcal{F}f, \tag{1.3}$$

en appliquant l'application $\mathcal{F}^{-1}$ sur (1.3), on obtient

$$Q_j f + \sum_{k=1+j}^{\infty} S_k f = f \qquad (\forall j \in \mathbb{N}). \tag{1.4}$$

Pour $j = 0$ on trouve

$$\rho(\xi)\mathcal{F}f + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(2^{-k}\xi)\mathcal{F}f = \mathcal{F}f$$

i.e

$$Q_0 f + \sum_{k=1}^{\infty} S_k f = f \ . \tag{1.5}$$

alors

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} S_k f. \tag{1.6}$$

On remplaçant f dans(1.4), on obtient

$$Q_j f + \sum_{k=1+j}^{\infty} S_k f = \sum_{k=0}^{j} S_k f + \sum_{k=1+j}^{\infty} S_k f. \tag{1.7}$$

Donc

$$Q_j f = \sum_{k=0}^{j} S_k f \ .$$

La série (1.6) est la décomposition de Littlewood-paley, et elle converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Lemme 1.1 *Il existe une constante $C_\gamma > 0$ ne dépendant que de γ, telle que pour tout $1 \leq p \leq +\infty$ et $f \in L_p$, on a*

$$\|S_k f(x)\|_{Lp} \leq C \|f\|_{L_p}$$

même pour $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$.

Preuve. On a

$$(S_k f)(x) = (\mathcal{F}^{-1}(\gamma(2^{-k}.)) * f)(x)$$

comme $\gamma \in C_0^\infty$, sa transformation de Fourie inverse appartient à $\mathcal{S}$ et donc à L_1, le résulta est donc une conséquence de l'inégalité de Young (1.15) :

$$\begin{aligned} \|S_k f(x)\|_{L_p} &= \left\|\mathcal{F}^{-1}\gamma * f\right\|_{L_p} \\ &\leq \left\|\mathcal{F}^{-1}\gamma\right\|_{L_1} \|f\|_{Lp} \\ &\leq C_\gamma \ \|f\|_{Lp} \ . \end{aligned}$$

■

1.1.1 Décomposition du produit $f \cdot g$

Définition 1.2 *soient f et g deux fonction dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On définit le produit $f \cdot g$ par :*

$$f \cdot g = \lim_{j\to\infty} (Q_j f) \cdot (Q_j g).$$

lorsque la limite existe dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Soient f et g telle que :

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} S_j f$$

$$g = Q_j g + \sum_{k=1+j}^{\infty} S_k g$$

$$\begin{aligned} f \cdot g &= \sum_{j=0}^{\infty} S_j f (Q_j g + \sum_{k=1+j}^{\infty} S_k g) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} S_j f \ Q_j g + \sum_{k=1}^{\infty} S_k g (\sum_{j=0}^{k-1} S_j f) \end{aligned}$$

donc

$$f \cdot g = \sum_{j=0}^{\infty} S_j f \ Q_j g + \sum_{k=1}^{\infty} S_k g \ Q_{k-1} f \quad \text{car } (Q_j f = \sum_{k=1}^{j} S_k f) \tag{1.8}$$

de plus, On a

$$\mathcal{F}(S_j f \cdot Q_j g) = \mathcal{F}(S_j f) * \mathcal{F} Q_j g)$$

et

$$\text{supp } f * g \subset \overline{\text{supp } f + \text{supp } g} \ . \tag{1.9}$$

donc

$$\text{supp } \mathcal{F}(S_j f Q_j g) \subset \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| < b 2^j \right\} .$$

1.2 Quelques espaces fonctionnels

1.2.1 L'espace de Besov

Définition 1.3 *soient $s \in \mathbb{R}, \ 0 < p, q \leq \infty,$ on définit l'espace de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ par :*

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \ et \ \ \|f\|_{B^s_{p,q}} < +\infty \right\}$$

telle que :

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} = \begin{cases} (\sum\limits_{j=0}^{\infty} (2^{sj} \|S_j f(.)\|_p)^q)^{\frac{1}{q}} & pour \ q \neq \infty \\ \sup\limits_{j \geq 0} (2^{sj} \|S_j f(.)\|_p) & pour \ q = \infty \end{cases}$$

1.2.2 L'espace de potentiel de Bessel

Définition 1.4 *soient* $s \in \mathbb{R}, 1 < p < \infty$, *on définit l'espace de potentiel de Bessel* $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ *par :*

$$H_p^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \ \ et \ \ \|f\|_{H_p^s} < +\infty \right\}$$

telle que :

$$\|f\|_{H_p^s} = \left\| \mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F} f(\xi))(.) \right\|_p$$

1.2.3 L'espace de Triebel-Lizorkin

L'espace de Triebel-Lizorkin est une généralisation des espaces de potentiel de Bessel, nous allons rappeler la définition de l'espace de Triebel -Lizorkin, et quelques propriétés qui concerne cette espace comme l'inclusion, l'interpolation...etc.

Définition 1.5 *soient* $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, *on définit l'espace de Triebel-Lizorkin* $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ *par :*

$$F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \ \ et \ \ \|f\|_{F_{p,q}^s} < +\infty \right\}$$

telle que :

$$\|f\|_{F_{p,q}^s} = \begin{cases} \left\| \left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} (2^{sj} \left| S_j f(.) \right|)^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p & pour \ q \neq \infty \\ \left\| \sup\limits_{j \geq 0} (2^{sj} \left| S_j f(.) \right|) \right\|_p & pour \ q = \infty \end{cases} \tag{1.10}$$

.

1.2.4 L'inclusion dans $F_{p,q}^s$

Nous rappelons quelques égalités et inclusions au sens des normes dans l'espace $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 1.6 *On a les propriétés suivantes :*

- $F_{p,2}^0(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ *(l'espace de Lebesgue),*
- $F_{p,2}^m(\mathbb{R}^n) = W_p^m(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ *et* $m \in \mathbb{N}^*$ *(l'espace de Sobolev),*
- $F_{p,p}^s(\mathbb{R}^n) = B_{p,p}^s(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ *et* $s \in \mathbb{R}$ *(l'espace de Besov),*
- $F_{p,2}^s(\mathbb{R}^n) = H_p^s(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ *et* $s \in \mathbb{R}$ *(l'espace de potentiel de Bessel).*

Preuve. [13]. ∎

Proposition 1.7 *Pour $s \in \mathbb{R}$ $0 < q \leq \infty$ et $0 < p < \infty$ On a les injections suivantes :*

- $B^s_{p,\min(p,q)} \hookrightarrow F^s_{p,q} \hookrightarrow B^s_{p,\max(p,q)}$,
- *Soient* $0 < q_1 \leq q_2 \leq \infty$, $\epsilon > 0$, *alors* $\mathcal{S} \hookrightarrow F^s_{p,q} \hookrightarrow \mathcal{S}'$,
- *Soient* $0 < q_1 \leq q_2 \leq \infty$, $\epsilon > 0$, *alors* $F^{s+\varepsilon}_{p,q_1} \hookrightarrow F^s_{p,q_2}$,
- *Si* $0 < q_1 \leq q_2 \leq \infty$, *alors* $F^s_{p,q_1} \hookrightarrow F^s_{p,q_2}$,
- *Soient* $p_1 \leq p_2$ *et* $s_1 - \frac{n}{p_1} = s_2 - \frac{n}{p_2}$, *alors* $F^{s_1}_{p_1,q} \hookrightarrow F^{s_2}_{p_2,q}$,
- *Pour tout entier* $m > s$, *on a* $W^m_p \hookrightarrow F^s_{p,q}$.

Preuve. voir[12 page 47] ∎

Définition 1.8 *On dit que l'espace de Triebel -Lizorkin $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est une Algèbre s'il existe une constant $C > 0$ telle que :*

$$\|f \cdot g\|_{F^s_{p,q}} \leq C \cdot \|f\|_{F^s_{p,q}} \cdot \|g\|_{F^s_{p,q}} ,$$

pour toutes f et g appartiennent à $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 1.9 *Pour $s \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, on a :*

$$(1) \iff (2) \iff (3)$$

telle que :

(1) $F^s_{p,q}$ *est une algèbre,*

(2) $F^s_{p,q} \hookrightarrow L_\infty$,

(3) $s > \frac{n}{p}$ *ou* $s = \frac{n}{p}$ *et* $0 < p \leq 1$.

1.2.5 Interpolation

Définition 1.10 *(Espace complex)Soient A_0, A_1 deux espaces de Banach, $0 < \theta < 1$. On dit que $a \in A_{[\theta]} = (A_0, A_1)_\theta$ si et seulement s'il existe une fonction $f = f(z), z = x + iy$, tel que*

(a) $f(z)$ est analytique sur la bande $0 < x < 1$ et à valeur dans $A_0 + A_1$, continue et bornée sur la bande $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq x \leq 1\}$.

(b) $f(iy)$ *est continue et bornée sur* A_0.

(c) $f(1+iy)$ *est continue et bornée sur* A_1.

(d) f *tend vers* 0 *si* $|y| \to \infty$.

(e) $a = f(\theta)$.

On muni $A_{[\theta]}$ *par la norme*

$$\|a\|_{[\theta]} = \inf_f \max(\|f(iy)\|_{A_0}, \|f(1+iy)\|_{A_1}).$$

Interpolation dans L_p

Théorème 1.11 ***(Riesz-Thorin)*** *Soient* (X,μ) *et* (Y,ν) *deux espaces mesurés et,* $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq +\infty$, *avec* $p_0 \neq p_1$ *et* $q_0 \neq q_1$, *et* T *un opérateur linéaire définit sur les fonctions simple de* (X,μ), *à valeur dans* (Y,ν). *On suppose que pour tout fonction simple on ait :*

$$\begin{aligned} T \ &: \ L_{p_0}(X) \to L_{q_0}(Y) \quad \text{avec} \quad \|T(f)\|_{q_0} \leq M_0 \ \|f\|_{p_0} \\ T \ &: \ L_{p_1}(X) \to L_{q_1}(Y) \quad \text{avec} \quad \|T(f)\|_{q_1} \leq M_1 \ \|f\|_{p1} \end{aligned}$$

Alors pour $0 < \theta < 1$ *et toute fonction simple* f *:*

$$T : L_p(X) \to L_q(Y)$$

avec

$$\|T(f)\|_q \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \ \|f\|_p$$

où $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{q_0} + \dfrac{\theta}{q_1}$.

Preuve. voir [3] ■

Exemple 1.12 *Soit* T *la transformation de fourier* $\mathcal{F}$ *définie par :*

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{(-\mathrm{i}x\cdot\xi)} \ f(x)\mathrm{dx}$$

On a alors évidemment

$$|\mathcal{F}f(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \,\mathrm{dx} \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

et par la formule de Plancherel

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}f(\xi)|^2 \, d\xi = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \, \mathrm{dx}$$

donc

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &: L_1 \to L_\infty \quad avec \quad M_0 = 1 \\ \mathcal{F} &: L_2 \to L_2 \quad avec \quad M_1 = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \ , \end{aligned}$$

on applique le théorème de Riesz-Thorin, on conclure que

$$\mathcal{F} : L_p \to L_q$$

avec

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2}, \ \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2}, \ \ 0 < \theta < 1.$$

En éliminant θ*, On voit que* $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}$*, c'est-à-dire* $q = p'$*, avec* $1 < p < 2$

$$\|\mathcal{F}f\|_{p'} \leq (2\pi)^{\frac{n}{p'}} \|f\|_p$$

Interpolation complex dans $F^s_{p,q}$

Proposition 1.13 *Soient* $0 < \theta < 1$*,* $(s_0, s_1) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq p_1, p_2 < \infty$*, et* $1 \leq q_1, q_2 \leq \infty$*, tels que :*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}, \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2}, et \ s = s_0(1-\theta) + s_1\theta.$$

Alors

$$(F^{s_0}_{p_1,q_1}, F^{s_1}_{p_2,q_2})_\theta = F^s_{p,q}.$$

Preuve. voir [12]. ■

1.3 Estimations de base

1.3.1 Inégalités classique

Quelques inégalités classiques, jouent un rôle trés important en analyse fonctionnelle et harmonique, Nous ferons un petite rappel sur ces inégalités, pour la suite de cette mémoire

Proposition 1.14 ***(Inégalité de Hölder)*** *Soient* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in L_q(\mathbb{R}^n)$ *avec* $1 \leq p, q \leq \infty$ *alors*

$$f.g \in L_r(\mathbb{R}^n) \quad et \ \|f.g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

avec $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r})$

Proposition 1.15 ***(Inégalité de Young*** *)soient* $p, q, r \in [1, \infty]$ *, alors pour toute* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in L_q(\mathbb{R}^n)$*, on a*

$$f * g \in L_r(\mathbb{R}^n)$$

et

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1.$

Preuve.

Soient $g \in L_q(\mathbb{R}^n)$ et l'opérateur linéaire $Tf = f * g$, définit par

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x - y) f(y) \mathrm{d}y,$$

de plus

$$|Tf(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |g(x - y)| \, |f(y)| \, \mathrm{d}y$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$|Tf(x)| \leq \|g(x - \cdot)\|_q \cdot \|f\|_{q'} \tag{1.11}$$

D'autre part l'inégalité de Hölder donne

$$\|Tf(x)\|_q \leq \|g\|_q \cdot \|f\|_1 \tag{1.12}$$

On applique le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin, telle que

$$\begin{aligned} T \ &: \ L_{q'}(\mathbb{R}^n) \to L_\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{de (1.11)} \\ T \ &: \ L_1(\mathbb{R}^n) \to L_q(\mathbb{R}^n) \qquad \text{de (1.12)} \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned} T \ &: \ L_p(\mathbb{R}^n) \to L_r(\mathbb{R}^n) \\ \|Tf\|_r \ &\leq \ \|g\|_q^{1-\theta} \, \|g\|_q^{\theta} \cdot \|f\|_p \ . \end{aligned}$$

Avec $\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. $\blacksquare$

Proposition 1.16 *Soient* $0 < a < 1$ *et* $0 < p \leq \infty$, *pour toute suite réelle à termes positifs* $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *dans* $\ell_p(\mathbb{N})$, *les suites* α_k *et* β_k *appartiennent à* $\ell_p(\mathbb{N})$, *telle que*

$$\alpha_k = a^k \sum_{j=0}^{k} a^{-j}\varepsilon_j$$

et

$$\beta_k = a^{-k} \sum_{j=k}^{\infty} a^{j}\varepsilon_j$$

de plus

$$\|(\alpha_k)\|_{\ell_p(\mathbb{N})} + \|(\beta_k)\|_{\ell_p(\mathbb{N})} \leq \frac{2}{1-a}\,\|(\varepsilon_j)\|_{\ell_p(\mathbb{N})}$$

Preuve. Pour $1 \leq p \leq \infty$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, on a

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \sum_{j=0}^{k} a^{k-j}\varepsilon_j = \sum_{j=0}^{k} a^{\frac{k-j}{p}+\frac{k-j}{p'}}\varepsilon_j \\ &= \sum_{j=0}^{k} a^{\frac{k-j}{p}}\varepsilon_j \cdot a^{\frac{k-j}{p'}}.\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder, on obtien

$$\begin{aligned}\alpha_k &\leq (\sum_{j=0}^{k} a^{k-j}\varepsilon_j^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\sum_{j=0}^{k} a^{k-j})^{\frac{1}{p'}} \\ \alpha_k^p &\leq (\sum_{j=0}^{k} a^{k-j}\varepsilon_j^p) \cdot (\sum_{j=0}^{k} a^{k-j})^{\frac{p}{p'}}.\end{aligned}$$

Par la somme sur k,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k^p) &\leq \sum_{k=0}^{n}((\sum_{j=0}^{k} a^{k-j}\varepsilon_j^p) \cdot (\sum_{j=0}^{k} a^{k-j})^{\frac{p}{p'}}) \qquad ,\forall n \in \mathbb{N} \\ &\leq (\sum_{i=0}^{n} a^i)^{\frac{p}{p'}} (\sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j^p \sum_{k=j}^{n} a^{k-j}) \\ &\leq (\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j^p) \cdot (\sum_{i=0}^{n} a^i)^p .\end{aligned}$$

Donc

$$\|(\alpha_k)\|_{\ell_p(\mathbb{N})} \leq \frac{1}{1-a}\,\|(\varepsilon_j)\|_{\ell_p(\mathbb{N})} .$$

Pour $0 < p < 1$

$$\alpha_k^p \leq \sum_{j=0}^{k} a^{(k-j)p}\varepsilon_j^p .$$

Donc
$$\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k^p) \leq \sum_{j=0}^{n}\varepsilon_j^p \sum_{k=j}^{n} a^{(k-j)p} \ .$$
C'est à dire
$$\|(\alpha_k)\|_{\ell_p(\mathbb{N})} \leq (\frac{1}{1-a^p})^{\frac{1}{p}} \|(\varepsilon_j)\|_{\ell_p(\mathbb{N})} \ .$$
Même calcul pour β_k. ■

Lemme 1.17 *Soit $\phi \in C^\infty$, on a l'inégalité suivante*
$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\phi\right\|_1 \leq C \sup_{|\alpha|\leq L} \left\|\phi^{(\alpha)}\right\|_\infty \ ,$$
avec $L = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$.

Preuve. Soit $\phi \in C^\infty$, Nous avons
$$(1+|\xi|^2)^L \mathcal{F}^{-1}\phi(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{(ix\cdot\xi)}(I-\Delta_x)^L\phi(x)\mathrm{dx}$$
par l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'inégalité de Bessel-Parseval, on obtient
$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{F}^{-1}\phi\right\|_1 &\leq (\int_{\text{supp } \phi} \left|(I-\Delta_x)^{\frac{L}{2}}\phi(x)\right|^2 \mathrm{dx})^{\frac{1}{2}}(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{-L}\mathrm{d}\xi)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \sup_{|\alpha|\leq L}\left\|\phi^{(\alpha)}\right\|_\infty \ .\end{aligned}$$
avec $L = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$. ■

1.3.2 Fonction maximale

Définition 1.18 ***(Fonction maximale de Hardy-Littlewood)****Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$, alors*
$$Mf(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|\,\mathrm{d}y \ ,$$
est la fonction maximale de Hardy-Littewood de f Où $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| < r\}$.

Remarque 1.19 *Si $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda > 0$,alors :*

$M(f+g) \leq M(f) + M(g)$.

$M(\lambda f) = |\lambda|\, M(f)$.

Lemme 1.20 *La fonction maximale M envoie L_p dans L_p, pour toutes $f \in L_p$ et $1 < p < \infty$,*

$$\|Mf\|_p \leq c\,\|f\|_p \ .$$

Preuve. Voir [7]. ■

Proposition 1.21 *Soient $1 < p < \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$.*

(1) Soient $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in L_1(\mathbb{R}^n)$, pour tout fonction $\phi_t$définit par $\phi_t(x) = t^{-n}\phi(\frac{x}{t})$, on a

$$|f * \phi_t(x)| \leq \|\phi\|_1 \, Mf(x) \qquad (\forall t > 0) \ .$$

(2) Il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute suite des fonctions de distributions $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$localement lebesgue intégrables, on a

$$\|Mf_j\|_{L_p(\ell_q)} \leq c\,\|f_j\|_{L_p(\ell_q)} \ .$$

Preuve. voir[11]. ■

1.4 Séries convergentes dans $F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Proposition 1.22 *Soient $b > 1$, $s \in \mathbb{R}$. Alors*

(1) *Il existe une constante $c > 0$ telle que l'inégalité suivante*

$$\left\|\sum_{j=0}^{\infty} f_j\right\|_{F^S_{p,q}} \leq c\left\|\left(\sum_{j=0}^{\infty}(2^{js}\,|f_j(.)|)^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_p \tag{1.13}$$

est vérifiée pour toute suite des distributions tempérrées $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ telle que supp $\mathcal{F}f_j \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : b^{-1}2^j \leq |\xi| \leq b2^j\}$.

(2) *Il existe une constante $c > 0$ telle que l'inégalité suivante*

$$\left\|\left(\sum_{j=0}^{\infty}(2^{js}\,|f_j(.)|)^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_p \leq c\left(\sup_{\alpha\leq\left[\frac{n}{2}\right]+1}\left\|\phi^{(\alpha)}\right\|_\infty\right)\|f\|_{F^s_{p,q}} \tag{1.14}$$

est vérifiée pour toute fonction $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et supp $\phi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : b^{-1} \leq |\xi| \leq b\}$ et toute suite des distributions tempérrées $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$,définit par $f_j = \phi(2^{-j}\xi)f(\xi)$ avec $f \in \mathcal{S}'$.

(3) *Soient* $0 < b_1 < b_2 < 2b_1$. *Alors il existe une constante* $c > 0$ *telle que l'inégalité suivante*

$$\left\| (\sum_{j=0}^{\infty} (2^{js} |f_j(.)|)^q)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \leq c \left\| \sum_{j=0}^{\infty} f_j \right\|_{F^s_{p,q}}$$

est vérifiée pour toute suite des distribution tempérrées $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *telle que supp* $\mathcal{F} f_j \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : b_1 2^j \leq |\xi| \leq b_2 2^j\}$.

(4) *Si* $s > 0$, *on peut remplaçer les couronnes* $b^{-1}2^j \leq |\xi| \leq b2^j$ *par les boules* $|\xi| \leq b2^j$ *dans (1)pour obtient*

$$\left\| \sum_{j=0}^{\infty} f_j \right\|_{F^S_{p,q}} \leq c \left\| (\sum_{j=0}^{\infty} (2^{js} |f_j(.)|)^q)^{\frac{1}{q}} \right\|_p .$$

.

Preuve. Preuve de (1). On définit $S_k f_j$ par :

$$S_k f_j = \mathcal{F}^{-1}\gamma(2^{-k}.) * f_j$$

$S_k f_j \neq 0$ si $|j-k| \leq t$ avec $t = 2 + \left[\frac{\log b}{\log 2}\right]$, on a

$$\left\| \sum_{j=0}^{\infty} f_j \right\|_{F^s_{p,q}} = \left\| (\sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{j=k-t}^{k+t} 2^{Sk} S_k f_j \right|^q)^{\frac{1}{q}} \right\|_p .$$

On pose

$$S_k f_j(x) = I_1(x) + I_2(x)$$

telle que

$$\begin{aligned} I_1(x) &= 2^{kn} \int_{|x-y|\leq 2^{-k}} \mathcal{F}^{-1}\gamma(2^k(x-y)) f_j(y) \mathrm{d}y \\ I_2(x) &= 2^{kn} \int_{|x-y|\geq 2^{-k}} \mathcal{F}^{-1}\gamma(2^k(x-y)) f_j(y) \mathrm{d}y \end{aligned}$$

On estimer I_1, par la proposition 1.21/(1) on obtient

$$|I_1(x)| = \left|\mathcal{F}^{-1}\gamma(2^k.) * f_j\right| \leq cMf_j(x) \qquad \text{pour } |x-y| \leq 2^{-k}$$

telle que c est indépendant de j et k .

Maintenant on estimer I_2.

$$\begin{aligned}
|I_2(x)| &\leq 2^{kn}\sum_{l\geq 0}\int_{2^{l-k}\leq|x-y|\leq 2^{l-k+1}}\left|\mathcal{F}^{-1}\gamma(2^k(x-y))\right||f_j(y)|\,\mathrm{d}y\\
&\leq c_1 2^{kn}\sum_{l\geq 0}\int_{2^{l-k}\leq|x-y|\leq 2^{l-k+1}}(1+2^k|x-y|)^{-(n+1)}|f_j(y)|\,\mathrm{d}y\\
&\leq c_2\sum_{l\geq 0}\frac{2^{kn}}{(1+2^l)^{n+1}}2^{(k-l-1)n}\int_{|x-y|\leq 2^{l-k+1}}|f_j(y)|\,\mathrm{d}y\\
&\leq c_3\sum_{l\geq 0}2^{-l}Mf_j(x)\\
&\leq c_4 Mf_j(x).
\end{aligned}$$

On a

$$2^{sk}\leq c2^{s(k-j)}2^{sj}\qquad \text{pour } k\leq j \tag{1.15}$$

Pour s > 0, ona

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k-t}^{k+t}2^{sk}|S_kf_j| &\leq c_1 2^{sk}\sum_{j=k}^{\infty}2^{-sj}2^{sj}|S_{k+t}f_j|\\
&\leq c_2 2^{sk}\sum_{j=k}^{\infty}2^{-sj}2^{sj}Mf_j.
\end{aligned}$$

Pour s < 0, ona

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k-t}^{k+t}2^{sk}|S_kf_j| &\leq c_3 2^{sk}\sum_{j=0}^{k}2^{-sj}2^{sj}|S_{k-t}f_j|\\
&\leq c_4 2^{sk}\sum_{j=0}^{k}2^{-sj}2^{sj}Mf_j\ .
\end{aligned}$$

On calculer la norme dans $L_p(\ell_q)$, et appliquer la proposition 1.16 puis la proposition 1.21/(2) on obtient le résulta

$$\left\|\sum_{j=0}^{\infty}f_j\right\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)}\leq C\left\|(\sum_{j=0}^{\infty}(2^{sj}f_j)^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_p.$$

Pour s = 0, ona

$$\sum_{j=k-t}^{k+t}2^{sk}|S_kf_j|\leq c_1\sum_{j=k-t}^{k+t}2^{sj}Mf_j\ .$$

Par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\sum_{j=k-t}^{k+t} 2^{sk} |S_k f_j| \leq c_2 (2t+1)^{\frac{1}{q'}} (\sum_{j=k-t}^{k+t} (2^{sj} M f_j)^q)^{\frac{1}{q}} .$$

donc

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=0}^{\infty} f_j\right\|_{F^0_{p,q}(\mathbb{R}^n)} &\leq c_3 \left\|(\sum_{j=0}^{\infty}(2^{sj}Mf_j)^q \sum_{j=k-t}^{k+t} 1)^{\frac{1}{q}}\right\|_p \\ &\leq c_4 \left\|(\sum_{j=0}^{\infty}(2^{sj}Mf_j)^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_p \\ &\leq C \left\|(\sum_{j=0}^{\infty}(2^{sj}f_j)^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_p .\end{aligned}$$

Preuve de (2). On prendre la décomposition de Littlewood-Paley

$$f_j = \sum_{k=0}^{\infty} S_k f_j \qquad ,\forall j \in \mathbb{N}$$

nous obtenons

$$f_j = \sum_{k=j-t}^{j+t} 2^{jn}\mathcal{F}^{-1}\phi(2^j.) * S_k f$$

telle que supp $\phi(2^{-j})\cap$ supp $\mathcal{F}f_j \neq \varnothing$ pour $|j-k| \leq t$ avec $t = 2 + \left[\frac{\log b}{\log 2}\right]$

$$\begin{aligned}|f_j| &= \left|\sum_{k=j-t}^{j+t} 2^{jn}\mathcal{F}^{-1}\phi(2^j.) * S_k f\right| \\ &\leq C \left\|\mathcal{F}^{-1}\phi\right\|_1 \sum_{k=j-t}^{j+t} MS_k f \qquad ,\text{(par la proposition 1.21/(1))} \\ &\leq C_1 \sup_{|\alpha|\leq L} \left\|\phi^{(\alpha)}\right\|_\infty \sum_{k=j-t}^{j+t} MS_k f \qquad ,\text{(par le lemme 1.17)}\end{aligned}$$

donc, par la relation (1.15)

$$\begin{aligned}2^{sj}|f_j| &\leq C_2 \sup_{|\alpha|\leq L} \left\|\phi^{(\alpha)}\right\|_\infty \sum_{k=j-t}^{j+t} \frac{2^{sj}}{2^{sj}2^{(k-j)s}} 2^{sk} MS_k f \\ &\leq C_3 \sup_{|\alpha|\leq L} \left\|\phi^{(\alpha)}\right\|_\infty \sum_{k=j-t}^{j+t} 2^{(j-k)s}2^{sk} MS_k f .\end{aligned}$$

Maintenant il suffit de calculer la norme dans $L_p(\ell_q)$, et appliquer la proposition 1.16 puis la proposition 1.21/(2) pour obtient le résultat.

Preuve de(3). Soient a_1 et a_2 tels que $\frac{b}{2} < a_1 < b_1 < b_2 < a_2 < 2b_1$, et une fonction $\psi \in \mathcal{S}$ telle que :

$$\mathcal{F}\psi(\xi) = \begin{cases} 1 \quad \text{si } b_1 < |\xi| < b_2 \\ 0 \quad \text{si } |\xi| < a_1 \text{ ou } |\xi| > a_2 \end{cases}$$

Nous avons $\mathcal{F}\psi(2^{-j}\xi)\mathcal{F}f_k = 0$ si $j \neq k$ et $\mathcal{F}\psi(2^{-j}\xi)\mathcal{F}f_j = \mathcal{F}f_j$, alors par (1.14), on trouve

$$\begin{aligned} \left\| (\sum_{j=0}^{\infty} (2^{js} |f_j(.)|)^q)^{\frac{1}{q}} \right\|_p &= \left\| (\sum_{j=0}^{\infty} (2^{js} \left| ((2^{jn}\psi(2^{-j}.)) * f_j)(.) \right|)^q)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \\ &= \left\| (\sum_{j=0}^{\infty} (2^{js} (2^{jn}\psi(2^{-j}.)) * (\sum_{k=0}^{\infty} f_k))^q)^{\frac{1}{q}} \right\|_p \\ &\leq c \left\| \sum_{k=0}^{\infty} f_k \right\|_{F^s_{p,q}} . \end{aligned}$$

Preuve de(4). Comme la preuve de (1) on prendre le cas $s > 0$ puis on calculer la norme dans $L_p(\ell_q)$, et appliquer la proposition 1.16 puis la proposition 1.21/(2) pour obtient cette résultat

$$\left\| \sum_{j=0}^{\infty} f_j \right\|_{F^S_{p,q}} \leq c \left\| (\sum_{j=0}^{\infty} (2^{js} |f_j(.)|)^q)^{\frac{1}{q}} \right\|_p .$$

■

Chapitre 2

Les opérateurs pseudo-différentiels

Le point de départ est la classe de opérateurs pseudo différentiels classiques présentés par Hörmander.

Dans ce chapitre, on donne quelque définitions essentielles, et la décomposition en symboles élémentaires des opérateurs pseudo-différentiels.

2.1 Espace de symboles

Nous commençons par rappeler la classe des symboles non homogènes qui est une cas spécial de la classe de Hörmander des symboles σ.

Soit la fonction $\sigma(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$, nous utilisons les abréviations suivantes :

$$\partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi) = \frac{\partial^{|\alpha|}\sigma(x,\xi)}{\partial\xi_1^{\alpha_1}...\partial\xi_n^{\alpha_n}} \ \text{ et } \ \partial_x^\beta \sigma(x,\xi) = \frac{\partial^{|\beta|}\sigma(x,\xi)}{\partial x_1^{\beta_1}...\partial x_n^{\beta_n}},$$

avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ sont multi-indices.

Définition 2.1 ***(La classe de Hörmander)*** *Soient $m \in \mathbb{R}$, $0 \le \rho \le 1$, et $0 \le \delta \le 1$. La classe de Hörmander $S^m_{\rho,\delta}$ est l'ensemble des fonctions $\sigma(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tel que pour tous multi-indices α, β . Il existe $C_{\alpha,\beta} > 0$ tel que*

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)\right| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} \ .$$

Définition 2.2 *Soient $0 \le \delta < 1$, $m \ge 0$, $N \in \mathbb{N}$. $S^m_{1,\delta}(\omega, N)$ est la classe des symboles $\sigma(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ de dégré m et de type $(1,\delta)$ qui vérifiant l'inégalités suivantes pour* *tout α et β tel que $|\beta| \leq N$. Ils existent $C_{\alpha,\beta}$, $C'_{\alpha,\beta}$ strictement positive, tels que :*

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|+\delta|\beta|} \tag{2.1}$$

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x+h,\xi) - \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)\right| \leq C'_{\alpha,\beta}\omega(|h|\,|\xi|^\delta)(1+|\xi|)^{m-|\alpha|+\delta|\beta|} \tag{2.2}$$

où ω est module de continuité.

Définition 2.3 *Le module de continuité est une fonction $\omega : [0,+\infty] \longrightarrow [0,+\infty]$ utilisée pour mesurer quantitativement la continuité uniforme des fonctions de plus :*

- $\lim_{t\to 0} \omega(t) = 0$.
- *ω est continue.*
- *ω est concave.*
- *ω est croissante.*

On a des exemples sur le module de continuité

- $\omega(t) = t^\delta$, *si* $0 < \delta < 1$.
- $\omega(t) = \frac{1}{(\log\frac{1}{t})^\delta}$, *pour* $0 < \delta$ *et* $0 < t \leq \frac{1}{2}$.

Exemple 2.4 *La fonction $\sigma(x,\xi) = \sum\limits_{|\beta|\leq m} \sigma_\beta(x)\xi^\beta$ est un symbole de dégre m et de type $(1,0)$ où $\sigma_\beta(x) \in C_b^\infty$.*

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

$$\begin{aligned}
\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\gamma \sigma(x,\xi)\right| &= \left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\gamma \sum_{|\beta|\leq m} \sigma_\beta(x)\xi^\beta\right| \\
&\leq \sum_{|\beta|\leq m} \left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\gamma \sigma_\beta(x)\xi^\beta\right| \\
&\leq \sum_{|\beta|\leq m} \left|\partial_x^\gamma \sigma_\beta(x)\partial_\xi^\alpha \xi^\beta\right| \\
&\leq \sum_{|\beta|\leq m} C_{\alpha,\beta,\gamma}\,|\xi|^{|\beta|-|\alpha|} \\
&\leq C_{\alpha,\gamma}\,|\xi|^{|\beta|-|\alpha|} \\
&\leq C_{\alpha,\gamma}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|}
\end{aligned}$$

donc $\sigma \in S_{1,0}^m$.

Définition 2.5 *Soit $\sigma(x,\xi) \in S^m_{1,\delta}(\omega,N)$. On définit l'opérateur pseudo-différentiel de symbole σ par :*

$$\sigma(x,D)f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\sigma(x,\xi)\mathcal{F}f(\xi)\mathrm{d}\xi \quad , f \in \mathcal{S}'$$

Remarque 2.6 *On note l'ensemble des opérateurs pseudo-différentiel d'order m et de type $(1,\delta)$ appartient à la classe $S^m_{1,\delta}(\omega,N)$ par $OP^m_{1,\delta}(\omega,N)$.*

Remarque 2.7 *L'espace des symboles $S^m_{1,\delta}$ vérifiant (2.1) est un espace de Frécher pour les semis-normes suivantes :*

$$\pi_{|\alpha|,L}(\sigma) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n,|\beta|\leq L} \left|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\sigma(x,\xi)\right|(1+|\xi|)^{-m+|\alpha|-\delta|\beta|}$$

Il en est de même, pour l'espace des symboles vérifiant (2.2), avec les semis-normes

$$\widetilde{\pi}_{|\alpha|,L}(\sigma) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n,|\beta|\leq L} \frac{\left|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\sigma(x+h,\xi) - \partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\sigma(x,\xi)\right|(1+|\xi|)^{-m+|\alpha|-\delta|\beta|}}{\omega(|h|\,|\xi|^\delta)}$$

2.1.1 Propriétés des symboles

Proposition 2.8 *Soient $m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in S^m_{1,\delta}$ et γ,ρ des multi indices. Alors $\partial_\xi^\gamma\partial_x^\rho\sigma \in S^{m-(|\gamma|-\delta|\rho|)}_{1,\delta}$.*

Preuve. Soient α,β des multi-indices, par définition on a

$$\begin{aligned}
\left|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\partial_\xi^\gamma\partial_x^\rho\sigma(x,\xi)\right| &= \left|\partial_\xi^\alpha\partial_\xi^\gamma\partial_x^\beta\partial_x^\rho\sigma(x,\xi)\right| \\
&= \left|\partial_\xi^{\alpha+\gamma}\partial_x^{\beta+\rho}\sigma(x,\xi)\right| \\
&\leq C_{\alpha+\gamma,\beta+\rho}(1+|\xi|)^{m-|\alpha+\gamma|+\delta|\beta+\rho|} \quad \text{car } :\sigma \in S^m_{1,\delta} \\
&\leq C(1+|\xi|)^{(m-|\gamma|+\delta|\rho|)-|\alpha|+\delta|\beta|}.
\end{aligned}$$

Pour la $2^{éme}$ condition, (on utilise la formule de Leibniz) on a

$$\begin{aligned}
\left|\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\partial_\xi^\gamma\partial_x^\rho\sigma(x+h,\xi) - \partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta\partial_\xi^\gamma\partial_x^\rho\sigma(x,\xi)\right| &= \left|\partial_\xi^\alpha\partial_\xi^\gamma\partial_x^\beta\partial_x^\rho\sigma(x+h,\xi) - \partial_\xi^\alpha\partial_\xi^\gamma\partial_x^\beta\partial_x^\rho\sigma(x,\xi)\right| \\
&= \left|\partial_\xi^{\alpha+\gamma}\partial_x^{\beta+\rho}\sigma(x+h,\xi) - \partial_\xi^{\alpha+\gamma}\partial_x^{\beta+\rho}\sigma(x,\xi)\right| \\
&\leq C'_{\alpha+\gamma,\beta+\rho}\omega(|h|\,|\xi|^\delta)(1+|\xi|)^{m-|\alpha+\gamma|+\delta|\beta+\rho|} \\
&\leq C'_{\alpha+\gamma,\beta+\rho}\omega(|h|\,|\xi|^\delta)(1+|\xi|)^{(m-|\gamma|+\delta|\rho|)-|\alpha|+\delta|\beta|}.
\end{aligned}$$

donc $\partial_\xi^\gamma\partial_x^\rho\sigma \in S^{m-(|\gamma|-\delta|\rho|)}_{1,\delta}$. ∎

2.2 Réduction aux symboles élémentaires

Nous traiterons la réduction des symboles à la forme élémentaires comme présentée par Coifman et Meyer. Cette réduction a un röle important dans la 3 émé chapitre [4].

Définition 2.9 *Soient $a > 0$ et ω module de continuité. On définit l'espace $C^{a,\omega}(\mathbb{R}^n)$par :*

$$C^{a,\omega}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \ \text{et} \ \|f\|_{C^{a,\omega}} < +\infty \right\}$$

telle que

$$\|f\|_{C^{a,\omega}} = \|f\|_{C_b^{[a]}} + \sum_{|\beta|=[a]} \sup_{h\neq 0} \frac{\left\| f^{(\beta)}(.+h) - f^{(\beta)} \right\|_\infty}{\omega(|h|)}.$$

Définition 2.10 *On dit que $\sigma \in S^m_{1,\delta}(\omega, N)$ est un symbole élémentaire, s'il existe une fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ de supp $\theta \subset \left\{ \xi : \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2 \right\}$et une suite de fonctions $\{\mathcal{M}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ dans $C^{a,\omega}$ telle que :*

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{mj} \mathcal{M}_j(2^{\delta j}x)\theta(2^{-j}\xi) \tag{2.3}$$

Proposition 2.11 *Soit $L \geq n+1$ et $\sigma \in S^m_{1,\delta}(\omega, N)$ alors*

$$\sigma(x,\xi) = r(x,\xi) + \int_{\mathbb{R}^n} (1+|y|^2)^{-\frac{1+n}{2}} \sigma_y(x,\xi) dy \tag{2.4}$$

avec $\sigma_y(x,\xi)$ est un symbole élémentaire de $S^m_{1,\delta}(\omega, N)$ c.à.d

$$\sigma_y(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{mj} \mathcal{M}_{j,y}(2^{\delta j}x)\theta_y(2^{-j}\xi) \tag{2.5}$$

et

$$r(x,\xi) = 0 \quad \text{pour} \quad |\xi| \geq 1 \tag{2.6}$$

avec $\{\mathcal{M}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$, convergant uniformément dans $C^{a,\omega}$, et $\theta_y \in C_0^\infty$ de plus

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left\| \partial_\xi^\alpha \theta_y \right\|_\infty \leq c \quad \text{pour} \ |\alpha| \leq L-n-1, \tag{2.7}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{c} \left\| \partial_\xi^\alpha r(.,\xi) \right\|_{C_b^N} \leq c\pi_{|\alpha|,N}(\sigma) \\ \left\| \partial_\xi^\alpha r(.+h,\xi) - \partial_\xi^\alpha r(.,\xi) \right\|_{C_b^N} \leq c\widetilde{\pi}_{|\alpha|,L}(\sigma)\omega(|h|) \end{array} \right. \tag{2.8}$$

Preuve. Soit $\varphi \in C_0^\infty$ telle que

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} 1 \quad \text{si } |\xi| \leq \frac{1}{2} \\ 0 \quad \text{si } |\xi| \geq 1 \end{cases}$$

On pose $\sigma(x,\xi) = a(x,\xi) + r(x,\xi)$, avec

$$r(x,\xi) = \varphi(\xi)\sigma(x,\xi)$$

et

$$a(x,\xi) = (1-\varphi(\xi))\sigma(x,\xi)$$

Etape 1. Nous étudions le terme $a(x,\xi)$

Soit la fonction $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$\text{supp } \theta = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2 \right\}$$

et

$$\sum_{j=0}^{\infty} \theta^2(2^{-j}\xi) = 1 \ .$$

Pour la construction de θ, voir[3 page136]. On pose

$$\sigma_j(x,\xi) = 2^{-jm}\theta(\xi)a(2^{-\delta j}x, 2^j\xi) \ .$$

Il vient

$$\sigma_j(x,\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}y\cdot\xi}(1+|y|^2)^{\frac{-L}{2}} \mathcal{M}_{j,y}(x)\mathrm{d}y \ , \tag{2.9}$$

où

$$\mathcal{M}_{j,y}(x) = \int_{2^{-1}\leq|\xi|\leq 2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}(1-|\Delta_\xi|)^{\frac{L}{2}}\sigma_j(x,\xi)\mathrm{d}\xi$$

Nous allons vérifier que la suite $\{\mathcal{M}_{j,y}\}_{j\in\mathbb{N}}$convergant uniformément dans $C^{a,\omega}$. Soit le multi-indice β telle que $|\beta| \leq N$

$$\partial_x^\beta \mathcal{M}_{j,y}(x) = \int_{2^{-1}\leq|\xi|\leq 2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}(1-|\Delta_\xi|)^{\frac{L}{2}}\partial_x^\beta\sigma_j(x,\xi)\mathrm{d}\xi,$$

par la formule de Leibniz on remarque que $(1-|\Delta_\xi|)^{\frac{L}{2}}\partial_x^\beta\sigma_j(x,\xi)$ est une combinaison linéaire finie de termes

$$2^{(|\alpha|-\delta|\beta|)j}2^{-jm}\theta^{(\gamma)}(\xi)\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta a(2^{-\delta j}x, 2^j\xi) \ \text{ avec } |\alpha|+|\gamma| = L \ .$$

Par l'inégalité (2.1) on obtient

$$\begin{aligned}
\left|\partial_x^\beta \mathcal{M}_{j,y}(x)\right| &= \left|\int_{2^{-1}\leq|\xi|\leq 2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}(1-|\Delta_\xi|)^{\frac{L}{2}}\partial_x^\beta\sigma_j(x,\xi)\mathrm{d}\xi\right| \\
&\leq c_1 2^{-jm}\sum_{|\alpha|+|\gamma|=L} 2^{(|\alpha|-\delta|\beta|)j}\int_{2^{-1}\leq|\xi|\leq 2}\left|\theta^{(\gamma)}(\xi)\right| \\
&\quad \times(2^{-j}+|\xi|)^{m-|\alpha|+\delta|\beta|}d\xi \\
&\leq c_2\pi_{|\alpha|,L}(\sigma)\sum_{|\alpha|+|\gamma|=L}\int_{2^{-1}\leq|\xi|\leq 2}\left|\theta^{(\gamma)}(\xi)\right| \\
&\quad \times(2^{-j}+|\xi|)^{m-|\alpha|+\delta|\beta|}\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

L'estimation est évident si $m-|\alpha|+\delta\,|\beta|\geq 0$, mais si $m-|\alpha|+\delta\,|\beta|=-t<0$ nous intrduisons un entier N tel que $n+N>t$.

Nous avons

$$\left|\theta^{(\gamma)}(\xi)\right|\leq c(1+|\xi|)^{-N}$$

par conséquent on trouve

$$\left\|\partial_x^\beta\mathcal{M}_{j,y}(.)\right\|_\infty\leq c.$$

De même pour

$$\begin{aligned}
\left|\partial_x^\beta\mathcal{M}_{j,y}(x+h)-\partial_x^\beta\mathcal{M}_{j,y}(x)\right| &\leq c_1\widetilde{\pi}_{|\alpha|,L}(\sigma)\sum_{L=|\alpha|+|\gamma|}\int_{2^{-1}\leq|\xi|\leq 2}\left|\theta^{(\gamma)}(\xi)\right|\omega(|h|\,(1+2^{\delta j}\,|\xi|^\delta)) \\
&\quad \times(2^{-j}+|\xi|)^{m-|\alpha|+\delta|\beta|}d\xi \\
&\leq c_2\widetilde{\pi}_{|\alpha|,L}(\sigma)\omega(|h|)\sum_{L=|\alpha|+|\gamma|}\int_{2^{-1}\leq|\xi|\leq 2}\left|\theta^{(\gamma)}(\xi)\right|(1+2^{\delta j}\,|\xi|^\delta) \\
&\quad \times(2^{-j}+|\xi|)^{m-|\alpha|+\delta|\beta|}d\xi \\
&\leq c_3\omega(|h|).
\end{aligned}$$

par conséquent on trouve

$$\left\|\partial_x^\beta\mathcal{M}_{j,y}(.+h)-\partial_x^\beta\mathcal{M}_{j,y}(.)\right\|_\infty\leq c\omega(|h|).$$

Donc

$$\mathcal{M}_{j,y}\subset C^{a,\omega}$$

On revenir à la construction de $\sigma_y(x,\xi)$.

Par les égalités (2.9) on trouve

$$\begin{aligned} a(x,\xi) &= \sum_{j=0}^{\infty}(\theta(2^{-j}\xi))^2 a(x,\xi) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} 2^{jm}\theta(2^{-j}\xi)\sigma_j(2^{\delta j}x,2^{-j}\xi) \\ &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|y|^2)^{-\frac{n+1}{2}}\{(1+|y|^2)^{\frac{n+1-L}{2}} \\ &\quad \times\sum_{j=0}^{\infty}2^{jm}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2^{-j}y\cdot\xi}\theta(2^{-j}\xi)\mathcal{M}_{j,y}(2^{\delta j}x)\}\mathrm{d}y \end{aligned}$$

On pose

$$\theta_y(\xi) = (2\pi)^{-n}(1+|y|^2)^{\frac{n+1-L}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y\cdot\xi}\theta(\xi)$$

et

$$\sigma_y(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty}2^{jm}\mathcal{M}_{j,y}(2^{\delta j}x)\theta_y(2^{-j}\xi).$$

maintenant on estimer l'inégalité (2.7) (par la formule de Leibniz)

$$\partial_\xi^\alpha\theta_y(\xi) = (2\pi)^{-n}(1+|y|^2)^{\frac{n+1-L}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y\cdot\xi}\sum_{0\le\gamma\le\alpha}\frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!}(\mathrm{i}y)^\gamma\theta^{(\alpha-\gamma)}(\xi)\ .$$

Puisque $|y|^{|\gamma|}(1+|y|^2)^{\frac{n+1-L}{2}}\le 1$, pour $|\gamma|\le L-n-1$, on obtient

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\left\|\partial_\xi^\alpha\theta_y\right\|_\infty \le c \quad \text{pour } \ |\alpha|\le L-n-1.$$

Etape 2. Maintenant nous étudions le terme $r(x,\xi)$ définit par

$$r(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n}(1+|y|^2)^{-2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y\cdot\xi}\vartheta_y(x)\mathrm{d}y\ , \tag{2.10}$$

telle que :

$$\vartheta_y(x) = (2\pi)^{-2n}\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}(1-\Delta_\xi)^{2n}r(x,\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{2.11}$$

Il est facile d'obtenir l'estimations

$$\left\|\partial_\xi^\alpha r(.,\xi)\right\|_{C_b^N}\le c\pi_{|\alpha|,N}(\sigma) \tag{2.12}$$

et

$$\left\|\partial_\xi^\alpha r(.+h,\xi)-\partial_\xi^\alpha r(.,\xi)\right\|_{C_b^N}\le c\widetilde{\pi}_{|\alpha|,L}(\sigma)\omega(|h|)\ . \tag{2.13}$$

Si $|\beta| \leq N$, alors

$$(2.12) \text{ et } (2.13) \Longrightarrow \begin{cases} \left|\partial_x^\beta \vartheta_y(x)\right| = \left|(2\pi)^{-2n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot\xi}(1-\Delta_\xi)^{2n}\partial_x^\beta r(x,\xi)\mathrm{d}\xi\right| \\ \leq c\pi_{4n,N}(\sigma) \\ \left|\partial_x^\beta \vartheta_y(x+h) - \partial_x^\beta \vartheta_y(x)\right| \leq c_1 \widetilde{\pi}_{4n,N}(\sigma) \int_{|\xi|\leq 1} \omega(|h|\,|\xi|^\delta)\mathrm{d}\xi \\ \leq c_2 \widetilde{\pi}_{4n,N}(\sigma)\omega(|h|) \int_{|\xi|\leq 1}(1+|\xi|^\delta)\mathrm{d}\xi \\ \leq c_3\omega(|h|). \end{cases}$$

avec c_1, c_2, c_3 sont indépendants de y, donc on obtient

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \|\vartheta_y\|_{C^{N,\omega}} \leq +\infty.$$

■

Chapitre 3

Continuité des $o.ps.d$ d'order m sur $F^s_{p,q}$

Dans ce chapitre nous allons démontrer la continuité des opérateur pseudo-différentiel d'order m sur l'espace de Triebel-Lizorkin $F^s_{p,q}$, et ce condition

$$(\sum_{k=1}^{\infty}(2^{(s-N(1-\delta))k}\omega(2^{-(1-\delta)k}))^q)^{\frac{1}{q}} < +\infty \tag{3.1}$$

est suffisante et optimale pour la continuité sur $F^s_{p,q}$.

3.1 Préparation

Les lemmes, et la proposition suivantes jouent un rôle fondamental dans les preuves des théorèmes de ce chapitre.

Lemme 3.1 *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour toute $N \in \mathbb{N}$ et $(\mathcal{M}_j^{(\beta)})_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $C^{N,\omega}$, On a l'inégalité suivante*

$$\left\|S_k(\mathcal{M}_j(2^{j\delta}.))\right\|_\infty \leq c(\sup_{l\in N}\|\mathcal{M}_l\|_{C^{N,\omega}})2^{(j\delta-k)N}\omega(2^{(j\delta-k)})$$

Preuve. Par le développement deTaylor on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_j(x-y) &= \sum_{|\beta|<N}\frac{(-y)^\beta}{\beta!}\mathcal{M}_j^{(\beta)}(x) + N\sum_{|\beta|=N}\frac{(-y)^\beta}{\beta!}\int_0^1(1-t)^{N-1}\mathcal{M}_j^{(\beta)}(x-ty)\mathrm{d}t \quad (3.2)\\
&= \sum_{|\beta|<N}\frac{(-y)^\beta}{\beta!}\mathcal{M}_j^{(\beta)}(x) + R_j(x,y).
\end{aligned}$$

On pose

$$R_j(x,y) = N \sum_{|\beta|=N} \frac{(-y)^\beta}{\beta!} \int_0^1 (1-t)^{N-1} (\mathcal{M}_j^{(\beta)}(x-ty) - \mathcal{M}_j^{(\beta)}(x)) \mathrm{d}t$$

puisque $0 \notin \mathrm{supp}\gamma$, on a

$$2^{nk} \int_{\mathbb{R}^n} (-y)^\beta \mathcal{F}^{-1}(\gamma)(2^k y) dy = (i2^{-k})^{|\beta|} \gamma^{(\beta)}(0) = 0,$$

d'autre part, par la concavité de ω on obtient

$$|R_j(x,y)| \leq c\omega(|y|)\,|y|\,.$$

Si on remplaçais $\mathcal{M}_j(x-y)$ par $\mathcal{M}_j(2^{j\delta}(x-y))$ dans (3.2), alors

$$\begin{aligned}
\left|S_k(\mathcal{M}_j(2^{j\delta}.))(x)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}(\gamma)(y) R_j(2^{j\delta} x, 2^{(j\delta-k)} y) \mathrm{d}y\right| \\
&\leq c_1 (\sup_{j\in N} \|\mathcal{M}_j\|_{C^{N,\omega}}) 2^{(j\delta-k)N} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\mathcal{F}^{-1}(\gamma)(y)\right| \omega(2^{(j\delta-k)}\,|y|)\,|y|^N \mathrm{d}y \\
&\leq c_2 2^{(j\delta-k)N} \omega(2^{(j\delta-k)}) \int_{\mathbb{R}^n} \left|\mathcal{F}^{-1}(\gamma)(y)\right|)\,|y|^N (1+|y|) \mathrm{d}y \\
&\leq c_3 2^{(j\delta-k)N} \omega(2^{(j\delta-k)}).
\end{aligned}$$

Donc, nous obtenons le résultat. ■

Proposition 3.2 *Soient $s>0$, $N\in\mathbb{N}$, $1<q\leq\infty$, $1<p<\infty$, $0\leq\delta<1$, $\eta>0$, et ω est module de continuité vérifiant (3.1). Alors il existe une constante $c>0$ telle que l'inégalité suivante*

$$\left\|\sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{M}_j(2^{j\delta}.) f_j\right\|_{F^s_{p,q}} \leq c \left\|(\sum_{j=0}^{\infty} (2^{js}\,|f_j(.)|)^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_p$$

est vérifie pour toute suite $\{\mathcal{M}_j^{(\beta)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $C^{N,\omega}$, et toute suite $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ avec supp$\mathcal{F} f_j \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq \eta 2^j\}$.

Preuve. Par (1.4)on obtient

$$Q_j\mathcal{M}_j + \sum_{k=1+j}^{\infty} S_k\mathcal{M}_j = \mathcal{M}_j,$$

ce qui implique

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{M}_j(2^{j\delta}.) f_j = h_{1+} h_2$$

avec

$$h_1 = \sum_{j=0}^{\infty} f_j Q_j(\mathcal{M}_j(2^{j\delta}.))$$

et

$$h_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} f_j S_k(\mathcal{M}_j(2^{j\delta}.)).$$

Estimation de h_1. D'aprés(1.9), la fonction $\mathcal{F}(f_j Q_j(\mathcal{M}_j(2^{j\delta}.))$ est supporté par la boule $|\xi| \leq (\eta+2)2^j$ tels que :

$$\text{supp } \mathcal{F} Q_j(\mathcal{M}_j(2^{j\delta}.) \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 2^{j+1}\right\}.$$

et

$$\text{supp } \mathcal{F} f_j \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq \eta 2^j\right\}.$$

La proposition 1.22 / (4) et l'inégalité suivante

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \left\|Q_j(\mathcal{M}_j(2^{j\delta}.)\right\|_\infty \leq c \left\|\mathcal{F}^{-1}\gamma\right\|_1 \sup_{j\in\mathbb{N}} \left\|\mathcal{M}_j\right\|_\infty,$$

donnent

$$\begin{aligned} \|h_1\|_{F^s_{p,q}} &\leq c_1 \left\|(\sum_{j=0}^{\infty}(2^{sj}\left|f_j Q_j(\mathcal{M}_j(2^{j\delta}.)\right|)^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_p \\ &\leq c_2(\sup_{j\in\mathbb{N}} \|\mathcal{M}_j\|_{C^{N,\omega}}) \left\|(\sum_{j=0}^{\infty}(2^{sj}\left|f_j(.)\right|)^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_p. \end{aligned}$$

Estimation de h_2. On a

$$\text{supp}\mathcal{F}(\sum_{j=0}^{k-1} f_j S_k(\mathcal{M}_j(2^{j\delta}.)) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq (\frac{\eta}{2}+2)2^k\}.$$

On utilise, la proposition 1.22 / (4), le lemme 3.1, la croissance de ω,l'inégalité de Hölder, et l'ypothése (3.1) respectivement, on trouve

$$\begin{aligned}
\|h_2\|_{F^s_{p,q}} &= \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1} f_j S_k(\mathcal{M}_j(2^{j\delta}.))\right\|_{F^s_{p,q}} \\
&\leq c_1 \left\|(\sum_{k=1}^{\infty}(2^{sk}\sum_{j=0}^{k-1}\left\|S_k(\mathcal{M}_j(2^{j\delta}.)\right\|_{\infty}|f_j(.)|)^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_p \\
&\leq c_2 \left\|(\sum_{k=1}^{\infty}(2^{sk}\sum_{j=0}^{k-1}2^{(j\delta-k)N}\omega(2^{j\delta-k})\,|f_j(.)|)^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_p \\
&\leq c_3 \left\|(\sum_{k=1}^{\infty}(2^{(s-N(1-\delta))k}\omega(2^{-(1-\delta)k})\sum_{j=0}^{k-1}|f_j(.)|)^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_p \\
&\leq c_4(\sum_{k=1}^{\infty}(2^{(s-N(1-\delta))k}\omega(2^{-(1-\delta)k})\,|f_j(.)|)^q)^{\frac{1}{q}}\left\|\sum_{j=0}^{\infty}2^{-sj+sj}\,|f_j(.)|\right\|_p \\
&\leq c_5(\sum_{j=0}^{\infty}2^{-sjq'})^{\frac{1}{q'}}\left\|(\sum_{j=0}^{\infty}(2^{sj}\,|f_j(.)|)^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_p \\
&\leq c_6\left\|(\sum_{j=0}^{\infty}(2^{sj}\,|f_j(.)|)^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_p .
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=0}^{\infty}\mathcal{M}_j(2^{j\delta}.)f_j\right\|_{F^s_{p,q}} &= \|h_{1+}h_2\|_{F^s_{p,q}} \\
&\leq C\left\|(\sum_{j=0}^{\infty}(2^{sj}\,|f_j(.)|)^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_p .
\end{aligned}$$

■

Lemme 3.3 *Soient $s>0$, $N\in\mathbb{N}$, $1<q\leq\infty$, $1<p<\infty$, $0\leq\delta<1$, $\eta>0$, et ω est module de continuité vérifiant (3.1). Alors il existe une constante $c>0$ telle que*

$$\|f\cdot g\|_{F^s_{p,q}} \leq C\,\|f\|_{C^{N,\omega}}\,\|g\|_{F^s_{p,q}}$$

pour toute $f\in C^{N,\omega}$et $g\in F^s_{p,q}$.

Preuve. Soient $f\in C^{N,\omega}$et $g\in F^s_{p,q}$, d'aprés (1.8) on a :

$$f\cdot g=\sum_{j=0}^{\infty}(S_jg)\ (Q_jf)+\sum_{k=1}^{\infty}(S_kf)(\ Q_{k-1}g)$$

tels que

$$\mathrm{supp}\mathcal{F}((S_j g)\ (Q_j f)) \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 4 \cdot 2^j\right\}$$

et

$$\mathrm{supp}\mathcal{F}((S_k f)(\ Q_{k-1} g)) \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 3 \cdot 2^j\right\}\ .$$

donc

$$\|f \cdot g\|_{F^s_{p,q}} = \left\|\sum_{j=0}^{\infty}(S_j g)\ (Q_j f) + \sum_{k=1}^{\infty}(S_k f)(\ Q_{k-1} g)\ \right\|_{F^s_{p,q}}$$

Par la proposition 1.22 / (4), on obtient

$$\left\|\sum_{j=0}^{\infty}(S_j g)\ (Q_j f)\right\|_{F^s_{p,q}} \leq C\,\|f\|_{\infty}\,\|g\|_{F^s_{p,q}}$$

On changer $\mathcal{M}_j$ par f dans le lemme 3.1, on estime comme h_2 dans la preuve de la proposition précédent, et par la proposition 1.22 / (4), on trouve

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=1}^{\infty}(S_k f)\ (Q_{k-1} g)\right\|_{F^s_{p,q}} &\leq c_1 \left\|(\sum_{k=1}^{\infty}(2^{sk}\,|(S_k f)(Q_{k-1} g)|)^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_p \\
&\leq c_2\ (\sum_{k=1}^{\infty}(2^{(s-N)k}\omega(2^{-k}))^q)^{\frac{1}{q}}\,\|f\|_{C^{N,\omega}}\,\|g\|_{F^s_{p,q}} \\
&\leq c_3\,\|f\|_{C^{N,\omega}}\,\|g\|_{F^s_{p,q}}
\end{aligned}$$

■

3.2 Continuité des $o.ps.d$ (Condition suffisante)

Théorème 3.4 *Soient $s > 0$, $m \geq 0$, $N \in \mathbb{N}$, $1 < q \leq \infty$, $1 < p < \infty$, $0 \leq \delta < 1$, $\eta > 0$, et ω est module de continuité vérifiant*

$$(\sum_{k=1}^{\infty}(2^{(s-N(1-\delta))k}\omega(2^{-(1-\delta)k}))^q)^{\frac{1}{q}} < +\infty \tag{3.3}$$

alors tout o.ps.d $\sigma(.,D)$ de symbole σ de classe $S^m_{1,\delta}(\omega, N)$ est bornée de $F^{s+m}_{p,q}$ dans $F^s_{p,q}$ et ,

$$\|\sigma(.,D)f\|_{F^s_{p,q}} \leq c\,\|f\|_{F^{s+m}_{p,q}} \ .$$

Preuve. Etape 1. D'aprés la proposition 2.11, on peut écrire le symbole $\sigma \in S^m_{1,\delta}$ comme suivant

$$\sigma(x,\xi) = r(x,\xi) + \int_{\mathbb{R}^n}(1+|y|^2)^{-\frac{1+n}{2}}\sigma_y(x,\xi)\mathrm{d}y$$

nous allons estimer $r(.,D)f$ et $\sigma_y(.,D)f$ en norme de $F^s_{p,q}$, pour $f \in F^s_{p,q}$.
Par La proposition 3.2 et la proposition 1.22 / (2) respectivement, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\sigma_y(x,D)f\|_{F^s_{p,q}} &= \left\|\sum_{j=0}^{\infty}2^{jm}\mathcal{M}_j(2^{j\delta}.)\mathcal{F}^{-1}(\theta_y(2^{-j}.)\mathcal{F}f(.))\right\|_{F^s_{p,q}} \\
&= \left\|\sum_{j=0}^{\infty}2^{jm}\mathcal{M}_j(2^{j\delta}.)f_j(.)\right\|_{F^s_{p,q}} \\
&\leq c_1\left\|(\sum_{j=0}^{\infty}(2^{j(m+S)}\,|f_j(.)|)^q)^{\frac{1}{q}}\right\|_p \\
&\leq c_2(\sup_{|\alpha|\leq[\frac{n}{2}]+1}\left\|\theta_y^{(\alpha)}\right\|_\infty)\,\|f\|_{F^{s+m}_{p,q}} \\
&\leq c_3\,\|f\|_{F^{s+m}_{p,q}}\,.
\end{aligned}$$

avec

$$f_j(x) = \mathcal{F}^{-1}(\theta_y(2^{-j}.)\mathcal{F}f(.))(x)$$

et

$$\mathrm{supp}\ f_j \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq b2^j\right\}.$$

Etape 2. Maintenant on estimer $r(.,D)f$. D'aprés (2.10) et (2.11) on a

$$r(x,D)f(x) = \int_{\mathbb{R}^n}(1+|y|^2)^{-2n}\vartheta_y(x)f(x+y)\mathrm{d}y$$

Alors par le lemme 3.3, l'invariance de la norme de $F^s_{p,q}$ par la translation on obtient

$$\begin{aligned}
\|r(x,D)f\|_{F^s_{p,q}} &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} (1+|y|^2)^{-2n} \vartheta_y(x) f(x+y) \mathrm{d}y \right\|_{F^s_{p,q}} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|y|^2)^{-2n} \left\| \vartheta_y(x) f(x+y) \right\|_{F^s_{p,q}} \mathrm{d}y \\
&\leq c_1 \big(\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left\| \vartheta_y(x) \right\|_{C^{N,\omega}} \big) \left\| f \right\|_{F^s_{p,q}} \\
&\leq c_2 \left\| f \right\|_{F^{s+m}_{p,q}} .
\end{aligned}$$

■

3.3 Continuité des *o.ps.d* (Condition optimale)

Théorème 3.5 *Soient $s > 0$, $m \geq 0$, $N \in \mathbb{N}$, $1 < q \leq \infty$, $1 < p < \infty$, $0 \leq \delta < 1$, $\eta > 0$, on suppose que*

$$(\sum_{k=1}^{\infty}(2^{(s-N(1-\delta))k}\omega(2^{-(1-\delta)k}))^q)^{\frac{1}{q}} = +\infty$$

alors il existe un o.ps.d $\sigma(.,D)$ de symbole σ de classe $S^m_{1,\delta}(\omega,N)$ et une fonction $h \in F^{s+m}_{p,q}$ tel que $\sigma(.,D)h$ n'appartient pas dans $F^s_{p,q}$ ($\sigma(.,D)h \notin F^s_{p,q}$).

Preuve. Nous utilisons les notations suivante $x = (x_1, x') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$ et $\xi = (\xi_1, \xi') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$.

Soit l'opérateur $\sigma(.,D)$ de symbole

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-(1-\delta)jN}\omega(2^{-(1-\delta)j})\mathrm{e}^{(\mathrm{i}x_1 2^j)}\xi_1^m \qquad (x,\xi \in \mathbb{R}^n) \tag{3.4}$$

Nous allons démontrer que $\sigma \in S^m_{1,\delta}(\omega,N)$.

Etape 1. Puisque ω est monotone, et si $2^{-j} \leq |h|$ on obtient

$$\omega(2^{-(1-\delta)j})\left|\mathrm{e}^{(\mathrm{i}2^j h_1)} - 1\right| \leq 2\omega(2^{\delta j}|h|) \qquad (\forall h \in \mathbb{R}^n) \tag{3.5}$$

D'autre part on a ω est concave, et si $2^j|h| \leq 1$ on obtient

$$2^j|h_1|\,\omega(2^{-(1-\delta)j}) \leq \omega(2^{\delta j}|h|)$$

On pose

$$\mu_j(x) = 2^{-(1-\delta)jN}\omega(2^{-(1-\delta)j})\mathrm{e}^{(\mathrm{i}x_1 2^j)}$$

On utilise la partition de l'unité suivante

$$\lambda(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty}\eta(2^{-k}\xi) = 1$$

de type (1.1) avec $\lambda, \eta \in C_0^\infty$ et

$$\begin{aligned} \mathrm{supp}\ \lambda &\subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{-1} \leq |\xi| \leq 2\right\} \\ \mathrm{supp}\ \eta &\subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 2\right\} \end{aligned}$$

Alors nous écrivons

$$\sigma(x,\xi) = r(x,\xi) + a(x,\xi)$$

avec

$$r(x,\xi) = \lambda(\xi)\sigma(x,\xi)$$

et

$$a(x,\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta(2^{-k}\xi)\sigma(x,\xi)$$

Maintenat, on estimer $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)$, comme dans (1.7), telle que

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{j} + \sum_{k=1+j}^{\infty}) \partial_x^\beta \mu_j \partial_\xi^\alpha (\xi_1^m \eta(2^{-k}\xi))$$

On pose

$$\Phi(\xi) = (\sum_{k=0}^{j} + \sum_{k=1+j}^{\infty}) \partial_x^\beta \mu_j \partial_\xi^\alpha (\xi_1^m \eta(2^{-k}\xi))$$

telle que :

$$\text{supp } \Phi \subset \left\{\xi \in \mathbb{R} : 2^{j-1+l} \leq |\xi| \leq 2^{j+1+l} \ (l = 0,1,2)\right\}$$

alors $k \in L$ telle que L a au plus trois éléments.

On pose

$$\Psi(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{j} + \sum_{k=1+j}^{\infty}) \partial_x^\beta \mu_j \partial_\xi^\alpha (\xi_1^m \eta(2^{-k}\xi)),$$

avec

$$\text{supp } \Psi \subset \left\{\xi \in \mathbb{R} : 2^{j-1+l} \leq |\xi| \leq 2^{j+3+l} (l = 0,...,4)\right\},$$

alors $j \in \widetilde{L}$ telle que $\widetilde{L}$ a au plus cinq éléments.

Puis sur le supp $\eta^{(\gamma)}$ (avec $|\gamma| \leq |\alpha|$), on a $|\xi| \sim 2^j$ et $|\xi| \sim 2^k$, donc

$$\begin{cases} 2^{j\delta|\beta|} & \leq c(1+|\xi|)^{\delta|\beta|} \\ \left|\partial_\xi^\alpha (\xi_1^m \eta(2^{-k}\xi))\right| & \leq c(1+|\xi|)^{m-|\alpha|} \end{cases} \tag{3.6}$$

$$(3.5) \ et \ (3.6) \Longrightarrow \begin{cases} \left|\partial_x^\beta \mu_j(x)\right| \leq c 2^{j(1-\delta)(|\beta|-N)} (1+|\xi|)^{\delta|\beta|} \\ \text{et} \\ \left|\partial_x^\beta \mu_j(x+h) - \partial_x^\beta \mu_j(x)\right| \leq c 2^{j(1-\delta)(|\beta|-N)} (1+|\xi|)^{\delta|\beta|} \omega(h\,|\xi|^\delta) \end{cases}$$

puisque $|\beta| \leq N$ et $0 \leq \delta < 1$ on a

$$\sum_{j \in \widetilde{L}} 2^{j(1-\delta)(|\beta|-N)} \leq \max(5, (1 - 2^{(1-\delta)(N-|\beta|)})^{-1})$$

Par conséquent $a(x,\xi)$ vérifiant (2.1) et (2.2).

Même calcule pour $r(x,\xi)$.

Donc $\sigma \in S^m_{1,\delta}$.

Etape 2. Soit $g \in \mathcal{S}$ telle que :

$$\mathcal{F}g \in C_0^\infty,\ \|g\|_{L_p} = 1 \ \text{ et } \ \text{supp}\mathcal{F}g \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{8} \leq |\xi| \leq \frac{1}{4}\right\}$$

On pose

$$\mathcal{F}h = \begin{cases} \xi_1^{-m}\mathcal{F}g & \text{si } \xi \neq 0 \\ 0 & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

et

$$g_j(\xi) = \mathrm{e}^{(\mathrm{i}2^j x_1)} g(x)$$

telle que

$$\mathcal{F}g_j(\xi) = \mathcal{F}g(\xi_1 - 2^j, \xi')$$

et

$$\text{supp } \mathcal{F}g_j \subset \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{3}{4}2^j \leq |\xi| \leq \frac{5}{4}2^j\right\}$$

Par la proposition 1.22 / (3), on obtient

$$\begin{aligned}
\|\sigma(.,D)h\|_{F^s_{p,q}} &= \left\|\mathcal{F}^{-1}(\sigma(x,\xi)\mathcal{F}h)\right\|_{F^s_{p,q}} \\
&= \left\|\mathcal{F}^{-1}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-(1-\delta)jN}\omega(2^{-(1-\delta)j})\mathrm{e}^{(\mathrm{i}x_1 2^j)}\xi_1^m\ \xi_1^{-m}\mathcal{F}g\Big)\right\|_{F^s_{p,q}} \\
&= \left\|\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-(1-\delta)jN}\omega(2^{-(1-\delta)j})\mathrm{e}^{(\mathrm{i}x_1 2^j)} g\right\|_{F^s_{p,q}} \\
&= \left\|\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-(1-\delta)jN}\omega(2^{-(1-\delta)j}) g_j\right\|_{F^s_{p,q}} \\
&\geq C\Big(\sum_{j=0}^{\infty}(2^{(s-(1-\delta)N)j}\omega(2^{-(1-\delta)j})^q)^{\frac{1}{q}}\ \|g\|_{L_p} \\
&\geq +\infty.
\end{aligned}$$

■

3.4 Résulta finale

On considére $A^m_{1,\delta}(\omega, N)$ un sous-ensemble de $S^m_{1,\delta}(\omega, N)$ constitué par des symboles élémentaire de type (2.3). Alors les théorèmes (3.4) et (3.5) donnent la caractérisation suivant .

Théorème 3.6 *Soient $s > 0$, $m \geq 0$, $N \in \mathbb{N}$, $1 < q \leq \infty$, $1 < p < \infty$, $0 \leq \delta < 1$ et $\eta > 0$. Alors on*

$$(1) \Longleftrightarrow (2)$$

telle que :

(1) Soit ω un module de continuité vérifiant(3.3).

(2) Alors tout o.ps.d $\sigma(x, D)$ de symbole $\sigma \in A^m_{1,\delta}(\omega, N)$ est borné de $F^{s+m}_{p,q}$ dans $F^s_{p,q}$.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudier la continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces de Triebel -Lizorkin usuel $F^s_{p,q}$, dans cas particulier du la résultat qui obtenu par A. Djeriou et M. Moussai dans [5], avec une condition suffisante et optimale.

$$(\sum_{k=1}^{\infty}(2^{(s-(1-\delta)N)k}\omega(2^{-(1-\delta)k}))^q)^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

Bibliographie

[1] S. Alinhac et P. Gerard. Opérateurs pseudo-differentiels et théorème de Nash-Moser. EDP Sciences, 1991.

[2] S. Allaoui. Intégrales Singulières. Thèse de doctorat , université Hadj Lakhadar, Batna(Algerie), 2011.

[3] J. Bergh et Löfström. Interpolation spaces. Springer-Verlag, 1976.

[4] R.R. Coifman et Y. Meyer. Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels. Astérisque Soc.Math. France, 57, 1978.

[5] A. Djeriou et M. Moussai. *Boundedness of some pseudo-differential operators on generalized Triebel-lizorkin spaces.* Analysis,31(2011), 13-29.

[6] A. Djeriou**.** Continuité des Opérateurs pseudo-differentiels sur certains espaces fonctionnels. Thèse de doctorat , université Hadj Lakhadar, Batna(Algerie), 2012.

[7] G. Loukas. Classical Fourie Analysis. Springer, April 2008.

[8] M. Moussai. Thèse $3^{éme}$ cycle université Paris VII, 1986.

[9] J.Peetre. New thoughts on Besov spaces. Duke Uni. Math. Series 1, Durham 1976.

[10] T. Runst et W. Sickel. Sobolev spaces of fractional order, Nemytskii operators and nonlinear partial differential equation. de Gruyter, Berlin 1996.

[11] E. M. Stein, Harmonic Analysis : Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Press, Princeton New Jersey, 1993.

[12] H.Triebel. Theory of function spaces. Birkhäuser, Basel, 1983 .

[13] H.Triebel Theory of function spaces II. Birkhäuser, Basel, 1992 .