



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques Fondamentales et
Appliquées

Par

Asma SAIDANI

Sujet

**SUR LA MINIMISATION DES OPERATEURS
DANS LES ESPACES NORMES**

Devant le jury :

Mr. Abdelkader GASMI

Pr. Univ de M'sila

Président

Mr. Mostefa NADIR

Pr. Univ de M'sila

Rapporteur

Mr. Noui DJAIDJA

MAA. Univ de M'sila

Examineur

Mr. Toufik Heraiz

MAA. Univ de M'sila

Examineur

Promotion : 2015 / 2016

Remerciements

Je tiens à remercier, en premier lieu, **Mon Dieu** qui m'a donné la force de rédiger ce modeste travail.

Je tiens à remercier les membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de mémoire.

Je tiens à remercier très profondément tous mes professeurs, mon directeur de recherche Mr. Mostefa NADIR, pour sa disponibilité et ses conseils judicieux tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier très profondément monsieur DJAIDJA Noui qui m'a donné leur aide et leur soutien.

Je tiens à exprimer tout mes respects à mes parents, mes frères et mes sœurs qui m'ont toujours encouragé, leur soutien inestimable et leur générosité ont été fondamentaux.

Je remercie tous les professeurs du département de Mathématiques, sans oublier aussi mes collègues et amis, ainsi tous ceux qui ont participé de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

-A mes parents qui n'ont jamais cessé de me soutenir
et encourager en mes études.

-Et tous les membres de ma famille mes frères, mes sœurs
pour leurs encouragements,
et pour leur soutien moral tout au long de mes études.

-A toute mes amies, et surtout Meriem et Noura
qui n'ont cessé de m'a patronner.

- Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants
et étudiantes de ma promotion.

A tous les professeurs qui m'a donne
leurs confiances.

En fin je dédie ce mémoire à mes collègues
et tous ceux qui me sont chers.

NOTATIONS

$(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ espace normé.

\mathbb{E}^* espace dual de \mathbb{E} .

\mathbb{H} espace de Hilbert.

$\mathcal{D}(\Omega)$ espace de fonction de test $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$.

$\mathcal{D}'(\Omega)$ espace des distribution, le dual de $\mathcal{D}(\Omega)$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)}$ le crochet de dualité.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire.

M^\perp orthogonal de M .

p.p. presque partout.

$Supp f$ support de la fonction f .

P_K projection sur le convexe fermé K .

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) = \text{grad } u$.

$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}, |\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i, \alpha \in \mathbb{N}^N$.

$d\sigma$ mesure de frontière $\partial\Omega$.

$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \vec{n}$ dérivée normale extérieur.

$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \text{Laplacien de } u$.

H^m, H^1, H_0^1 espaces de Sobolev.

H^{-1} le dual de l'espace H^1 .

Table des matières

Introduction	1
1 Rappels sur les espaces normés et les opérateurs	3
1.1 Espace métrique	3
1.2 Espace Normé	4
1.3 Les espaces L^p	5
1.4 Opérateurs Continus	6
1.4.1 Linéarité des opérateurs	6
1.4.2 Continuité des opérateurs linéaires	6
1.4.3 Opérateurs bornés	7
1.4.4 Normes équivalentes	7
1.4.5 Dual topologique	7
1.5 Espace de Hilbert	8
1.5.1 Produit scalaire	8
1.5.2 Espace Euclidien (préhilbertien)	8
1.5.3 Espace de Hilbert	8
1.6 Espace de sobolev	8
1.6.1 Rappel sur les distribution	8
1.6.2 Espaces de Sobolev	10
2 Sur la Minimisation des opérateurs dans les espaces normés	14
2.1 L'optimisation en dimension finie et infinie	14
2.1.1 Optimisation en dimension finie	16

2.1.2	Optimisation en dimension infinie	17
2.2	Le théorème de Stampacchia et le théorème de Lax-Milgram:	18
2.2.1	Théorème de Stampacchia	19
2.2.2	Théorème de Lax-Milgram	20
2.3	Problème Abstrait	23
2.4	Quelques problèmes aux limites elliptiques:	24
2.4.1	Problème de Dirichlet	24
2.4.2	Problème de Neumann	27
2.4.3	Problème Mixte (Dirichlet Neumann)	29
3	Résolution de problème obstacle	31
3.1	Problème Obstacle	31
3.1.1	Formulation variationnelle	32
3.1.2	Existence et Unicité	32
	Conclusion générale	35
	Bibliographie	37

Introduction

Au cours de vingtième siècle, après avoir les fondements de l'analyse fonctionnelle, l'extension du calcul différentiels ou partiels aux espaces normés, les méthodes variationnelles n'ont jamais cessé d'être développées, où les inéquations variationnelles sont devenue un outil redoutable dans l'étude mathématique.

La minimisation des opérateurs qui a obtenu à partir de la formulation variationnelle d'un opérateur elliptique avec des conditions aux limites, on montre le résultat de l'existence et l'unicité qui se donne par le théorème de Stampacchia qui a apparu en 1967, c'est le point de départ de la théorie des inéquations variationnelles, cette théorie a de nombreuses applications dans différents domaines tels que l'économie, la finance, l'optimisation...

L'objectif de ce travail est trouver la fonctionnelle d'énergie d'un opérateur elliptique avec des conditions aux limites en utilisant la formulation variationnelle, donc la question naturelle qu'elle se pose, la fonctionnelle ou plutôt le problème aux limites, possède-t-il une solution? s'il existe, est-elle unique? est ce que on peut l'écrire sous forme de minimisation d'une fonctionnelle?

Ce travail compose par trois chapitres, qui sont:

Le premier chapitre de façon générale contient des définitions, des concepts, des résultats fondamentaux dans l'analyse fonctionnelle, dédié aux espaces fonctionnels (l'espace normé, l'espace de Hilbert, l'espace de Sobolev..).

Le deuxième chapitre consacre à l'étude tout d'abord, un coup d'œil sur l'optimisation en dimension finie et infinie, sous contrainte et sans contrainte. En les deux cas, nous allons voir les résultats d'existence et d'unicité.

On s'intéresse à l'étude de l'inéquation variationnelle présente des résultats en général connus, qu'est sous forme

$$a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle$$

où l'opérateur est linéaire, continu dans l'espace de Hilbert en basant sur l'utilisation les deux théorèmes fondamentaux à ce travail qui sont Stampacchia et Lax-Milgram, qu'est caractérisé la solution d'un problème elliptique sous forme minimisation d'une fonctionnelle $J : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v \rangle$.

Le dernier chapitre, je prend comme un exemple d'appliqué le problème obstacle pour l'opérateur Laplace de cas générale, je montre l'existence et l'unicité de la solution avec l'écrire le problème comme un problème d'optimisation avec contrainte sous les hypothèses convonable.

Finalement, on rédige une conclusion générale qui résume ce travail.

Chapitre 1

Rappels sur les espaces normés et les opérateurs

Dans ce chapitre, nous allons voir quelques rappels sur l'analyse fonctionnelle, notamment les espaces normés, les opérateurs, espace de sobolev, ainsi que leurs propriétés qui seront aider dans la suite de ce travail.

1.1 Espace métrique

Définition 1.1.1 Soit X un ensemble non vide. on appelle **distance** sur X tout application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant pour tout x, y et $z \in X$:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie);
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire);

On appelle **espace métrique** le couple (X, d) tel que X est un ensemble et d la distance définie sur X .

Remarque 1.1.1 Si d vérifie les propriétés 2) et 3) seulement alors d est dite **semi-distance** sur X .

Définition 1.1.2 (*Espace complet*) Un espace métrique (X, d) est dit **complet** si toute suite de Cauchy de X est convergente dans X .

Théorème 1.1.1 [2] (**Point fixe-Picard**)

Soit (X, d) espace métrique complet. Si l'application $\phi : X \rightarrow X$ est une contractante, c'est à dire: $\exists k \in [0, 1[$

$$d(\phi(x), \phi(y)) \leq kd(x, y)$$

-alors ϕ admet un unique point fixe $x \in X : \phi(x) = x$.

1.2 Espace Normé

Définition 1.2.1 Soit E un \mathbb{k} -espace vectoriel ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$) une norme sur E est une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

1. $\forall x \in E \quad N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E : N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité);
3. $\forall x, y \in E : N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

Définition 1.2.2 Un **espace vectoriel normé** (e.v.n.) est un espace vectoriel E muni d'une norme, noté (E, N) .

Remarque 1.2.1 Si N vérifie les propriétés 2) et 3) seulement, alors N est dite **semi-norme** sur E .

Remarque 1.2.2 Toute norme $N(\cdot)$ définit une distance sur E :

$$\forall x, y \in E, N(x - y) = d(x, y).$$

Remarque 1.2.3 Donc les e.v.n. ne sont qu'un cas particulier de e.v.métrique, une norme définit toujours une distance mais une distance n'est pas nécessairement associée à une norme.

Exemple 1.2.1 a- Soit $E = \mathbb{R}^N$ (c'est un espace vectoriel sur \mathbb{R}), les expressions suivantes sont des normes sur \mathbb{R}^N :

$$\mathbf{1-} \|x\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i|, \quad \mathbf{2-} \|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq N} |x_i|, \quad \mathbf{3-} \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{où } x = (x_1, \dots, x_N).$$

b- Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ espace vectoriel réel de toutes les fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues, les expressions suivantes sont des normes sur E :

$$\mathbf{1-} \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx, \quad \mathbf{2-} \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|, \quad \mathbf{3-} \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lemme 1.2.1 Soit (x_n) une suite de Cauchy dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ contient une sous suite (x_{n_k}) convergente vers x , alors la suite (x_n) est aussi convergente vers le même élément x .

Définition 1.2.3 (Espace de Banach) Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

1.3 Les espaces L^p

Définition 1.3.1 Soit Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N , On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω à valeur dans \mathbb{R} . On pose: $\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)| dx$.

Définition 1.3.2 Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on pose:

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

et

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Remarque 1.3.1 Le couple $(L^p, \|\cdot\|_{L^p})$ est un espace vectoriel normé.

Définition 1.3.3 On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \exists C > 0 : |f(x)| < C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

et

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

Remarque 1.3.2 Le couple $(L^\infty, \|\cdot\|_{L^\infty})$ est un espace vectoriel normé.

1.4 Opérateurs Continus

1.4.1 Linéarité des opérateurs

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur E dans F est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes:

-Condition additive

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E, \text{ on a } A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2).$$

-Condition homogène

$$\forall \varphi \in E, \lambda \in \mathbb{R}, \text{ on a } A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi).$$

Remarque 1.4.1 Lorsque l'espace F est unidimensionnel, tout opérateur linéaire A est appelé fonctionnelle linéaire. Ce terme est surtout employé dans le cas où E est un espace de dimension infinie; en cas de dimension finie on dira plutôt "fonction linéaire".

1.4.2 Continuité des opérateurs linéaires

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si:

pour toute suite x_n de G converge vers x_0 , la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$; c'est à dire:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n) = A(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = A(x_0).$$

Remarque 1.4.2 L'opérateur linéaire A est continu sur G , s'il est continu en chaque point de l'ensemble G .

Théorème 1.4.1 Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F , est dit continu partout sur G s'il est continu en point x_0 de G .

1.4.3 Opérateurs bornés

Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est borné s'il existe une constante $C > 0$, telle que:

$$\|A(x)\|_F \leq C \|x\|_E, \forall x \in E.$$

Théorème 1.4.2 *Un opérateur linéaire A est continu, si et seulement si, il est borné.*

Proposition 1.4.1 *La norme $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F$ sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur linéaire continu.*

1.4.4 Normes équivalentes

Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$, ces deux normes sont dites équivalentes, si on peut trouver deux constantes positives α et β , telles que:

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1 \quad \forall x \in E.$$

Théorème 1.4.3 *Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Théorème 1.4.4 *Soient E et F deux espaces normés, l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ de tous les opérateurs linéaires continus sur E dans F est un sous-espace vectoriel de $L(E, F)$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires sur E dans F . de plus, $\mathcal{L}(E, F)$ muni de la norme $\|A\|$ est un espace normé.*

Théorème 1.4.5 *Soit E un espace normé et F un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de banach.*

1.4.5 Dual topologique

On appelle dual topologique de l'espace E et que l'on note E^* l'espace de Banach des fonctionnelles linéaires continues $\mathcal{L}(E, \mathbb{k})$.

Remarque 1.4.3 *Le dual topologique $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{k})$ est inclus dans le dual algébrique $E^+ = L(E, \mathbb{k})$.*

1.5 Espace de Hilbert

1.5.1 Produit scalaire

Définition 1.5.1 On appelle **produit scalaire** sur un espace vectoriel E , une forme $\langle u, v \rangle$ qu'est bilinéaire de $E \times E$ dans \mathbb{R} , symétrique, définie positive (i.e. $\langle u, u \rangle \geq 0, \forall u \in E$ et $\langle u, u \rangle > 0$ si $u \neq 0$).

1.5.2 Espace Euclidien (préhilbertien)

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit espace euclidien ou **préhilbertien**, on peut lui introduire une norme définie par

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Rappelons qu'un produit scalaire vérifie l'**inégalité de Cauchy-Shwartz** :

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|, \forall u, v \in E.$$

1.5.3 Espace de Hilbert

Définition 1.5.2 Un espace de **Hilbert** est un espace vectoriel \mathbb{H} , muni d'un produit scalaire $\langle u, v \rangle$ et qui est complet pour la norme $\langle u, u \rangle^{1/2}$.

Exemple 1.5.1 L'espace vectoriel $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire défini par $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$ est un espace de Hilbert.

1.6 Espace de sobolev

1.6.1 Rappel sur les distribution

Définition 1.6.1 Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , f une fonction de Ω dans \mathbb{R} . On appelle **support** de f l'ensemble fermé de \mathbb{R}^N défini par:

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}} \subset \mathbb{R}^N.$$

Définition 1.6.2 On définit l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω et à support compact.

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^\infty(\Omega) \text{ et } \text{supp}(f) \text{ compact dans } \Omega\}.$$

Définition 1.6.3 Une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ est dérivable à tout ordre. soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ multi-entier, et $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$ On définit:

$$D^\alpha \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_N} \right)^{\alpha_N} \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Définition 1.6.4 On définit l'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω comme le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$, c'est à dire des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$, un élément $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

$$\begin{aligned} T & : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi & \mapsto T(\varphi) \end{aligned}$$

telle que:

1. T est linéaire.
2. Si $\varphi_n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ alors $T(\varphi_n) \rightarrow 0$ dans \mathbb{R} .

On écrit $T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}$.

Théorème 1.6.1 Soit E et F des espaces normés, on suppose $T : E \rightarrow F$ est un opérateur linéaire, les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. T est continu.
2. T est continu en zéro.
3. T est bornée $\|T(x)\|_F \leq C \|x\|_E$.

Dérivée d'une distribution

Définition 1.6.5 Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on définit les dérivées de T par:

$$\begin{aligned}\langle D^\alpha T, \varphi \rangle &= D^\alpha T(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi) \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle.\end{aligned}$$

$D^\alpha T$ est aussi un élément de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

1.6.2 Espaces de Sobolev

L'espace de Sobolev d'ordre 1

Définition 1.6.6 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , on définit l'espace de Sobolev d'ordre 1, et on le note $H^1(\Omega)$ par:

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq N \right\}$$

avec les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ sont les dérivées faibles c'est-à-dire au sens des distributions.

En particulier, si $u \in C(\bar{\Omega})$ alors $u \in H^1(\Omega)$.

Lemme 1.6.1 L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace euclidien, muni du produit scalaire:

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} &= \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_{\Omega} u(x) v(x) dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.\end{aligned}$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est un sous espace vectoriel de $L^2(\Omega)$, donc est un espace vectoriel normé pour la norme induite de $L^2(\Omega)$.

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 1.6.1 La suite (f_n) converge vers f dans:

$$\begin{aligned}\mathbb{R} \text{ si } |f_n - f| &\rightarrow 0 \\ L^2 \text{ si } \int |f_n - f|^2 &\rightarrow 0 \\ H^1 \text{ si } \int |f_n - f|^2 &\rightarrow 0 \text{ et } \int |f'_n - f'|^2 \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Proposition 1.6.1 *L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ est un espace de Hilbert.*

Preuve. voir [8]. ■

Remarque 1.6.2 $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$.

Proposition 1.6.2 *Si Ω un ouvert est différent de \mathbb{R}^N , alors $\overline{\mathcal{D}(\Omega)} \neq H^1(\Omega)$.*

Démonstration. voir [8]. ■

Définition 1.6.7 *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un ouvert, on désigne par $H_0^1(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, c'est à dire $H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}$.*

Définition 1.6.8 *On définit la semi-norme sur H^1 :*

$$|u|_1 = \left(\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \forall u \in H^1.$$

Lemme 1.6.2 *Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$, on a $H_0^1(\Omega) = H^1(\Omega)$, c'est à dire $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H^1(\Omega)$, Autrement dit $\overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)} = H^1(\mathbb{R}^N)$*

Démonstration. Voir [8]. ■

Théorème 1.6.2 (Inégalité de Poincarée) *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , alors: il existe une constante $C(\Omega) > 0$, telle que:*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\Omega) \left(\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. voir [8]. ■

Corollaire 1.6.1 *Si Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , alors la semi-norme $|\cdot|_1$ sur $H^1(\Omega)$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$, les normes $|\cdot|_1$ et $\|\cdot\|_{H^1}$ sur $H_0^1(\Omega)$ sont équivalentes.*

L'espace de Sobolev d'ordre m

Définition 1.6.9 *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , pour $m \geq 1$ ($m \in \mathbb{N}^*$), on définit l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ par:*

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}.$$

Domaine régulier

On note par \mathbb{R}_+^N , Q , Q_+ , Q_0 les sous ensembles suivantes:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_+^N &= \{x = (x', x_N); x' \in \mathbb{R}^{N-1}, x_N > 0\} \\ Q &= \{x = (x', x_N); |x'| < 1 \text{ et } |x_N| < 1\} \\ Q_+ &= Q \cap \mathbb{R}_+^N \\ Q_0 &= \{x = (x', x_N); |x'| < 1 \text{ et } |x_N| = 0\}\end{aligned}$$

Définition 1.6.10 On dit qu'un ouvert Ω est de classe C^1 si pour tout $x \in (\Gamma = \partial\Omega)$, il existe un voisinage U de x dans \mathbb{R}^N et une application $H : Q \rightarrow U$ bijective telle que:

$$H \in C^1(\overline{Q}), H^{-1} \in C^1(\overline{U}), H(Q_+) = U \cap \Omega \text{ et } H(Q_0) = U \cap \Gamma.$$

Définition 1.6.11 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert, on dit que Ω est régulier si Ω est borné et son frontière est un variété (de dimension $N - 1$) de classe C^1 .

Formule de Green:

Définition 1.6.12 (Formule de Green) : Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 , et Γ son bord. Soit u une fonction de classe $C^2(\Omega, \mathbb{R})$, v une fonction de classe $C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Alors:

$$\int_{\Omega} \Delta u(x) v(x) dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} (x) v(x) d\sigma.$$

Théorème 1.6.3 (trace) : Supposons que Ω est de classe C^1 . Alors, $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$, et l'application $\gamma_0 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \rightarrow C(\Gamma)$, définie par : $\gamma_0 v = v_{\Gamma}$, se prolonge par continuité par une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$, encore notée par γ_0 est appelée l'application de trace, et $\gamma_0 v$ est appelée trace de v sur Γ .

Théorème 1.6.4 Supposons que Ω est borné, de classe C^1 par morceaux. Alors :

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1, \gamma_0(v) = v_{\Gamma} = 0\}.$$

Théorème 1.6.5 (Formule de Green): Supposons que Ω est borné, de classe C^1 par morceaux. Alors : $u, v \in H^1(\Omega)$ on a:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} uv \nu_i d\sigma$$

avec ν_i les composante du vecteur normal unitaire à Γ orienté vers l'extérieur de Ω .

Formulation faible et variationnelle

Un problème physique est généralement décrit par une équation différentielle au plus certaines aux dérivée partielles. On considère le problème suivant:

$$\begin{cases} Lu = f \text{ sur } \Omega \\ Mu = g \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec L : un opérateur différentiel (total ou partiel)

M : condition aux bord.

On cherche la fonction u , telle que $Lu - f$ soit orthogonal à tous les fonctions v c'est-à-dire:

$$\int_{\Omega} (Lu - f) v d\Omega = 0$$

pour toute fonction v vérifiant les conditions aux limites homogène $Mv = 0$, la fonction v s'appelle fonction de test.

En intégrant par partie, on a:

$$\int_{\Omega} (Lu - f) v d\Omega = a(u, v) - l(v)$$

d'où $a(u, v)$ est une forme bilinéaire, $l(v)$ est une forme linéaire.

Chapitre 2

Sur la Minimisation des opérateurs dans les espaces normés

Dans ce chapitre, on introduit la minimisation des opérateurs en dimension finie, infinie (optimisation), le problème de minimisation réside dans le fait que lorsque on travaille dans des espaces fonctionnels ($H^1(\Omega), H_0^1(\Omega), \mathcal{D}'(\Omega) \dots$) de dimension infinie, les propriétés de compacité usuelle de la dimension finie ne sont plus vraie, la minimisation en dimension infinie qui on traite les opérateurs déffirentiels (Laplacien) avec différentes conditions aux limites.

2.1 L'optimisation en dimension finie et infinie

Soient \mathbb{V} un espace vectoriel normé, $K \subset \mathbb{V}$ et $J : K \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonctionnelle, le problème de minimisation est formulé comme suivant:

$$(P) \begin{cases} \min J(x) \\ x \in K \end{cases}$$

- * Si $K = \mathbb{V}$, on dit que (P) est un problème d'optimisation sans contrainte.
- * Si $K \subsetneq \mathbb{V}$, on dit que (P) est un problème d'optimisation avec contrainte (sous contrainte).

* Si $\dim K < +\infty$ (resp. $\dim K = +\infty$) on dit que (P) est un problème d'optimisation en dimension finie (resp. infinie)

Avant de voir les résultats d'existence et d'unicité, il faut d'abord citer quelques définitions:

Définition 2.1.1 Soit \mathbb{H} est un espace de Hilbert, on dit que la fonctionnelle $J : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ est **coercive** si:

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} J(x) = +\infty.$$

Définition 2.1.2 On dit que l'ensemble $(K \subset \mathbb{H})$ est **convexe** si:

$$\forall x, y \in K, \forall t \in [0, 1], tx + (1 - t)y \in K.$$

Définition 2.1.3 On dit que la **fonction** $J : (K \subset \mathbb{H}) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sur K convexe: **convexe** si:

$$\forall x, y \in K, \forall t \in [0, 1] : J(tx + (1 - t)y) \leq tJ(x) + (1 - t)J(y).$$

strictement convexe si:

$$\forall x, y \in K, \forall t \in [0, 1] : J(tx + (1 - t)y) < tJ(x) + (1 - t)J(y).$$

Définition 2.1.4 Un point x^* de \mathbb{R}^N vérifiant $\nabla J(x^*) = 0$ est appelé **point critique** ou **point stationnaire**.

Définition 2.1.5 Soient $(K \neq \emptyset) \subset \mathbb{H}$ (\mathbb{H} un Hilbert réel), la fonctionnelle $J : K \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que $x^* \in K$ réalise un **minimum local** de J sur K , si on peut trouver une boule de \mathbb{H} centrée en $x^* : B(x^*)$ telle que:

$$\forall x \in B(x^*) \cap K, J(x^*) \leq J(x).$$

Définition 2.1.6 On dit que $x^* \in K$ réalise un **minimum global** de J sur K si $\forall x \in K, J(x^*) \leq J(x)$.

Définition 2.1.7 Soit $(K \neq \emptyset) \subset \mathbb{H}$, on dit que K est **compact** si et seulement si, de toute suite (x_n) de K , on peut extraire une sous suite convergente.

Définition 2.1.8 [9]: Soit K un convexe d'un espace de Hilbert \mathbb{H} . Une fonction $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **fortement convexe** ou **uniformément convexe** ou **α -convexe** ou **α -elliptique** s'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tous $x, y \in K, t \in [0, 1]$,

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) - \frac{\alpha}{2}t(1 - t)\|x - y\|^2.$$

2.1.1 Optimisation en dimension finie

Optimisation sans contraintes

On considère le problème d'optimisation sans contrainte suivant:

$$(P) \begin{cases} \min J(x) \\ x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

où J est une fonction de \mathbb{R}^N vers $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Résultats d'existence et d'unicité

Théorème 2.1.1 (Weierstrasz)

Soit K un ensemble compact de \mathbb{R}^N , et $J : K \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors le problème (P) admet au moins un minimum global sur K .

Théorème 2.1.2 (Existence):

Soit $J : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, continue et coercive, alors le problème (P) admet au moins une solution.

Théorème 2.1.3 (Unicité):

Soit $J : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ strictement convexe, alors le problème (P) admet au plus une solution.

Optimisation avec contraintes

On considère le problème d'optimisation avec contrainte suivant:

$$(P^*) \begin{cases} \min J(x) \\ x \in K \end{cases}$$

où $J : K \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction continue, $K \neq \emptyset$ et $K \neq \mathbb{R}^N$.

1-Contraintes égalité K prend la forme suivante:

$$K = \{x \in \mathbb{R}^N, g(x) = 0\}$$

telle que: $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une fonction à plusieurs variables, on peut écrire $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_p(x))$, chaque fonction g_i avec $i = \overline{1, p}$ étant défini: $g_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$.

2-Contraintes inégalité K prend la forme suivante:

$$K = \{x \in \mathbb{R}^N, h(x) \leq 0\}$$

telle que: $h : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^q$ est une fonction à plusieurs variables, on peut écrire $h(x) = (h_1(x), h_2(x), \dots, h_q(x))$, chaque fonction h_i étant défini: $h_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$.

On note: $h(x) \leq 0$, c'est à dire: $h_i(x) \leq 0, \forall i = \overline{1, q}$.

Résultats d'existence et d'unicité

Théorème 2.1.4 (Existence) :

Soient $J : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ continue, K un sous ensemble fermé de \mathbb{R}^N alors:

1. Si K est borné, alors le problème (P^*) admet au moins une solution de K .
2. Si K n'est pas borné, J est coercive (croissante à l'infini), alors il existe une solution de problème (P^*) .

Théorème 2.1.5 (Unicité)

Soit $J : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement convexe et si K est convexe, alors le problème (P^*) admet au plus une solution.

2.1.2 Optimisation en dimension infinie

En dimension infinie, une fonction continue sur un fermé et borné (n'est pas compact) n'atteint pas toujours son minimum:

Résultats d'existence et d'unicité

Théorème 2.1.6 [4]

Soit K un convexe fermé non vide de l'espace de Hilbert \mathbb{H} , J une fonctionnelle convexe continue et coercive sur K , alors il existe un minimiseur de J sur K .

Théorème 2.1.7 [4]

Soit K un convexe fermé non vide de l'espace de Hilbert \mathbb{H} , J une fonctionnelle fortement convexe et continue sur K , alors il existe un unique minimiseur de J sur K .

2.2 Le théorème de Stampacchia et le théorème de Lax-Milgram:

Définition 2.2.1 Soient \mathbb{H} un espace de Hilbert, $a : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, $a(.,.)$ est dite:

1. **Continue** s'il existe une constante $c > 0$, $|a(u, v)| \leq c \|u\| \|v\|$.
2. **Coercive** s'il existe une constante $\alpha > 0$, $a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2$.
3. **Symétrique** si et seulement si $a(u, v) = a(v, u)$.

Théorème 2.2.1 [2](Représentation de Riesz-Fréchet)

Étant donné $\varphi \in \mathbb{H}^*$, il existe $f \in \mathbb{H}$ unique tel que:

$$\langle \varphi, v \rangle_{\mathbb{H}^* \times \mathbb{H}} = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in \mathbb{H}.$$

De plus, on a:

$$\|f\| = \|\varphi\|_{\mathbb{H}^*}.$$

Démonstration. : Voir [2]. ■

Théorème 2.2.2 [2](Projection sur convexe fermé)

Soit $K \subset \mathbb{H}$ un convexe fermé non vide, alors pour tout $f \in \mathbb{H}$, il existe $u \in K$ unique tel que:

$$|f - u| = \min_{v \in K} |f - v|.$$

De plus u caractérisé par la propriété:

$$u \in K, \langle f - u, v - u \rangle \leq 0, \forall v \in K.$$

Donc $u = P_K(f)$: u est la projection de f sur K .

2.2.1 Théorème de Stampacchia

Théorème 2.2.3 [2](Stampacchia)

Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive, soit K un convexe, fermé et non vide, étant donné $\varphi \in \mathbb{H}^*$. Il existe $u \in K$ unique tel que:

$$a(u, v - u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle, \forall v \in K. \quad (1)$$

De plus, si a est symétrique, alors u caractérisé par la propriété:

$$u \in K, \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\} \quad (2)$$

Démonstration. D'après la représentation de Riesz-Fréchet, il existe $f \in \mathbb{H}$ unique telle que:

$$\langle \varphi, v \rangle_{\mathbb{H}^* \times \mathbb{H}} = \langle f, v \rangle, \forall v \in \mathbb{H}.$$

D'autre part, pour tout $u \in \mathbb{H}$ fixé, l'application $v \mapsto a(u, v)$ est une forme linéaire continue sur \mathbb{H} , par la représentation de Riesz-Fréchet, il existe $Au \in \mathbb{H}$, tel que:

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle, \forall v \in \mathbb{H}.$$

Ainsi A est un opérateur linéaire, continue de \mathbb{H} dans \mathbb{H} donc (1) revient à trouver $u \in K$ tel que:

$$\langle Au, v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle, \forall v \in K \quad (5)$$

soit $\rho > 0$ une constante, l'inégalité (5) équivalent à: $\langle \rho f - \rho Au + u - u, v - u \rangle \leq 0, \forall v \in K$, i.e. $u = P_K(\rho f - \rho Au + u)$ c'est la projection de $(\rho f - \rho Au + u)$ sur K .

On pose $S : K \rightarrow K$ avec $v \mapsto S(v) = P_K(\rho f - \rho Av + v)$ soit contractante, i.e. il existe $k, 0 \leq k < 1$ tel que:

$$\|S(v_1) - S(v_2)\| \leq k \|v_1 - v_2\|, \forall v_1, v_2 \in K.$$

On a:

$$\begin{aligned}
 \|S(v_1) - S(v_2)\|^2 &\leq \|P_K(\rho f - \rho Av_1 + v_1) - P_K(\rho f - \rho Av_2 + v_2)\|^2 \\
 &\leq \|\rho Av_1 + v_1 - \rho Av_2 + v_2\|^2 \\
 &\leq \|(v_1 - v_2) - \rho(Av_1 - Av_2)\|^2 \\
 &\leq \|v_1 - v_2\|^2 - 2\rho \langle v_1 - v_2, A(v_1 - v_2) \rangle + \rho^2 \|A(v_1 - v_2)\|^2 \\
 &\leq \|v_1 - v_2\|^2 - 2\rho\alpha \|v_1 - v_2\|^2 + c^2\rho^2 \|v_1 - v_2\|^2 \\
 &\leq \|v_1 - v_2\|^2 (1 - 2\alpha\rho + c^2\rho^2)
 \end{aligned}$$

fixant $\rho > 0$, tel que: $k^2 = 1 - 2\alpha\rho + c^2\rho^2 < 1$, ce implique $-2\alpha + c^2\rho < 0$, donc $0 < \rho < \frac{2\alpha}{c^2}$.

Alors $\exists! u \in K : S(u) = u$.

Si $a(u, v)$ est symétrique, alors $a(u, v)$ définit une autre produit scalaire sur \mathbb{H} , et la norme associé $a(u, u)^{\frac{1}{2}}$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|$, donc \mathbb{H} est aussi espace de Hilbert pour ce produit scalaire.

Appliquant le théorème de représentation de Riesz-Fréchet, on obtient $g \in \mathbb{H}$ tel que:

$$\langle \varphi, v \rangle = a(g, v), \quad \forall v \in \mathbb{H}.$$

D'après (1), on a:

$$\begin{aligned}
 a(u, v - u) &\geq a(g, v - u) = \langle \varphi, v - u \rangle, \quad \forall v \in K. \\
 &\Rightarrow a(g - u, v - u) \leq 0, \quad \forall v \in K.
 \end{aligned}$$

Donc, $u = P_{1K}(g)$ projection au sens du produit scalaire défini par $a(\cdot, \cdot)$, d'après le théorème de projection sur un convexe fermé, u minimise $a(g - v, g - v)^{\frac{1}{2}}$ sur K , ou encore

$$a(v, v) - 2a(g, v) \text{ ou encore } \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle.$$

■

2.2.2 Théorème de Lax-Milgram

Théorème 2.2.4 [2](Lax-Milgram)

Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive alors pour tout $\varphi \in \mathbb{H}^*$, il existe $u \in \mathbb{H}$ unique, tel que:

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in \mathbb{H} \tag{6}$$

Démonstration. On a $\langle \varphi, v \rangle$ une forme linéaire, ce implique qu'il existe T_φ :

$$T_\varphi(v) = \langle \varphi, v \rangle = \varphi(v)$$

$a(u, v)$ une forme linéaire par rapport à u et v , ce implique qu'il existe $T_a : T_a u = a(u, v)$.

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \langle \varphi, v \rangle \Leftrightarrow T_a u = T_\varphi \\ &\Leftrightarrow \langle T_a u, v \rangle = \langle T_\varphi, v \rangle \end{aligned}$$

pour que l'équation $T_a u = T_\varphi$ admet une solution unique, il faut qu'il est linéaire, continue et bijective.

T_a est linéaire : soient $u_1, u_2 \in \mathbb{H}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \langle T_a(\alpha u_1 + \beta u_2), v \rangle &= a(\alpha u_1 + \beta u_2, v) \\ &= \alpha a(u_1, v) + \beta a(u_2, v) \\ &= \alpha \langle T_a u_1, v \rangle + \beta \langle T_a u_2, v \rangle \\ &= \langle \alpha T_a u_1 + \beta T_a u_2, v \rangle \end{aligned}$$

ce implique $T_a(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha T_a u_1 + \beta T_a u_2$

T_a est continue :

$$\begin{aligned} \|T_a u\|^2 &= |\langle T_a u, T_a v \rangle| = a(u, T_a u) \leq C \|u\| \|T_a u\| \\ \|T_a u\| &\leq C \|u\| \Rightarrow T_a \text{ est continue.} \end{aligned}$$

et pour montrer $T_a u$ est bijective: il faut montrer que $T_a u$ est injective et surjective.

Pour $T_a u$ est injective:

$$\forall v \in \mathbb{H}, \langle T_a u, v \rangle = 0$$

en particulier $u \in \mathbb{H}$:

$$\begin{aligned} \langle T_a u, u \rangle &= 0 \\ \langle T_a u, u \rangle &= a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \\ &\Rightarrow \|u\|^2 = 0 \Rightarrow u = 0 \end{aligned}$$

donc $T_a u$ est injective;

pour $T_a u$ est surjective:

soit $(u_n) \in T_a \mathbb{H}$ une suite converge vers u , comme la suite (u_n) est convergente, elle est de Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N} : p, q > n_0, \|u_n - u_m\| < \varepsilon$$

il existe v_n telle que: $u_n = T_a v_n$

$$\langle T_a(v_n - v_m), v_n - v_m \rangle \geq \alpha \|v_n - v_m\|^2 \text{ car } a \text{ est coercive}$$

d'autre part, d'après Cauchy Schwartz, on a:

$$\begin{aligned} \langle T_a v_n - T_a v_m, v_n - v_m \rangle &\leq \|T_a v_n - T_a v_m\| \|v_n - v_m\| \\ \|T_a v_n - T_a v_m\| \|v_n - v_m\| &\geq \alpha \|v_n - v_m\|^2 \\ \|T_a v_n - T_a v_m\| &\geq \alpha \|v_n - v_m\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|v_n - v_m\| &\leq \frac{1}{\alpha} \|T_a v_n - T_a v_m\| = \frac{1}{\alpha} \|u_n - u_m\| \\ \|v_n - v_m\| &< \frac{1}{\alpha} \varepsilon \\ &< \varepsilon' \end{aligned}$$

donc v_n une suite de Cauchy dans l'espace de Hilbert, ceci est complet, alors la suite v_n converge dans \mathbb{H} .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_a v_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_a v_n \\ &= T_a \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \text{ (car } T_a \text{ est continue).} \\ &= T_a v \end{aligned}$$

$$u = T_a v \Leftrightarrow u \in T_a \mathbb{H} \tag{*}$$

donc $T_a \mathbb{H}$ est fermé.

Soit $u_0 \in (T_a \mathbb{H})^\perp$, $\forall w \in T_a \mathbb{H}, \langle w, u_0 \rangle = 0$, en particulier $w = T_a u_0 \in T_a \mathbb{H}$.

$$\begin{aligned} \langle T_a u_0, u_0 \rangle &\geq \alpha \|u_0\|^2 \Rightarrow u_0 = 0 \\ (T_a \mathbb{H})^\perp &= \{0\} \end{aligned} \tag{**}$$

d'après (*) et (**) on a: $T_a u$ est surjective;

comme $T_a u$ est injective et surjective alors elle est bijective, donc l'équation admet une solution unique. ■

2.3 Problème Abstrait

Soient \mathbb{H} un espace de Hilbert, $a : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.

Soit $K \subset \mathbb{H}$ convexe fermé non vide.

On considère le problème abstrait suivant:

étant donné $f \in \mathbb{H}^*$; trouver $u \in K$ solution de:

$$(PI) \begin{cases} \text{trouver } u \in K \\ a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle, \forall v \in K \end{cases}$$

le problème (PI) est appelé **inéquation variationnelle**.

On définit aussi un problème plus général (PI1) qui est équivalent à problème (PI).

Pour u est fixé, $a(u, v)$ une forme linéaire continue par rapport à v , $Au \in \mathbb{H} : \langle Au, v \rangle = a(u, v)$ (d'après la représentation de Riesz)

$$(PI1) \begin{cases} \text{trouver } u \in K \\ \langle Au, v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle, \forall v \in K \end{cases}$$

En outre, le problème (PI) est aussi équivalent au problème de minimisation (d'optimisation avec contrainte):

$$(PMin) \begin{cases} \text{trouver } u \in K \\ J(u) = \min_{v \in K} J(v) \end{cases}$$

où la fonctionnelle $J(v)$ (dite **fonctionnelle d'énergie**) est défini par:

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle.$$

L'existence d'une solution à ces problèmes est basé sur la coercivité de $a(., .)$.

2.4 Quelques problèmes aux limites elliptiques:

Dans ce section, nous montrons l'existence et l'unicité de quelques problèmes, on base sur l'opérateur de laplace sur un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^N de classe C^1 , qui n'est pas facile de démontrer que ce type de problème admet une solution dans le cas ouvert quelconque, pour cela on a besoin de transformer les problèmes aux limites à des problèmes variationnels, on prend des exemples où le théorème de Stampacchia est applicable

2.4.1 Problème de Dirichlet

Problème de Dirichlet non homogène

Soit le problème de Dirichlet non homogène, et soient $f \in H^{-1}(\Omega)$, $g \in H^1(\Omega)$, trouver $u \in H^1(\Omega)$ sachant que:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = g \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (8)$$

Formulation variationnelle Multipliant la première équation du (8) par une fonction de test $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, on intègre, on obtient:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad (9)$$

On a: $v = 0$ sur $\partial\Omega$ donc $v \in H_0^1$, $u \in H^1(\Omega)$.

La solution classique de (8) est une fonction de $C^2(\overline{\Omega})$ qui vérifié (8), la solution faible de (8) est une fonction de $H^1(\Omega)$ qui vérifié (9). On a:

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx. \\ \langle f, v \rangle &= \int_{\Omega} f v dx. \end{aligned}$$

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \text{ pour } v \in H_0^1, u - g \in H_0^1.$$

Soit $K = \{v \in H^1(\Omega), v - g \in H_0^1(\Omega)\}$, le problème (8) devient comme suit:

$$\text{trouver } u \in K, \int_{\Omega} \nabla u \nabla (v - u) dx \geq \langle f, v - u \rangle, \forall v \in K \quad (10)$$

la forme $a(u, v)$ est un produit scalaire, n'est pas coercive dans $H^1(\Omega)$, étant donné que:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla (v - u) dx = \int_{\Omega} \nabla (u - g) \nabla (v - u) dx + \int_{\Omega} \nabla g \nabla (v - u) dx$$

u est une solution de problème (10) si et seulement si $w = u - g$ est une solution de:

$$\int_{\Omega} \nabla w \nabla (v - u) dx \geq \langle f, v - u \rangle - \int_{\Omega} \nabla g \nabla (v - u) dx$$

rappelons que $\nabla g \in L^2(\Omega)$, le problème (10) devient équivalent de trouver:

$$w \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla w \nabla (v - w) dx \geq \langle F, v - w \rangle, \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (11)$$

Avec $F \in H^{-1}(\Omega)$, on définit par: $\langle F, v \rangle = \langle f, v \rangle - \int_{\Omega} \nabla g \nabla v dx$.

On a la forme $a(u, v)$ est bilinéaire continue et coercive dans $H_0^1(\Omega)$; d'après le théorème de Stampacchia l'inéquation (11) admet une solution unique w donc il est clair que $u = w + g$ est une solution de (10).

Problème de Dirichlet homogène

Sous les mêmes hypothèses avec le première exemple. Soit le problème de Dirichlet homogène:

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f \text{ sur } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (12)$$

avec même méthode, on obtient la formule variationnelle:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \lambda \int_{\Omega} u \cdot v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx$$

avec

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \lambda \int_{\Omega} u \cdot v dx \\ \langle f, v \rangle &= \int_{\Omega} f \cdot v dx \end{aligned}$$

$a(u, v)$ est continue :

$$\begin{aligned}
 |a(u, v)| &\leq \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \lambda \int_{\Omega} u \cdot v dx \right| \\
 &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + |\lambda| \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{D'après chauchy schwartz} \\
 &\leq \max(1, |\lambda|) \left[\left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 \left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \max(1, |\lambda|) \left[(2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2) (2 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2) \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq 2 \max(1, |\lambda|) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}
 \end{aligned}$$

donc $a(u, v)$ est continue, car $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ et $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ sont équivalentes dans $H_0^1(\Omega)$, d'où:

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} .$$

$a(u, v)$ est coercive, en fait pour $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}
 a(u, u) &= t \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx + (1-t) \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx + \lambda \int_{\Omega} u^2 dx \\
 &\geq t \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx + \frac{(1-t)}{C^2(\Omega)} \int_{\Omega} u^2 dx + \lambda \int_{\Omega} u^2 dx \\
 &\geq t \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx + \left(\frac{1}{C^2(\Omega)} - \frac{t}{C^2(\Omega)} + \lambda \right) \int_{\Omega} u^2 dx
 \end{aligned}$$

Choisir $t, \frac{1}{C^2(\Omega)} - \frac{t}{C^2(\Omega)} + \lambda > 0$ alors $0 < t < 1 + \lambda C^2(\Omega)$ ce implique $\lambda > -\frac{1}{C^2(\Omega)}$.

Donc

$$a(u, u) \geq t \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

Comme $a(u, v)$ est bilinéaire continue et coercive, $\langle f, v \rangle$ linéaire et continue, d'après Lax-Milgram le problème (12) admet une solution unique, et comme $a(u, v)$ symétrique, d'après le théorème de Stampacchia on peut écrire la proposition suivante:

Proposition 2.4.1 *Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, $\exists! u \in H_0^1(\Omega)$ solution faible de (12), avec $\lambda > -\frac{1}{C^2(\Omega)}$. De plus, u s'obtient par:*

$$\min_{u \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx + \lambda \int_{\Omega} u^2 dx \right) - \int_{\Omega} f u dx \right\} .$$

Interprétation variationnelle:

Soit u la solution faible de (12) est régulier, c'est-à-dire u a deuxième dérivée ou $u \in H^2(\Omega)$.

Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \lambda \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\Delta u v dx + \lambda \int_{\Omega} u v dx &= \int_{\Omega} f v dx, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \\ \int_{\Omega} (-\Delta u + \lambda u) v dx &= \int_{\Omega} f v dx, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \end{aligned}$$

et donc $-\Delta u + \lambda u = f$ p.p. sur Ω puisque $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$. En fait, on a $-\Delta u + \lambda u = f$ partout sur Ω si $u \in C^2(\Omega)$.

On vérifie les conditions aux limites, on a $u \in H_0^1(\Omega)$ alors $u = 0$ sur $\partial\Omega$, donc u est une solution classique de (12).

2.4.2 Problème de Neumann

Soit le problème de Neumann, soient $\partial\Omega$ est régulier, $f, g \in L^2(\Omega)$, on cherche la fonction u sachant que:

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = g \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (13)$$

On désigne $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ le dérivé normale extérieur de u , c'est à dire $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \vec{n}$; \vec{n} est le vecteur normale extérieur à $\partial\Omega$.

Toute solution classique est une solution faible, tout d'abord que grâce à la formule de Green; on a:

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma$$

on prend $v \in C^1(\Omega)$, donc le problème (13) devient:

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\partial\Omega} g \cdot v d\sigma \\ \text{où } a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \lambda \int_{\Omega} u \cdot v dx \end{aligned}$$

alors:

$$u \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \lambda \int_{\Omega} u \cdot v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\partial\Omega} g \cdot v d\sigma \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

en choisissant $\lambda > 0$ et $\alpha = \min(1, \lambda)$, nous avons la coercivité :

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx + \lambda \int_{\Omega} u^2 dx \\ &= \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \min(1, \lambda) \|u\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Stampacchia, $a(u, v)$ est symétrique on peut écrire la proposition suivante:

Proposition 2.4.2 *Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, $\exists! u \in H^1(\Omega)$ solution faible de (13), avec $\lambda > 0$.*

De plus, u s'obtient par:

$$\min_{u \in H^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx + \lambda \int_{\Omega} u^2 dx - \int_{\Omega} f u dx + \int_{\partial\Omega} g u d\sigma \right\}$$

Toutefois, si $\lambda = 0$ la forme n'est pas coercive, dans ce cas le problème n'a pas toujours une solution, et s'il existe, n'est pas unique.

Interprétation variationnelle:

Soit u la solution faible de (13) est régulier, c'est-à-dire u a deuxième dérivée ou $u \in H^2(\Omega)$.

Grâce à la formule de Green, on a:

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + \lambda u) v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} g v d\sigma, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

et donc $-\Delta u + \lambda u = f$ p.p. sur Ω puisque $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$. En fait, on a $-\Delta u + \lambda u = f$ partout sur Ω , si $u \in C^2(\Omega)$.

On vérifie les conditions aux limites, on a $v \in C^1(\overline{\Omega})$ donc

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma = \int_{\partial\Omega} g v d\sigma, \quad \forall v \in C^1(\overline{\Omega})$$

par conséquent $\frac{\partial u}{\partial \eta} = g$ sur $\partial\Omega$, donc u est une solution classique de (13).

2.4.3 Problème Mixte (Dirichlet Neumann)

On suppose $\partial\Omega = \partial_1\Omega \cup \overline{\partial_2\Omega}$ avec $\partial_1\Omega \cap \partial_2\Omega = \emptyset$, on veut étudié le problème suivant avec les mêmes hypothèses précédentes:

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial_1\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ sur } \partial_2\Omega \end{cases} \quad (14)$$

on prend $v \in K$ tel que: $K = \{v \in H^1(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0\}$, on obtient la même formulation variationnelle précédente:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \lambda \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx$$

on a $K \subset H^1(\Omega)$, K est fermé et convexe dans $H^1(\Omega)$, pour $\lambda > 0$, la forme bilinéaire continue $a(u, v)$ est coercive et symétrique, $\langle f, v \rangle$ est linéaire continue, d'après le théorème de Stampacchia, le problème (14) donne la proposition suivante:

Proposition 2.4.3 *Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, $\exists! u \in K$ solution faible de (14), avec $\lambda > 0$. De plus, u s'obtient par:*

$$\min_{\substack{u \in K \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0}} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx + \lambda \int_{\Omega} u^2 dx - \int_{\Omega} f u dx \right\}$$

Si $\lambda = 0$, la forme est encore coercive à condition de $\partial_1\Omega$ est suffisant grand, c'est à dire si $\partial_1\Omega$ est assez large pour garantir l'existence de $C(\Omega)$ (le constante de Poincarre).

Interprétation variationnelle:

Soit u la solution faible de (14) est régulier, c'est-à-dire u a deuxième dérivée ou $u \in H^2(\Omega)$.

Grâce à la formule de Green, on a:

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + \lambda u) v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma = \int_{\Omega} f v dx, \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

et donc $-\Delta u + \lambda u = f$ p.p. sur Ω puisque $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$. En fait, on a $-\Delta u + \lambda u = f$ partout sur Ω si $u \in C^2(\Omega)$.

On vérifie les conditions aux limites, on a $v \in C^1(\overline{\Omega})$ donc

$$\int_{\partial_2\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma = 0, \forall v \in C^1(\overline{\Omega})$$

par conséquent $\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ sur $\partial_2\Omega$, comme $u \in K$, on a $u = 0$ sur $\partial_1\Omega$, donc u est une solution classique de (14).

Chapitre 3

Résolution de problème obstacle

Dans ce chapitre, nous allons traiter un exemple d'appliqué c'est le problème obstacle à partir de la formulation variationnelle, on étudie l'existence et l'unicité, puis extraire le problème d'optimisation équivalent, en basant toujours au théorème de Stampacchia.

3.1 Problème Obstacle

On a le problème obstacle, pour l'opérateur de Laplace, on prend par le cas le plus général:

soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et son frontière $\partial\Omega$ régulier de classe C^1 , soit $a_{i,j}(x) \in L^\infty(\Omega)$, satisfait la condition elliptique:

$$\frac{1}{\Lambda}\zeta^2 \leq \sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x)\zeta_i\zeta_j \leq \Lambda\zeta^2 \text{ pour } \zeta \in \mathbb{R}^N \text{ p.p. } x \in \Omega, \Lambda > 1.$$

On se donne une fonction $\psi \in H^1(\Omega)$ telle que $\psi \leq 0$ sur $\Gamma = \partial\Omega$ dans $H^1(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$.

On cherche $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \geq f \text{ sur } \Omega \\ u \geq \psi \text{ p.p. sur } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \end{array} \right.$$

3.1.1 Formulation variationnelle

Par la multiplication les deux termes de l'inégalité de laplace par $v \in K$, telle que:

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq \psi \text{ sur } \Omega \text{ dans } H^1(\Omega)\}$$

par suite, on applique la formule de Green

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) v dx &\geq \int_{\Omega} f v dx \\ \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx &\geq \int_{\Omega} f v dx \end{aligned}$$

on pose: $a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$ et $\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f v dx$.

On obtient le problème de l'inéquation variationnelle suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{chercher } u \in K \text{ telle que:} \\ a(u, v - u) \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in K. \end{array} \right.$$

3.1.2 Existence et Unicité

Il existe une unique solution de problème de l'inéquation variationnelle, on applique le théorème de Stampachia, on a:

◆ K est un convexe fermé, car:

$$\forall v, w \in K, \forall t \in [0, 1] : tv + (1-t)w \geq t\psi + (1-t)\psi = \psi \implies tv + (1-t)w \in K$$

K est convexe.

On a : $\forall v_n \in K, v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v : v \in H_0^1(\Omega), v_n \geq \psi$ d'où $v \geq \psi$, donc K est fermé.

◆ $a(u, v)$ est une forme bilinéaire: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, u_1, v, v_1 \in K$

$$\begin{aligned} a(\alpha u + \beta u_1, v) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N a_{i,j} \frac{\partial (\alpha u + \beta u_1)}{\partial x_j} \frac{\partial (v)}{\partial x_i} dx \\ &= \alpha a(u, v) + \beta a(u_1, v). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(u, \alpha v + \beta v_1) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N a_{i,j} \frac{\partial(u)}{\partial x_j} \frac{\partial(\alpha v + \beta v_1)}{\partial x_i} dx \\ &= \alpha a(u, v) + \beta a(u, v_1). \end{aligned}$$

◆ $a(u, v)$ est une forme continue sur K :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \right| \\ &\leq \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} |a_{i,j}| \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx \\ &\leq \sum_{i,j=1}^N \sup |a_{i,j}| \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx \\ &\leq \|a_{i,j}\|_{L^\infty} \left(\sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{d'après l'inégalité de Cauchy Schwartz} \\ &\leq C \left(\sum_{j=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &= C \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

◆ $a(u, v)$ est une forme coercive:

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N a_{i,j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 dx \geq \left(\frac{1}{\Lambda} \right) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

◆ $\langle f, v \rangle$ est linéaire: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v, v_1 \in K$

$$\begin{aligned} \langle f, \alpha v + \beta w \rangle &= \int_{\Omega} f (\alpha v + \beta w) dx \\ &= \alpha \int_{\Omega} f v dx + \beta \int_{\Omega} f w dx \end{aligned}$$

◆ $\langle f, v \rangle$ est continue:

$$\begin{aligned} \langle f, v \rangle &= \int_{\Omega} f v dx \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \text{d'après Cauchy schwartz} \\ &\leq k.C(\Omega) \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \text{d'après Poincaree.} \end{aligned}$$

Donc le problème de l'inéquation variationnelle admet une solution unique u .

De plus, si $a_{i,j} = a_{j,i}$, u est une solution unique de problème minimisation suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in K \\ J(u) = \min_{v \in K} J(v) \\ J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N a_{i,j} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} f v dx \end{array} \right.$$

Conclusion générale

Dans ce mémoire, on a étudié la minimisation des fonctionnelles d'énergie qui a obtenu à partir d'un opérateur de Laplacien avec les différentes conditions, de Dirichlet non homogène et homogène, Neumann et Mixtes, dans les trois exemples, on a indiqué l'espace convenable associé à la formulation variationnelle selon bien sûr la condition aux limites, quand on prend la condition de Dirichlet, on a travaillé sur $H_0^1(\Omega)$, si la condition de Neumann l'espace est $H^1(\Omega)$, et lorsque la condition est Mixte; l'espace sera un convexe fermé K , puis on a vu le résultat de l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel associé, en utilisant le théorème de Lax-Milgram ou bien le théorème de Stampacchia, ce dernier a utilisé et surtout dans le cas où le problème sera sur un convexe fermé K , qui est permet d'écrire la minimisation de l'opérateur elliptique dans les espaces normés ($H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, ..etc).

Bibliographie

- [1] G.ALLAIRE-M.BENAIM: *Mathématiques et Applications*. springer, gregoire.allaire@polytechnique.fr, 2007.
- [2] H.BREZIS: *Analyse Fonctionnelle Théorie et Applications*. Masson, Paris 6, 1999.
- [3] A.COHEN: *Approximations variationnelles des EDP*.
<http://www.ann.jussieu.fr/cohen/CohenM2.pdf>.
- [4] D. DI PIETRA: *Optimisation Numérique Conditions d'existence et l'unicité*, A.A,2012-2013.
- [5] D.KINDERLEHRER-G.STAMPACCHIA: *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*. Academic Press New York and London, 1980.
- [6] S.LAGRAF: *Méthodes variationnelles pour les problème avec contrainte de type inégalité*. thèse de doctorat, option Mathématiques appliquées, Faculté des sciences, Univ. B. MOUKHTAR de Annaba. 2013.
- [7] A.MRESTFAOUI: *Cours de Topologie*, ENS Kouba.
- [8] M.NADIR: *Cours d'Analyse fonctionnelle*. cours de première année Master, option Mathématiques fondamentales et appliquées, Faculté MI, Univ. M. BOUDIAF de M'sila. 2014-2015.
- [9] Y.PRIVAT: *Notes de cours - Préparation à l'agrégation Introduction à l'optimisation Première Partie : aspects théoriques*,Univ. Rennes 1, E.N.S. Rennes.

- [10] M.SOFONEA A.MAATEI: *Mathematical models in contact mechanics*. University press,2012.

ملخص

في هذه المذكرة, قمنا بدراسة تصغير المؤثرات من خلال مسائل كلاسيكية حدودية, حيث تناولنا المؤثر لابلاس باستعمال الصيغة التغيرية للحصول على معادلة الطاقة تحت فرضيات مناسبة. كما اهتمنا بنتيجة الوجود و الوحدانية حلول المسألة و كتابتها على شكل مسألة الإستمثال الموافقة لها.

الكلمات المفتاحية تصغير, حل ضعيف, معادلة الطاقة, فضاء هلبرت, فضاء صوبولاف, مؤثر, صيغة التغيرية.

RESUMES

Dans ce travail on a étudié la minimisation des opérateurs à partir des problèmes classique aux limites pour l'opérateur de Laplace à l'aide de la formulation variationnelle pour obtenir l'équation d'énergie sous des hypothèses convonables. On s'intéressa au résultat de l'existence et l'unicité de la solution de problème ainsi l'écrire le problème d'optimisation associe.

Mots clés : Minimisation, solution faible, équation d'énergie, espace de Hilbert, espace de Sobolev, opérateur, la formulation variationnelle.

ABSTRACT

In this work we studied the minimization of operators from classical boundary value problems for the Laplace operator with the variational formulation for the energy equation under suitable assumptions, we interested in results the existence and uniqueness of the problem solution and the write the optimization problem associated.

Keywords : Minimization, weak solution, energy equation, Hilbert space, Sobolev space, operator, the variational formulation.