



UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine : Mathématiques et Informatiques

Filière : Mathématiques

Option : Géométrie des espaces de Banach
et analyse Harmonique

Par

Krim Souheyla

Sujet

Sur les opérateurs pseudo-différentiels

Devant le jury :

D. Achour	prof.	Univ. de M'sila	Président
M. Moussai	Prof.	Univ. de M'sila	Rapporteur
R. Hraiz	MA.B	Univ. de M'sila	Examineur

Promotion: 2013/2014

Résumé

Dans notre thèse on va étudier les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre m , avec un symbole $\sigma(x, \xi)$ qui appartient à la classe de Hörmand de $S_{\rho, \delta}^m$ où $0 \leq \rho, \delta \leq 1$.

On étudie aussi, la continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur l'espace de Besov, avec la condition de régularité

$$\left(\sum_{k \geq 0} [\omega(2^{-k}) \Omega(2^k)]^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Mots clés :

Opérateurs Pseudo-différentiels, espace de Besov, Décomposition de Littlewood-Paley, symboles élémentaires.

Abstract

In our thesis on will study the pseudo-differential operators of order m , with a symbol $\sigma(x, \xi)$ that belongs to Hörmander's class $S_{\rho, \delta}^m$, $0 \leq \rho, \delta \leq 1$.

And also one study, the continuity of pseudo-differential operators on the space of Besov, with the condition of regularity

$$\left(\sum_{k \geq 0} [\omega(2^{-k}) \Omega(2^k)]^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Key words:

Pseudo-differential operators, spaces Besov, Littlewood-Paley decomposition, elementary symbols.

1.4 Conclusion générale	41
Conclusion générale	41
Bibliographie	42

Table des matières

Notation	1
Introduction	1
1 Quelques résultats préliminaires	2
1.1 Inégalités principales	2
1.2 Séries de Littlewood-Paley	5
1.2.1 La Décomposition de Littlewood-Paley	5
2 Opérateurs Pseudo-différentiels	11
2.1 Opérateurs différentiels	11
2.2 La classe de Hörmander	12
2.3 Généralités sur les O.P.D	16
2.3.1 Composition des O.P.D	18
3 Espace de Besov.	21
3.1 Définitions des espaces de Besov	21
3.2 Plongements dans $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$	23
3.3 Quelques propriétés des espaces de $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$	26
4 La continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur l'espace Besov.	29
4.1 L'espace des symboles $S_{1,\delta,\rho}^m(\omega, \Omega, N)$	29
4.2 Réduction aux symboles élémentaires	30
4.3 Continuité des O.p.d sur l'espace $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$	34

4.4 Conclusion générale	41
Conclusion générale	41
Bibliographie	43

Notation

Notation

- Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. La dérivée partielle $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ est notée $\partial^\alpha f$, si f est une fonction de deux variables (x, ξ) on note $\partial_x^\alpha f$ et $\partial_\xi^\alpha f$.
- $\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^\beta f)(\partial^{\alpha-\beta} g)$.
- Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $\beta \leq \alpha$ on a $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$
- $f * g(\cdot) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot - y)g(y)dy$ est le produit de convolution des fonction f et g
- Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction, le support de f est $\text{supp } f = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \neq 0\}$.
- Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sa transformée de Fourier est

$$\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)dx$$

et sa transformée de Fourier inverse est

$$\check{f}(\xi) = \mathcal{F}^{-1}f(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(\xi)d\xi.$$

- Soient A_1 et A_2 deux espaces, on dite que $A_1 \hookrightarrow A_2$ s'il existe $c > 0$, telle que :

$$\|\cdot\|_{A_1} \leq c \|\cdot\|_{A_2}$$

- p' est l'exposant conjugue de p $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$.
- L_p : est l'espace des fonction mesurables f telles que

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compacte dans \mathbb{R}^n .
- $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est le duale de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à décroissances rapides sur \mathbb{R}^n i.e.

$$(1 + |x|^N) |f^{(\alpha)}(x)| \leq C, \quad \forall N > 0, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions tempérées.
- $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, est l'espace de Hölder des fonctions $f \in \mathcal{C}^{[s]}(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\|f\|_{\mathcal{C}^s} = \|f\|_{\mathcal{C}^{[s]}} + \sum_{|\alpha|=[s]} \sup_{x \neq y} \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|}{|x - y|^{s-[s]}} < +\infty.$$

- $\mathcal{C}_\omega^s(\mathbb{R}^n)$, $s > 0$, l'ensemble des fonction $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\|f\|_{\mathcal{C}_\omega^s} = \sum_{|\alpha| \leq [s]} \|f^{(\alpha)}\|_\infty + \sum_{|\alpha|=[s]} \sup_{h \neq 0} \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|}{\omega(|h|)} < +\infty.$$

Où ω module de continuité

Si $\omega(t) = t^{s-[s]}$, alors $\mathcal{C}_\omega^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$.

Introduction

L'objectif dans cette thèse est l'étude des deux parties suivants:

Le premier partie est l'étude des opérateurs pseudo-différentiel d'ordre m , avec un symbole $\sigma(x, \xi)$, qui appartient à la classe de Hörmander $S_{\rho, \delta}^m$,

Et défini par un opérateur linéaire continu $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$

tel que

$$Tu(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \sigma(x, \xi) \widehat{u}(x) d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Le deuxième partie est de prouver la continuité des opérateurs pseudo-différentiel sur l'espace Besov, Ceci à été étudié par M. Moussai [14], sous une conditions de régularité moins forte

$$\sum_{j \geq 0} [\omega(2^{-j}) \Omega(2^j)]^q < +\infty. \quad (0.0.1)$$

où $\Omega : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ est une fonction positive à croissance lent.

A cet effet nous considérons les opérateurs pseudo-différentiel avec un symbole satisfaisant

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m - |\alpha| + \delta|\beta|}, \quad (0.0.2)$$

et

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x + h, \xi) - \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x, \xi)| \leq C'_{\alpha, \beta} \omega(|h| |\xi|^\delta) \Omega(|\xi|^\rho) (1 + |\xi|)^{m - |\alpha| + \delta|\beta|}, \quad (0.0.3)$$

où $(\delta \geq 0, \rho \geq 0, m \geq 0, N \in \mathbb{N}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n)$ et $|\beta| \leq N$,

Alors la condition (0.0.1) impliquera que chaque opérateur avec un symbole satisfaisant (0.0.2) et (0.0.3) est continue de $B_{p, q}^{s+m}$ dans $B_{p, q}^s$.

Notre travail est organisé en quatre chapitres:

- Dans le premier chapitre on va rappèlle quelques notions essentielles à savoir les iné- galités de Hölder, Young et Berstien, et les séries de Littlewood-paley qu'on va utiliser dans la suite.
- Dans le deuxième chapitre on va étudier des généralités sur les Opérateurs pseudo- différentiels.
- Dans le troisième chapitre on va étudier l'espace de Besov et quelque propositionl.
- Dans le quetrième chapitre nous démentrons que la condition (0.0.1) est nécessaire et suffisante pour la continuité des des opérateurs pseudo-différentiels sur l'espaces de $B_{p,q}^s$.

Chapitre 1

Dans ce chapitre on va rappèlle les notions essentielles à savoir les inégalités de l'interpolation de Riesz-Thorin, Hölder, Young et de Bernstein, et les séries de Littlewood-Paley qu'on va utiliser dans la suite.

1.1 Inégalités principales

Théorème 1.1.1 (Riesz-Thorin)

Soient (X, μ) et (Y, ν) deux espaces mesurés et $1 < p_1, q_1, p_2, q_2 < \infty$ et $\theta \in [0, 1]$. On suppose que T est un opérateur linéaire d'ordre θ sur les fonctions simples de (X, μ) à valeurs dans l'espace des fonctions mesurables dans (Y, ν) tel que, pour toute fonction simple f on ait :

$$\|Tf\|_{q_1, \nu} \leq M_1 \|f\|_{p_1, \mu} \quad (M_1 > 0)$$

$$\|Tf\|_{q_2, \nu} \leq M_2 \|f\|_{p_2, \mu} \quad (M_2 > 0)$$

Alors pour $0 < \theta < 1$, et toute fonction simple f tels que :

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2}$$

on a

$$\|Tf\|_{q, \nu} \leq M_1^{1-\theta} M_2^\theta \|f\|_{p, \mu}$$

4.4 Conclusion générale

L'objectif de ce travail est d'étudier la continuité des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre m , avec un symbole $\sigma(x, \xi)$, qui appartient à la classe de Hörmander $S_{1,\rho,\delta}^m$ où $0 \leq \delta < 1$ sur l'espace de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$,

Pour la généralisation du résultat obtenu par M. Moussai [14], avec la condition de régularité

$$\sum_{j \geq 0} [\omega(2^{-j}) \Omega(2^j)]^q < +\infty.$$

Où $\Omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction positive à croissance lent.

$$\forall c > 1, \exists A_c > 0, \forall (t, s) : \frac{1}{c}t < s < ct \Rightarrow \Omega(s) \leq A_c \Omega(t)$$

et

$$(\forall \nu > 0, \exists C_\nu > 0, \forall t \geq 1) \Rightarrow \int_1^t \frac{\Omega^{q'}(u)}{u^{\nu+1}} du \leq C_\nu \frac{\Omega^{q'}(t)}{t^\nu}$$

Soit la classe des symboles $\sigma(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ vérifiant que pour tous multi-indices α et β avec $|\beta| \leq N$, il existe $C_{\alpha,\beta} > 0$ et $C'_{\alpha,\beta} > 0$ tels que

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta} (1 + |\xi|)^{m - |\alpha| + \delta|\beta|}, \quad (4.4.1)$$

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x+h, \xi) - \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x, \xi)| \leq C'_{\alpha,\beta} \omega(|h| |\xi|^\delta) \Omega(|\xi|^\rho) (1 + |\xi|)^{m - |\alpha| + \delta|\beta|}, \quad (4.4.2)$$

Alors tout opérateur $op(\sigma) \in Op_{1,\delta,\rho}^m(\omega, \Omega, N)$ et un symbole satisfaisant (4.4.1) et (4.4.2) est borné de $B_{p,q}^{s+m}$ dans $B_{p,q}^s$.

Bibliographie

- [1] **S. Alinhac et P. Gérard.** *Opérateurs Pseudo-différentiels et Théorème de Nash-Moser.* Edition du CNRS, Paris 1991.
- [2] **S.E. Allaoui.** Thèse 3^{ème} cycle université de Batna, 2011.
- [3] **S.E. Allaoui.** *Remarques sur le calcul symbolique dans certains espaces de Besov à valeurs vectorielles.* Annales mathématiques Blaise Pascal. **16**, 2 (2009), 399-429.
- [4] **A'. Bényi.** *Bilinear pseudodifferential operators with forbidden symbols on Lipschitz and Besov spaces.* university of Massachusetts Chusetts, Amherst. 2005.
- [5] **G. Bourdaud.** *Régularité du commutateur des opérateurs pseudo-différentiels peu réguliers.* C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math **209**, (1980), 67-70.
- [6] **G. Bourdaud.** *L^p -estimates for certain non-regular pseudodifferential operators.* Comm. Partial Differential Equation. 7(9) (1982) 1023-1033.
- [7] **G. Bourdaud et Y. Meyer.** *Le calcul fonctionnel sous-linéaire dans les espaces de Besov homogènes.* Revista Mat, Iberoamer. **22** (2006), 725-746 .
- [8] **G. Bourdaud et M. Moussai.** *continuité des opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces de Besov localisés.* Bull. Sc.Math, 2^{ème} série, **112**(1988), 419-432.
- [9] **A. Djeriou.** Thèse 3^{ème} cycle université de M'sila, 2012.
- [10] **E.W. Faraks.** *Function spaces of generalised smoothness and Pseudo-differential operator associated to a continuous function.* university, München 2002.

- [11] **G. Garello et A. Morando.** *L^p continuity for pseudodifferential operators.* Quad. Dip. Mat. Univ. Torino, 9/2005.
- [12] **G. Métivier.** *Intégrales Singulières.* Cours de DEA. Univ. Rennes, 1981-1982.
- [13] **H. Mezzaoli.** *Littlewood-paley decomposition associated with the Dunkl operators and paraproduct operators.* Victoria University. All right reserved, **9** (2008), issue 4, 95-25.
- [14] **M. Moussai.** *Continuity of pseudodifferential operators on Bessel and Besov spaces.* Serdica Math. J. **27** (2001), 249-262.
- [15] **M. Taylor.** *Pseudodifferential Operators and Nonlinear. PDE,* Birkhauser, Boston, 1991.
- [16] **M.W. Wong,** *An introduction to pseudo-differential operators.* Second edition. World, Scientific Publishing Co, Inc, River Edge, NJ, 1999.