



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Equations aux dérivées partielles et
applications

Par

Lakehal Rachid

Sujet

Équations différentielles fractionnaires résultats d'existence et d'unicité

Devant le jury :

Mr. Nouiri Brahime

Prof. Univ de M'sila

Président

Mr. Arioua Yacine

Prof. Univ de M'sila

Rapporteur

Mr. Saadi Abderachid

Prof. Univ de M'sila

Examineur

Promotion : 2016 / 2017

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à :
Dieu tout puissant, pour la volonté, et la santé et la patience qu'il
nous donnait durant toutes ces années d'études afin que nous
puissions en arriver là.

Comme nous tenons à remercier notre
Encadreur : **Arioua Yacine** et Président : **Nouiri Brahime** et
Examineur : **Saadi Abderachid** .

Merci à tous les enseignants et les étudiants
De département **mathématique**
Pour leurs aides judicieuses, les moyens qu'ils ont
Met à notre disposition pour réaliser ce travail.
Enfin à toute personne qui a collaborée à la réalisation
Du présent mémoire.

Merci

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

- A mes parents,
- A mes frères,
- A mes soeures,
- A toute la famille

Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie cette mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

Table des matières

Introduction	II
1 Éléments de calcul fractionnaire	1
1.1 Fonction spéciales	1
1.1.1 Fonction Gamma d'Euler	1
1.1.2 Fonction Beta d'Euler	4
1.1.3 Fonction de Mittag-Leffter	5
1.2 Intégrale de Riemann-Liouville	6
1.3 Dérivées fractionnaire	10
1.3.1 Dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville	10
1.3.2 Dérivées fractionnaires de Caputo	13
2 Equations Différentielles Fractionnaires de Type Caputo	18
2.1 Lemmes Fondamentaux et théorèmes de point fixe	19
2.1.1 Théorèmes de point fixe	19
2.1.2 Lemmes fondamentaux	20
2.2 Problème de Cauchy dans le cas $0 < \alpha < 1$	22
2.3 Problèmes aux Limites	25
2.3.1 Problème aux Limites dans le Cas $0 < \alpha < 1$	25
2.3.2 Problème aux Limites dans le Cas $1 < \alpha \leq 2$	30
3 Equations Différentielles Fractionnaires de type Riemann-Liouville	35
3.1 Lemmes Fondamentaux	35
3.2 Résultat d'existence de solution	37
Conclusion	42
Bibliographie	43

Introduction

Le calcul fractionnaire est une généralisation du calcul différentiel. Son histoire remonte à L'Hôpital (1693) qui se pose la question d'interpréter la dérivée d'ordre $1/2$. C'est Lacroix (1879) qui montre que pour $f(x) = x^a$ et $a > 0$,

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} f(x) = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})} x^{a-\frac{1}{2}}$$

Ensuite, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Weyl, Riez, Marchaud et Caputo, entre autres, ont contribué au développement du calcul fractionnaire dans lequel on définit les dérivées et intégrales non entières.

Dans ce cadre et pour notre support bibliographique nous nous sommes appuyés principalement sur les ouvrages de Samko, Kilbas et Marichev, celui de Rubin ainsi que Kilbas, Srivastava et Trujillo. Les équations différentielles fractionnaires (EDFs) apparaissent naturellement dans différents domaines scientifiques comme la physique, l'ingénierie, la médecine, l'électrochimie, la théorie du contrôle, etc. L'efficacité de ces équations dans la modélisation de plusieurs phénomènes du monde réel a motivé beaucoup de chercheurs à étudier leurs aspects quantitatifs et qualitatifs.

Les études sur l'existence et l'unicité des solutions d'équations différentielles fractionnaires sont très abondantes, entre autres les travaux citer Zhang et Benchohra. On propose dans ce travail, de faire une synthèse de certains travaux sur l'existence et l'unicité des solutions pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Le mémoire se compose de trois chapitres qui s'articulent de la façon suivante : Le premier chapitre est consacré aux définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul fractionnaire telles que : l'intégration fractionnaire, la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, Caputo. On présentera quelques unes de leurs propriétés et on précisera aussi la relation entre ces deux approches, qui sont les plus utilisées.

Dans le seconde chapitre, on abordera la question d'existence et d'unicité de la solution pour le problème Cauchy et le problème aux limites pour l'équations

différentielle d'ordre fractionnaire de type Caputo suivant :

$$1. \quad \begin{cases} {}^C D y(t) = f(t, y(t)), & t \in [0, T], \quad 0 < \alpha < 1 \\ y(0) = y_0, & y_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$

où $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, est une fonction continue.

$$2. \quad \begin{cases} {}^C D y(t) = f(t, y(t)), & t \in [0, T], \quad 0 < \alpha < 1 \\ ay(0) + by(T) = c \end{cases} \quad (2)$$

où $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue. et a, b, c des constant réelles tell que $a + b \neq 0$.

$$3. \quad \begin{cases} {}^C D y(t) = f(t, y(t)), & t \in [0, T], \quad 1 < \alpha < 2 \\ y(0) = y_0, \quad y(T) = y_T \end{cases} \quad (3)$$

où $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est fonction continue.

Dans le troisième chapitre on va considérer un problème étudiée par S. Zhang dans [10], c'est l'équation différentielle fractionnaire non linéaire de type Riemann-Liouville suivante :

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha} u(t) + f(t, u(t)) = 0, & t \in [0, 1], \quad 3 < \alpha \leq 4 \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

où $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est fonction continue.

L'existence et l'unicité d'une solution continue de tous les problèmes est établi par la transformation de ce problème à une équation intégrale équivalente, dont la solution est identifiée à un point fixe d'un opérateur contractant (sous certaines hypothèses suffisantes sur la fonction f) dans un espace fonctionnel convenablement choisi.

Chapitre 1

Eléments de calcul fractionnaire

Ce chapitre sera consacré aux définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul fractionnaire telles que : les fonctions spéciales (Gamma, Beta, Mittag-Leffler), l'intégration fractionnaire de Riemann Liouville, la dérivation fractionnaire au sens Riemann-Liouville, Caputo, qui sont les plus utilisées.

1.1 Fonction spéciales

1.1.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 1.1 On appelle fonction Gamma, la fonction définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad (x \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(x) > 0)$$

avec $t^{x-1} = e^{(x-1)\ln t}$.

Exemple 1.1

1.

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

2.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}, \quad (\text{posant le changement de variable } t = s^2)$$

Lemme 1.1 [5,6] La fonction Gamma est une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* , (resp holomorphe sur le demi plan $x \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(x) > 0$) et,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad (\text{resp, } x \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(x) > 0), \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt$$

Proposition 1.1 [5,6] Pour tout $x \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(x) > 0$, $n \in \mathbb{N}$, on a :

1. $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$
2. $\Gamma(n) = (n - 1)!$
3. $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$

Preuve.

1.

$$\begin{aligned}\Gamma(x + 1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \\ &= x\Gamma(x)\end{aligned}$$

2. il suffit d'appliquons 1 pour $x = n - 1$

3. Nous allons démontrer la formule par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$

■

Remarque 1.1 [5,6] La détermination de la fonction Gamma pour les valeur négatifs non entières par la formule $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$, et la transition d'un intervalle à un autre $(-1, 0)$, $(-2, -1)$, $(-3, -2)$, ... la fonction Gamma n'existe pas pour les valeur négatifs entières.

Exemple 1.2

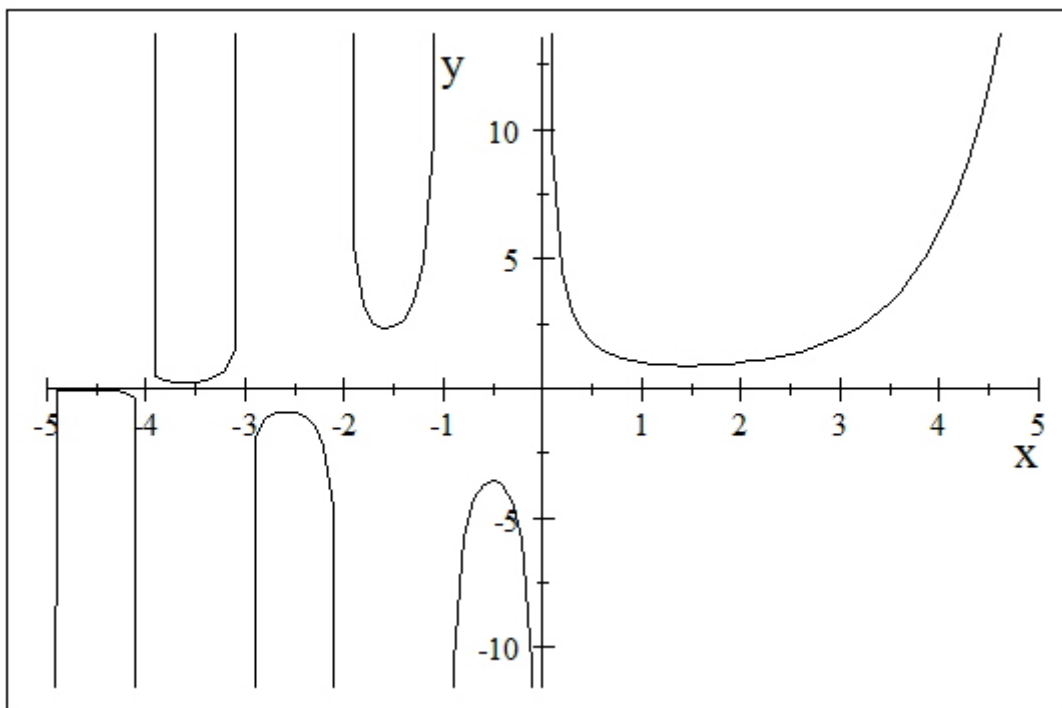
1.

$$\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{2} + 1\right)}{\frac{-1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{-1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$$

2.

$$\Gamma\left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{-3}{2} + 1\right)}{\frac{-3}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right)}{\frac{-3}{2}} = \frac{-2\sqrt{\pi}}{\frac{-3}{2}} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$$

* Le graphe de la fonction Gamma Γ :



Proposition 1.2 [5,6] Pour tout $p > 0$, on a :

$$\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^p}{p(p+1)(p+2) \dots (p+n)}$$

Preuve. Considérons la fonction,

$$f(n, p) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{p-1} dx$$

on peut facilement voir que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n, p) = \Gamma(p)$$

. D'une autre part, par l'intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned} f(n, p) &= \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{p-1} dx = \left[\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \frac{x^p}{p} \right]_0^n + \frac{1}{p} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} x^p dx \\ &= \frac{1}{p} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} x^p dx. \end{aligned}$$

Après l'intégration par parties n fois, on obtient :

$$f(n, p) = \frac{n(n-1) \dots [n - (n-1)]}{n^n p(p+1) \dots [p + (n-1)]} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-n} x^{p+(n-1)} dx$$

$$\begin{aligned}
f(n,p) &= \frac{n!}{n^n p(p+1) \cdots [p+(n-1)]} \left[\frac{x^{n+p}}{n+p} \right]_0^n \\
&= \frac{n! n^p}{p(p+1) \cdots (n+p)},
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^p}{p(p+1)(p+2) \cdots (p+n)}.$$

■

1.1.2 Fonction Beta d'Euler

Définition 1.2 La fonction Beta est un type d'intégrale d'Euler définie par :

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad (p, q \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0)$$

Proposition 1.3 on a :

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Preuve. Soit $D = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \right) \left(\int_0^{+\infty} y^{q-1} e^{-y} dy \right) \\
&= \int \int_D x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)} dx dy
\end{aligned}$$

en utilisant un changement de coordonnées, considérons les nouvelles coordonnées

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \frac{x}{x+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases},$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -uv - u(1-v) = -u,$$

de même que le domaine D' correspondant à D dans les coordonnées u, v est

$$D' = (u, v) / u \geq 0, 0 \leq v \leq 1,$$

alors :

$$\int \int_D x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)} dx dy = \int \int_{D'} (uv)^{p-1} (u(1-v))^{q-1} e^{-u} | -u | du dv$$

$$\begin{aligned}
&= \int \int^{D'} u^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} e^{-u} du dv \\
&= \left(\int_0^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u} du \right) \left(\int_0^1 v^{p-1} (1-v)^{q-1} dv \right) \\
&= \Gamma(p+q) B(p, q),
\end{aligned}$$

par conséquent on a :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

■

1.1.3 Fonction de Mittag-Leffler

Définition 1.3 La fonction simple de Mittag-Leffler est définie par :

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0$$

et la fonction de Mittag-Leffler généralisée est définie par :

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad \alpha, \beta > 0.$$

Exemple 1.3

1.

$$E_1 = E_{1,1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

2.

$$E_2 = E_{2,1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(2k)!} = \cosh \sqrt{x}.$$

3.

$$E_{1,2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{x}(e^x - 1).$$

4.

$$E_{1,3} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+2)!} = \frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{1}{x^2}(e^x - 1 - x).$$

Théorème 1.1 [5,6] Pour tout $\alpha = n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right)^n E_n(\lambda x^n) &= \lambda E_n(\lambda x^n) \\ \left(\frac{d}{dx}\right)^n x^{\beta-1} E_{n,\beta}(\lambda x^n) &= \lambda x^{\beta-n-1} E_n(\lambda x^n). \end{aligned}$$

Proposition 1.4 [5,6] Pour $\alpha, \beta > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ on a transformée de Laplace ;

$$\mathcal{L}[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)](s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda}, \quad s > 0, \quad |\lambda s^\alpha| < 1.$$

Preuve. Grâce à la définition de transformée de Laplace, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)](s) &= \int_0^{+\infty} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^{\beta-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} e^{-st} dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha k + \beta - 1} e^{-st} dt \end{aligned}$$

posons le changement de variable $st = \tau$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)](s) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k s^{-\alpha k - \beta}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \int_0^{+\infty} \tau^{\alpha k + \beta - 1} e^{-\tau} d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k s^{-\alpha k - \beta}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \Gamma(\alpha k + \beta) \\ &= s^{-\beta} \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda s^{-\alpha})^k \end{aligned}$$

et pour $|\lambda s^\alpha| < 1$, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda s^{-\alpha})^k = \frac{1}{1 - \lambda s^{-\alpha}}$, donc

$$\mathcal{L}[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)](s) = \frac{s^{-\beta}}{1 - \lambda s^{-\alpha}} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda}.$$

■

1.2 Intégrale de Riemann-Liouville

1) Fonction définies sur $[a, b]$

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $[a, b]$. Notons par $(I_{a+}^1 f)$ la primitive de f qui s'annule en (a) :

$$\forall t \in [a, b], \quad (I_{a+}^1 f)(t) = \int_a^t f(x) dx$$

L'intégration de $(I_{a+}^1 f)$ permet d'obtenir la primitive seconde de f qui s'annule en a et dont la dérivée s'annule en a . De plus, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} (I_{a+}^1 f)^2(t) &= (I_{a+}^1 f) \circ (I_{a+}^1 f) = \int_a^t \left(\int_a^u f(x) dx \right) du \\ &= \int_a^t (t-x) f(x) dx. \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, En notant $(I_{a+}^1 f)^n$ la nième itération de $(I_{a+}^1 f)$, une récurrence directe montre que

$$(I_{a+}^1 f)^n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-x)^{n-1} f(x) dx$$

si on note $g = (I_{a+}^1 f)^n$, g est donc l'unique fonction vérifiant,

$$\forall 0 \leq k \leq n-1, g^{(k)}(a) = 0, g^{(n)} = f.$$

L'égalité $g^{(n)} = f$ justifie la définition suivante :

Définition 1.4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, L'intégrale à gauche d'ordre n de f , que l'on note $(I_{a+}^n f)$ est définie par :

$$(I_{a+}^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-x)^{n-1} f(x) dx.$$

Grâce à la fonction Gamma d'Euler que nous avons définie précédemment.

C'est la propriété $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$, qui permet de généraliser la définition 1.4 de la manière suivante :

Définition 1.5 L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $\alpha > 0$, est définie par :

$$\forall t \in [a, b], (I_{a+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx$$

De même manière on définit l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre $\alpha > 0$, par :

$$\forall t \in [a, b], (I_{b-}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} f(x) dx.$$

2) Fonction définies sur \mathbb{R}^+ et \mathbb{R} .

Il est naturel d'étendre la définition 1.5 aux axes \mathbb{R}^+ et \mathbb{R} , Notons ces opérateurs $(I_{0+}^\alpha f)$ et $(I_+^\alpha f)$:

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}^+, (I_{0+}^\alpha f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx \\ \forall t \in \mathbb{R}, (I_+^\alpha f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx\end{aligned}$$

Proposition 1.5 [5,6] Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$, on a :

1.

$$(I_{a+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (t-a)^{\alpha+\beta-1}$$

2.

$$(I_{b-}^\alpha (b-t)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (b-t)^{\alpha+\beta-1}$$

Preuve.

1.

$$\begin{aligned}(I_{a+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} (x-a)^{\beta-1} dx, \text{ posons } (x-a) = s(t-a) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 ((t-a) - s(t-a))^{\alpha-1} (s(t-a))^{\beta-1} (t-a) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 s^{\beta-1} (1-s)^{\alpha-1} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta), \quad B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (t-a)^{\alpha+\beta-1}.\end{aligned}$$

2. Même idée le changement de variable est $(b-x) = s(b-t)$.

■

Théorème 1.2 [5,6] Si $f \in L^1([a, b])$, alors $I_{a+}^\alpha f$ existe pour tout $\alpha > 0$, et $I_{a+}^\alpha f \in L^1([a, b])$.

Proposition 1.6 [5,6] Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$, et $f \in L^1([a, b])$.

Alors

$$I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta f = I_{a+}^{\alpha+\beta} f$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\beta f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-s)^{\beta-1} f(s) ds \right) dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^x (t-x)^{\alpha-1} (x-s)^{\beta-1} f(s) ds dx, \quad \left| \begin{array}{l} \text{changement de l'ordre} \\ \text{d'intégration} \end{array} \right| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) \int_s^t (t-x)^{\alpha-1} (x-s)^{\beta-1} dx ds, \quad \left| \begin{array}{l} u = \frac{x-s}{t-s}, \quad du = \frac{dx}{t-s} \\ x = (t-s)u + s, \quad u : 0 \rightarrow 1 \end{array} \right| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) (t-s)^{\alpha+\beta-1} \int_s^t (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du ds, \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) (t-s)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) du ds, \quad (B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t f(s) (t-s)^{\alpha+\beta-1} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s) \\
&= I_{a^+}^{\alpha+\beta} f(t).
\end{aligned}$$

■

Proposition 1.7 [5, 6] Soit $\alpha > 0$, $f \in L^1([0, b])$, $b > 0$, alors la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville $I_{0^+}^\alpha f$ est

$$\mathcal{L}(I_{0^+}^\alpha f)(s) = s^{-\alpha} \mathcal{L}(f)(s).$$

Preuve. On peut écrire l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville $I_{0^+}^\alpha f$, comme convolution de deux fonction $g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$ et $f(t)$, C-à-d

$$\begin{aligned}
(I_{0^+}^\alpha f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx \\
&= \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \right) * f(t) \\
&= g(t) * f(t)
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(I_{0^+}^\alpha f)(s) &= \mathcal{L}(g * f)(s) \\
&= \mathcal{L}(g)(s) \times \mathcal{L}(f)(s) \\
&= \mathcal{L}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}\right)(s) \times \mathcal{L}(f)(s) \\
&= s^{-\alpha} \mathcal{L}(f)(s).
\end{aligned}$$

■

1.3 Dérivées fractionnaire

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires, on va commencer par introduire les deux plus importantes approches de calcul fractionnaire : au sens de Riemann-Liouville et au sens de Caputo. On présentera quelques unes de leurs propriétés et on précisera aussi la relation entre ces deux approches.

1.3.1 Dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

Si $\alpha > 0$, on note $[\alpha]$ la partie entière de α : $[\alpha]$ est l'unique entier vérifiant $[\alpha] \leq \alpha < [\alpha] + 1$, soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. En s'inspirant de la relation classique $\frac{d}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \circ_{\alpha} I_t^1$, on peut définir une dérivée fractionnaire d'ordre $0 \leq \alpha < 1$ par :

$$\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}} = \frac{d}{dt} \circ_{\alpha} I_t^{1-\alpha}$$

Plus généralement, si $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$, on peut poser :

$$\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}} = \frac{d^n}{dt^n} \circ_{\alpha} I_t^{n-\alpha}$$

On obtient exactement la dérivée de Riemann-Liouville à gauche.

Définition 1.6 Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α est définie par :

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], D_{a+}^{\alpha} f(t) &= \left(\frac{d}{dt} \right)^n \circ I_{a+}^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1} f(x) dx. \end{aligned}$$

De plus, on a vu que la définition 1.6 d'intégrale à droite était associée à $-d/dt$. le raisonnement précédent conduit donc à la définition suivante :

Définition 1.7 Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α est définie par :

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], D_{b-}^{\alpha} f(t) &= \left(-\frac{d}{dt} \right)^n \circ I_{b-}^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (x-t)^{n-\alpha-1} f(x) dx \end{aligned}$$

Soit maintenant $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, les définitions précédentes se généralisent directement et sont appelées dérivées de Liouville.

Définition 1.8 Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α est définie par :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, D_+^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ I_+^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{-\infty}^t (t-x)^{n-\alpha-1} f(x) dx\end{aligned}$$

De plus, on a vu que le définition 1.8 d'intégrale à droit était associée à $-d/dt$. le raisonnement précédent conduit donc à la définition suivante :

Définition 1.9 Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. la dérivée fractionnaire de Liouville à droite d'ordre α est définie par :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, D_-^\alpha f(t) &= \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \circ I_-^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^{+\infty} (t-x)^{n-\alpha-1} f(x) dx.\end{aligned}$$

Remarque 1.2 [7]

1. Pour $\alpha = 0$, $n = 1$, on a $\alpha D_{a^+}^0 f(t) = \frac{d}{dt}(I_{a^+}^1 f) = f(t)$
2. Toutes ces dérivées coïncident avec les dérivées usuelles pour les ordres entiers :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} D_{\alpha^+}^n f(t) = D_+^n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t) \\ D_{b^-}^n f(t) = D_-^n f(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} f(t) \end{cases}$$

Proposition 1.8 [5,6] Pour $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, on a :

1.

$$(D_{a^+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}.$$

2.

$$(D_{b^-}^\alpha (b-t)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}.$$

Preuve.

1. Posons $f(t) = (t-\alpha)^{\beta-1}$, d'après la définition 1.6 et proposition 1.8 on a :

$$\begin{aligned}(D_{a^+}^\alpha f)(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ I_{a^+}^{n-\alpha} f(t) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)} (t-a)^{n-\alpha+\beta-1} \right),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{n-\alpha+\beta-1} &= (n-\alpha+\beta-1)\cdots(n-\alpha+\beta-1-(n-1))(t-a)^{-\alpha+\beta-1} \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\cdots(\beta-\alpha)(t-a)^{\beta-\alpha-1}, \end{aligned}$$

et d'autre coté :

$$\begin{aligned} \Gamma(n-\alpha+\beta) &= (n-\alpha+\beta-1)\Gamma(n-\alpha+\beta-1), \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\Gamma(n-\alpha+\beta-2) \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\cdots(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} (D_{a^+}^\alpha f)(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)}(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\cdots(\beta-\alpha)(t-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \frac{(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\cdots(\beta-\alpha)\Gamma(\beta)}{(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\cdots(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned}$$

2. De même manière .

■

Remarque 1.3 [5,6] Pour $\lambda = \beta - 1$, $a = 0$ on a :

$$\begin{aligned} (D_{0^+}^\alpha t^\lambda)(t) &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda+1)}(n-\alpha+\lambda)(n-\alpha+\lambda-1)\cdots(\lambda+1-\alpha)t^{\lambda-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda+1)}(n-(\alpha-\lambda))(n-1-(\alpha-\lambda))\cdots(1-(\alpha-\lambda))t^{\lambda-\alpha}, \end{aligned}$$

$$(D_{0^+}^\alpha t^\lambda)(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)}t^{\lambda-\alpha}, & \text{si } \alpha - \lambda \notin \{1, 2, \dots, n\} \\ & \lambda > -1 \\ 0, & \text{si } \alpha - \lambda \in \{1, 2, \dots, n\} \end{cases}$$

Si $\alpha - \lambda \in \{1, 2, \dots, n\} \Rightarrow \alpha - \lambda = m \Rightarrow \lambda = \alpha - m$, $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ C-à-d

$$(D_{0^+}^\alpha t^{\alpha-m})(t) = 0, \quad m \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Proposition 1.9 [5,6] Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $n = [\alpha]+1$, on a les propriétés suivantes :

1. Si $f(t) \in L_p([a, b])$, ($1 \leq p < \infty$), alors

$$(D_{a^+}^\alpha I_{a^+}^\alpha f)(t) = f(t), \quad \text{et } (D_{b^-}^\alpha I_{b^-}^\alpha f) = f(t),$$

2. Si $\alpha > \beta$, et $f(t) \in L_p([a, b])$, ($1 \leq \alpha < \infty$) alors :

$$(D_{a^+}^\beta I_{a^+}^\alpha f)(t) = (I_{a^+}^{\alpha-\beta} f)(t), \text{ et } (D_{b^-}^\beta I_{b^-}^\alpha f) = (I_{b^-}^{\alpha-\beta} f)(t),$$

3. Si $f(t) \in C^q([a, b])$, $q = [\alpha + \beta] + 1$, alors :

$$\left(D_{a^+}^\alpha D_{a^+}^\beta f \right) (t) = \left(D_{a^+}^{\alpha+\beta} f \right) (t), \text{ et } \left(D_{b^-}^\alpha D_{b^-}^\beta f \right) (t) = \left(D_{b^-}^{\alpha+\beta} f \right) (t),$$

4. Si $f(t) \in L_1([a, b])$, $(I_{a^+}^{n-\alpha} f) \in AC^n([a, b])$, alors :

$$\begin{aligned} (I_{a^+}^\alpha D_{a^+}^\alpha f)(t) &= f(t) - \sum_{K=1}^n \frac{(I_{a^+}^{n-\alpha} f)^{(n-K)}(a)}{\Gamma(\alpha - K + 1)} (t - a)^K \\ (I_{b^-}^\alpha D_{b^-}^\alpha f)(t) &= f(t) - \sum_{K=1}^n \frac{(-1)^{n-K} (I_{b^-}^{n-\alpha} f)^{(n-K)}(b)}{\Gamma(\alpha - K + 1)} (b - t)^K. \end{aligned}$$

1.3.2 Dérivées fractionnaires de Caputo

Cette définition se base sur l'interversion des compositions dans la formule de définition 1.4 semble aussi raisonnable pour définir une dérivée fractionnaire appelée dérivée de Caputo .

Définition 1.10 Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$, la dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α est définie par :

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], \quad {}^C D_{a^+}^\alpha f(t) &= I_{a^+}^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dt} \right)^n f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x) dx, \end{aligned}$$

Définition aussi son analogue à droite.

Définition 1.11 Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$ la dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre α est définie par :

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], \quad {}^C D_{b^-}^\alpha f(t) &= I_{b^-}^{n-\alpha} \circ \left(-\frac{d}{dt} \right)^n f(t) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \int_t^b (x - t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x) dx. \end{aligned}$$

Remarque 1.4 [7] Par contre, de telles définition ne recollent pas correctement aux dérivées classique :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} {}^C D_{a^+}^n f(t) = f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a) \\ {}^C D_{b^-}^n f(t) = (-1)^n (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(b)) \end{cases}$$

Heureusement, le résultat suivant montre qu'elles approchent les dérivées classiques par limite inférieure.

Remarque 1.5

- 1) On note $AC([a, b])$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$;
 $f \in AC([a, b]) \Leftrightarrow \exists \varphi \in L^1([a, b])$ telle que $f = c + \int_a^x \varphi(t)dt$.
- 2) On note $AC^n([a, b])$, $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace des fonctions f définies sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{C} qui ont des dérivées continues sur $[a, b]$ jusqu'à l'ordre $n - 1$ donc :
 $AC^n([a, b]) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f^{(k)} \in C([a, b]), k = 0 \dots n - 1, f^{(n-1)} \in AC([a, b])\}$.

Lemme 1.2 [5,6] Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+/\mathbb{N}$, et $n = [\alpha] + 1$. si $f \in AC^n([a, b])$, alors presque partout :

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n^-} {}^C D_{a^+}^\alpha f(t) &= f^{(n)}(t) \\ \lim_{\alpha \rightarrow n^-} {}^C D_{b^-}^\alpha f(t) &= (-1)^n f^{(n)}(t) \end{aligned}$$

Proposition 1.10 [5,6] Pour $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, on a :

1.

$$({}^C D_{a^+}^\alpha (t - a)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (t - a)^{\beta-\alpha-1}, \beta > n$$

2.

$$({}^C D_{b^-}^\alpha (b - t)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (b - t)^{\beta-\alpha-1}, \beta > n$$

Preuve.

1. Posons $f(t) = (t - a)^{\beta-1}$, d'après la définition de $({}^C D)$ on a :

$$({}^C D_{a^+}^\alpha f)(t) = I_{a^+}^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x) dx$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t - a)^{\beta-1} &= (\beta - 1)(\beta - 2) \dots (\beta - 1 - (n - 1))(t - a)^{\beta-1-n} \\ &= (\beta - 1)(\beta - 2) \dots (\beta - n)(t - a)^{\beta-n-1} \end{aligned}$$

d'où

$$({}^C D_{a^+}^\alpha f)(t) = \frac{(\beta - 1)(\beta - 2) \dots (\beta - n)}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - x)^{n-\alpha-1} (x - a)^{\beta-n-1} dx,$$

on suppose que $(x - a) = s(t - a)$,

Alors on a :

$$\begin{aligned}
({}^C D_{a^+}^\alpha f)(t) &= \frac{(\beta - 1)(\beta - 2)\dots(\beta - n)}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - x)^{n-\alpha-1} (x - a)^{\beta-n-1} dx \\
&= \frac{(\beta - 1)(\beta - 2)\dots(\beta - n)}{\Gamma(n - \alpha)} (t - a)^{\beta-\alpha-1} \int_0^1 (1 - s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n-1} ds \\
&= \frac{(\beta - 1)(\beta - 2)\dots(\beta - n)}{\Gamma(n - \alpha)} (t - a)^{\beta-\alpha-1} B(n - \alpha, \beta - n) \\
&= \frac{(\beta - 1)(\beta - 2)\dots(\beta - n)\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n)}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - \alpha)} (t - a)^{\beta-\alpha-1} \\
&= \left| B(n - \alpha, \beta - n) = \frac{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\beta - n)}{\Gamma(\beta - \alpha)} \right| \\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (t - a)^{\beta-\alpha-1}
\end{aligned}$$

2. De même manière.

■

Remarque 1.6 [5, 6] Pour $\lambda = \beta - 1$, $a = 0$ on a :

$$\begin{aligned}
{}^C D_{0^+}^\alpha t^\lambda &= \frac{\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)\dots(\lambda - (n - 1))\Gamma(\lambda - (n - 1))}{\Gamma(\lambda - \alpha + 1)} t^{\lambda-\alpha} \\
({}^C D_{0^+}^\alpha t^\lambda)(t) &= \begin{cases} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha}, & \text{si, } \lambda \notin \{0, 1, 2, \dots, n - 1\} \\ 0 & \text{si, } \lambda \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\} \end{cases}, \lambda > -1
\end{aligned}$$

C-à-d

$$({}^C D_{0^+}^\alpha t^m)(t) = 0, \quad m \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$$

Théorème 1.3 [7] Soit $\alpha \geq 0$, et $n = [\alpha] + 1$. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, possède $(n - 1)$ dérivées en (a) et $(D_{a^+}^\alpha f)$ existe. Alors

$$({}^C D_{a^+}^\alpha f)(t) = D_{a^+}^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t - a)^k \right]$$

persique pour tout $t \in [a, b]$.

Preuve. Par définition on a :

$$\begin{aligned} D_{a^+}^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] &= \left(\frac{d}{dt} \right)^n I_{a^+}^{n-\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \\ &= \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{(t-x)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] dx, \end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par partie on a :

$$\begin{aligned} g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k &\rightarrow \frac{d}{dx} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] \\ \frac{(t-x)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} &\rightarrow -\frac{(t-x)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{n-\alpha} [g(t)] &= \int_a^t \frac{(t-x)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] dx \\ &= \left[\frac{(t-x)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} g(x) \right]_\alpha^t - \int_a^t \frac{(t-x)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \frac{d}{dx} g(x) dx, \end{aligned}$$

d'où

$$I_{a^+}^{n-\alpha} [g(t)] = I_{a^+}^{n-\alpha+1} \frac{d}{dt} g(t)$$

De même façon pour n -fois,

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{n-\alpha} [g(t)] &= I_{a^+}^{n-\alpha+n} \frac{d^n}{dt^n} g(t) \\ &= I_{a^+}^n I_{a^+}^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} g(t) \\ &= I_{\alpha^+}^n I_{\alpha^+}^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \\ &= I_{a^+}^n I_{a^+}^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} f(t), \quad \frac{d^n}{dt^n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] = 0, \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned} D_{a^+}^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] &= \left(\frac{d}{dt} \right)^n I_{a^+}^{n-\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \\ &= \left(\frac{d}{dt} \right)^n I_{a^+}^{n-\alpha} [g(t)] \\ &= \left(\frac{d}{dt} \right)^n I_{a^+}^n I_{a^+}^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} f(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= I_{a^+}^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} f(t) \\
&= ({}^C D_{a^+}^\alpha f)(t).
\end{aligned}$$

■

Corollaire 1.1 [7] Soit $\alpha \geq 0$, $n = [\alpha] + 1$ et $(D_{a^+}^\alpha f)$, $({}^C D_{a^+}^\alpha f)(t)$ sont existents, on suppose que $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Alors :

$$({}^C D_{a^+}^\alpha f)(t) = (D_{a^+}^\alpha f)(t).$$

Proposition 1.11 [5,6] Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $n = [\alpha] + 1$, on a les propriétés suivantes :

1. Si $f(t) \in C^q([a, b])$, $q = [\alpha + \beta] + 1$, alors :

$$({}^C D_{a^+}^\alpha {}^C D_{a^+}^\beta f)(t) = ({}^C D_{a^+}^{\alpha+\beta} f)(t),$$

et

$$({}^C D_{b^-}^\alpha {}^C D_{b^-}^\beta f)(t) = ({}^C D_{b^-}^{\alpha+\beta} f)(t),$$

2. Si $f(t) \in C^n([a, b])$, ou $f(t) \in AC^n([a, b])$, alors :

$$\begin{aligned}
(I_{a^+}^\alpha {}^C D_{a^+}^\alpha f)(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k, \\
(I_{b^-}^\alpha {}^C D_{b^-}^\alpha f)(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k} f^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k.
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Equations Différentielles Fractionnaires de Type Caputo

Ce chapitre constitue une partie préliminaire dans la quelle on rappelle des notions et des résultats fondamentaux de la théorie de l'analyse fonctionnelle (principe de contraction de Banach, équicontinuité, théorème de Schauder, théorème d'Arzela-Ascoli,...) qui représentent un outils indispensable dans notre étude.

On abordera ensuite, la question d'existence et d'unicité de la solution pour le problème Cauchy et le problème aux limites pour l'équations différentielle d'ordre fractionnaire de type Caputo suivant :

1.

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), & t \in [0, T], \quad 0 < \alpha < 1 \\ y(0) = y_0, & y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad (2.1)$$

où $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, est une fonction continue.

2.

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), & t \in [0, T], \quad 0 < \alpha < 1 \\ ay(0) + by(T) = c \end{cases}, \quad (2.2)$$

où $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue. et a, b, c des constant réelles tell que $a + b \neq 0$.

3.

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), & t \in [0, T], \quad 1 < \alpha \leq 2 \\ y(0) = y_0, & y(T) = y_T \end{cases} \quad (2.3)$$

où $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, est une fonction continue.

2.1 Lemmes Fondamentaux et théorèmes de point fixe

Dans ce section on a destiné aux différents outils et résultats de la théorie de l'analyse fonctionnelles utilisés par la suite : principe de contraction de Banach, équicontinuité, théorème de Schauder, théorème d'Arzela-Ascoli,...

2.1.1 Théorèmes de point fixe

Définition 2.1 Soit X une espace de Banach on dit que F est contractant $\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in X$ on a :

$$|F(x_1) - F(x_2)| < k |x_1 - x_2|, \quad 0 < k < 1$$

Théorème 2.1 [3] Banach

Soit X une espace de Banach, et soit l'opérateur $F : X \rightarrow X$ est contractant Alors : F admet un point fixe unique.

i-e $\exists y^* \in X$ tel que $F(y^*) = y^*$

Théorème 2.2 [3] Ascoli-Arzelà

Soit l'ensemble F de $C(X, Y)$ (espace de Banach) on dit que F est relativement compacte dans $C(X, Y)$ si et seulement si :

i) F est borné donc $\exists k > 0$ tel que :

$$\|f(x)\| \leq k \quad \forall x \in X \text{ et } f \in F,$$

ii) F est équicontinue **C-à-d** $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que :

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \varepsilon \quad \forall x_1, x_2 \in X \text{ et } f \in F.$$

Théorème 2.3 [1] Schauder

Soit (E, d) un espace métrique complet et A une partie convexe fermé de E et soit $F : A \rightarrow A$ on a si l'ensemble $Fx : x \in A$ relativement compact dans E . Alors F possède au moins un point fixe

Définition 2.2 On dit que A est convexe *i-e* :

$$\forall x, y \in A, \forall t \in [0, 1] : tx + (1 - t)y \in A$$

Théorème 2.4 [3] Schaefer

Soit X une espace de Banach et opérateur $F : X \rightarrow X$ complètement continu Alors F possède au moins un point fixe . on dit que F est complètement continu si :

- i) $\forall b \subset X \Rightarrow F(b)$ est relativement compacte,
- ii) si l'ensemble $P = \{y \in X : \lambda F(y) = y, \lambda \in]0, 1[\}$ est borné.

2.1.2 Lemmes fondamentaux

On a les lemmes fondamentaux suivant :

Lemme 2.1 [10] Soit $\alpha > 0$, donc l'équation différentielles de type Riemann-Liouville :

$$D^\alpha u(t) = 0 \quad 0 < t < 1$$

admet la solution suivant :

$$u(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \dots + c_n t^{\alpha-n}$$

tel que : $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \dots, n, n = [\alpha] + 1$

la demonstration d'après Remarque 1.3 .

Lemme 2.2 [10] On pose

$$u \in C(0, 1) \cap L(0, 1), \quad D^\alpha u \in C(0, 1) \cap L(0, 1)$$

Alors

$$I^\alpha D^\alpha u(t) = u(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \dots + c_n t^{\alpha-n}$$

$$c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \dots, n \quad n = [\alpha] + 1$$

Preuve. Soit $\alpha > 0$, et soit $u \in C(0, 1) \cap L(0, 1)$ on a :

$$\begin{aligned} I^\alpha D^\alpha u(t) &= u(t) - \sum_{k=1}^n \frac{(I^{n-\alpha} u^{(n-k)})(0)}{\Gamma(\alpha - k + 1)} t^{\alpha-k} \\ &= u(t) - \left[\frac{(I^{n-\alpha} u^{(n-1)})(0)}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{(I^{n-\alpha} u^{(n-2)})(0)}{\Gamma(\alpha - 1)} t^{\alpha-2} \dots \frac{(I^{n-\alpha} u)(0)}{\Gamma(\alpha - n + 1)} t^{\alpha-n} \right] \end{aligned}$$

on pose $c_i = -\frac{(I^{n-\alpha} u^{(n-i)})(0)}{\Gamma(\alpha-i+1)} \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n$ on trouve l'égalité.

■

Lemme 2.3 [10] Soit $\alpha > 0$, l'équation différentielle :

$${}^C D^\alpha h(t) = 0$$

admet la solution suivante :

$$h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1}$$

$$c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad n = [\alpha] + 1$$

la démonstration d'après Remarque 1.6

Lemme 2.4 [10] Soit $\alpha > 0$, :

si $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \dots, n-1, n = [\alpha] + 1$ on a :

$$I^\alpha {}^C D^\alpha h(t) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1}$$

Preuve.

Soit $\alpha > 0$, et $\forall h \in C^n([0, 1])$, on a :

$$\begin{aligned} I^\alpha {}^C D^\alpha h(t) &= h(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} t^k \\ &= h(t) - \left[h(0) + h'(0)t + \frac{h''(0)}{2} t^2 + \dots + \frac{h^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} t^{n-1} \right] \end{aligned}$$

on pose $c_i = -\frac{h^{(i)}(0)}{i!} \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$, on trouve l'égalité .

■

2.2 Problème de Cauchy dans le cas $0 < \alpha < 1$

On va étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy pour des équation différentielles d'ordre fractionnaire on utilise la dérivée au sens de Caputo qui s'écrit sous la forme suivant :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), & t \in J = [0, T], \quad 0 < \alpha < 1 \\ y(0) = y_0, & y_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.4)$$

où $f : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, est une fonction continue.

Proposition 2.1 [2] Soit $0 < \alpha < 1$ et $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. fonction y ;

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} h(x) dx \quad (2.5)$$

est une solution de l'équation intégrale fractionnaire si et seulement si y est la solution du problème à valeur initiale pour l'équation :

$${}^C D^\alpha y(t) = h(t), \quad t \in [0, T] \quad (2.6)$$

$$y(0) = y_0 \quad (2.7)$$

Preuve.

On applique l'opérateur I^α , on a :

$$\begin{aligned} I^\alpha {}^C D^\alpha y &= I^\alpha h(t) \\ y(t) + c_0 &= I^\alpha h(t) && \text{alors} \\ y(t) &= I^\alpha h(t) - c_0 \end{aligned}$$

D'après les conditions aux limites on a :

$$\begin{cases} y(0) = (I^\alpha h)(0) - c_0 = -c_0 \end{cases}$$

Alors

$$-c_0 = y_0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = -y_0.$$

donc on a :

$$\begin{aligned} y(t) &= I^\alpha h(t) - (-y_0) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} h(x) dx + y_0 \end{aligned}$$

Inversement on a :

$$y(t) = (I^\alpha h)(t) + y_0$$

on applique ${}^C D^\alpha$ à l'équation précédent on a :

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha y(t) &= {}^C D^\alpha (I^\alpha h)(t) + {}^C D^\alpha [y_0] \\ &= h(t) \end{aligned}$$

donc il reste vérifier que si $y(0) = y_0$

on a :

$$\begin{aligned} y(0) &= I^\alpha h(0) + y_0 \\ &= 0 + y_0 \\ &= y_0. \end{aligned}$$

Alors y est solution du problème.

■

Résultat Existence et Unicité de Solution :

Pour étudier des résultats d'existence et d'unicité dans cette problème on utilise le théorème de point fixe de Banach .

et pour étudier l'existence et l'unicité de solution (2,4) donne les condition dans l'espace $C[0, T]$.

Notre approche est basée sur la réduction du problème considéré en une équation intégrale suivant :

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x, y(x)) dx, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.8)$$

Lemme 2.5 [4] Soit $\alpha \in \mathbb{R}(0 < \alpha < 1)$, et $f_{1-\alpha}(t) = (I_{0+}^{1-\alpha} f)(t)$, on a si $f(t) \in C[0, T]$ et $f_{1-\alpha}(t) \in C^1[0, T]$, alors :

$$(I^\alpha D^\alpha f)(t) = f(t) - \frac{f_{1-\alpha}(0)}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}, \quad t \in [0, T] \quad (2.9)$$

Lemme 2.6 [4]

L'opérateur d'intégration I_{0+}^α avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est borné dans $C[0, T]$

$$\|I^\alpha g\|_C \leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \|g\|_C. \quad (2.10)$$

Théorème 2.5 [4] Soit $0 < \alpha < 1$, et G un ouvert de $\mathbb{R} f :]0, T] \times G \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie la condition de Lipschitz suivant :

(H1) il existe une constante $k > 0$;

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq k |y - z|, \quad \forall t \in [0, T], \text{ et } y, z \in G$$

et

$$k \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1$$

Alors, il existe une solution unique $y(t)$ pour le problème de Cauchy (2,4) dans l'espace $C[0, T]$.

Preuve. On utilise le théorème du point fixe de Banach pour l'espace $C[0, T]$ qui est un espace métrique complet avec la distance donnée par :

$$d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|_{C[0, T]} = \sup_{t \in [0, T]} |x_1(t) - x_2(t)|,$$

on récrit l'équation (2, 5) sous la forme suivant :

$$y(t) = (Ty)(t)$$

où

$$(Ty)(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x, y(x)) dx, \quad (2.11)$$

pour appliquer le théorème de Banach, il faut montrer :

1. Si $y(t) \in C[0, T]$ Alors $(Ty)(t) \in C[0, T]$,
2. pour chaque $y_1, y_2 \in C[0, T]$, on a :

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_{C[0, T]} \leq w \|y_1 - y_2\|_{C[0, T]} \text{ avec } (0 < w < 1) \quad (2.12)$$

comme $f(t, y) \in C[0, T]$, et tenant compte du lemme 2.6 on a :

$$\left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(x, y(x))}{(t-x)^{1-\alpha}} dx \right\|_{C[0, T]} \leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f(t, y(t))\|_{C[0, T]}$$

alors $(Ty)(t) \in C[0, T]$. montrons maintenant (2, 12) .

d'après lemme 2.6 et en utilisant la condition de Lipschitz on obtient :

$$\begin{aligned} \|Ty_1 - Ty_2\|_{C[0, T]} &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)))(t-x)^{\alpha-1} dx \right\|_{C[0, T]} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|f(x, y_1(t)) - f(x, y_2(t))\|_{C[0, T]} \int_0^T (t-x)^{\alpha-1} dx \\ &\leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f(x, y_1(t)) - f(x, y_2(t))\|_{C[0, T]} \\ &\leq \frac{kT^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|y_1 - y_2\|_{C[0, T]} \end{aligned}$$

on a $w = \frac{kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$, Alors d'après le théorème du point fixe de Banach il existe une solution unique $y(t) \in C[0, T]$, de l'équation (2, 4) sur $[0, T]$.

■

2.3 Problèmes aux Limites

Dans cette partie on va étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites pour des équation différentielles d'ordre fractionnaire, et on a dans cette partie deux cas suivant :

2.3.1 Problème aux Limites dans le Cas $0 < \alpha < 1$

Définition 2.3 *On dit que une fonction $y \in C^1([0, T], \mathbb{R})$, est solution du problème (2, 2) si y vérifie l'équation ${}^C D^\alpha y(t) = f(t, y(t))$, sur $[0, T]$ et avec la condition $ay(0) + by(T) = c$.*

Proposition 2.2 [2] *Soit $0 < \alpha < 1$, et $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue. une fonction y ;*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} h(x) dx - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-x)^{\alpha-1} h(x) dx - c \right], \quad (2.13)$$

est une solution de l'équation intégrale fractionnaire si et seulement si y est la solution du problème aux limites suivant :

$${}^C D^\alpha y(t) = h(t), \quad t \in [0, T] \quad (2.14)$$

$$ay(0) + by(T) = c \quad (2.15)$$

Preuve. On applique l'opérateur I^α , on a :

$$\begin{aligned} I^\alpha {}^C D^\alpha y &= I^\alpha h(t) \\ y(t) + c_0 &= I^\alpha h(t) \\ y(t) &= I^\alpha h(t) - c_0 \end{aligned}$$

Alors d'après les conditions aux limites on a :

$$\begin{cases} y(0) = (I^\alpha h)(0) - c_0 = -c_0 \\ y(T) = (I^\alpha h)(T) - c_0 \end{cases}$$

Alors

$$ay(0) + by(T) = c \Rightarrow -ac_0 + b[I^\alpha h(T) - c_0] = c \Rightarrow$$

$$(a + b)c_0 = b(I^\alpha h)(T) - c \Rightarrow c_0 = \frac{1}{a+b}[b(I^\alpha h)(T) - c], \quad a + b \neq 0$$

donc on a :

$$\begin{aligned} y(t) &= I^\alpha h(t) - \frac{1}{a+b}[b(I^\alpha h)(T) - c] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} h(x) dx - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-x)^{\alpha-1} h(x) dx - c \right], \end{aligned}$$

Inversiment on a :

$$y(t) = (I^\alpha h)(t) - \frac{1}{a+b}[bI^\alpha h(T) - c],$$

on applique ${}^C D^\alpha$ à l'équation précédent on a :

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha y(t) &= {}^C D^\alpha (I^\alpha h)(t) - {}^C D^\alpha \left[\frac{1}{a+b}(bI^\alpha h(T) - c) \right] \\ &= h(t) \end{aligned}$$

donc il reste vérifier que si, $ay(0) + by(T) = c$.

$$\text{on a } \begin{cases} y(0) = I^\alpha h(0) - \frac{1}{a+b}[b(I^\alpha h)(T) - c] & \dots\dots\dots(1) \\ y(T) = I^\alpha h(T) - \frac{1}{a+b}[b(I^\alpha h)(T) - c] & \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

de 1 et 2 on a :

$$\begin{aligned} ay(0) + by(T) &= \frac{-a}{a+b}[b(I^\alpha h)(T) - c] + b(I^\alpha h)(T) - \frac{b}{a+b}[b(I^\alpha h)(T) - c] \\ &= -\frac{a+b}{a+b}[b(I^\alpha h)(T) - c] + b(I^\alpha h)(T) \\ &= -b(I^\alpha h)(T) + c + b(I^\alpha h)(T) \\ &= c. \end{aligned}$$

Alors y est solution du problème . ■

Résultat Existence et Unicité de Solution :

I) On utilisant le théorème contraction de Banach pour l'unicité de la solution du (2,2).

Théorème 2.6 [2] *Supposons que :*

(H2) $\exists k > 0$, *tell que on a :*

$$|f(t, x) - f(t, z)| \leq k(x - z), \quad \forall t \in J, \text{ et } x, z \in \mathbb{R}$$

Si

$$\frac{kT^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1, \tag{2.16}$$

Donc, le problème (2,2) admet une solution unique sur $[0, T]$,

Preuve. Transformer le problème (2, 2) en un problème de point fixe on a :

$$F : C([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow C([0, T], \mathbb{R})$$

défini par :

$$F(y)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x, y(x)) dx - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-x)^{\alpha-1} f(x, y(x)) dx - c \right]. \quad (2.17)$$

Donc les points fixes de F sont les solution du problème (2, 2) on a :

F est bien défini, en effet : si $y \in C([0, T], \mathbb{R})$ alors $(Fy) \in C([0, T], \mathbb{R})$,

donc si montrer F est contraction alors F admet un point fixe en effet si $y, z \in C([0, T], \mathbb{R})$ alors $\forall t \in J$, on a :

$$\begin{aligned} |F(y)(t) - F(z)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} |f(x, y(x)) - f(x, z(x))| dx \\ &+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-x)^{\alpha-1} |f(x, y(x)) - f(x, z(x))| dx \\ &\leq \frac{k \|y - z\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx \\ &+ \frac{|b|k \|y - z\|_\infty}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-x)^{\alpha-1} dx \\ &\leq \frac{kT^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|y - z\|_\infty \end{aligned}$$

Donc

$$\|F(y) - F(z)\|_\infty \leq \frac{kT^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|y - z\|_\infty$$

Donc on peut déduire que F est une contraction et d'après le théorème de Banach F admet un seul point fixe. ce point est solution du problème (2, 2) .

■

II) Pour deuxième résultat d'existence de la solution du (2, 2) On utilisant le théorème du point fixe théorème de Schaefer .

Théorème 2.7 [2] *Supposons que*

(H3) *La fonction $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.*

(H4) *Il existe une constant $M > 0$ telle que :*

$$|f(t, x)| \leq M, \quad \forall t \in [0, T], \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

Alors, le problème (2, 2) admet au moins une solution sur $[0, T]$.

Preuve.

Pour montrer F de(2, 2) admet un point fixe on a 4 étape suivant :

Etape (I) :

F est continue : soit $\{y_n\}$ une suite dans $C([0, T], \mathbb{R})$ convergent pour $\|\cdot\|_\infty$ vers y

C-à-d

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y\|_\infty = 0$$

Il faut montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F(y_n) - F(y)\|_\infty = 0$, $\forall t \in [0, T]$ on a :

$$\begin{aligned} |F(y_n)(t) - F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} |f(x, y_n(x)) - f(x, y(x))| dx \\ &\quad + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-x)^{\alpha-1} |f(x, y_n(x)) - f(x, y(x))| dx \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} \sup_{x \in [0, T]} |f(x, y_n(x)) - f(x, y(x))| dx \\ &\quad + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-x)^{\alpha-1} \sup_{x \in [0, T]} |f(x, y_n(x)) - f(x, y(x))| dx \\ &\leq \frac{\|f(\cdot, y_n(\cdot)) - f(\cdot, y(\cdot))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx + \frac{|b|}{|a+b|} \int_0^T (T-x)^{\alpha-1} dx \right] \\ &\leq \frac{T^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) \|f(\cdot, y_n(\cdot)) - f(\cdot, y(\cdot))\|_\infty}{\alpha \Gamma(\alpha)} \end{aligned}$$

f est continue alors,

$$\|F(y_n)(t) - F(y)(t)\| \leq \frac{T^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) \|f(\cdot, y_n(\cdot)) - f(\cdot, y(\cdot))\|_\infty}{\Gamma(\alpha + 1)} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

d'où la continuité de F .

Etape(II) :

On a si $F(\{E\})$ est borné $\Rightarrow \{E\}$ est borné dans $C([0, T], \mathbb{R})$,

en effet suffit de montrer que pour tout $\sigma > 0$, il existe une constante $L > 0$: pour tout $y \in U_\sigma$, $U_\sigma = \{y \in C([0, T], \mathbb{R}) : \|y\|_\infty \leq \sigma\}$, on a $\|F(y)\|_\infty \leq L$. par (H4) on a pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} |f(x, y(x))| dx \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-x)^{\alpha-1} |f(x, y(x))| dx + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx + \frac{M|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-x)^{\alpha-1} dx + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|}
\end{aligned}$$

Alors :

$$\|F(y)\|_\infty \leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|} = L$$

Donc par suite, $F(U_\sigma)$ est borné.

Etape (III) :

$F(\{E\}$: ($\{E\}$ est borné) est un ensemble équicontinu de $C([0, T], \mathbb{R})$. Soit $t_1, t_2 \in [0, T]$, $t_1 < t_2$, U_σ un ensemble borné de $C([0, T], \mathbb{R})$ et soit $y \in U_\sigma$,

Alors :

$$\begin{aligned}
|F(y)(t_2 - F(y)(t_1))| &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_1-x)^{\alpha-1} - (t_2-x)^{\alpha-1}] dx \\
&+ \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-x)^{\alpha-1} dx \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} [(t_2-t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_2^\alpha] + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2-t_1)^\alpha \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2-t_1)^\alpha + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_1^\alpha - t_2^\alpha)
\end{aligned}$$

quand $t_1 \rightarrow t_2$, le membre droit de l'inégalité précédente tend vers 0, d'où la continuité de F d'après l'étape (II), et (III), et le théorème d'Ascoli-Arzelà, $F(U_\sigma)$ est relativement compact pour tout borné U_σ .

C-à-d F est complètement continu et par l'étape I, F est continu par conséquent, $F : C([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow C([0, T], \mathbb{R})$ est continu et complètement continu.

Etape (VI) :

Donc il reste à montrer que $\varepsilon = \{y \in C(J, \mathbb{R}) : y = \lambda F(y) \text{ tell que } 0 < \lambda < 1\}$, est borné et $y \in \varepsilon \Rightarrow y = \lambda F(y)$, tell que $0 < \lambda < 1$. donc $\forall t \in J$, On a :

$$y(t) = \lambda \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x, y(x)) dx - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-x)^{\alpha-1} f(x, y(x)) dx - c \right] \right]$$

et d'après (H4), et $\forall t \in J$ on a :

$$\begin{aligned} |F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} |f(x, y(x))| dx \\ &\quad + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-x)^{\alpha-1} |f(x, y(x))| dx + \frac{|c|}{|a+b|} \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t_x)^{\alpha-1} dx + \frac{|c|}{|a+b|} \\ &\quad + \frac{M|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-x)^{\alpha-1} dx \\ &\leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|} \end{aligned}$$

Alors, $\forall t \in [0, T]$, on a :

$$\|F(y)\|_\infty \leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|} = R.$$

ε montre que est borné alors on a d'après théorème de Schaefer on déduit que F admet au moins un point fixe que est une solution du problème (2, 2) .

■

2.3.2 Problème aux Limites dans le Cas $1 < \alpha \leq 2$

Définition 2.4 On dit que une fonction $y \in C(J, \mathbb{R})$, est solution du problème (2, 3), si y , vérifier l'équation suivant :

$${}^C D^\alpha y(t) = h(t), \quad t \in J \in [0, T] \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (2.18)$$

Proposition 2.3 [2] On dit que y , est solution de l'équation intégrale fractionnaire ;

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T g(t, x) h(x) dx + y_0 + \frac{y_T - y_0}{T} t \quad (2.19)$$

si et seulement si y est solution de (2, 3).

$g(t, x)$ est la fonction de Green défini par :

$$g(t, x) = \begin{cases} (t-x)^{\alpha-1} - \frac{t(T-x)^{\alpha-1}}{T}, & 0 \leq x \leq t \leq T \\ \frac{-t(T-x)^{\alpha-1}}{T}, & 0 \leq t \leq x \leq T \end{cases} \quad (2.20)$$

Remarque 2.1 la fonction $t \in J \rightarrow \int_0^T |g(t,x)|dx$ est continue sur J , alors est bornée et on a :

$$\widehat{g} = \sup \left\{ \int_0^T |g(t-x)|dx, \quad t \in J \right\}.$$

Preuve.

On pose que y vérifiée (2, 18) alors d'après le lemme 2.4 on a :

$$y(t) = c_0 + c_1 t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} h(x) dx$$

et par la condition initial on a :

$$y(0) = y_0$$

et on a :

$$y(T) = y_0 + c_1 T + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-x)^{\alpha-1} h(x) dx$$

Alors on déduit que :

$$c_1 = -\frac{1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-x)^{\alpha-1} h(x) dx + \frac{y_T - y_0}{T}$$

C-à-d :

$$\begin{aligned} y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t ((t-x)^{\alpha-1} - \frac{t}{T}(T-x)^{\alpha-1}) h(x) dx + \frac{y_T - y_0}{T} t \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^T -\frac{t}{T}(T-x)^{\alpha-1} h(x) dx \end{aligned}$$

de plus on trouve l'équation (2, 19) Inversement, si y vérifiée l'équation (2, 19) donc l'équation (2, 18) et la condition initial est vérifiée .

■

Résultat d'existence de solution :

Pour étudier des résultats d'existence dans cette problème, on utilise le théorème de point fixe de Schauder .

Théorème 2.8 [2] Soit les trois condition suivant :

(H5)

$$f : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ est continue.}$$

(H6) Ils existent une fonction $v \in C(J, \mathbb{R}_+)$, et la fonction $w \in [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ continues et non décroissantes tell que :

$$|f(t, x)| \leq v(t)w(|x|), \quad \forall t \in J \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}.$$

(H7) $\exists M > 0$;

$$\frac{M}{\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sup v(x)w(M)\widehat{g} + |y_0||y_T - y_0|} \geq 1. \quad (2.21)$$

où M est constante et $x \in J$.

Preuve. Soit $C = \{y \in C(J, \mathbb{R}), \|y\|_\infty\} \leq M \Rightarrow$ sous-ensemble C est fermé et convexe. donc on montrer que F , vérifiée les condition du théorème de Schauder

Alors on a 4 étape suivant :

Etape (I) :

F est continu : soit $\{y_n\}$ une suite convergence vers y , dans $C(J, \mathbb{R})$, donc $\forall t \in J$ on a :

$$|F(y_n)(t) - F(y)(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T |g(t, x)| |f(x, y_n) - f(x, y(x))| dx$$

on a f est continue le théorème de la convergence dominée de Lebesgue implique que

$$\|F(y_n) - F(y)\|_\infty \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

Etape (II) :

F transforme C en un ensemble borné de $C(J, \mathbb{R})$. soit $y \in C$ alors pour chaque $t \in J$, (H6) implique :

$$\begin{aligned} (F_y)(t) &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T |g(t, x)| f(x, y(x)) dx + |y_0| + \frac{|y_T - y_0|}{T} |t| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} v(t)w(|y(t)|) \int_0^T |g(t, x)| dx + |y_0| + |y_T - y_0| \end{aligned}$$

Alors on a :

$$\|F_y\|_\infty \leq \sup(v)w(M)\widehat{g} + y_0 + |y_T - y_0| = L.$$

Etape (III) :

F transforme C en un ensemble équicontinue de $C(J, \mathbb{R})$ soit $y \in C$, et $t_1, t_2 \in J$ tel que $t_1 < t_2$ Alors :

$$\begin{aligned} |F(y)(t_2) - F(y)(t_1)| &\leq \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T g(t_2, x) f(x, y(x)) dx - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T g(t_1, x) f(x, y(x)) dx \right| \\ &\quad + \left| \frac{y_T - y_0}{T} t_2 - \frac{y_T - y_0}{T} t_1 \right| \end{aligned}$$

$$|F(y)(t_2) - F(y)(t_1)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T |g(t_2, x) - g(t_1, x)| |f(x, y(x))| dx + \frac{y_T - y_0}{T} |t_2 - t_1|$$

Alors quand $t_1 \rightarrow t_2$ le membre à droite ci-dessus tend vers 0 donc par d'Ascoli Arzèlè $N(C)$ est relativement compact pour tout borné F alors N est complètement continu.

Etape (VI) :

on a $F(C) \subset C$ soit $y \in C$ alors on montrer que $F_y \in C$, $\forall t \in J$, on a :

$$\begin{aligned} |(F_y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T |g(t, x)| |f(x, y(x))| dx + |y_0| + \frac{y_T - y_0}{T} |t| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sup(v)w(\|y\|_\infty)\widehat{g} + |y_0| + |y_T - y_0| \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\|F_y\|_\infty \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sup(v)w(M)\widehat{g} + |y_0| + |y_T - y_0|$$

et par (2, 21) on a :

$$\|F_y\|_\infty \leq M$$

Alors on déduit que F admet au moins un point fixe cette point est une solution du problème aux limites (2, 3) . ■

Exemple 2.1 *Considérons le problème aux limites fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha y(t) = \frac{e^{-t}|y(t)|}{(9+e^t)(1+|y(t)|)}, & t \in J = [0, 1], \text{ et } 0 < \alpha \leq 1 \\ y(0) + y(1) = 0 \end{cases}$$

montrer que le problème admet une seule solution.

posons

$$f(t, x) = \frac{e^{-t}x}{(9 + e^t)(1 + x)}, \quad : (t, x) \in J \times [0, \infty[$$

soit $z, y \in [0, \infty[$ et $t \in J$ Alors on a :

$$\begin{aligned} |f(t, z) - f(t, y)| &= \frac{e^{-t}}{(9 + e^t)} \left| \frac{z}{(1 + z)} - \frac{y}{(1 + y)} \right| \\ &= \frac{e^{-t}|z - y|}{(9 + e^t)(1 + z)(1 + y)} \\ &\leq \frac{e^{-t}}{(9 + e^t)} |z - y| \\ &\leq \frac{1}{10} |z - y| \end{aligned}$$

Alors (H2) est satisfait avec $k = \frac{1}{10}$ on doit la condition (2, 16) est vérifiée pour α et $a = b = T = 1$ En effet

$$\frac{3k}{2\Gamma(\alpha + 1)} < 1 \Leftrightarrow \Gamma(\alpha + 1) > \frac{3k}{2} = 0.15 \quad (*)$$

Alors on utilise le théorème 2.6 le problème admet une seule solution sur $[0, 1]$ pour α satisfaisant $(*)$.

Chapitre 3

Equations Différentielles Fractionnaires de type Riemann-Liouville

Dans ce chapitre on s'intéresse où problème non linéaire fractionnaire étudié par S.Zhang dans [10] :

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha} u(t) + f(t, u(t)) = 0 & 0 < t < 1, 3 < \alpha \leq 4 \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

où $f \in C([0, 1] \times [0, \infty[)$, et D_{0+}^{α} est l'opérateur de dérivation fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville fractionnaire.

L'existence des solutions positives du problème est basé sur la méthode de sup-solutions et inf-solutions, fondée sur l'un des théorèmes des points fixes.

3.1 Lemmes Fondamentaux

Lemme 3.1 [10] Si $y(t) \in C[0, 1]$, et $y(t) \geq 0$, le problème ;

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha} u(t) + y(t) = 0 & 0 < t < 1, 3 < \alpha \leq 4 \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

admet un solution unique suivant :

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s)y(s)ds$$

où

$$G(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-3} - (t-s)^{\alpha-1} & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-3} & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Preuve. On utilise la définition de la dérivée de Riemann-Liouville et la lemme 2.2

on a :

$$u(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + c_3 t^{\alpha-3} + c_4 t^{\alpha-4} - \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s) ds$$

D'après la condition initiale on a :

$$c_2 = c_3 = c_4 = 0, \quad \text{et} \quad c_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-3} y(s) ds$$

alors la solution de problème (3,2) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha)} y(s) ds - \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s) ds \\ &= \int_0^t \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha)} y(s) ds + \int_t^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-3}}{\Gamma(\alpha)} y(s) ds - \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s) ds \\ &= \int_0^1 G(t, s) y(s) ds \end{aligned}$$

alors on a $u(t) \geq 0$, si $y(t) \geq 0$, dans $t \in [0, 1]$.

■

Lemme 3.2 [10] Si $u(t) \in C^2[0, 1]$ est positive solution de problème (3,1) donc

$$m\rho(t) \leq u(t) \leq M\rho(t)$$

où

$$\rho(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\alpha-2} - \frac{1}{\alpha} t^\alpha \right)$$

et m, M est deux constantes.

Preuve. On a $u(t) \in C^2[0, 1]$, alors il existe $M' > 0$, tel que $|u(t)| \leq M'$, pour tout $t \in [0, 1]$ et on prend :

$$m = \min_{(t,u) \in [0,1] \times [0, M']} f(t, u(t)), \quad \text{et} \quad M = \max_{(t,u) \in [0,1] \times [0, M']} f(t, u(t)),$$

donc par lemme 3.1 on a :

$$\begin{aligned} m \int_0^1 G(t, s) ds &\leq u(t) \\ &= \int_0^1 G(t, s) f(s, u(s)) ds \\ &\leq M \int_0^1 G(t, s) ds \end{aligned}$$

alors on déduit que :

$$\begin{aligned}
\rho(t) &= \int_0^1 G(t,s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[t^{\alpha-1} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-3} - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[t^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\alpha-2} \right) + \frac{1}{\alpha} (-t^\alpha) \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\alpha-2} - \frac{1}{\alpha} t^\alpha \right)
\end{aligned}$$

c'est à dire,

$$m\rho(t) \leq u(t) \leq M\rho(t)$$

■

Définition 3.1 [10] Soit un fonction $\beta(t) \in C^2[0,1]$, est solution supérieure de problème (3,1) si $\beta(t)$ vérifiée :

$$\begin{cases} -D_{0+}^\alpha \beta(t) \geq f(t, \beta(t)) & 0 < t < 1, 3 < \alpha \leq 4 \\ \beta(0) \geq 0, \beta'(0) \geq 0, \beta''(0) \geq 0, \beta''(1) \geq 0 \end{cases}$$

Définition 3.2 [10] Soit un fonction $a(t) \in C^2[0,1]$, est solution inférieure de problème (3,1) si $a(t)$, vérifiée :

$$\begin{cases} -D_{0+}^\alpha a(t) \leq f(t, a(t)) & 0 < t < 1, 3 < \alpha \leq 4 \\ a(0) \leq 0, a'(0) \leq 0, a''(0) \leq 0, a''(1) \leq 0 \end{cases}$$

3.2 Résultat d'existence de solution

Théorème 3.1 [10] le problème (3,1) possède une solution positive $u(t)$, si il vérifiée les conditions suivantes :

(H_f) : soit $f(t, u) \in C([0,1] \times [0, \infty[, \mathbb{R}^+)$, est fonction non décroissant par rapport à deuxième variable u , et on a :

$$f(t, \rho(t)) \neq 0 \quad \text{pour } t \in [0, 1],$$

avec existe une constant positive $\sigma < 1$;

$$k^\sigma f(t, u) \leq f(t, ku) \quad \forall 0 \leq k \leq 1$$

Preuve. On suit les trois étape suivantes :

Etape (I) :

On prouve les deux fonction suivant :

$$a(t) = k_1 g(t) \quad \text{et} \quad \beta(t) = k_2 g(t)$$

est solution inférieure ($a(t)$), et supérieure ($\beta(t)$), pour problème (1,3) tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < k_1 \leq \min \left\{ \frac{1}{a_2}, (a_1)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \right\} \\ k_2 \geq \max \left\{ \frac{1}{a_1}, (a_2)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \right\} \end{array} \right\}$$

et on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \min \left\{ 1, \inf_{t \in [0,1]} f(t, \rho(t)) \right\} > 0 \\ a_2 = \max \left\{ 1, \sup_{t \in [0,1]} f(t, \rho(t)) \right\} \end{array} \right\}$$

et on a :

$$g(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, \rho(s)) ds,$$

par voire lemme 3.1 on défini la fonction $g(t)$ est positive solution de l'équation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{0+}^\alpha u(t) + f(t, \rho(t)) = 0 \quad 0 < t < 1, 3 < \alpha \leq 4 \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = u''(1) = 0 \end{array} \right. ,$$

alors le lemme 3.2 on défini par :

$$a_1 \rho(t) \leq g(t) \leq a_2 \rho(t) \quad \forall t \in [0, 1],$$

puis D'après utilise le théorème 3.1 on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 a_1 \leq \frac{a(t)}{\rho(t)} \leq k_1 a_2 \leq 1 \\ \frac{1}{k_2 a_2} \leq \frac{\rho(t)}{\beta(t)} \leq \frac{1}{k_2 a_1} \leq 1 \\ (k_1 a_1)^\sigma \geq k_1 \quad (k_2 a_2)^\sigma \leq k_2 \end{array} \right.$$

Alors :

$$\begin{aligned} f(t, a(t)) &= f\left(t, \frac{a(t)}{\rho(t)} \rho(t)\right) \\ &\geq \left(\frac{a(t)}{\rho(t)}\right)^\sigma f(t, \rho(t)) \\ &\geq (k_1 a_1)^\sigma f(t, \rho(t)) \\ &\geq k_1 f(t, \rho(t)) \end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{aligned}
k_2 f(t, \rho(t)) &= k_2 f(t, \frac{\rho(t)}{\beta(t)} \beta(t)) \\
&\geq k_2 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^\sigma f(t, \beta(t)) \\
&\geq k_2 (k_2 a_2)^{-\sigma} f(t, \beta(t)) \\
&\geq f(t, \beta(t))
\end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}
-D_{0+}^\alpha a(t) &= k_1 f(t, \rho(t)) \leq f(t, a(t)) & 0 < t < 1, \quad 3 < \alpha \leq 4 \\
-D_{0+}^\alpha \beta(t) &= k_2 f(t, \rho(t)) \geq f(t, \beta(t)) & 0 < t < 1, \quad 3 < \alpha \leq 4
\end{aligned}$$

Alors on clair

$$a(t) = k_1 g(t) \quad , \quad \beta(t) = k_2 g(t)$$

vérifie un condition initial et encours on a : $a(t) = k_1 g(t)$, est solution inférieure et $\beta(t) = k_2 g(t)$, est solution supérieure de problème (3,1)

Etape (II) :

On prouve le problème suivant :

$$\begin{cases} -D_{0+}^\alpha u(t) = g(t, u(t)) & 0 < t < 1, \quad 3 < \alpha \leq 4 \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases} \quad , \quad (3.3)$$

possédé un solution tell que :

$$g(t, u(t)) = \begin{cases} f(t, a(t)) & si \quad u(t) \leq a(t) \\ f(t, u(t)) & si \quad a(t) \leq u(t) \leq \beta(t) \\ f(t, \beta(t)) & si \quad \beta(t) \leq u(t) \end{cases} \quad ,$$

on prend l'opérateur $A : C^2[0, 1] \rightarrow C^2[0, 1]$ définie par :

$$Au(t) = \int_0^1 G(t, s) g(s, u(s)) ds,$$

tell que $G(t, s)$ on définie précédent et on a A est continue sur $C^2[0, 1]$, et la fonction $f(t, u)$ est non décroissant par rapport à deuxième variable de u , et on a pour tout $u \in C^2[0, 1]$ on obtenons : $[f(t, a(t)) \leq g(t, u(t)) \leq f(t, \beta(t))]$, pour tout $t \in [0, 1]$,

Donc il existe un constant $M > 0$ tell que :

$|g(t, u(t))| \leq M$, ce qui implique que A est uniformément borné pour tout

$u(t) \in C^2[0, 1]$, et $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$, alors on a :

$$\begin{aligned}
|Au(t_1) - Au(t_2)| &= \left| \int_0^1 G(t_1, s)g(s, u(s))ds - \int_0^1 G(t_2, s)g(s, u(s))ds \right| \\
&= \left| \int_0^1 [G(t_1, s) - G(t_2, s)]g(s, u(s))ds \right| \\
&\leq \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)|g(s, u(s))ds \\
&\leq |t_1^{\alpha-1} - t_2^{\alpha-1}| \int_0^1 f(s, \beta(s))ds,
\end{aligned}$$

donc A est équicontinue, et d'après le théorème de Ascoli-Arzelà, A est compacte. donc D'après le théorème de Schauder l'opérateur A , admet un point fixe c'est à dire le problème (3,1) admet solution .

Etape (III) :

On prouve la solution de problème (3,1) possède solution positive suppose que $u^*(t)$ est solution de problème (3,3) et on a $f(t, u)$ est non décroissant par rapport à deuxième variable u . On définit l'égalité suivant :

$$f(t, a(t)) \leq g(t, u^*(t)) \leq f(t, \beta(t)), \quad \forall t \in [0, 1]$$

Alors :

$$\begin{cases} -D_{0+}^\alpha z(t) \geq f(t, \beta(t)) - g(t, u^*(t)) \geq 0 \\ z(0) = z'(0) = z''(0) = z''(1) = 0, \end{cases}$$

tell que : $z(t) = \beta(t) - u^*(t)$ et par le lemme 3.1 on a : $z(t) \geq 0$

i-e $u^*(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in [0, 1]$ et on de même Méthode on a : $a(t) \leq u^*(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Donc $u^*(t)$ est positive solution de problème (3,1)

■

Exemple 3.1 Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} D_{0+}^{\frac{7}{2}} u(t) + f(t, u(t)) = 0, & 0 < t < 1 \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases},$$

tell que : $f(t, u(t)) = t + u^\sigma$ et $0 < \sigma < 1$.

On a $f(t, u(t)) = t + u^\sigma$ et, $3 < \alpha = \frac{7}{2} \leq 4$ et pour les deux constant k, σ tell que $0 < \sigma < 1$ et, $0 \leq k \leq 1$ on a :

$$\begin{aligned} k^\sigma f(t, u) &= k^\sigma t + k^\sigma u^\sigma \\ &\leq t + (ku)^\sigma && \text{parce que } k^\sigma \leq 1 \\ &= f(t, ku). \end{aligned}$$

Alors d'après le théorème 3.1 le problème admet solution positive .

Conclusion

Dans ce mémoire on a présenté quel contribution d'existence et d'unicité des solutions du problème couchy et problème aux limite pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo et sens Riemann-Liouville avec conditions locales .

Ces résultats ont été obtenus par l'application de la théorie de point fixe : (Banach, Schaefer et Schauder)

Bibliographie

- [1] R.P.AGARWAL, M.MEEHANET and D.O'REGAN, Fixed point theory and application, Cambridge tracts in mathematics, university press, 2001.
- [2] M.Benchohra, S. Hamani and S.K. Ntouyas, boundary value problems for differential equations with fractional order, *Surv. Math. Appl.* 3 (2008), 1-12.
- [3] A.Granas, and J.Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [4] T.HOUMOR, Analyse du Chaos dans un Système équations Différentielles Fractionnaires, Thèse Doctorat en sciences, Univ de Constantine, 2014.
- [5] A.A.Kilbas, H.H.Srivastava, J.J.Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier Science B.V.Amsterdam, 2006.
- [6] A.A.Kilbas, J.J.Trujillo, Differential equations of fractional order, methods, results and problems II, *Appl.Anal.* 81 (2002) ; 435-493.
- [7] H.Medjekal, Existence et Unicité de la Solution D'une Équation Différentielle Fractionnaire de Temps Infini dans un Espace de Banach, Thèse Doctorat en sciences, Univ de Annaba, 2015.
- [8] K.S.Miller, B.Ross, An Introduction to the Fractional calculus and Fractional Differential Equation, Wiley and sons, New York, 1993.
- [9] I.Podlubny, Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, New York, 1999.
- [10] S.Zhang, Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional equations, *Electron.J.Dif. Equat.* 36 (2006) ; 1-12.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ملخص

في هذا العمل قدمنا بعض النظريات على الوجود و الوحدانية لبعض حلول المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الكسرية.

قدمنا دراسة حول وجود و وحدانية حلول لبعض المسائل الحدية و معادلة كوشي ذات المشتقات الكسرية باستعمال مشتقات من نوع كبتو و ريمان.

الكلمات المفتاحية: الحساب الكسري، مسائل حدية، نظريات النقطة الصامدة، قيم ابتدائية، الوجود.

Résumé

Dans ce travail, de faire une synthèse de certains travaux sur l'existence et l'unicité des solutions pour certaines classes équations différentielles fractionnaire.

Nous présentons quelques résultats d'existence et d'unicité de la solution de problème de Cauchy et problème aux limites pour des équations différentielles fractionnaire de type Caputo et de type Riemann-Liouville .

Mots-clés : Calcul fractionnaire, problème aux limites, théorèmes de point fixe, problème à valeur initiale, existence .

Abstract

This Works Is concerned with the existence and uniqueness of solution for fractional order differential equations.

we present existence and uniqueness results of solutions for fractional order differential equations in the sense of Caputo, and sense of Riemann-Liouville for boundary value problems. and couchy problems.

Keywords : Fractional calculus, boundary value, fixed point theorems, initial value problem, existence.