Remerciements

Mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il nous a donnée durant toutes ces langues années.

J'exprime ma profondes gratitudes à mes parents pour leurs encouragements, leurs soutien et pour les sacrifices qu'ils ont enduré.

Je tiens également à exprimer mes vifs remerciements à mon Encadreur Prof.

***Lemnaouar Zedam** et mon Co-encadreur **Milles Soheyb** pour avoir d'abord proposé ce sujet, poursuivi contuelement tout le long du parcours et qui n'a pas cessée de me donner des conseils et les remarques.*

Je remercie les membres de jury pour l'honneur qu'ils me font en participant au jugement de ce travail.

Les mêmes expressions de reconnaissance vont également à tous les enseignants du Département mathématiques.

Je tiens à remercier vivement toutes les personnes qui m'ont aidé d'élaborer et réaliser ce mémoire. Ainsi qu'à tous ceux qui me aidaient de prés où de lois à accomplir ce travail.

Enfin Je tiens à exprimer ma reconnaissance à toute mes amies et collèges pour le soutien moral et matériel.

Abstract

Triangular norms and conorms (t-norms and t-conorms, for short) are important tools for the interpretation of the conjunction and disjunction in fuzzy logic. Particulary, they are very useful for a lot of notions, like union and intersection of fuzzy sets, antisymmetry and transitivity of fuzzy relations, etc.. . .

In this memory we are interested in study of particular binary operations, triangular norms and triangular conorms in the real interval [0, 1]. We focused on the most important algebraic properties, also those related to the order.

Key words : Binary operation, t-norm , t-conorm.

Résumé

Normes et conormes triangulaires (brièvement t-norme et t-conorme) sont des outils importants pour l'interprétation de la conjonction et la disjonction en logique flous. Particulièrement, ils sont très utiles pour beaucoup de notions, comme l'union et l'intersection des ensembles flous, antisymétrie et la transitivité des relations floues, etc.

Dans ce mémoire de Master nous intéressons à l'étude des normes et conormes triangulaires dans l'intervalle réel [0,1]. Nous avons concentrées sur les propriétés algébriques les plus importantes, aussi ceux liés à l'ordre.

Mots clefs: Opération binaire, t-norme, t-conorme.

Table des matières

Introduction

La notion de normes triangulaires (où t-normes) a été introduit par Karl Menger en 1942. Dans leur premier usage, ces opérateurs sont produit afin de généraliser l'inégalité triangulaire des espaces métriques classiques à des espaces métriques statistiques. La notion courante de T-normes et leurs duales T-conormes, et les axiomes caractérisant ces opérateurs proviennent des travaux de Schweizer et Sklar.

T-normes et T-conormes sont des opérations binaires sur l'intervalle $[0,1]$ tels que le triplet $([0,1], T, <)$ est un semi groupe abélien et totalement ordonnée avec l'élément neutre 1. Ces opérations permettent de généraliser les opérations ensemblistes d'intersection et d'union respectivement (et par extension la conjonction et la disjonction des propositions) sur les ensembles flous.

Le but de ce travail est d'étudier les propriétés algébriques des T-normes et leurs duales T-conormes dans l'intervalle $[0,1]$.

Le mémoire est divisé en trois chapitres. Dans le premier chapitre on parle sur les T-normes et les propriétés caractérisant ces opérations.

Dans le deuxième chapitre on fait une étude sur les duales T-conormes (définition et propriétés), et on précise la relation entre les T-normes et T-conormes.

Dans le troisième chapitre nous allons voir les opérateurs généralisont les t-normes et t-conormes qui sont les uninormes et nullnormes, Ainsi, on présente quelques applications dans les notions de la logique floue.

Chapitre 1

Normes triangulaires

Karl Menger introduit la notion de normes triangulaires, ou t-normes, en 1942. Dans leur premier usage, ces opérateurs sont produits afin de généraliser l'inégalité triangulaire des espaces métriques classiques à des espaces métriques statistiques ou probabilistes.

Les fonctions telles que définies par Menger forment une classe large et hétérogène d'opérateurs binaires, symétriques et non décroissants, satisfaisant $A(1, x) > 0$ si $x > 0$.

Pourtant, aujourd'hui, la définition communément admise des normes triangulaires est celle proposée par Schweizer et Sklar, où les propriétés d'associativité et d'un élément neutre fixé à 1, impliquant $A(1, x) = x$, sont ajoutées. On peut remarquer que l'associativité permet d'étendre l'opérateur binaire à son équivalent n-aire, obtenant ainsi une généralisation de l'inégalité polygonale. Depuis ces opérateurs ont été largement étudiés.[7]

1.1 Définitions et exemples

Le terme norme triangulaire vient de la définition de Menger, et les axiomes caractérisant cet opérateur proviennent des travaux de *Schweizer* et *Sklar.*

Définition 1.1.1 *[7]Une norme triangulaire (ou T-norme), est une opération binaire T sur l'intervalle $[0, 1]$, c'est à dire une fonction $T : [0, 1]^2 \to [0, 1]$, telle que les quatre axiomes suivants sont satisfaits:*

(P1) $T(x, y) = T(y, x)$, *Commutativité;*

(P2) $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$, *Associativité;*

(P3) $T(x,y) \leq T(x,z)$ *si* $y \leq z$, *Monotonie;*

(P4) $T(x,1) = x$, *Elément neutre.*

Notation 1.1.1

Une T-norme est une opération algébrique sur l'intervalle $[0,1]$, *certains auteurs préfèrent d'utiliser une notation infixe* $x * y$ *au lieu de la notation préfixe* $T(x,y)$, *donc les axiomes (P1)-(P4) donnent, Pour tout* x, y *et* z *dans* $[0,1]$*:*

(P1) $x * y = y * x$, *Commutativité;*

(P2) $x * (y * z) = (x * y) * z$, *Associativité;*

(P3) $x * y \leq x * z$ *si* $y \leq z$, *Monotonie;*

(P4) $x * 1 = x$, *Elément neutre.*

Remarque 1.1.1 *Une T-norme est dite diagonale si et seulement si* $T(x,x) < x$ *pour* $0 < x < 1$.

Proposition 1.1.1 *Une conséquence naturelle pour les axiomes(P1)-(P4) est la propriété suivante:*

$$T(x,0) = 0. \tag{P5}$$

Preuve.

On sait que $T(x,0) \in [0,1]$, donc $T(x,0) \geq 0$. et on utilise l'axiome (P3)

($T(x,y) \leq T(z,t)$ si $x \leq z$ et $y \leq t$) avec $y = t = 0$ et $x \leq 1$ car $x \in [0,1]$. Donc on obtient $T(x,0) \leq T(1,0) = 0$. ■

Exemple 1.1.1 (Les T-normes de base) *Il existe énormément des normes triangulaires (en réalité une infinité), et nous présentons dans ce chapitre les quatre T-normes dites de base à partir desquelles on peut construire d'autres. Les plus connues sont :*

$T_M(x,y) = \min(x,y)$	Minimum(Zadeh)
$T_P(x,y) = x \cdot y$	Produit (propabilistes)
$T_L(x,y) = max(x+y-1,0)$	Lukasiewicz
$T_D(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in [0,1[^2 \\ \min(x,y) & \text{sinon} \end{cases}$	Drastique

Exemple 1.1.2

$T(x,y) = \dfrac{xy}{(2-x-y+xy)}$	Einstein
$T(x,y) = \dfrac{xy}{(x+y-xy)}$	Hamacher
$T(x,y) = \dfrac{xy}{\max(x,y,\alpha)}$	Dubois et Parade (1986) $\alpha \in [0,1]$

En raison de sa associativité (P2), chaque T-norme T peut être étendu d'une manière unique à une opération n-aire, pour $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ par induction :

$$T_{i=0}^{n} x_i = \begin{cases} 1 & si\ n = 0 \\ T(x_n,\ T_{i=0}^{n-1} x_i) & sinon \end{cases}.$$

On peut utiliser la notation :

$$T(x_1, x_2, ..., x_n) = T_{i=1}^{n} x_i.$$

Si en particulier, $x_1 = x_2 = ... = x_n = x$, nous allons écrire :

$$x_T^{(n)} = T(x, x, ..., x).$$

Les extensions n-aire de minimum T_M, et le produit T_P sont évidents.

Pour la T-norme de Lukasiewicz T_L, et le produit drastique T_D nous obtenons :

$$T_L(x_1, x_2, ..., x_n) = max\left(\Sigma_{i=1}^{n} x_i - (n-1), 0\right).$$

$$T_D(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} x_i & \text{si } x_j = 1\ \forall\ j \neq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Définition 1.1.2 *[10]Soit T une T-norme :*

(i) Un élément $a \in [0,\ 1]$ est appelé un élément idempotent de T si $T(a,\ a) = a$.

Les nombres 0 et 1 (qui sont des éléments idempotents pour chaque T-norme T) sont appelés triviales.

(ii) Un élément $a \in\ ]0,\ 1[$ est appelé un élément nilpotent de T s'il existe un certain $n \in \mathbb{N}$ tel que : $a_T^{(n)} = 0$.

(iii) Un élément $a \in\ ]0,1[$ est appelé un diviseur de zéro de T s'il existe un certain $b \in\ ]0,1[$ tel que : $T(a,b) = 0$.

Remarque 1.1.2

Les quatre T-normes de base sont remarquables pour plusieurs raisons:

• *Le produit drastique* T_D *et le minimum* T_M *sont le plus petit et le plus grand T-norme respectivement.*

• *Le minimum* T_M *est la seul T-norme où chaque* $x \in [0,1]$ *est idempotent élément.*

• *Le produit* T_P *et le T-norme de Lukasiewicz* T_L *sont des exemples prototypiques de deux sous classes importantes de T-normes sont : les classes de T-normes strictes et nilpotentes respectivement.*

Exemple 1.1.3

(i) L'ensemble des éléments idempotents du minimum T_M *égale* $[0,1]$ *(*T_M *est la seule T-norme avec cette propriété).*

(ii) L'ensemble des éléments nilpotents et l'ensemble des diviseurs de zéro est égale à $]0,1[$ *pour la T-norme de Lukasiewicz* T_L*, et produit drastique* T_D*.*

(iii) Le minimum T_M*, et le produit* T_P *n'ont ni élément nilpotent ni diviseurs de zéro, et* T_P*,* T_L*, et* T_D *possèdent les éléments idempotentes triviales seulement.*

(iv) L'ensemble des éléments idempotentes de nilpotent minimum T^{nM} *définie par :*

$$T^{nM}(x,y) = \begin{cases} 0 & si\ x+y \leq 1 \\ \min(x,y) & sinon \end{cases} \tag{I}$$

est égale à $\{0\} \cup]0.5,1]$*, l'ensemble de ses éléments nilpotentes est* $]0,0.5]$*, et son ensemble des diviseurs de zéro est* $]0,1[$*.*

Remarque 1.1.3

(i) Aucun élément de $]0,1[$ *peux être idempotent et nilpotent.*

(ii) Chaque élément nilpotent a d'un T-norme T *est aussi un diviseur de zéro de* T*, mais pas l'inverse (le nilpotent minimum* T^{nM} *définie en (I) est un contre exemple).*

(iii) Si une T-norme T *comporte un élément nilpotent* a*, alors il ya toujours un élément* $b \in]0,1[$ *tel que :* $b_T^{(2)} = 0$.

(iv) Si $a \in]0,1[$ *un élément nilpotent d'une T-norme* T*, alors chaque élément* $b \in]0,a[$ *est aussi un élément nilpotent de* T*, i.e., l'ensemble des éléments nilpotents d'une T-norme* T *peut être soit l'ensemble vide (comme pour* T_M *où* T_P*), où un intervalle de la forme* $]a,c[$ *où* $]a,c]$ *(la même chose est vrai pour les diviseurs de zéro).*

Exemple 1.1.4 *Pour la T-norme T donnée par:*

$$T(x,y) = \begin{cases} 0 & si \ (x,y) \in \,]0, 0.5]^2 \\ 2(x-0,5)(y-0,5)+0,5 & si \ (x,y) \in \,]0.5, 1]^2 \\ \min(x,y) & sinon \end{cases} .$$

L'ensemble de ses éléments nilpotents et sa ensemble de diviseurs de zéro tous les deux égale à $]0, 0.5]$, et pour chaque élément de la famille $(T_c)_{c \in]0,1]}$ de T-norme définie par:

$$T_c(x,y) = \begin{cases} \max(0, x+y-c) & si \ (x,y) \in [0,c]^2 \\ \min(x,y) & sinon \end{cases} .$$

L'ensemble des éléments nilpotentes et l'ensemble des diviseurs de zéro de T_c égale $]0, \ c[$.

Définition 1.1.3 (Continuité) *[10]*

Une T-norme $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ est continue si pour toutes suite convergentes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ on a:

$$T\left(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n\right) = \lim_{n\to\infty} T(x_n, y_n).$$

Définition 1.1.4 *([10])*

Une T-norme $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ est dite continue à gauche (à droite) si pour chaque $y \in [0,1]$ et pour toutes les séquences non-décroissante(non-croissante) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a :

$$\underset{n\to\infty}{lim} T(x_n, y) = T\left(\lim_{n\to\infty} x_n, y\right)$$

Remarque 1.1.4

Une T-norme est continue si et seulement si elle est à la fois continue à gauche et à droite.

Exemple 1.1.5

1/ Le nilpotent minimum T^{nM} définie en (I) est une T-norme qui est continue à gauche mais pas continue à droite.

2/ Le produit drastique T_D est continue à droite mais pas à gauche.

3/ Une T-norme qui n'est pas continue ni droite ni gauche:

$$T(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{2} & si \ (x,y) \in [0,1[^2 \\ \min(x,y) & sinon \end{cases}$$

Définition 1.1.5

(i) Une T-norme T est appelé stricte si elle est continue et strictement monotone.

(ii)Une T-norme T est appelé nilpotente si elle est continue, et si chaque $a \in]0,1[$ est un élément nilpotent de T .

Exemple 1.1.6

• *Le produit T_P est une t-norme stricte, et le t-norme de Lukasiewicz T_L est un t-norme nilpotent. En fait chaque t-norme stricte est isomorphe à T_P et chaque t-norme nilpotente est isomorphe à T_L.*

Définition 1.1.6 *[6]*

Une T-norme T est dite archimédienne si :

(i) T est continue.

(ii) $T(x,x) < x$, $\forall x \in [0,1]$.

Définition 1.1.7 *[6]*

Une T-norme archimédienne T est dite stricte si:

$T(x',y') < T(x,y)$ *si* $x' < x$ *et* $y' < y$ $\forall\ x, x', y, y' \in [0,1]$.

Toute T-norme archimidienne peut s'écrire:

$$T(x,y) = f^{(-1)}\left(f\left(x\right) + f\left(y\right)\right).$$

où $f : [0,1] \to [0,\infty]$ est une fonction continue et strictement décroissate et $f^{(-1)}$ le pseudo-inverse définie par :

$$f^{(-1)}\left(u\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \in [0, f\left(1\right)] \\ f^{(-1)}\left(u\right) & \text{si } u \in [f\left(1\right), f\left(0\right)] \\ 0 & \text{si } u \in [f\left(0\right), \infty] \end{cases}.$$

Exemple 1.1.7

La T-norme de Lukasiewicz T_L et produit drastique T_D sont archimédiennes.

Définition 1.1.8 *Si pour deux T-normes T_1 et T_2 on a :*

$T_1(x,y) \leq T_2(x,y)$ *pour tout* $(x,y) \in [0,1]^2$. *Puis on dire que* T_1 *est plus faible que* T_2, *où de façon équivalente* T_2 *est plus forte que* T_1.

Et on écrit dans ce cas : $T_1 \leq T_2$.

Nous écrirons $T_1 < T_2$ *si* $T_1 \leq T_2$ *et* $T_1 \neq T_2$.

i.e : si $T_1 \leq T_2$ *et si* $T_1(x_0,y_0) < T_2(x_0,y_0)$ *pour certains* $(x_0,y_0) \in [0,1]^2$.

Exemple 1.1.8

Le produit drastique T_D *est le plus faible, et le minimum* T_M *est le plus forte T-norme.*

En effet : pour chaque T-norme T *on a :* $T_D \leq T \leq T_M$.

Entre les quatre T-normes de base on a ces inégalités strictes :

$$T_D < T_L < T_P < T_M.$$

Définition 1.1.9 *[10]*

Pour une T-norme T *nous considérons les propriétés suivantes :*

(i) La T-norme T *est dite strictement monotone si :*

$$T(x,\ y) < T(x,\ z) \ \textit{pour}\ x > 0\ \textit{et}\ y < z. \tag{SM}$$

(ii) la T-norme T *satisfait la loi d'annulation si :*

$$T(x,\ y) = T(x,\ z) \ \textit{implique}\ x = 0\ \textit{où}\ y = z. \tag{CL}$$

(iii) La T-norme T *satisfait la loi d'annulation conditionnelle si :*

$$T(x,\ y) = T(x,\ z) > 0\ \textit{implique}\ y = z. \tag{CCL}$$

(iv) La T-norme T *a la propriété de limite si :*

$$\textit{Pour tout}\ (x,y) \in \left]0,1\right[:\ \lim_{n\to\infty} x_T^{(n)} = 0. \tag{LP}$$

Exemple 1.1.9

(i) Le minimum T_M *a aucun de ces propriétés, et le produit* T_P *satisfait à tout eux .*

(ii) La T-norme de Lukasiewicz T_L *et produit drastique* T_D *satisfaient la loi conditionnelle d'annulation (ccl), et la propriété de limite (LP), mais aucun d'autre propriété.*

(iii) La T-norme définie par :

$$T(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{2} & si \ (x,y) \in [0,1[^2 \\ \min(x,y) & sinon \end{cases} .$$

est strictement monotone et satisfait la loi d'annulation (CL).

Définition 1.1.10

Une fonction $F : [0,1]^2 \to [0,1]$, *est appelé une T-sousnorme si, pour tout* x, y, $z \in [0,1]$ *elle satisfait les propriétés (P1)-(P3) et*

$$F(x,y) \leq min(x,y).$$

Remarque 1.1.5

C'est clair que chaque T-norme est un T-sousnorme mais pas l'inverse. Par exemple, la fonction zéro est un t-sous norme mais pas une t-norme.

Proposition 1.1.2 *Si* $F : [0,1]^2 \to [0,1]$ *est une T-sousnorme alors la fonction* $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ *définie par :*

$$T(x,y) = \begin{cases} F(x,y) & si \ (x,y) \in [0,1[^2 \\ min(x,y) & sinon \end{cases}$$

est une norme triangulaire.

1.2 Propriétés algébriques des normes triangulaires

Dans cette section on donnons quelques propositions et théorèmes pour les normes triangulaires sur l'itervalle $[0, 1]$.

Proposition 1.2.1 *[10] Soit T une T-norme, nous avons:*

(i) T est strictement monotone si et seulement si elle satisfait la loi d'annulation (CL).

(ii) Si T est strictement monotone alors elle a des éléments idempotents triviales.

(iii) Si T est strictement monotone alors elle n'a pas des diviseurs de zéro.

Proposition 1.2.2 *[10]*

Pour une T-norme T les expressions suivantes sont équivalentes :

(i) T est archimédienne.

(ii) T satisfait la propriété de limite (LP).

(iii) Les seuls éléments idempotents de T sont les éléments triviales et :

$$\lim_{x \searrow x_0} T(x, x) = x_0$$

Pour certains $x_0 \in \left]0, 1\right[$, il existe $y_0 \in \left]x_0, 1\right[$ tel que:

$$T(y_0, y_0) = x_0.$$

Lemme 1.2.1 *[15]*

$T(a, a) = a$ est vérifié pour chaque $a \in [0, 1]$ si et seulement si T est le minimum T_M.

Preuve.

- *Si $T(a, b) = \min\{a, b\}$ alors $T(a, a) = a$.*
- *Supposons que $T(a, a) = a$ pour chaque $a \in [0, 1]$, et $a \leq b \leq 1$.*

En utilisons la monotonie de T, on peut trouver les expressions suivants :

$$a = T(a, a) \leq T(a, b) \leq \min\{a, b\}.$$

Par la commutativité de T on trouve :

$$a = T(a, a) \leq T(b, a) \leq \min\{b, a\}.$$

Ces deux équations nous donnent que : $T(a, b) = \min\{a, b\}$ pour chaque $a, b \in [0, 1]$. ■

1.2.1 Générateurs additifs et multiplicatifs

Définition 1.2.1 *[10]*

Un générateur additif $t : [0,1] \to [0,\infty]$ *de t-norme* T *est une fonction strictement décroissante et aussi continue à gauche en* 0 *et satisfait* $t(1) = 0,$ *tel que pour tout* $(x,y) \in [0,1]^2$ *on a :*

$$T(x,y) = t^{(-1)}(t(x) + t(y)).$$

Où plus généralement:

$$T_{i=1}^{n} x_i = t^{(-1)}\left(\sum_{i=1}^{n} t(x_i)\right).$$

Exemple 1.2.1

- *Si on a la fonction* $t : [0,1] \to [0,\infty]$ *donnée par :* $t(x) = 1 - x,$ *alors on trouve la t-norme de Lukasiewicz* T_L.
- *Si on a la fonction* $t(x) = -\ln x,$ *alors on trouve le produit* T_P.
- *Pour le produit drastique* T_D *(qui est continue à gauche mais pas continue), on a :*

$$t(x) = \begin{cases} 2 - x & si\ x \in [0,1[\\ 0 & si\ x = 1 \end{cases}$$

Définition 1.2.2

Un générateur multiplicatif de t-norme T *est une fonction strictement croissante* $\theta : [0,1] \to [0,1]$ *qui est continue à gauche en* 0 *et satisfait* $\theta(1) = 1,$ *tel que pour tout* $(x,y) \in [0,1]^2$ *on a :*

$$T(x,y) = \theta^{(-1)}(\theta(x)\,\theta(y)).$$

Ou plus généralement,

$$T_{i=1}^{n} x_i = \theta^{(-1)}\left(\prod_{i=1}^{n} \theta(x_i)\right).$$

Remarque 1.2.1

- *Si* T *est une t-norme archimédienne et continue avec le générateur additif* $t : [0,1] \to [0.\infty],$ *alors la fonction* $\theta : [0,1] \to [0,1]$ *définie par :* $\theta(x) = \exp(-t(x))$ *est une générateur multiplicatif de* T.

Théorème 1.2.1

Une opération binaire T dans $[0,1]$ est une T-norme stricte si et seulement si il existe une fonction croissante $f:[0,1]\to[0,1]$ tel que :

$$T(x,y)=f^{-1}(f(x)\,f(y)).$$

Remarque 1.2.2

• *Si h un autre fonction, et $T(x,y)=h^{-1}(h(x)\,h(y))$ alors, $h(x)=f(x)^r$ pour certains $r>0$.*

Théorème 1.2.2

Une opération binaire T dans $[0,1]$ est une T-norme nilpotente si et seulement si, il existe une fonction croissante $h:[0,1]\to[0,1]$ tel que :

$$T(x,y)=h^{-1}(\max\{h(x)+h(y)-1,0\}).$$

la fonction h est unique .

Remarque 1.2.3

• *Les fonctions f dans le théorème de représentation des t-normes strictes sont appelés générateurs (multiplicatif).*

• *Les fonctions h dans le théorème de représentation des t-normes nilpotentes sont appelés L-générateurs.*

• *Les générateurs additives t pour les T-normes strictes sont liées à générateurs multiplicatifs f par : $t(x)=-\ln f(x)$ et $f(x)=\exp(-t(x))$.*

• *Les générateurs additives t pour les T-normes nilpotentes sont liées à L-générateurs h par : $t(x)=1-h(x)$ et $h(x)=1-t(x)$.*

• *Les générateurs multiplicatives g pour les T-normes nilpotentes sont liées à L-générateurs h par :*

$$g(x)=\exp(h(x)-1)\ \text{ et } h(x)=1+\ln g(x).$$

1.2.2 Familles des Normes Triangulaires

Famille de t-norme de Schweizer-Sklar

La norme triangulaire de Schweizer-Sklar T_{SS_λ} est définie par :

$$T_{SS_\lambda}(x,y) = \begin{cases} T_M(x,y) & \text{si } \lambda = -\infty \\ T_P(x,y) & \text{si } \lambda = 0 \\ T_D(x,y) & \text{si } \lambda = \infty \\ \left(max\left(x^\lambda + y^\lambda - 1, 0\right)\right)^{\frac{1}{\lambda}} & \text{si } \lambda \in]-\infty, 0[\cup]0,\infty[\end{cases}.$$

Les fonctions génératrices de T_{SS_λ} sont définies par :

$$\begin{aligned} t(x) &= \begin{cases} -\log\ x & si\ \lambda = 0 \\ \frac{1-x^\lambda}{\lambda} & si\ \lambda \in]-\infty, 0[\cup]0,\infty[\end{cases} \quad si\ additive \\ \theta(x) &= \begin{cases} x & si\ \lambda = 0 \\ \exp\left(\frac{x^\lambda - 1}{\lambda}\right) & si\ \lambda \in]-\infty, 0[\cup]0,\infty[\end{cases} \quad si\ multiplicative \end{aligned}$$

Famille de t-norme de Hamacher

La norme triangulaire de Hamacher T_{H_λ} est définie par :

$$T_{H_\lambda}(x,y) = \begin{cases} T_D(x,y) & \text{si } \lambda = \infty \\ 0 & \text{si } \lambda = x = y = 0 \\ \frac{xy}{\lambda + (1-\lambda)(x+y-xy)} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Les fonctions génératrices de T_{H_λ} sont définies par :

$$\begin{aligned} t(x) &= \begin{cases} \frac{1-x}{x} & \text{si } \lambda = 0 \\ \log \frac{(\lambda + (1-\lambda)x)}{x} & \text{si } \lambda \in]0,\infty[\end{cases} \quad \text{si additive} \\ \theta(x) &= \begin{cases} \exp\left(\frac{x-1}{x}\right) & \text{si } \lambda = 0 \\ \frac{x}{\lambda + (1-\lambda)x} & \lambda \in]0,\infty[\end{cases} \quad \text{si multiplicative} \end{aligned}$$

Une norme triangulaire est en fait un quotient de deux polynômes si et seulement si elle appartient à la famille de Hamacher.

Famille de t-norme de Frank

Les recherches sur l'associativité des duals de copules poussent *M. Frank* à introduire une nouvelle famille, qui sera utilisée par sommation ordinale.

La norme triangulaire de Frank T_{F_λ} est définie par :

$$T_{F_\lambda}(x,y) = \begin{cases} T_M(x,y) & \text{si } \lambda = 0 \\ T_P(x,y) & \text{si } \lambda = 1 \\ T_L(x,y) & \text{si } \lambda = \infty \\ \log_\lambda\left(1 + \frac{(\lambda^x-1)(\lambda^y-1)}{\lambda-1}\right) & \text{si } \lambda \in \left]0,1\right[\cup\left]1,\infty\right[\end{cases}.$$

Les fonctions génératrices de T_{F_λ} sont définies par :

$$\begin{aligned} t(x) &= \begin{cases} -\log x & \text{si } \lambda = 1 \\ 1-x & \text{si } \lambda = \infty \\ \log\frac{\lambda-1}{\lambda^x-1} & \text{si } \lambda \in \left]0,1\right[\cup\left]1,\infty\right[\end{cases} \quad \text{si additive} \\ \theta(x) &= \begin{cases} x & \text{si } \lambda = 1 \\ \exp(x-1) & \text{si } \lambda = \infty \\ \frac{\lambda^x-1}{\lambda-1} & \text{si } \lambda \in \left]0,1\right[\cup\left]1,\infty\right[\end{cases} \quad \text{si multiplicative} \end{aligned}$$

Famille de t-norme de Yager

Cette famille, introduite dans [Yager, 1980], figure parmi les choix les plus populaires pour la modélisation d'intersection entre les ensembles flous. Cette proposition repose sur le fait d'utiliser comme une mesure de l'importance du ET logique. Ainsi, fixer $\lambda = 0$ correspond au plus faible ET, tandis que $\lambda = 1$ correspondra au plus fort ET.

La norme triangulaire de Yager T_{Y_λ} est définie par :

$$T_{Y_\lambda}(x,y) = \begin{cases} T_D(x,y) & \text{si } \lambda = 0 \\ T_M(x,y) & \text{si } \lambda = \infty \\ \max(1 - \left((1-x)^\lambda + (1-y)^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}}, 0) & \text{si } \lambda \in \left]0,\infty\right[\end{cases}.$$

Famille de t-norme de Weber-Sugeno

L'utilisation d'une nouvelle famille pour la modélisation d'union et d'intersection est suggérée.

La norme triangulaire de Weber-Sugeno T_{WS_λ} est définie par :

$$T_{WS_\lambda}(x,y)=\begin{cases} T_D(x,y) & \text{si } \lambda=-1 \\ T_P(x,y) & \text{si } \lambda=\infty \\ \max\left(\frac{x+y-1+\lambda xy}{1+\lambda},0\right) & \text{sinon} \end{cases}.$$

Famille de t-norme de Mayor-Torrens

Mayor et Torrens introduisent une nouvelle famille, dont la norme triangulaire est la seule continue et satisfaisant, pour tout $(x,y)\in[0,1]^2$, la relation :

$$T(x,y)=max\left(T(max(x,y),max(x,y))-|x-y|,0\right).$$

La norme triangulaire de *Mayor-Torrens* est définie par :

$$T_{MT_\lambda}(x,y)=\begin{cases} \max(x+y-\lambda) & \text{si } \lambda\in\,]0,1] \text{ et } (x,y)\in[0,\lambda]^2 \\ T_M(x,y) & \text{sinon} \end{cases}.$$

Famille de t-norme de Dubois-Prade

Les auteurs introduisent une nouvelle famille de normes triangulaires. Cette famille a ceci de particulier qu'elle n'a pas de fonctions génératrices additives ou multiplicatives, comme c'est habituellement le cas lors la construction de nouvelles familles.

La norme triangulaire de Dubois-Prade T_{DP_λ}est définie par :

$$T_{DP_\lambda}(x,y)=\frac{xy}{\max(x,y,\lambda)}.$$

Famille de t-norme de Aczél-Alsina

Cette famille est la seule pour laquelle quels que soient p, q dans $\lambda\in]0,1[\cup]0,\infty[$, le nombre $\frac{logp}{logq}$ est irrationnel, et pour tout $(x,y)\in[0,1]^2$, on a $T(x^p,y^p)=T(x,y)^p$, de même que $T(x^q,y^q)=T(x,y)^q$.

La norme triangulaire d'Aczél-Alsina T_{AA_λ} est définie par :

$$T_{AA_\lambda}(x,y)=\begin{cases} T_D(x,y) & si\ \lambda=0 \\ T_M(x,y) & si\ \lambda=\infty \\ \exp\left(-((\log x)^\lambda+(\log y)^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}\right) & si\ \lambda\in\,]0,\infty[\end{cases}.$$

Les fonctions génératrices de T_{AA_λ} sont définies par :

$$t(x) = (-\log x)^\lambda \quad \text{si additive}$$
$$\theta(x) = \exp\left(-(-\log x)^\lambda\right) \quad \text{si multiplicative}$$

Famille de t-norme de Dombi

Cette famille fut introduite dans dans un article ayant pour objectif l'étude d'opérateurs conjonctifs et disjonctifs.

La norme triangulaire de Dombi T_{D_λ} est définie par :

$$T_{D_\lambda}(x,y) = \begin{cases} T_D(x,y) & \text{si } \lambda = 0 \\ T_M(x,y) & \text{si } \lambda = \infty \\ \frac{1}{1+((\frac{a}{1-a})^\lambda+(\frac{b}{1-b})^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}} & \text{si } \lambda \in]0,\infty[\end{cases}.$$

Les fonctions génératrices de T_{D_λ} sont définies par :

$$t(x) = \left(\tfrac{1-x}{x}\right)^\lambda \quad \text{si additive}$$

$$\theta(x) = \exp\left(-\left(\tfrac{1-x}{x}\right)^\lambda\right) \quad \text{si multiplicative}$$

Chapitre 2

Conormes triangulaires

Dans la logique floue, les T-conormes sont utilisées comme un interprétation pour la disjonction, et constituent une généralisation des opérations de type maximum.

Dans ce chapitre on étudié les duales conormes triangulaires (définitions et exemples), et on présente quelques propriétés algébriques caractérisant ces opérations binaires.

2.1 Définitions et exemples

Conormes triangulaires ont été introduites comme duales opérations, nous donnons ici une définition axiomatique indépendante.

Définition 2.1.1 *[7]*

Une conorme triangulaire (ou t-conorme), est une opération binaire S *sur l'intervalle* $[0,1]$*, qui est commutative, associative, monotone, et posséde* 0 *comme un élément neutre, c'est à dire une fonction* $S : [0,1]^2 \to [0,1]$*, telle que les quatre axiomes suivants sont satisfaits :*

(P1) $S(x,y) = S(y,x)$, *commutativité;*

(P2) $S(x, S(y,z)) = S(S(x,y),z)$, *associativité;*

(P3) $S(x,y) \leq S(x,z)$ *si* $y \leq z$, *monotonie;*

(P4) $S(x,0) = x$, *élément neutre.*

Exemple 2.1.1 (Les T-conormes de base)

Nous présentons dans ce chapitre les quatre T-conormes dites de base:

$S_M(x,y) = \max(x,y)$	*Maximum(Zadeh)*
$S_P(x,y) = x + y - x \cdot y$	*Somme probabiliste*
$S_L(x,y) = max(x+y,1)$	*Lukasiewicz*
$S_D(x,y) = \begin{cases} 1 & si \ (x,y) \in]0,1]^2 \\ \max(x,y) & sinon \end{cases}$	*Drastique*

Exemple 2.1.2

$S(x,y) = \dfrac{(x+y)}{(1+xy)}$	*Einstein*
$S(x,y) = \dfrac{(x+y-2xy)}{(1-xy)}$	*Hamacher*
$S(x,y) = \dfrac{x+y+xy-\min(x,y,1-\alpha)}{\max(1-\alpha,1-y,\alpha)}$	*Dubois et Parade(1986)* $\alpha \in [0,1]$

Définition 2.1.2 (négation) *[6]*

L'application $n : [0,1] \to [0,1]$ *est une négation stricte si :*

(n_1) $n(0) = 1.$

(n_2) $n(n(x)) = x.$

(n_3) $n(x) < n(y)$ $\forall x, y \in [0,1]\,,\ x > y.$

(n_4) n *est continue.*

Toute négation stricte peut s'écrire :

$$n(x) = t^{-1}(t(1) - t(x)).$$

où $t : [0,1] \to [0,\infty]$ *est une fonction continue et strictement croissante avec* $t(0) = 0$ *et* $t(1)$ *finit.*

Proposition 2.1.1 *[12]*

On peut passer d'une T-norme à une T-conorme par une négation $n : [0,1] \to [0,1]$ *telle que :* $n(0) = 1$, *et* $n(1) = 0$, *et* $n(x) \leq n(y)$ *si* $x \geq y$ *de la façon suivante :*

$$n(T(x, y)) = S(n(x), n(y)).$$

où, de manière équivalente :

$$n(S(x, y)) = T(n(x), n(y)).$$

Remarque 2.1.1

La dualité change l'ordre : si on a deux t-normes T_1 *et* T_2 *avec* $T_1 \leq T_2$, *et si* S_1, S_2 *leurs duales t-conormes respectivement, alors nous obtenons* $S_1 \geq S_2$.

La continuité d'un t-conorme S est équivalente à la continuité de la t-norme duale T.

Définition 2.1.3

Une T-conorme $S : [0,1]^2 \to [0,1]$ *est continue si pour toutes les séquences convergentes* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ *on a :*

$$S\left(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n\right) = \lim_{n\to\infty} S(x_n, y_n).$$

Exemple 2.1.3

- *Les t-conormes de base* S_M, S_P, S_L *sont continues, et la somme drastique* S_D *n'est pas continue.*

Définition 2.1.4 *Soit* S *une T-conorme:*

(i) Un élément $a \in [0,1]$ *est appelé un élément idempotent de* S *si :*

$$S(a, a) = a.$$

Les nombres 0 *et* 1 *(qui sont des éléments idempotentes pour chaque T-conorme* S*) sont appelés triviales, chaque élément idempotent dans* $]0,1[$ *est appelé un non-trivial élément idempotent de* S.

(ii) Un élément $a \in]0,1[$ *est appelé un élément nilpotent de* S *s'il existe un certain* $n \in \mathbb{N}$ *tel que :*

$$a_S^{(n)} = 0.$$

(iii) Un élément $a \in]0,1[$ est appelé un diviseur de zéro de S s'il existe un certain $b \in]0,1[$ tel que :

$$S(a,b) = 0.$$

Définition 2.1.5 *Pour une T-conorme S nous considérons les propriétés suivantes :*

(i) La T-conorme S est dite strictement monotone si :

$$S(x,y) < S(x,z) \text{ pour } x < 1 \text{ et } y < z. \tag{SM}$$

(ii) La T-conorme S satisfait la loi d'annulation si :

$$S(x,y) = S(x,z) \text{ implique } x = 0 \text{ où } y = z. \tag{CL}$$

(iii) La T-conorme S satisfait la loi d'annulation conditionnelle si :

$$S(x,y) = S(x,z) > 0 \text{ implique } y = z. \tag{CCL}$$

(iv) La T-conorme S a la propriété de limite si:

$$\text{Pour tout } (x,y) \in]0,1[: \lim_{n\to\infty} x_S^{(n)} = 0. \tag{LP}$$

Définition 2.1.6

Soit T une T-norme et S une T-conorme. On dit que T est distributive par rapport à S si pour tout $x, y, z \in [0,1]$:

$$T(x, S(y,z)) = S(T(x,y), T(x,z)).$$

et on dit que S est distributive par rapport à T si pour tout $x, y, z \in [0,1]$:

$$S(x, T(y,z)) = T(S(x,y), S(x,z)).$$

Définition 2.1.7

Une T-conorme S est dite archimidienne si :

(i) S est continue.

(ii) $S(x,x) > x \ \forall x \in [0,1]$.

Définition 2.1.8

Une T-conorme archimidienne est dite stricte si :
$S(x^{'},y^{'}) < S(x,y)$ *si* $x^{'} < x$ *et* $y^{'} < y \ \forall \ x, x^{'}, y, y^{'} \in [0,1]$.

Toute T-conorme archimidienne peut s'écrire :

$$S(x,y) = g^{(-1)}\left(g\left(x\right) + g\left(y\right)\right).$$

Où $g : [0,1] \to [0,\infty]$ est une fonction continue et strictement croissante et :

$$g^{(-1)}\left(u\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in [0, g\left(0\right)] \\ g^{(-1)}\left(u\right) & \text{si } u \in [g\left(0\right), g\left(1\right)] \\ 1 & \text{si } u \in [g\left(1\right), \infty] \end{cases}.$$

Conséquences

Pour toute T-norme T et T-conorme S nous avons :

$$T(0;0) = 0 \qquad T(1;1) = 1$$
$$S(0;0) = 0 \qquad S(1;1) = 1.$$

2.2 Propriétés algébriques des conormes triangulaires

Dans cette section on donnons quelques propositions et théorèmes sur les conormes triangulaires sur l'itervalle $[0; 1]$.

Théorème 2.2.1 *[8]*

On peut démontrer les propriétés suivantes, vérifiées pour toute T-norme et T-conorme $\forall\ x, y \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} T_D(x, y) &\leq T(x, y) \leq T_M(x, y). \\ S_M(x, y) &\leq S(x, y) \leq S_D(x, y). \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Preuve.

► Par la monotonie, symétrie et la condition de borne on a:

$T(x, y) \leq T(x, 1) \leq x$, $T(x, y) = T(y, x) \leq T(y, 1) \leq y$.

Cela signifie que $T(y, x) \leq \min(x, y) = T_M(x, y)$.

► $S(x, y) \geq S(x, 0) \geq x$, $S(x, y) = S(y, x) \geq S(y, 0) \geq y$.

Cela signifie que $S(x, y) \geq \max(x, y) = S_M(x, y)$. ■

Proposition 2.2.1

Soit T une T-norme et S une T-conorme, On a :

(i) S est distributive par rapport T si et seulement si $T = T_M$.

(ii) T est distributive par rapport S si et seulement si $S = S_M$.

(iii) (T, S) est une paire distributive si et seulement si $T = T_M$ et $S = S_M$.

2.2.1 Générateurs additifs et multiplicatifs

En raison de la dualité entre les t-norme et t-conormes, qui donne que T est une t-norme ssi la fonction $S : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ définie par :

$$S\,(x, y) = n(T\,(n(x), n(y)).$$

est une t-conorme. Les générateurs additif et multiplicatif de t-conormes peuvent considérés comme suit :

Soit T une t-norme, S leur duale t-conorme, $t:[0,1]\to[0,\infty]$ un générateur additif de T, et $\theta:[0,1]\to[0,1]$ un générateur multiplicatif de T.

On définie la fonction $\varphi:[0,1]\to[0,\infty]$ et $\xi:[0,1]\to[0,1]$ par *:*

$$\varphi(x)=t(1-x).$$
$$\xi(x)=\theta(1-x).$$

Puis, il est claire que pour tout $(x,y)\in[0,1]^2$, on trouve :

$$S(x,y)=\varphi^{-1}(\varphi(x)+\varphi(y)).$$
$$S(x,y)=\xi^{(-1)}(\xi(x).\xi(y)).$$

Remarque 2.2.1

• *Si S une t-conorme archimédienne et continue alors la t-norme duale est archimédienne et continue et, en conséquence, a un générateur additif $t:[0,1]\to[0,\infty]$. Puis $\varphi:[0,1]\to[0,\infty]$ définie par $\varphi(x)=t(1-x)$ est une générateur additif de S, et $\xi:[0,1]\to[0,1]$ définie par $\xi(x)=\exp(-t(1-x))$ est une générateur multiplicatif de S.*

Théorème 2.2.2

Une opération S est une T-conorme stricte et archimédienne si et seulement si il existe une fonction décroissante $g:[0,1]\to[0,1]$ telle que :

$$S(x,y)=g^{-1}(g(x)+g(y)-g(x)g(y)).$$

Remarque 2.2.2

• *Si K un autre fonction et $S(x,y)=K^{-1}(K(x)+K(y)-K(x)K(y))$ alors:*

$$K(x)=g(x)^r \text{ pour certains } r>0.$$

Théorème 2.2.3

Une opération binaire S une T-conorme nilpotente et archimédienne si et seulement s'il existe une fonction décroissante $K:[0,1]\to[0,1]$ telle que :

$$S(x,y)=K^{-1}(\min\{K(x)+K(y),1\}).$$

La fonction K est unique.

Remarque 2.2.3

• *Pour les T-conormes strictes et nilpotentes S, les fonctions g et K sont multiplicatives et L-Cogénérateurs respectivement.*

Limites supérieures et inférieures pour les t-normes et t-conormes

Minimum et maximum : la plus grande t-norme et la plus petite t-conorme :

t-norme:	$T_M(x,y) = x \wedge y$	multiplicative générateur:	aucun
t-conorme:	$S_M(x,y) = x \vee y$	multiplicative Co-générateur:	aucun

Remarque 2.2.4

- *La dualité est par rapport à la négation :* $n(x) = 1 - x$.
- *Toutes les t-normes continues se situent en dessous du t-normes minimale "Minimum", et toutes les t-conormes continues se situent en dessus du t-conorme maximale "Maximum".*
- *Ces deux opérations sont continues et idempotents, et non archimédiennes.*

Produit drastique et Somme drastique: la plus petite t-norme et la plus grande t-conorme :

t-norme : $T_D(x,y) = \begin{cases} x \wedge y & \text{si } x \vee y = 1 \\ 0 & \text{si } x \vee y < 1 \end{cases}$ multiplicative générateur : aucun

t-conorme : $S_D(x,y) = \begin{cases} x \vee y & \text{si } x \wedge y = 0 \\ 1 & \text{si } x \wedge y > 0 \end{cases}$ multiplicative Co-générateur : aucun

Remarque 2.2.5

- *D'après le théorème (2.2.1) Toutes les t-normes continues se situent en dessus de t-norme drastique, et toutes les t-conormes continues se situent en dessous du t-conorme drastique .*
- *Le Maximum* S_M *est continue et idempotent, et non archimédien.*

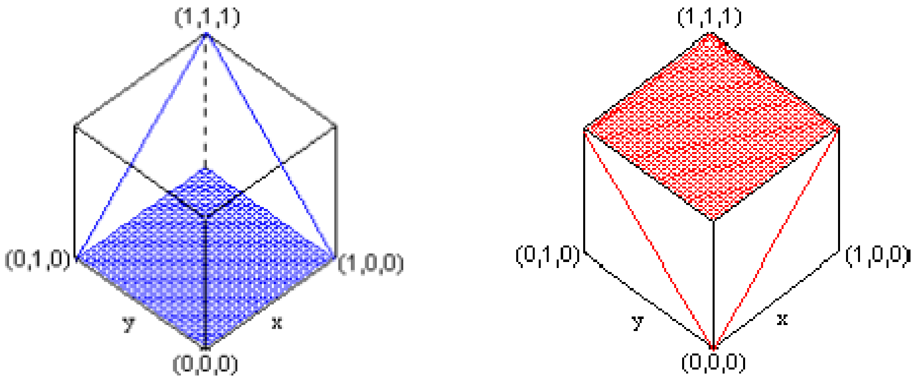

FIG 2.2 : La plus petite t-norme et la plus grande t-conorme.

2.2.2 Familles des conormes triangulaires

Famille de conorme de Schweizer-Sklar

La conorme triangulaire de *Schweizer-Sklar* S_{SS_λ} est définie par :

$$S_{SS_\lambda}(x,y)=\begin{cases} S_M(x,y) & \text{si } \lambda=-\infty \\ S_P(x,y) & \text{si } \lambda=0 \\ S_D(x,y) & \text{si } \lambda=\infty \\ 1-\Big(\max((1-x)^\lambda+(1-y)^\lambda-1,0\Big))^{\frac{1}{\lambda}} & \text{si } \lambda\in\,]-\infty,0[\,\cup\,]0,\infty[\end{cases}$$

Famille de conorme de Hamacher

La conorme triangulaire de *Hamacher* S_{H_λ} est définie par :

$$S_{H_\lambda}(x,y)=\begin{cases} S_D(x,y) & \text{si } \lambda=\infty \\ 1 & \text{si } \lambda=0 \text{ et } x=y=1 \\ \frac{x+y-xy-(1-\lambda)xy}{1-(1-\lambda)xy} & \text{sinon} \end{cases}$$

Famille de conorme de Frank

La conorme triangulaire de *Frank* S_{F_λ} est définie par :

$$S_{F_\lambda}(x,y)=\begin{cases} S_M(x,y) & \text{si } \lambda=0 \\ S_P(x,y) & \text{si } \lambda=1 \\ S_L(x,y) & \text{si } \lambda=\infty \\ 1-\log_\lambda\left(1+\frac{\left(\lambda^{1-x}-1\right)\left(\lambda^{1-y}-1\right)}{\lambda-1}\right) & \text{si }]0,1[\,\cup\,]1,\infty[\end{cases}$$

Famille de conorme de Yager

La conorme triangulaire de Yager S_{Y_λ} est définie par :

$$S_{Y_\lambda}(x,y)=\begin{cases} S_D(x,y) & \text{si } \lambda=0 \\ S_M(x,y) & \text{si } \lambda=\infty \\ \min\left(\left(x^\lambda+y^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}},1\right) & \text{si } \lambda\in\,]0,\infty[\end{cases}$$

Famille de conorme de Weber-Sugeno

La conorme triangulaire de Weber-SugenoS_{WS_λ} est définie par :

$$S_{WS_\lambda}(x,y)=\begin{cases} S_P(x,y) & \text{si } \lambda=-1 \\ S_D(x,y) & \text{si } \lambda=\infty \\ \min(x+y+\lambda xy,1) & \text{sinon}\end{cases}$$

Famille de conorme de Mayor-Torrens

La conorme triangulaire de Mayor-Torrens S_{MT_λ} est définie par :

$$S_{MT_\lambda}(x,y)=\begin{cases} \max(x+y+\lambda-1,1) & \text{si } \lambda\in\,]0,1] \text{ et } (x,y)\in[1-\lambda,1]^2 \\ S_M(x,y) & \text{sinon}\end{cases}$$

Famille de conorme de Dubois-Prade

La conorme triangulaire de Dubois-Prade S_{DP_λ} est définie par :

$$S_{DP_\lambda}(x,y)=1-\frac{(1-x)(1-y)}{\max((1-x),(1-y),\lambda)}$$

Famille de conorme de Aczél-Alsina

La conorme triangulaire d'Aczél-Alsina S_{AA_λ} est définie par :

$$S_{AA_\lambda}(x,y)=\begin{cases} S_D(x,y) & \text{si } \lambda=0 \\ S_M(x,y) & \text{si } \lambda=\infty \\ 1-\exp\left(-\left(-(\log(1-x))^\lambda+(-\log(1-y))^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right) & \text{si } \lambda\in\,]0,\infty[\end{cases}.$$

Famille de conorme de Dombi

La conorme triangulaire de Dombi S_{D_λ} est définie par :

$$S_{D_\lambda}(x,y)=\begin{cases} S_D(x,y) & \text{si } \lambda=0 \\ S_M(x,y) & \text{si } \lambda=\infty \\ 1-\frac{1}{1+\left(\left(\frac{x}{1-x}\right)^\lambda+\left(\frac{y}{1-y}\right)^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}}} & \text{si } \lambda\in\,]0,\infty[\end{cases}$$

Chapitre 3

Applications et utilisations des T-normes et T-conormes

Dans ce chapitre on étudié les combinaisons de normes triangulaires où celles-ci sont combinées en fonction d'un élément neutre ou absorbant défini : uninormes et nullnormes, respectivement. Et on distingue deux catégories de combinaisons : les combinaisons convexes linéaires et exponentielles. On définit aussi les opérateurs auto-duals qui permettant de fusionner deux ensembles flous de manière à ce que le complément de la combinaison soit la combinaison du complément. Et par extension les t-normes et les duales t-conormes constituent à généraliser l'opérateur de conjonction et disjonction respectivement sur les ensembles flous, donc on donne les définitions de ces opérations en utilisant les concepts de normes et conormes triangulaires.

3.1 Combinaisons de normes triangulaires

Il existe également de nombreux opérateurs fondés sur les normes triangulaires, et où celles-ci sont combinées en fonction d'un élément neutre ou absorbant défini : uninormes et nullnormes, respectivement. Nous citerons aussi la classe des sommes symétriques, ainsi que les combinaisons convexes linéaires ou exponentielles.

3.1.1 Uninormes et nullnormes

Il ya des auteurs proposent un nouvel opérateur d'agrégation, l'uninorme U. Cet opérateur est une généralisation des deux précédents(t-normes et t-conormes), dans la mesure où l'élément neutre e peut être fixé dans l'intervalle unité de manière libre.

Définition 3.1.1 *[7]*

Une uninorme est une opération binaire U commutative, associative et croissante possédant un élément neutre e appartenant à l'intervalle unité, c'est à dire que pour tout $x \in [0,1]$, on a $U(x,e) = x$.

Le point intéressant des uninormes est qu'elles permettent à des valeurs séparées par l'élément neutre de se compenser. Le lien entre les uninormes et les normes triangulaires est évidemment important, et l'on peut même écrire une t-norme sous la forme

$$T_U(x,y) = \frac{U(ex,ey)}{e}.$$

et alternativement, l'opération

$$S_U(x,y) = \frac{U(e+(1-e)x, e+(1-e)y) - e}{1-e}.$$

est une t-conorme. La structure des uninormes sur $[0,e]^2$ est donc fortement liée aux t-normes, tandis qu'elle est liée aux t-conormes sur $[e,1]^2$. Sur le reste du carré unité, U est bornée par le minimum et le maximum, c'est à dire que pour tout

$(x,y) \in [0,1]^2 \backslash ([0,e]^2 \cup [e,1]^2)$, U sera un opérateur de compensation. Comme U est une opération associative, on a $U(0,1) \in \{0,1\}$.On appelle uninorme conjonctive une uninorme U telle que $U(0,1) = 0$, et une uninorme disjonctive $U(0,1) = 1$. Les transformations définies par (3.1.1) et (3.1.2) forment deux classes générales d'opérateurs.

$$U(x,y) = \begin{cases} eT\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right) & \text{si } (x,y) \in [0,e[^2 \\ e + (1-e)\,S\left(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}\right) & \text{si } (x,y) \in [e,1]^2 \\ \min(x,y) & \text{sinon} \end{cases} . \tag{3.1.1}$$

$$U(x,y)=\begin{cases} T\left(e,\left(\frac{x}{e},\frac{y}{e}\right)\right) & \text{si } (x,y)\in[0,e]^2 \\ e+(1-e)\,S\left(\frac{x-e}{1-e},\frac{y-e}{1-e}\right) & \text{si } (x,y)\in\,]e,1]^2 \\ \max(x,y) & \text{sinon} \end{cases}. \tag{3.1.2}$$

Dans (3.1.1), on note que $U(0,1)=0$ ce qui implique que U est une uninorme conjonctive, tandis que dans(3.1.2), on a $U(0,1)=1$ ce qui rend U disjonctive. La (**FIG.3.1**) présente une visualisation de la structure d'une uninorme, où T^* et S^* sont donnés par:

$$T^*(x,y)=eT\left(\frac{x}{e},\frac{y}{e}\right).$$

$$S^*(x,y)=e+(1-e)\,S\left(\frac{x-e}{1-e},\frac{y-e}{1-e}\right).$$

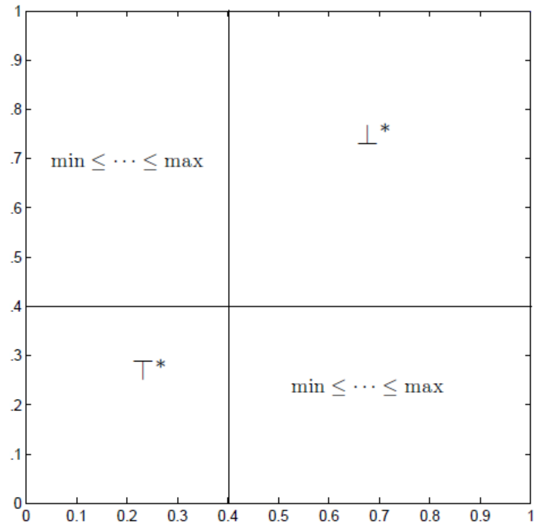

FIG.3.1 : Structure d'une uninorme ayant pour élément neutre $e=0.40$.

Les propriétés de U , T et S permettent l'extension de chaque uninorme à son opérateur n-aire :

$$U(x_1,...,x_n)=U\left(T^*\left(\min(x_1,e),...,\min(x_n,e)\right),S^*\left(\max(x_1,e),...,\max(x_n,e)\right)\right).$$

L'effet de compensation pour des valeurs séparées par l'élément neutre apparaît pour la classe des uninormes archimédiennes.

Définition 3.1.2 *[8]*

Un opérateur d'agrégation U est une uninorme archimédienne continue si en tout point de $(x_1, ..., x_n) \in \cup_{n\in\mathbb{N}}[0,1]^n$, $\{0,1\} \subset \{x_1, ..., x_n\}$, si et seulement s'il existe une bijection monotone $g : [0,\ 1] \rightarrow [-\infty,\ \infty]$ avec $g(e) = 0$ telle que:

$$U(x_1, ..., x_n) = g^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\right).$$

On dira alors que U une uninorme engendrée par un générateur additif g et élément neutre e.

Cette uninorme peut être reliée aux moyennes quasi-arithmétiques, mis à part le fait que ces dernières ne possèdent pas d'élément neutre.

Définition 3.1.3 *[7]*

Une nullnorme est une opération commutative, associative et croissante, admettant un élément absorbant $a \in [0,\ 1]$ et qui satisfait $V(x,\ 0) = x$ pour tout $x \leq a$, et $V(x,\ 1) = x$ pour tout $x \geq a$.

Comme pour les uninormes, on peut démontrer qu'une nullnorme peut s'écrire de la façon suivante

$$V(x,\ y) = \begin{cases} aS\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) & \text{si } (x,\ y) \in [0,a]^2 \\ a + (1-a)\,T\left(\frac{x-a}{1-a}, \frac{y-a}{1-a}\right) & \text{si } (x,\ y) \in [a,1]^2 \\ a & \text{sinon} \end{cases}.$$

De la même manière que l'on peut obtenir une uninorme à partir de fonctions génératrices, ceci est également possible pour les nullnormes. On peut ainsi trouver une nullnorme sous certaines conditions :

Définition 3.1.4 *[7]*

Un opérateur V est une nullnorme continue nilpotente avec élément absorbant $a \in]0,1[$ si et seulement s'il existe une bijection croissante $q : [0,\ 1] \rightarrow [0,\ 1]$ telle que :

$$V(x_1, ..., x_n) = q^{-1}\left(med\left(\sum_{i=1}^{n} q(x_i), \sum_{i=1}^{n} q(x_i) - (n-1), q(a)\right)\right).$$

où on dit que V est une nullnorme nilpotente si pour tout $x \in [0,1]$, il existe un k entier tel que:

$$V\underbrace{(x_1, ..., x_n)}_{k\ fois} \in \{0, a, 1\}.$$

3.1.2 Convexes linéaires et exponentielles

On distingue deux catégories de combinaisons : les combinaisons convexes linéaires et exponentielles, introduites par *Zimmermann* et *Zysno.* Dans un premier temps, proposées pour des normes triangulaires particulières, elles ont été ensuite généralisées pour n'importe quelle norme triangulaire. En effet l'opérateur Γ est défini de la manière suivante :

$$\Gamma\left(x_1,...,x_n\right) = \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1-\gamma}\left(1-\prod_{i=1}^n\left(1-x_i\right)\right)^{\gamma}. \tag{3.1.3}$$

qui est en fait une sous-classe des opérateurs de combinaison convexe exponentielle, c'est à dire d'une moyenne géométrique pondérée de T et S , définis par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}\left(x_1...,x_n\right) = T\left(x_1,...,x_n\right)^{1-\gamma} S\left(x_1,...,x_n\right)^{\gamma}.$$

pour laquelle on obtient(3.1.3) si l'on utilise le couple (T,S). Ainsi, la combinaison convexe linéaire est définie par :

$$\mathcal{L}\left(x_1,...,x_n\right) = \left(1-\gamma\right).T\left(x_1,...,x_n\right) + \gamma.S\left(x_1,...,x_n\right).$$

Plus récemment, *Pradera* et *al* proposent une généralisation de ces deux propositions. Pour cela, ils s'appuient sur une méthode de composition, et appliquent la définition générale d'une moyenne quasi-arithmétique pondérée donnée par :

$$A_W\left(x_1,...,x_n\right) = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n w_i f\left(x_i\right)\right).$$

Tel que $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone, et pour chaque x_i on associe le poids $w_i \geq 0$ respectant la contrainte $\sum_{i=1}^n w_i = 1$.

Ils obtiennent ainsi la définition suivante des opérateurs $T-S$ quasi-linéaires :

$$Q\mathcal{L}\left(x_1,...,x_n\right) = f^{-1}\left(\left(1-\gamma\right).f\left(T\left(x_1,...,x_n\right)\right) + \gamma.f\left(S\left(x_1,...,x_n\right)\right)\right).$$

évidemment, ε et $\mathcal{L}$ sont des cas particuliers de $Q\mathcal{L}$. Ces trois opérateurs présentent un comportement de compensation entre les valeurs agrégées, à distinguer, rappelons-le, d'un comportement de compromis.

3.1.3 Sommes symétriques

Initialement, *Silvert* avait introduit des opérations permettant de fusionner deux ensembles flous de manière à ce que le complément de la combinaison soit la combinaison du complément, en d'autres termes,

$$1 - SS(x_1, ..., x_n) = SS(1 - x_1, ..., 1 - x_n).$$

où l'opérateur SS est appelé somme symétrique. *Silvert* montrera ainsi que les sommes symétriques sont des opérations continues, non décroissantes, commutatives que l'on peut écrire sous la forme

$$SS(x, y) = \frac{f(x, y)}{f(x, y) + f(1 - x, 1 - y)}.$$

où f est une fonction continue croissante respectant $f(0, 0) = 0$. Dans l'esprit des combinaisons convexes décrites à la section précédente, cette fonction f peut être une t-norme ou une t-conorme. On pourra ainsi remarquer que si l'on prend $f(x, y) = x.y$, on obtient l'opérateur de renforcement complet défini dans l'exemple (3.1.1).

Exemple 3.1.1

L'exemple le plus connu d'opérateur de renforcement complet est le triple $\prod$:

$$A(x_1, ..., x_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\prod_{i=1}^{n} x_i + \prod_{i=1}^{n} \bar{x}_i}.$$

où $\bar{x}$ est la négation stricte, c'est à dire $\bar{x} = 1 - x$.

3.2 Logique floue basée sur les normes triangulaires

La logique floue peut être envisagée comme une extension de la logique booléenne. Ainsi, alors qu'en logique classique l'appartenance d'un élément à un sous-ensemble donné est une valeur binaire (0 ou 1), la théorie des sous-ensembles flous considère cette appartenance comme une valeur réelle dans l'intervalle $[0; 1]$. Une valeur nulle implique la non-appartenance de l'élément au sous ensemble, tandis que la valeur 1 indique que l'élément appartient au sous-ensemble considéré.

3.2.1 Sous-ensemble flou

Le sous-ensemble flou est l'élément de base de la logique floue. Il est caractérisé par sa fonction d'appartenance, fonction continue et à valeurs dans l'intervalle $[0;1]$: Celle-ci définit le degré d'appartenance d'un élément au sous-ensemble flou considéré.

Définition 3.2.1

Un sous-ensemble flou A dans un univers du discours X est caractérisé par sa fonction d'appartenance $\mu_A(x)$ qui associe à chaque élément x de X une valeur dans l'intervalle des nombres réels $[0,1]$.

$$\mu_A(x) : X \to [0,1].$$

Ainsi un sous-ensemble flou A dans X peut être représenté par un ensemble de couples ordonnés :

$$A = \{(x, \mu_A(x))\,/x \in X\}.$$

Exemple 3.2.1

Soit un ensemble X composé de six éléments:

$X = \{a, b, c, d, e, f\}$.

Il représentera l'univers de discours ou l'ensemple de références, on peut former un sous ensemble A de l'ensemple U $(A \subset X)$

$A = \{b, d, e, f\}$

Une des formes pour représenter cet ensemple pourrait étre :

0	1	0	1	1	1
a	b	c	d	e	f

Dans cette notation, à l'élément qui appartient à A on lui attribut la valeur 1, et s'il néappartient pas à A on lui attribut la valeur 0.

Exemple 3.2.2

Soit X un ensemble composé de six personnes. On va considérer la propriétée"être grand". par exemple la personne a mesure $1m$ 60, b mesure $1m$ 70, et c mesure $1m$ 85 etc...

Si on définit une limite, et on dit que tous ceux qui dépassent $1m75$ sont grands, on obtient un sous ensemble A précis des personnes grandes, mais cette propriétée n'est pas précises, les gens qui mesure $1m74$ sont 'il petits?

Donc cette propriétée est floue, vague et dépend de l'opinion subjective de celui qui doit créer le sous ensemble .

Supposons que quelqu'un ait jugé cette propriété dans l'ensemble X de la façon suivante :

$0,4$	$0,6$	1	$0,8$	$0,5$	$0,6$
a	b	c	d	e	f

Ainsi on obtient un sous ensemble floue A où la personne c est grande, mais la personne a appartient à cet ensemble avec la valeur $0,4$ où 40%, d avec $0,8$ etc...

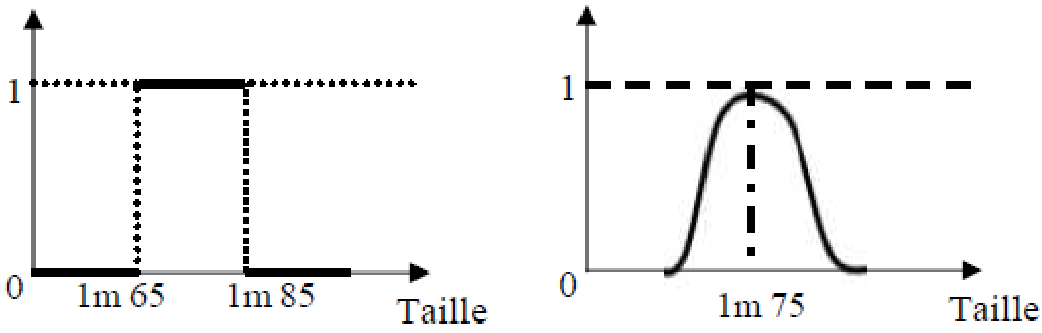

FIG 3.2 : Ensemble classique et ensemble flou.

3.2.2 Opérations sur les ensembles flous définies par les T-normes

Les opérations usuelles définies sur les ensembles classiques (intersection, union,...) ont été généralisées aux ensembles flous. Les opérations ensemblistes sur les ensembles flous sont définies à partir des fonctions d'appartennance. D'autres définitions sont également possibles lorsque l'on fait intervenir les concepts de normes triangulaires et de conormes triangulaires, qui seront présentés dans la section suivante.

Opérateur d'intersection

Définition 3.2.2

L'intersection de deux sous-ensembles flous A et B de X est un sous-ensemble flou constitué des éléments de X affectés du plus petit de leurs deux degrés d'appartenance, donnés par μ_A et μ_B. C'est le sous-ensemble $A \cap B$ de X tel que :

$$\forall x \in X \qquad \mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}.$$

Définition 3.2.3 *[8](Intersection définie par une t-norme)*

Soit A et B deux ensembles flous de X. La définition d'une opération d'intersection entre deux sous-ensembles flous se réfère à une T-norme, qui remplace l'opérateur minimum.

$$\forall x \in X \qquad \mu_{A\cap B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

Opérateur d'union

Définition 3.2.4

L'union de deux sous-ensembles flous A et B de X est un sous-ensemble flou constitué des éléments de X affectés du plus grand de leurs deux degrés d'appartenance, donnés par μ_A et μ_B . C'est le sous-ensemble $A \cup B$ de X tel que :

$$\forall x \in X \qquad \mu_{A\cap B}(x) = \max\{\mu_A(x),\ \mu_B(x)\}.$$

Définition 3.2.5 (L'union définie par une t-conorme) *[8]*

Soit A et B deux sous ensemples flous dans un univers du discours X.

La définition d'une opération d'union entre deux sous-ensembles flous se réfère à une T-conorme, qui remplace l'opérateur maximum:

$$\forall x \in X \qquad \mu_{A\cup B}(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

Remarque 3.2.1

Le choix des opérateurs min et max pour définir respectivement l'intersection et l'union de sous-ensembles flous est justifié par le fait qu'ils préservent presque toute les structures de la théorie des ensembles classiques. En effet, d'après les définitions données ci-dessus, nous pouvons retrouver les propriétés classiques de l'union et de l'intersection à savoir :

- Associativité et commutativité de $\cup$ et $\cap$,
- Distributivité dans les deux sens de $\cup$ et $\cap$,
- $A \cup \phi = A$, $A \cup X = X$.
- $A \cap X = A$, $A \cap \phi = \phi$.

Le produit cartisien

Lorsque les problémes considérés sont décrits dans plusieurs univers de référence $X_1, X_2, ..., X_n$, il est plus intéréssant de pouvoir raisonner dans un univers de référence X global composé de chacun des univers initiaux . De ce fait, X correspond au produit cartisien de

$X_1,\ X_2, ..., X_n : X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$, et ses elements x sont des $n-$uplets :

$x = (x_1, x_{2,...,}\ x_n)$. Le produit cartésien de n sous ensembles flous $A_1, A_2, ...,\ A_n$ définis respectivement sur les univers de référence $X_1,\ X_2, ...,\ X_n$ est un sous ensembles flous A définis sur X par sa fonction d'appartennance :

Les T -normes sont aussi utilisées pour définir le produit cartésien. Ainsi, pour deux sous-ensembles flous A et B des univers de discours X et Y, le produit cartésien $A \times B$ est caractérisé par la fonction d'appartenance $\mu_{A\times B}$:

$$\begin{aligned} \mu_{A\times B} &: X \times Y \rightarrow [0;1]. \\ &(x, y) \rightarrow \mu_{A\times B}(x, y) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)) \end{aligned}$$

Les relations floues

Définition 3.2.6 *[11]*

Soient deux ensembles de référence X et Y, une relation $\Re$ est représentée entre X et Y par un sous-ensemble flou de $X \times Y$ dont la fonction d'appartennance $\mu_{\Re}$ est définie par :

$$\mu_{\Re} : X \times Y \rightarrow [0;1].$$

La relation $\Re$ est notée $\Re(X, Y)$.

Définition 3.2.7 (Relation inverse) *Soit* $\Re$ *une relation floue sur* $X \times Y$*. Son inverse* $\Re^{-1}$ *est une relation floue sur* $Y \times X$ *tel que :*

$$\forall (x, y) \in Y \times X, \mu_{\Re^{-1}}(x, y) = \mu_{\Re}(y, x).$$

Propriétés des relations floues

Une relation floue est dite :

- Réflexive : ssi $\forall x \in X,\ \mu_{\Re}(x, x) = 1.$
- Symétrque : ssi $\forall x_1,\ x_2 \in X\ ,\ \mu_{\Re}(x_1, x_2) = \mu_{\Re}(x_2, x_1).$
- Antisymétrie : $\forall x_1,\ x_2 \in X$ et $x_1 \neq x_2 \Rightarrow T(\mu_{\Re}(x_1, x_2), \mu_{\Re}(x_2, x_1)) = 0.$
- T-norme transitive : ssi $\forall x_1,\ x_2,\ x_3 \in X,\ \mu_{\Re}(x_1, x_3) \geq T(\mu_{\Re}(x_1, x_2), \mu_{\Re}(x_2, x_3)).$

Les implications floues

Les implication floues se divisent principalemet en deux familles à savoir les S-implication et R-implication que nous présentons ci-aprés .

S**-implication** L'appelation S-implication vient de l'expression anglais (*strong implication). On définit la classe des* S-implication (notée $\widetilde{\rightarrow}_S$) *à partir de* l'expression ((non p) où q) de la maniére suivante :

$$p \widetilde{\rightarrow}_S q = S(1 - p, q). \tag{3.2.1}$$

Il existe une infinité de S-implications, parmi lesquelles les trois plus caurante sont données dans la table suivante :

Nom	Notation	Valeur de vérité	conorme sous-jacente
Kleene-Dienes	$\widetilde{\rightarrow}_{K-D}$	$\max(1 - p, q)$	$S(p, q) = \max(p, q)$
Reichenbach	$\widetilde{\rightarrow}_{Rb}$	$1 - p + p * q$	$S(p, q) = p + q - p * q$
Lukasiewicz	$\widetilde{\rightarrow}_{Lu}$	$\min(1 - p + q, 1)$	$S(p, q) = \min(p + q, 1)$

Table 3.1 : les principales $S-$ implications

Remarque 3.2.2

• L'ordre suivant sur les S-implication précidentes est valide

$$(p\widetilde{\rightarrow}_{K-D}q) \leq (p\widetilde{\rightarrow}_{Rb}q) \leq (p\widetilde{\rightarrow}_{Lu}q).$$

• L'implication de Kleene-Dienes est la plus petite des S-implications (puisque elle construite à partir de la plus petite t-conormes). La plus grande (notée $\widetilde{\longrightarrow}_{S-M}$) est trouvée en prenant la conorme de Weber, soit :

$$p\widetilde{\longrightarrow}_{S-M}q = \begin{cases} (1-p) & \text{si } q=0 \\ q & \text{si } p=1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

• Comme pour l'implication usuelle, on a : $p\widetilde{\rightarrow}_S 0 = S(1-p,0) = 1-p$.

• Les implication de cette classe sont leur propre contraposé car d'aprés la formule (3.2.1), on a :

$$\textbf{non } q\widetilde{\rightarrow}_S \textbf{ non } p = S(1-(1-q),1-p) = S(q,1-p).$$

R-implication La seconde classes d'implications floues est la R-implication , ainsi dénommées parce qu'elles le principe de *résiduation*. Une R-implication (notée $\widetilde{\rightarrow}_R$) est définie comme suit :

$$p\widetilde{\rightarrow}_R q = Sup_{[0,1]}\{x \in [0,1] \;/\; T(p,x) \leq q\}.$$

Il existe une infinité de R-implications, parmi lesquelles les trois plus caurante sont données dans la table suivante :

Nom	Notation	Valeur de vérité	norme sous-jacente
GÖdel	$\widetilde{\rightarrow}_{GÖ}$	$\begin{cases} 1 & \text{si } p \leq q \\ q & \text{sinon} \end{cases}$	$T(p,q) = \min(p,q)$
Goguen	$\widetilde{\rightarrow}_{Gg}$	$\begin{cases} 1 & \text{si } p \leq q \\ q/p & \text{sinon} \end{cases}$	$T(p,q) = pq$
Lukasiewicz	$\widetilde{\rightarrow}_{Lu}$	$\begin{cases} 1 & \text{si } p \leq q \\ 1-p+q & \text{sinon} \end{cases}$	$T(p,q) = \max(p+q-1,0)$

Table 3.1 : les principales $R-$ implication

Remarque 3.2.3

• Les R-implications principales peuvent ordonnées :

$$(p\widetilde{\rightarrow}_{G\ddot{O}}q) \leq (p\widetilde{\rightarrow}_{Gg}q) \leq (p\widetilde{\rightarrow}_{Lu}q)\,.$$

• L'implication de GÖdel est la plus petite R-implication propre, puisque elle construite à partir de la plus grande norme triangulaire. La plus grande (notée $\widetilde{\rightarrow}_{R-M}$) est celle construite à partir de la plus petite t-norme (celle de Weber), soit :

$$p\widetilde{\rightarrow}_{R-M}q = \begin{cases} 1 & \text{si } p \leq q \\ q & \text{si } p > q \text{ et } p = 1 \\ 1^- & \text{si } p > q \text{ et } p < 1 \end{cases}.$$

où 1^- désigne une valeur limite strictement inférieur à 1.

Bibliographie

[1] S. Ayouni, Etude et Extraction de Règles graduelles floues : Définition d'algorithmes efficaces, Thése de doctorat*, Université Montpellier 2, Université de Tunis El Manar,* 2012.

[2] M. Detyniecki, R.R. Yager et B. Bouchon-Meunier, Specifying t-norms based on the value of $T\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, Mathware & Soft computing 7 (2000) : 77-87.

[3] P. Drygas, Algebraic aspects of the construction of uninorms, *The 3rd International Conference on Applied Algebra - ICAA 2015, April 28-30, 2015.*

[4] L. Dubois, Utilisation de la logique floue dans la commande des systemes complexes, mémoire de doctorat, *Université des sciences et techniques de lille, France,* 1995.

[5] S. Graidia, Commande adaptative floue type-2 par mode glissant des systemes chaotique, mémoire de Master, *université Kasdi Merbah–Ouargla,* 2012

[6] I. Iancu, Sur la construction d'une classe de t-normes*, université de craiova, faculté de mathématiques 1100: 1-8.*

[7] H. Le Capitaine, Opérateurs d'agrégation pour la mesure de similarité. Application a l'ambiguïté en reconnaissance de formes, Thése de doctorat, *Université de La Rochelle, France,* 2009.

[8] D. Mokeddem, Contrôle Flou des Processus Biotechnologiques à Base d'Algorithmes Génétiques, Thése de doctorat, *Université Ferhat abbas de setif,* 2010.

[9] S. Petit-Renaud, Application de la théorie des croyances et des systèmes floue à l'estimation fonctionnelle en présence d'informations incertaines où imprécises, *université de technologie de Compiège,* 1999.

[10] E. P. Klement et R. Mesiar, L*ogical, Algebraic, Analytic, and Probabilistic Aspects of Triangular Norms,* Elsevier, 2005.

[11] H. Radja , Généralisation floue des treillis Galois alph, mémoire de magistère, *université de Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou,* 2014.

[12] F. Sur, Présentation de la Logique Floue, Mémoire magistère de première année, *école Normale Supérieure de Cachan,* 1998.

[13] E. Rak, L. Zedam, Aggregation operations: properties and applications, *The 3rd International Conference on Applied Algebra - ICAA 2015, April 28-30, 2015.*

[14] http://www.flll.jku.at/div/research/technical_reports/flll-tr-0216.pdf.

[15] http://uni-obuda.hu/users/fuller.robert/nfs5.pdf.