

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
Département des Mathématiques



## *Mémoire de Master*

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière** : Mathématiques

**Option** : EDP et applications

## Thème

---

*Système de Lane-Emden avec exposants négatifs*

---

**Présentée par :**

*M<sup>elle</sup> BOUNOUIGA Souad*

MOKTTARI Abdelhaq	M.C.B,	Université de M'sila	<b>Président.</b>
BOUGHRARA Brahim	M.C.A,	Université de M'sila	<b>Encadreur.</b>
ABDALLAOUI Athmane	M.C.B,	ENS de Bou Saâda, M'sila	<b>Examineur.</b>

Année universitaire 2020/2021

---

# Remerciements

---

Nous aimerions au premier lieu remercier notre dieu **Allah** qui nous donne la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Je tiens tout à remercier Monsieur **Bougherrara Brahim** d'avoir accepté d'encadrer ce mémoire avec beaucoup de patience, le sérieux et la compétence. Il a su motiver chaque étape de mon travail par des remarques pertinentes. Je le remercie vivement pour ses conseils, ses corrections et ses orientations.

Nous tenons aussi à exprimer mes remerciements les plus respectueux à **messieurs les membres de jury**.

Nous adressons aussi des remerciements spéciaux à *M<sup>r</sup>* **Amroune Naserddine**.

Mes sincères remerciements à **mes parents** qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragements qu'ils trouvent dans la réalisation de ce travail.

Enfin, mes remerciements vont aussi à tous les **membres du département de Mathématiques** de l'université Mohammed Boudiaf de M'sila, les **enseignants**, ainsi que tous **mes collègues, amis**.

---

# Dédicaces

---

*Invocations à ALLAH, pour toute puissance.*

*À ma très chère mère,*

*À mon très cher père,*

*À mon frères et mes soeurs,*

*À toute ma famille,*

*À mes meilleurs amis*

*Et à tous ceux qui me sont chers*

*Je dédie ce travail.*

---

# Résumé

---

Le but de ce travail est d'étudier l'existence, non-existence et l'unicité de la solution d'un système d'Lane-Emden d'équations elliptiques avec des exposants négatifs. Le système à étudier est le suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{-p}v^{-q}, & u > 0 \text{ dans } \Omega \\ -\Delta v = u^{-r}v^{-s}, & u > 0 \text{ dans } \Omega \\ u = v = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Ce travail est basé sur les outils suivants : fonction de Green, principe de maximum, résultats de compacité et le comportement de la solution au voisinage du bord. On donne des résultats optimales d'existence et non-existence qui dépendent d'exposants  $p, q, r$  et  $s$ .

**Mots clés :** Équations elliptiques de Lane-Emden, système elliptiques, principe de Maximum, régularité elliptique, fonction de Green...

---

# Notations

---

▶ $n$	Entier naturel, dimension de l'espace de travail.
▶ $\mathbb{R}^n$	Espace euclidien muni de sa norme usuelle notée $ \cdot $ .
▶ $d(x)$	Distance du point $x$ à $\partial\Omega$ (i.e. $d(x, \partial\Omega)$ ).
▶ $\Omega$	Un ouvert de $\mathbb{R}^n$ .
▶ $\bar{\Omega}$	L'adhérence de $\Omega$ .
▶ $\partial\Omega$	La frontière régulière de $\Omega$ .
▶ $p > 1$ (ou $q$ ou $r$ )	Exposant de Lebesgue.
▶ $p' \geq 1$	L'exposant conjugué de $p$ : $p' = \frac{p}{p-1}$ et $p' = \infty$ si $p = 1$ .
▶ $p^* = \frac{np}{n-p}$	L'exposante conjugué de Sobolev.
▶ $p.p.$	Presque partout.
▶ $\nabla u = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$	Gradient de $u$ .
▶ $C^k(\bar{\Omega})$	Espace des fonctions de classe $k$ sur $\bar{\Omega}$ .
▶ $\lambda_1$	Première valeur propre du Laplacien sur $\Omega$ .
▶ $\varphi_1$	Fonction propre strictement positive, associée à $\lambda_1$ .
▶ $f_n \rightharpoonup f, (f_n \rightarrow f)$	La convergence faible (fort) de la suite $f_n$ vers $f$ .
▶ $\Delta u$	Laplacien de $u$ .
▶ $D(\Omega)$	Espace des fonctions de classe $C^\infty$ à support compact dans $\Omega$ .
▶ $L^p(\Omega), L^\infty(\Omega)$	Espace de Lebesgue standards sur $\Omega$ d'exposants $p$ .
▶ $W^{1,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev standard sur $\Omega$ d'exposant $p$ .
▶ $W_0^{1,p}(\Omega)$	L'adhérence de $D(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ .
▶ $W^{1,-p}(\Omega)$	Duale de $W_0^{1,p}(\Omega)$ .
▶ $E \hookrightarrow F$	L'injection continue de $E$ dans $F$ .
▶ $E \hookrightarrow_C F$	L'injection compacte de $E$ dans $F$ .
▶ $\underline{u}, \bar{u}$	Sous- et sur-solution.

---

# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Quelques préliminaires et outils de base</b>	<b>9</b>
1.1	Espace de Lebesgue . . . . .	9
1.2	Espace de Hölder . . . . .	11
1.2.1	Les espaces $C^k$ . . . . .	11
1.2.2	Les espaces $C^{k,\alpha}$ . . . . .	12
1.3	Espace de Sobolev . . . . .	12
1.3.1	L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ . . . . .	12
1.3.2	Injections de Sobolev . . . . .	13
1.3.3	L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ . . . . .	14
1.4	Fonction de Green . . . . .	15
1.5	Problème elliptique et régularité . . . . .	15
1.6	Le principe de maximum . . . . .	16
1.7	Quelques théorèmes utilisés . . . . .	17
1.8	Les valeurs et fonctions propres de Laplacien . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Problème elliptique singulier</b>	<b>19</b>
2.1	Position du problème . . . . .	19
2.2	Quelques résultats préliminaires . . . . .	19
2.3	Non-existence des solutions pour un problème elliptique singulier . . . . .	30
2.4	Existence et unicité des solutions pour un problème elliptiques singulier . . . . .	32
<b>3</b>	<b>système de Lane-Emden avec exposants négatifs</b>	<b>36</b>
3.1	Notation et position du problème . . . . .	36
3.2	Non-existence . . . . .	37
3.3	Existence . . . . .	39
3.4	$C^1$ -régularité . . . . .	47
3.5	Unicité . . . . .	50
	<b>Bibliography</b>	<b>52</b>

---

# Introduction

---

Les équations aux dérivées partielles font partie important des modèles mathématiques pour interpréter les phénomènes physique et biologiques, par exemple, dans l'étude des fluides non Newtoniens de couche limite pour des fluides visqueux...etc. Par conséquent, les EDP représentent un champ d'étude très vaste, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.

Dans ce travail, nous étudions le système elliptique suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{-p}v^{-q}, & u > 0 \text{ dans } \Omega \\ -\Delta v = u^{-r}v^{-s}, & u > 0 \text{ dans } \Omega \\ u = v = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

Où  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) est un domaine ouvert bornée et  $p, s \geq 0$  et  $q, r > 0$ . et le couple  $(u, v)$  est une solution de système (1) avec  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  tel que  $u, v > 0$  dans  $\Omega$ .

La première motivation pour l'étude du système (1) vient de l'équation dite de Lane-Emden (Voir [16],[13]).

$$-\Delta u = u^p \quad \text{dans } B_R(0), R > 0, \quad (2)$$

soumis à la condition aux limites de Dirihlet. En astrophysique, l'exposant  $p$  est appelé indice et des solutions à symétrie radiale positives de (2) sont utilisées pour décrire la structure des étoiles (nous renvoyons le lecteur intéressé au livre de Chandrasekhar [14] pour un compte rendu de l'équation ci-dessus ainsi que pour diverses techniques mathématiques pour décrire le comportement de la solution de l'équation de Lane-Emden).

Les systèmes de type (1) avec  $p, s \leq 0$  et  $q, r < 0$  ont reçu une attention considérable au cours de la dernière décennie (Voir par exemple, [5],[12]) et les références qui sont contenues). il été montré que pour une telle gamme d'exposants, le système (1) a une structure mathématique riche. Diverses techniques telles que la méthode du plan mobile, les identités de type Pohozaev, les arguments de remise à l'échelle ont été développées et convenablement adaptées pour traiter (1) dans ce cas.

Récemment, il y a eu un certain intérêt pour les systèmes de type (1). Dans [[10]-[11]] le système (1) est considéré sous l'hypothèse  $p, r < 0 < q, s$ . Ceci correspond au système singulier de Gierer-Meinhardt issu de la biologie moléculaire. Dans [6], les auteurs fournissent un bon dispositif de sous et de sur-solution qui s'applique aux système généraux à la fois dans un cadre

coopératif et non coopératif. Cette méthode a ensuite été utilisée pour discuter de la contrepartie singulière de certains modèles bien connus tels que Gierer-Meinhardt, Lotka-Volterra ou les systèmes prédateurs-proies.

Dans ce travail, nous intéresserons au système (1) dans le cas  $p, s \geq 0$  et  $q, r > 0$ . Ceci correspond à l'équation prototype  $p$  est négatif. Pour une telle gamme d'exposants, les méthodes mentionnées ci-dessus ne s'appliquent pas; une autre difficulté à traiter avec le système (1) vient du caractère non coopératif de notre système et de l'absence d'une structure variationnelle. Á son tour, notre approche repose sur le comportement aux limites des solutions à (2) (avec  $p < 0$ ) ou plus généralement, à des problèmes elliptique singuliers du type

$$\begin{cases} -\Delta u = k(d(x))u^{-p}, & u > 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3)$$

où

$$d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega), \quad x \in \bar{\Omega}.$$

et  $\Omega$  est un domaine ouvert bornée dans  $\mathbb{R}^n (n \geq 1), p > 0$  et  $k : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  est une fonction décroissante telle que  $\lim_{t \searrow 0} k(t) = \infty$ .

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude de l'existence, non-existence et l'unicité et régularité des solutions d'un système Lane-Emden d'équation elliptique avec exposants négatifs. posés sur un domaine borné et régulier  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^n$ , avec les conditions de Dirichlet.

Ce travail est constitué de trois chapitres : Dans le premier chapitre on donne les définitions et les notations qui seront utilisés dans la suite du travail.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de problème elliptique singulier, nous étudions l'existence, non-existence et l'unicité de solution de problème (3).

Le dernier chapitre est consacré à démontrer un théorème d'existence, non-existence et d'unicité et régularité pour un système Lane-Emden avec exposants négatifs.

# QUELQUES PRÉLIMINAIRES ET OUTILS DE BASE

Dans ce chapitre, Nous allons donner quelques notions et compléments mathématiques en relation avec le travail de ce mémoire, nous présentons en particulier certains espaces fonctionnels et leurs propriétés

## 1.1 Espace de Lebesgue

**Définition 1.1.** (Voir [4])

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $p$  un nombre réel supérieur ou égal à 1. on définit l'espace de Lebesgue  $L^p(\Omega)$  par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} \mid \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right) < \infty \right\}$$

On le munit de la norme suivante :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1$$

Quand  $p = 2$ , cette norme provient d'un produit scalaire :

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x) \cdot g(x) dx$$

On peut vérifier facilement que  $\|\cdot\|_{L^p}$  définit une norme sur l'espace vectoriel  $L^p(\Omega)$  ce qui montre que  $L^p(\Omega)$  est un espace normé.

**Définition 1.2.** (Voir [4]) On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \exists C > 0 \text{ telle que } |f| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

$L^\infty(\Omega)$  est une espace normée avec la norme suivante :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c : |f(x)| \leq c, \text{ p.p. } x \in \Omega\}$$

**Théorème 1.1.** (Voir [4])

1. L'espace  $L^p(\Omega)$  est un espace de Banach pour  $1 \leq p \leq \infty$ .
2. L'espace  $L^p(\Omega)$  est un espace de Séparable pour  $1 \leq p < \infty$ .
3. L'espace  $L^p(\Omega)$  est un espace de réflexif pour  $1 < p < \infty$ .

**Notation 1.1.** Soit  $1 \leq p \leq \infty$ , on désigne par  $p'$  l'exposant conjugué de  $p$  à savoir :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \text{ou} \quad p' = \frac{p}{p-1}$$

**Proposition 1.1. (Inégalité de Hölder)** (Voir [4])

Soient  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^{p'}(\Omega)$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ . Alors,  $fg \in L^1(\Omega)$  et

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

**Proposition 1.2. (Inégalité de Hölder généralisé)** (Voir [4])

Soient  $p, p', r \in [1, \infty]$  tel que :  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{r}$ , et  $f \in L^p(\Omega)$ ,  $g \in L^{p'}$ . Alors

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

**Proposition 1.3. (Inégalité de Young)** (Voir [4])

Soient  $a, b$  deux réels positifs et  $p, q > 1$ , Alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

De plus, pour tout

varepsilon  $> 0$ , il existe  $C(\varepsilon) > 0$  tel que :

$$ab \leq \varepsilon \cdot a^p + C(\varepsilon) b^q$$

**Théorème 1.2. (Convergence domineé de Lebesgue)** (Voir [4])

Soit  $(f_n)$  une suite des fonctions de  $L^1(\Omega)$ . On suppose que :

1.  $f_n \rightarrow f$  p.p. sur  $\Omega$ .

2. il existe une fonction  $g \in L^1(\Omega)$ ,  $\forall n$ ,  $|f_n(x)| \leq g(x)$  p.p. sur  $\Omega$ . Alors

$$f \in L^1(\Omega) \text{ et } \|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$$

**Théorème 1.3. ( de Lebesgue inverse)(Voir [4])**

Soit  $(f_n)$  une suite de  $L^p(\Omega)$ , tels que  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^p(\Omega)$ . Alors, il existe une sous suite extraite  $(f_{k_n})$  telle que :

- (i)  $f_{k_n(x)} \rightarrow f(x)$  p.p. sur  $\Omega$ .
- (ii)  $|f_{k_n}(x)| \leq h(x)$ ,  $\forall k$  et p.p. sur  $\Omega$  avec  $h \in L^p(\Omega)$ .

## 1.2 Espace de Hölder

### 1.2.1 Les espaces $C^k$

**Définition 1.3.** Soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert. On définit les espaces suivants :

- (i) pour  $k = 0$ ,  $C^0(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continues.
- (ii) pour  $k > 0$ ,  $C^k(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ayant toutes leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $k$  continues ; c-à-d  $D^\alpha f \in C^0(\Omega)$  pour tout  $\alpha \in A_m$ ,  $0 \leq m \leq k$ , telle que  $A_m$  est l'ensemble des multi-indices d'ordre  $m$ .
- (iii)  $C^0(\bar{\Omega})$  est l'ensemble des fonctions  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  continues et bornées. Nous munissons cet espace de la norme

$$\|f\|_{C^0(\bar{\Omega})} := \sup_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)|.$$

- (iv)  $C^k(\bar{\Omega})$  est l'ensemble des fonctions bornées dans  $\bar{\Omega}$  dont les dérivées jusqu'à l'ordre  $k$  peuvent être étendues continument sur  $\bar{\Omega}$  et sont bornées. Nous munissons cet espace de espace de la norme

$$\|f\|_{C^k(\bar{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{C^0(\bar{\Omega})}.$$

S'il n'y pas d'ambiguïté, nous omettons la dépendance en  $\bar{\Omega}$  et écrivons simplement

$$\|f\|_{C^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{C^0}.$$

- (v)  $C_{loc}^k(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f|_K \in C^k(K)$  pour toute compact  $K \subset \Omega$ . Nous donnons maintenant la définition des espace de Hölder.

## 1.2.2 Les espaces $C^{k,\alpha}$

**Définition 1.4.** Soient  $\Omega$  un ouvert  $\mathbb{R}^n$ , une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et un réel  $0 \leq \alpha \leq 1$ . On définit la quantité

$$[f]_{C^{0,\alpha}(\Omega)} := \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

Les espaces de Hölder sont définis par les ensembles suivants :

(i)  $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$  est l'ensemble des fonctions  $f \in C^0(\overline{\Omega})$  telle que

$$[f]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} < \infty.$$

(ii)  $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$  est l'ensemble des fonctions  $f \in C^k(\overline{\Omega})$  telles que

$$[D^\beta f]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} < \infty, \text{ où } \beta \in \mathbb{N}^n \text{ avec } |\beta| \leq k$$

(iii)  $C_{loc}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$  est l'ensemble des fonctions  $C^{k,\alpha}(K)$  pour tout compact  $K \subset \Omega$ .

**Remarque 1.1.** (i) L'espace  $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ , muni de la norme  $\|f\|_{C^{k,\alpha}}$ , est un espace de Banach.

(ii) Pour  $\alpha = 0$ , on a  $C^{k,0}(\overline{\Omega}) = C^k(\overline{\Omega})$ , on écrit

$$\|f\|_{C^{k,0}} = \|f\|_{C^k}.$$

## 1.3 Espace de Sobolev

### 1.3.1 L'espace $W^{1,p}(\Omega)$

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , On note par  $D(\Omega)$  l'espace des fonctions de classe  $C^\infty$  et à support compact inclus dans  $\Omega$ .

**Définition 1.5.** (Voir [4]) L'espace de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  est définie par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \exists g_i \in L^p(\Omega), \text{ telque : } \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \varphi dx, \forall \varphi \in D(\Omega), \forall i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

En particulier, pour  $p = 2$ , on pose :

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

pour  $u \in W^{1,2}(\Omega)$ , on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \text{ et } \nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

$\frac{\partial u}{\partial x_i}$  est appelé la dérivée faible par rapport  $x_i$  de  $u$ .

**Notation 1.2.** L'espace  $W^{1,p}$  est muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|\nabla u\|_{L^p}$$

(ou par fois, si  $1 < p < \infty$ , de la norme équivalente  $\left(\|u\|_{W^{1,p}} = [\|u\|_{L^p}^p + \|\nabla u\|_{L^p}^p]^{\frac{1}{p}}\right)$ ). L'espace  $H^1$  est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2}$$

la norme associée :

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$$

est équivalente de la norme  $W^{1,p}(\Omega)$ .

Voici quelques propriétés topologiques de l'espace de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$ .

**Proposition 1.4.** (Voir [4])

1. L'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est un espace de Banach pour  $1 \leq p \leq \infty$ .
2. L'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est réflexif pour  $1 \leq p < \infty$  et séparable pour  $1 \leq p < \infty$ .
3. L'espace  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert.

### 1.3.2 Injections de Sobolev

**Définition 1.6.** (Voir [4]) Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés.

1.  $E$  s'injecte de manière continue dans  $F$ , signifie que  $E \subset F$  et l'injection canonique  $j : E \rightarrow F$  est continue : c-à-d, il existe  $C > 0 : \|x\|_F \leq \|x\|_E$ . on note  $E \hookrightarrow F$ .
2.  $E$  s'injecte de manière compacte dans  $F$ , signifie  $E \subset F$  et l'injection  $j : E \rightarrow F$  est compact et on le note par  $E \hookrightarrow_C F$ .

**Notation 1.3.** Si  $1 \leq p < n \leq \infty$ , l'exposante de Sobolev de  $p^*$  est définie par :

$$p^* = \frac{np}{n-p}$$

ou

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$$

**Théorème 1.4.** (Voir [4]) Soit  $1 \leq p \leq \infty$ , On suppose que  $\Omega$  est un ouvert de classe  $C^1$ , borné, ou bien  $\Omega = \mathbb{R}_+^n$

1. Si  $1 \leq p < n$ , alors  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ .
2. Si  $p = n$ , alors  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty[$ .
3. Si  $p > n$ , alors  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ .

**Théorème 1.5. (Rellich-Kondrakov)**(Voir [4]) On suppose que  $\Omega$  borné de classe  $C^1$ . On a

1. Si  $1 \leq p < n$ , alors  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_C L^q(\Omega), \forall q \in [1, p^*[$ .
2. Si  $p = n$ , alors  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_C L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty[$ .
3. Si  $p > n$ , alors  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_C C(\overline{\Omega})$ .

### 1.3.3 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

**Définition 1.7.** (Voir [4]) Étant donné  $1 \leq p < \infty$ , On désigne par  $W_0^{1,p}(\Omega)$  l'adhérence de  $D(\Omega)$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$ , C-à-d

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$$

On note

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$$

L'espace  $\Omega$  est muni de la norme induite par  $W^{1,p}(\Omega)$ , l'espace  $H_0^1(\Omega)$  est muni du produit scalaire induit par  $H^1(\Omega)$ .

**Proposition 1.5.** (Voir [4]) L'espace  $W_0^{1,p}$  est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif pour  $1 < p < \infty$ . L'espace  $H_0^1$  est un espace de Hilbert séparable.

Le résultat suivante fournit une caractérisation essentielle de base des fonctions dans l'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

#### Proposition 1.6. (Inégalité de Poincaré)

Soit  $\Omega$  un ouvert borné, alors il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), (1 \leq p < \infty)$$

En particulier, sur  $W_0^{1,p}(\Omega)$  la quantité  $\|\nabla u\|_{L^p}$  est une norme équivalente à la norme usuelle de  $W^{1,p}(\Omega)$ .

## 1.4 Fonction de Green

**Définition 1.8.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . On définit la fonction de Green  $G$  pour le Laplacien par l'expression suivante

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy$$

où  $-\Delta u = f$  dans  $\Omega$  et  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ . On donne maintenant quelques propriétés de cette fonction.

**Proposition 1.7.** (Voir [2]) Pour  $x, y \in \Omega, x \neq y$ , de la fonction de Green  $G(x, y)$  de  $-\Delta$  dans  $\Omega$  vérifie :

$$|G(x, y)| \leq \begin{cases} \frac{C}{|x - y|^{n-2}}, & n > 2, \\ C(|\ln|x - y|| + 1), & n = 2; \end{cases} \quad (1.1)$$

$$|G(x, y)| \leq \begin{cases} \frac{Cd(y)}{|x - y|^{n-1}}, & n > 2, \\ Cd(y) \frac{(|\ln|x - y|| + 1)}{|x - y|}, & n = 2; \end{cases} \quad (1.2)$$

$$|G_x(x, y)| \leq \min \left\{ \frac{C}{|x - y|^{n-1}}, \frac{Cd(x)}{|x - y|^n} \right\}, \quad n \geq 2; \quad (1.3)$$

$$|G_{xx}(x, y)| \leq \min \left\{ \frac{C}{|x - y|^n}, \frac{Cd(y)}{|x - y|^{n+1}} \right\}, \quad n \geq 2 \quad (1.4)$$

Où la constante  $C$  ne dépend que de  $\Omega$ .

**Lemme 1.1.** (Voir [2]) Pour tout  $x_1, x_2 \in \Omega$ . tels que  $d(x_1, x_2) < \delta$ , il existe un chemin  $\varepsilon(t) : [0, 1] \rightarrow \Omega$  satisfaisant

$$|\varepsilon'(t)| \leq C d(x_1, x_2).$$

## 1.5 Problème elliptique et régularité

**Théorème 1.6. (Lax-Milgram)** Soit  $H$  un espace de Hilbert. On suppose que

$$B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$$

est une application bilinéaire (forme bilinéaire), vérifiant les deux conditions suivantes

(i)  $B$  est continue, c-à-d :

$$|B(u, v)| \leq c \|u\|_H \|v\|_H$$

(ii)  $B$  est coercive (ou elliptique) sur  $H$ , c-à-d :

$$\exists \beta > 0 : B(u, u) \geq \beta \|u\|^2$$

Soit  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire continue. Alors il existe un élément unique  $u \in H$  tel que

$$B(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H$$

**Théorème 1.7.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné telle que  $\partial\Omega$  de  $C^{2,\alpha}$ . On supposons que  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  est une solution classique de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où  $f \in C^\alpha(\Omega)$ . Alors  $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  et satisfait l'estimation

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C \left( \|f\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} + \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u_0\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \right)$$

où la constante  $C$  ne dépend que de  $\Omega, n, \alpha$ .

## 1.6 Le principe de maximum

**Théorème 1.8.** Voir([7]) Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  et soit  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  tel que

$$\begin{cases} -\Delta u \leq 0, & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Alors

$$u \leq 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Si :

$$\begin{cases} -\Delta u \geq 0, & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Alors

$$u \geq 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

**Lemme 1.2. (lemme de Hopf)**(Voir [7]) Soit  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  tel que

$$\begin{cases} -\Delta u \leq 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et

$$u(x) < 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Alors

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Où  $\frac{\partial u}{\partial \eta}$  est la dérivée normale extérieure de  $u$  :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} := \nabla u \eta.$$

**Théorème 1.9.** Voir ([7]) Soit  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ .

Si

$$\begin{cases} -\Delta u \leq 0, & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Alors

$$u < 0 \quad \text{ou} \quad u = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Si :

$$\begin{cases} -\Delta u \geq 0, & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Alors

$$u > 0 \quad \text{ou} \quad u = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

## 1.7 Quelques théorèmes utilisés

**Théorème 1.10.** (Théorème du point fixe de type Schauder) (Voir [3]) Soit  $C$  un sous ensemble non vide, convexe d'un espace de Banach  $E$  et supposons  $T : C \rightarrow C$  une application continue telle que  $T(C)$  est relativement compact. Alors  $T$  admet un point fixe.

**Théorème 1.11.** (d'Ascoli-Arzelà) (Voir [4]) Soit  $K$  un espace métrique compact et  $H$  un sous-ensemble borné de  $C(K)$ . On suppose que  $H$  est uniformément équicontinu, c-à-d :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que } d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \forall f \in H.$$

Alors  $H$  est relativement compact dans  $C(K)$ .

## 1.8 Les valeurs et fonctions propres de Laplacien

**Théorème 1.12.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné et régulier de  $\mathbb{R}^n$ . Il existe une suite des valeurs et fonctions propres  $(\lambda_n, \varphi_n) \in \mathbb{R}^* \times H_0^1(\Omega)$  de l'opérateur Laplacien avec les conditions homogène de Dirichlet. C-à-d pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(\lambda_n, \varphi_n)$  satisfait

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_n = \lambda_n \varphi_n & \text{dans } \Omega \\ \varphi_n = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

De plus  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \rightarrow +\infty$ . et si  $\Omega$  est de classe  $C^\infty$  alors  $\varphi_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$ . et  $\varphi_1$  est simple et de signe constante.  $\lambda_1$  est caractérisé par  $\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^1, u \neq 0} \frac{\int_{\Omega} u^2}{\int_{\Omega} |\nabla u|^2} dx$ .

On donne donc la définition suivante :

**Définition 1.9.** -  $\lambda_1$  s'appelle la premier valeur propre de Laplacien.

- la premier fonction propre de Laplacien est la fonction  $\varphi_1$  positive associée à la premier valeur propre  $\lambda_1$  tel que  $\|\varphi_1\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$ .

# PROBLÈME ELLIPTIQUE SINGULIER

Dans ce chapitre, nous allons étudier un problème elliptique singulier, nous allons donner des résultats d'existence et de régularité ainsi le comportement de la solution au voisinage de bord pour ce type des problèmes elliptiques singuliers.

## 2.1 Position du problème

Soit le problème elliptique singuliers suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = k(d(x))u^{-p}, & u > 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

où

$$d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega), \quad x \in \bar{\Omega}.$$

et  $\Omega$  est un domaine ouvert bornée dans  $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ ,  $p > 0$  et  $k : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  est une fonction décroissante telle que  $\lim_{t \searrow 0} k(t) = \infty$ .

## 2.2 Quelques résultats préliminaires

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = \phi(x)u^{-p}, & u > 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.2)$$

où

$$d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega), \quad x \in \bar{\Omega}.$$

et  $\Omega$  est un domaine ouvert bornée et régulier dans  $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ ,  $p > 0$  et  $\phi : \Omega \rightarrow (0, \infty)$  une fonction continue.

**Définition 2.1.** (i) Une solution du problème 2.2 est une fonction  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  qui satisfait

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \phi(x) u^{-p}, & u(x) > 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

(ii) Une sous-solution du problème 2.2 est une fonction  $\underline{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  telle que

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u}(x) \leq \phi(x) \underline{u}^{-p}, & \underline{u}(x) > 0 \text{ dans } \Omega \\ \underline{u} \leq 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

(iii) Une sur-solution du problème 2.2 est une fonction  $\bar{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  telle que

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u}(x) \geq \phi(x) \bar{u}^{-p}, & \bar{u}(x) > 0 \text{ dans } \Omega \\ \bar{u} \leq 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Le théorème suivant donne un condition suffisante pour démontrer l'existence de la solution du problème 2.2.

**Théorème 2.1.** (Voir [15]) Si le problème (2.2) admet une sous-solution et sur solution  $\underline{u}$  et  $\bar{u}$  respectivement telles que  $\underline{u} \leq \bar{u}$  dans  $\Omega$ . Alors, il existe une solution  $u$  du problème 2.2 satisfait  $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ .

**Proposition 2.1.** Soit  $p \geq 0$  et  $\phi : \Omega \rightarrow (0, \infty)$  une fonction continue. si  $\underline{u}$  est une sous solution et  $\bar{u}$  est une sur-solution du problème (2.2) Alors  $\underline{u} \leq \bar{u}$  dans  $\Omega$ . De plus le problème admet au plus une solution.

*Démonstration.* Si  $p = 0$ , on a

$$-\Delta \underline{u} \leq \phi(x) \quad \text{et} \quad -\Delta \bar{u} \geq \phi(x)$$

Donc,  $-\Delta \underline{u} + \Delta \bar{u} \leq 0$ . D'où,  $-\Delta(\underline{u} - \bar{u}) \leq 0$ .

Alors, D'après le théorème principe de maximum 1.8  $\underline{u} - \bar{u} \leq 0$  et donc  $\underline{u} \leq \bar{u}$ .

Si  $p > 0$ , Par absurde, on suppose que  $\omega = \{x \in \Omega : \bar{u}(x) < \underline{u}(x)\}$  n'est pas vide et soit  $w = \underline{u} - \bar{u}$ .

On a

$$-\Delta w = -\Delta(\underline{u} - \bar{u}) = -\Delta(\underline{u}) + \Delta(\bar{u})$$

et

$$-\Delta \underline{u}(x) \leq \phi(x) \underline{u}(x)^{-p} \quad \text{et} \quad \Delta \bar{u}(x) \leq -\phi(x) \bar{u}(x)^{-p}$$

Alors

$$-\Delta w \leq \phi(x) [\underline{u}^{-p} - \bar{u}^{-p}] < 0 \quad \text{dans } \omega$$

Donc

$$\begin{cases} -\Delta w < 0, & \text{dans } \omega \\ w = 0, & \text{sur } \partial\omega \end{cases}$$

Donc D'après le principe de maximum forte (Théorème 1.9), on a  $w < 0$  ou  $w \equiv 0$ . Mais  $w = \underline{u} - \bar{u} > 0$  sur  $\omega$ . Contradiction. Donc  $\omega = \emptyset$ . C'est à dire  $\underline{u} \leq \bar{u}$ .

□

**Proposition 2.2.** Soit  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  tel que  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$  et

$$0 \leq -\Delta u \leq C d^{-a}(x) \quad \text{dans } \Omega$$

où  $0 < a < 2$  et  $C > 0$ . Alors,  $u \in C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$ , pour toute  $0 < \gamma < 1$ . en outre, Si  $0 < a < 1$ . Alors,  $u \in C^{1,1-a}(\bar{\Omega})$ .

*Démonstration.* Soit  $G$  la fonction de Green pour l'opérateur de Laplace. Ainsi, pour tout  $x \in \Omega$  on a

$$u(x) = - \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(y) dy, \quad x \in \Omega.$$

Soient  $x_1, x_2 \in \Omega$ . Alors

$$\begin{aligned} |u(x_1) - u(x_2)| &\leq - \int_{\Omega} |G(x_1, y) - G(x_2, y)| \Delta u(y) dy \\ &\leq c \int_{\Omega} |G(x_1, y) - G(x_2, y)| d(y)^{-a} dy \\ &\leq c \int_{\Omega \setminus B_R(x_1)} \underbrace{|G(x_1, y) - G(x_2, y)|}_I d(y)^{-a} dy \\ &\quad + c \int_{\Omega \setminus B_R(x_1)} \underbrace{|G(x_1, y) - G(x_2, y)|}_{II} d(y)^{-a} dy \end{aligned}$$

où  $R = (C + 4)d(x_1, x_2)$ ,  $C > 0$  comme dans le lemme (1.1)

$$\begin{aligned} I &\leq \int_{\Omega \setminus B_R(x_1)} |G_x(\varepsilon(t), y)| \cdot |\varepsilon'(t)| dt d(y)^{-a} dy \\ &\leq C d(x_1, x_2) \int_{\Omega \setminus B_R(x_1)} \int_0^1 \frac{\min\{|\varepsilon(t) - y|, d(y)\}}{|\varepsilon(t) - y|^n} dt d(y)^{-a} dy \\ &\leq C d(x_1, x_2) \int_{\Omega \setminus B_R(x_1)} \frac{\min\{\min|x_1 - y|, d(y)\}}{|x_1 - y|^n} d(y)^{-a} dy. \end{aligned}$$

Ici nous avons utilisé

$$\begin{aligned} |\varepsilon(t) - y| &\geq |x_1 - y| - |x_1 - \varepsilon(t)| \\ &\geq (C + 4)d(x_1, x_2) - C d(x_1, x_2) \\ &\geq 4d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

et on a par le théorème des accroissement finis

$$\begin{aligned} |\varepsilon(t) - y| &\leq |x_1 - y| + |x_1 - \varepsilon(t)| \\ &\leq (C + 4)d(x_1, x_2) + C d(x_1, x_2) \\ &\leq (2C + 4)d(x_1, x_2) \\ &\leq \frac{2C + 4}{C + 4} |x_1 - y| \end{aligned}$$

D'autre parte, On vérifie facilement que

$$\min\{|x_1 - y|, d(y)\}d(y)^{-a} \leq |x_1 - y|^{1-a}, \quad a < 2.$$

Alors

$$\begin{aligned} I &\leq C d(x_1, x_2) \int_{\Omega \setminus B_R(x_1)} \frac{1}{|x_1 - y|^{n+a-1}} d(y) \quad (\text{ou } 1 - a > 0) \\ &\leq C d(x_1, x_2) \int_R^\infty r^{-(n+a)+1} \cdot r^{n-1} dr \\ &\leq C d(x_1, x_2) R^{1-a} = C d(x_1, x_2)^{2-a}. \end{aligned}$$

Nous estimons maintenant II

$$\begin{aligned} II &\leq \int_{B_R(x_1)} |G(x_1, y) - G(x_2, y)| d(y)^{-a} dy \\ &\leq \int_{B_R(x_1)} |G(x_1, y)| d(y)^{-a} dy \\ &\quad + \int_{B_{R+d(x_1, x_2)}(x_2)} |G(x_2, y)| d(y)^{-a} dy \end{aligned}$$

pour  $n > 0$

$$\begin{aligned} &\leq C \int_{B_R(x_1)} \frac{1}{|x_1 - y|^{n-2}} d(y)^{-a} dy. \\ &\quad + C \int_{B_{R+d(x_1, x_2)}(x_2)} \frac{1}{|x_2 - y|^{n-2}} d(y)^{-a} dy. \end{aligned}$$

On a  $d(y) \geq R$  alors  $d(y)^{-a} \leq R^{-a}$

Donc

$$\begin{aligned} &\leq C R^{-a} \int_{B_R(x_1)} \frac{1}{|x_1 - y|^{n-2}} dy + C R^{-a} \int_{B_{R+d(x_1, x_2)}(x_2)} \frac{1}{|x_2 - y|^{n-2}} dy \\ &\leq C R^{-a} \int_0^R r^{-n+2} r^{n-1} dr = C R^{2-a} = C d(x_1, x_2)^{2-a} \quad \text{pour } 0 < 2 - a < 1 \end{aligned}$$

Pour  $n = 2$

$$\begin{aligned} II &\leq C \int_{B_R(x_1)} (\ln(|x_1 - y|) + 1) d(y)^{-a} d(y) \\ &\quad + C \int_{B_{R+d(x_1, x_2)}(x_2)} (\ln(|x_2 - y|) + 1) d(y)^{-a} dy \end{aligned}$$

et on a  $d(y)^{-a} \leq R^{-a}$

$$\begin{aligned} &\leq C R^{-a} \int_{B_R(x_1)} (\ln(|x_1 - y|) + 1) dy + C R^{-a} \int_{B_{R+d(x_1, x_2)}(x_2)} (\ln(|x_2 - y|) + 1) dy \\ &\leq C R^{-a} \int_0^R (r \ln r + r) dr + C R^{-a} \int_0^R (r \ln r + r) dr \\ &\leq C R^{-a} R^2 \left( \ln R + \frac{1}{4} \right) = C R^{2-a} = C d(x_1, x_2)^{2-a} \quad \text{pour } 0 < 2 - a < 2 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} |u(x_1) - u(x_2)| &\leq C d(x_1, x_2)^{2-a} \\ &\leq C |x_1 - x_2|^\gamma \quad \text{pour } 0 < \gamma < 1, \end{aligned}$$

Alors,  $u \in C^{0,\gamma}(\Omega)$ .

Lorsque  $a < 1$ , d'après la formule de Green, nous avons

$$\nabla u(x) = - \int_{\Omega} G_x(x, y) \Delta u(y) dy, \quad \forall x \in \Omega.$$

(Voir [2]. Ensuite, si  $x_1, x_2 \in \Omega$ . et  $d(x_1, x_2) < \delta$ , nous avons

$$\begin{aligned} |\nabla u(x_1) - \nabla u(x_2)| &\leq - \int_{\Omega} |G_x(x_1, y) - G_x(x_2, y)| \Delta u(y) dy \\ &\leq c \int_{\Omega} |G_x(x_1, y) - G_x(x_2, y)| d(y)^{-a} dy \\ &\leq c \int_{\Omega \setminus B_R(x_1)} \underbrace{|G_x(x_1, y) - G_x(x_2, y)|}_I d(y)^{-a} dy \\ &\quad + c \int_{\Omega \setminus B_R(x_1)} \underbrace{|G_x(x_1, y) - G_x(x_2, y)|}_{II} d(y)^{-a} dy \end{aligned}$$

où  $R = (C + 4)d(x_1, x_2)$ ,  $C > 0$  comme dans le lemme (1.1)

$$\begin{aligned} I &\leq \int_{\Omega \setminus B_R(x_1)} |G_{xx}(\varepsilon(t), y)| \cdot |\varepsilon'(t)| dt d(y)^{-a} dy \\ &\leq C d(x_1, x_2) \int_{\Omega \setminus B_R(x_1)} \int_0^1 \frac{\min\{|\varepsilon(t) - y|, d(y)\}}{|\varepsilon(t) - y|^{n+1}} dt d(y)^{-a} dy \\ &\leq C d(x_1, x_2) \int_{\Omega \setminus B_R(x_1)} \frac{\min\{\min|x_1 - y|, d(y)\}}{|x_1 - y|^{n+1}} d(y)^{-a} dy. \end{aligned}$$

Ici nous avons utilisé

$$\begin{aligned} |\varepsilon(t) - y| &\geq |x_1 - y| - |x_1 - \varepsilon(t)| \\ &\geq (C + 4)d(x_1, x_2) - C d(x_1, x_2) \\ &\geq 4d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

et on a par le théorème des accroissement finis

$$\begin{aligned} |\varepsilon(t) - y| &\leq |x_1 - y| + |x_1 - \varepsilon(t)| \\ &\leq (C + 4)d(x_1, x_2) + C d(x_1, x_2) \\ &\leq (2C + 4)d(x_1, x_2) \\ &\leq \frac{2C + 4}{C + 4} |x_1 - y| \end{aligned}$$

D'autre parte, on vérifie facilement que

$$\min\{|x_1 - y|, d(y)\}d(y)^{-\alpha} \leq |x_1 - y|^{1-a}, \quad \alpha < 1.$$

Alors

$$\begin{aligned} I &\leq C d(x_1, x_2) \int_{\Omega \setminus B_R(x_1)} \frac{1}{|x_1 - y|^{n+a}} d(y) \quad (\text{ou } 1 - a > 0) \\ &\leq C d(x_1, x_2) \int_R^\infty r^{-(n+a)} \cdot r^{n-1} dr \\ &\leq C d(x_1, x_2) R^{-a} = C d(x_1, x_2)^{1-a}. \end{aligned}$$

Nous estimons maintenant  $II$

$$\begin{aligned} II &\leq \int_{B_R(x_1)} |G_x(x_1, y) - G_x(x_2, y)| d(y)^{-a} dy \\ &\leq \int_{B_R(x_1)} |G_x(x_1, y)| d(y)^{-a} dy \\ &\quad + \int_{B_{R+d(x_1, x_2)}(x_2)} |G_x(x_2, y)| d(y)^{-a} dy \\ &\leq C \int_{B_R(x_1)} \frac{\min\{|x_1 - y|, d(y)\}}{|x_1 - y|^n} d(y)^{-a} dy \\ &\quad + \int_{B_{R+d(x_1, x_2)}(x_2)} \frac{\min\{|x_2 - y|, d(y)\}}{|x_2 - y|^n} d(y)^{-a} dy. \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned} II &\leq C \int_{B_R(x_1)} |x_1 - y|^{-n-a+1} dy + C \int_{B_{R+d(x_1, x_2)}(x_2)} |x_2 - y|^{-n-a+1} dy \\ &\quad (\text{Par } 1 - a > 0) \\ &\leq C \int_0^{R+d(x_1, x_2)} r^{-a} dr \leq C d(x_1, x_2)^{1-a}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} |\nabla u(x_1) - \nabla u(x_2)| &\leq 2C d(x_1, x_2)^{1-a} \\ &\leq C |x_1 - x_2|^{1-a} \end{aligned}$$

Alors  $u \in C^{1,1-a}(\overline{\Omega})$ . □

**Proposition 2.3.** Soit  $(\lambda_1, \varphi_1)$  la première valeur propre/fonction propre de  $-\Delta$  dans  $\Omega$ . Alors

$$C_0 d(x) \leq \varphi_1(x) \leq d(x), \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.3)$$

Où  $0 < C_0 < 1$ . En particulier, il existe un compact  $K \Subset \Omega$  et  $C > 0$ , tel que :

$$|\nabla \varphi_1| > C \quad \text{dans } \Omega \setminus K. \quad (2.4)$$

*Démonstration.* En utilisant la régularité (1.7) de  $\Omega$ , on aura  $\varphi_1(x) \in C^2(\bar{\Omega})$ , et d'après théorème des accroissement finis

$$|\varphi_1(x) - \varphi_1(y)| \leq C|x - y|, \quad \text{pour tout } y \in \partial\Omega.$$

Ce que implique

$$|\varphi_1(x)| \leq C|x - y|, \quad y \in \partial\Omega.$$

Donc

$$|\varphi_1(x)| \leq C d(x).$$

D'autre part, par le principe de maximum fort (voir le théorème (1.9)), on a  $\varphi_1 > 0$ , sur  $\Omega$ .

D'après le lemme de Hopf(1.2), on a

$$|\nabla\varphi_1(x)| > 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

comme  $\nabla\varphi_1$  est continue on a

$$|\nabla\varphi_1(x)| \geq \inf_{y \in \partial\Omega} |\nabla\varphi_1(y)| = |\nabla\varphi_1(y^*)| = C > 0, \quad \text{sur } \Omega_\varepsilon. \quad (2.5)$$

où  $\Omega_\varepsilon = \{x \in \bar{\Omega} / d(x) \leq \varepsilon\}$  telle que  $\varepsilon > 0$  est assez petit.

Et on a pour  $x_0 \in \Omega$ , d'après le théorème des accroissement fini, il existe  $0 < \theta < t$ , tel que

$$\begin{aligned} |\varphi_1(x_0 - tn) - \varphi_1(x_0)| &= |t| |n \cdot \nabla u(x_0 - \theta n)| \\ |\varphi_1(x_0 - tn)| &= t \left| \frac{\partial u}{\partial n}(x_0 - \theta n) \right| \geq Ct = C d(x_0 - tn) \end{aligned}$$

Alors

$$\varphi_1(x) \geq C_1 d(x) \quad x \in \Omega_\varepsilon$$

donc

$$\varphi_1 > 0 \quad \text{sur } K = \Omega \setminus \Omega_\varepsilon \text{ est compact.}$$

On a

$$\varphi_1(x) \geq \inf \varphi_1(x) = C_0, \quad \forall x \in \Omega \setminus \Omega_\varepsilon.$$

Et

$$\varphi_1(x) \geq \frac{C_0}{d(x)} d(x) \geq C_2 d(x), \quad \text{car } d(x) \leq C.$$

D'où

$$\varphi_1(x) \geq C_0 d(x), \quad \text{avec } C_0 = \min\{C_1, C_2\}.$$

Alors en normalisant  $\varphi_1$  par une constante appropriée, on obtient

$$C_0 d(x) \leq \varphi_1(x) \leq d(x) \quad (2.6)$$

□

**Proposition 2.4.** Soient  $p \geq 0$  et  $0 < q < 2$ . il existe  $C > 0$  et  $A > \text{daim}(\Omega)$  telle que toute sur-solution  $u$  de

$$\begin{cases} -\Delta u = d(x)^{-q}u^{-p}, & u > 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.7)$$

satisfait :

(i)  $\bar{u}(x) \geq Cd(x)$  dans  $\Omega$ , si  $p + q = 1$ .

(ii)  $\bar{u}(x) \geq Cd(x) \log^{\frac{1}{1+p}} \left( \frac{A}{d(x)} \right)$  dans  $\Omega$ , si  $p + q = 1$ .

(iii)  $\bar{u}(x) \geq Cd(x)^{\frac{2-q}{1+p}}$  dans  $\Omega$ , si  $p + q > 1$ .

*Démonstration.* (i) Soit

$$w(x) = C \varphi_1(x). \quad x \in \Omega.$$

et on a

$$C d(x) \leq \varphi_1(x) \leq d(x)$$

D'où

$$-\Delta w = C \lambda_1 \varphi_1(x) \leq C \lambda_1 d(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

On a

$$\begin{aligned} d(x)^{-q}w^{-p} &= C^{-p} d(x)^{-q} d(x)^{-p} = C^{-p} d(x)^{-(q+p)} \\ &\geq C \lambda_1 d(x) \quad \text{pour } C \text{ assez petit.} \\ &= -\Delta w \end{aligned}$$

Alors  $w$  est une sous-solution. Donc

$$\Delta w - \Delta \bar{u} \leq d(x)^{-q}w^{-p} - d(x)^{-q} \bar{u}^{-p}$$

En multipliant par  $(w - \bar{u})^+$

$$0 \leq \int_{\Omega} |\nabla(w - \bar{u})^+|^2 dx \leq \int_{\Omega} d(x)^{-q}(w^{-p} - \bar{u}^{-p})(w - \bar{u})^+ dx \leq 0$$

D'où

$$\bar{u}(x) \geq w(x) = C \varphi_1(x) \geq C d(x), \quad \text{dans } \Omega.$$

(ii) Soit

$$w(x) = \varphi_1(x) \log^b \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right), \quad x \in \Omega.$$

Où  $b = \frac{1}{1+p} \in (0, 1)$ . un calcul simple donne

$$\begin{aligned}\partial_x w &= \partial_x \varphi_1(x) \log^b \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) - b \partial_x \varphi_1(x) \log^{b-1} \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) \\ &= \partial_x \varphi_1(x) \left( \log^b \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) - b \log^{b-1} \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) \right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\partial_x^2 w &= \partial_x^2 \varphi_1(x) \left( \log^b \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) - b \log^{b-1} \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) \right) \\ &+ \partial_x^2 \varphi_1(x) \left( -b \frac{\partial_x \varphi_1(x)}{\varphi_1(x)} \log^{b-1} \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) + b(b-1) \frac{\partial_x \varphi_1(x)}{\varphi_1(x)} \log^{b-2} \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) \right)\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}-\Delta w &= \lambda_1 \varphi_1(x) \log^b \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) + b(|\nabla \varphi_1(x)|^2 - \lambda_1 \varphi_1^2) \varphi_1^{-1} \log^{b-1} \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) \\ &+ b(1-b)|\nabla \varphi_1(x)|^2 \varphi_1^{-1} \log^{b-2} \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) \quad \text{dans } \Omega.\end{aligned}$$

En utilisant (2.4), nous pouvons trouver  $C_1 > 0$  tel que

$$-\Delta w \leq C_1 \varphi_1^{-1} \log^{b-1} \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) \quad \text{dans } \Omega.$$

Alors,

$$-\Delta w \leq C_1 \varphi_1^{-q} \log \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) w^{-p} \quad \text{dans } \Omega.$$

En utilisant (2.3) on trouve  $m > 0$  assez petit telle que

$$-\Delta m w \leq C \varphi_1^{-q} \log \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) w^{-p} \quad \text{dans } \Omega.$$

par le principe de maximum  $\bar{u} \geq m w$  dans  $\Omega$  et par (2.3) on obtient que  $u$  satisfait

$$\bar{u}(x) \geq C d(x) \log^{\frac{1}{1+p}} \left( \frac{A}{d(x)} \right), \quad \text{dans } \Omega.$$

(iii) Soit

$$w(x) = C \varphi_1(x)^b, \quad x \in \Omega.$$

Où  $b = \frac{2-q}{1+p} \in (0, 1)$ . un calcul simple donne, On a

$$-\Delta w = C \varphi_1(x)^{b-2}, \quad x \in \Omega.$$

On a

$$\begin{aligned} d(x)^{-q}w^{-p} &= C^{-p} d(x)^{-q} d(x)^{-pb} = C^{-p} d(x)^{-(q+pb)} \\ &\geq C d(x)^{-(q+pb)} \quad \text{pour } C \text{ assez petit.} \\ &= -\Delta w \end{aligned}$$

Alors  $w$  est une sous-solution. Donc

$$\Delta w - \Delta \bar{u} \leq d(x)^{-q}w^{-p} - d(x)^{-q} \bar{u}^{-p}$$

En multipliant par  $(w - \bar{u})^+$

$$0 \leq \int_{\Omega} |\nabla(w - \bar{u})^+|^2 dx \leq \int_{\Omega} d(x)^{-q}(w^{-p} - \bar{u}^{-p})(w - \bar{u})^+ dx \leq 0$$

D'où

$$\bar{u}(x) \geq w(x) = C \varphi_1(x)^{\frac{2-q}{1+p}} \geq C d(x)^{\frac{2-q}{1+p}}, \quad \text{dans } \Omega.$$

□

Une résultat similaire est valable pour la sous-solution de(2.7)

**Proposition 2.5.** Soient  $p \geq 0$  et  $0 < q < 2$ . il existe  $C > 0$  et  $A > \dim(\Omega)$  telle que toute sous-solution  $u$  de

$$\begin{cases} -\Delta u = d(x)^{-q}u^{-p}, & u > 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.8)$$

satisfait :

- (i)  $\underline{u}(x) \leq Cd(x)$  dans  $\Omega$ , si  $p + q = 1$ .
- (ii)  $\underline{u}(x) \leq Cd(x) \log^{\frac{1}{1+p}} \left( \frac{A}{d(x)} \right)$  dans  $\Omega$ , si  $p + q = 1$ .
- (ii)  $\underline{u}(x) \leq Cd(x)^{\frac{2-q}{1+p}}$  dans  $\Omega$ , si  $p + q > 1$ .

*Démonstration.* (i) Soit

$$w(x) = C \varphi_1(x). \quad x \in \Omega.$$

D'où

$$-\Delta w = C \lambda_1 \varphi_1(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

En utilisant (2.3) on obtient

$$-\Delta w \geq C d(x), \quad \text{avec } C \text{ assez grand.}$$

Alors  $w$  est une sur-solution. Donc

$$-(\Delta w + \Delta \underline{u}) \leq -d(x)^{-q} \underline{u}^{-p} - d(x)^{-q} w^{-p}$$

En multipliant par  $(\underline{u} - w)^+$

$$0 \leq \int_{\Omega} |\nabla(\underline{u} - w)^+|^2 dx \leq \int_{\Omega} d(x)^{-q} (\underline{u}^{-p} - w^{-p}) (\underline{u} - w)^+ dx \leq 0$$

D'où

$$\underline{u}(x) \leq w(x) = C \varphi_1(x) \leq C d(x), \quad \text{dans } \Omega.$$

(ii) Soit

$$w(x) = \varphi_1(x) \log^b \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right), \quad x \in \Omega.$$

Où  $b = \frac{1}{1+p} \in (0, 1)$ . un calcul simple donne

On a

$$\begin{aligned} -\Delta w &= \lambda_1 \varphi_1(x) \log^b \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) + b(|\nabla \varphi_1(x)|^2 - \lambda_1 \varphi_1^2) \varphi_1^{-1} \log^{b-1} \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) \\ &\quad + b(1-b)|\nabla \varphi_1(x)|^2 \varphi_1^{-1} \log^{b-2} \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) \quad \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

En utilisant (2.4), nous pouvons trouver  $C_1 > 0$  tel que

$$-\Delta w \geq C_1 \varphi_1^{-1} \log^{b-1} \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) \quad \text{dans } \Omega.$$

Alors,

$$-\Delta w \geq C_1 \varphi_1^{-q} \log \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) w^{-p} \quad \text{dans } \Omega.$$

En utilisant (2.3) on trouve  $M > 1$  assez grand telle que

$$-\Delta mw \geq C \varphi_1^{-q} \log \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) w^{-p} \quad \text{dans } \Omega.$$

par le principe de maximum  $\underline{u} \leq Mw$  dans  $\Omega$  et par (2.3) on obtient que  $u$  satisfait

$$\underline{u}(x) \leq C d(x) \log^{\frac{1}{1+p}} \left( \frac{A}{d(x)} \right), \quad \text{dans } \Omega$$

(iii) Soit

$$w(x) = C \varphi_1(x)^b, \quad x \in \Omega.$$

Où  $b = \frac{2-q}{1+p} \in (0, 1)$ . un calcul simple donne, On a

$$-\Delta w = C \varphi_1(x)^{b-2}, \quad x \in \Omega.$$

On a

$$\begin{aligned} d(x)^{-q}w^{-p} &= C^{-p} d(x)^{-q} d(x)^{-pb} = C^{-p} d(x)^{-(q+pb)} \\ &\leq C d(x)^{-(q+pb)} \quad \text{pour } C \text{ assez grand.} \\ &= -\Delta w \end{aligned}$$

Alors  $w$  est une sur-solution. Donc

$$-(\Delta w - \Delta \underline{u}) \leq d(x)^{-q} u^{-p} - d(x)^{-q} w^{-p}$$

En multipliant par  $(\underline{u} - w)^+$

$$0 \leq \int_{\Omega} |\nabla(\underline{u} - w)^+|^2 dx \leq \int_{\Omega} d(x)^{-q} (\underline{u}^{-p} - w^{-p})(\underline{u} - w)^+ dx \leq 0$$

D'où

$$\underline{u}(x) \leq w(x) = C \varphi_1(x)^{\frac{2-q}{1+p}} \leq C d(x)^{\frac{2-q}{1+p}}, \quad \text{dans } \Omega.$$

□

## 2.3 Non-existence des solutions pour un problème elliptique singulier

**Théorème 2.2.** Soient  $p \geq 0$ ,  $A \geq \text{diam}(\Omega)$  et  $k : (0, A) \rightarrow (0, \infty)$  est une fonction décroissante telle que :

$$\int_0^A tk(t)dt = \infty. \quad (2.9)$$

Alors, le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u \geq k(d(x))u^{-p}, & u > 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.10)$$

n'a pas de solution  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ .

*Démonstration.* Par absurde, On suppose qu'il existe une solution  $u_0$  de (2.10). Pour toute  $0 < \varepsilon < A - \text{diam}(\Omega)$ , on considère le problème approché suivant

$$\begin{cases} -\Delta u \geq k(d(x) + \varepsilon)(u + \varepsilon)^{-p}, & u > 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.11)$$

Alors,  $\bar{u} = u_0$  est une sur-solution de (2.11). De plus, si  $w$  est la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta w = 1, & \text{dans } \Omega \\ w = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Alors, d'après le théorème de régularité elliptique (1.7),  $w \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ . Donc, en posant  $\underline{u} = c w$  avec  $c$  assez petit. On a  $\underline{u}$  est une sous-solution de (2.11). En effet, de la même manière de proposition 2.3, on montre que

$$c_1 d(x) \leq w(x) \leq C_1 d(x).$$

On a

$$\begin{aligned} k(d(x) + \varepsilon)\underline{u}^{-p} &= k(d(x) + \varepsilon)(cw)^{-p} \\ &\geq c^{-p}k(d(x) + \varepsilon)d(x)^{-p} \\ &\geq C = -\Delta\underline{u}. \end{aligned}$$

De plus, d'après la proposition 2.1, il s'ensuit que  $\underline{u} \leq \bar{u}$  dans  $\Omega$ . Ainsi, par la méthode des sous et sur-solution (théorème 2.1), nous en déduisons que le problème (2.11) admet une solution  $u_\varepsilon \in C^2(\bar{\Omega})$  telle que

$$C w \leq u_\varepsilon \leq u_0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.12)$$

En multipliant avec  $\varphi_1$  dans (2.11) puis en intégrant sur  $\partial\Omega$  on trouve

$$\lambda_1 \int_{\Omega} u_\varepsilon \varphi_1 dx = \int_{\Omega} k(d(x) + \varepsilon)(u_\varepsilon + \varepsilon)^{-p} \varphi_1 dx.$$

En utilisant (2.12) on obtient

$$M := \lambda_1 \int_{\Omega} u_0 \varphi_1 dx \geq \lambda_1 \int_{\Omega} u_\varepsilon \varphi_1 dx \geq k(d(x) + \varepsilon)(u_0 + \varepsilon)^{-p} \varphi_1 dx.$$

On pour tout ouvert  $\omega$  tel que  $\bar{\omega} \subset \Omega$ . En passant à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans l'inégalité ci-dessus et en utilisant (2.3) on obtient

$$M \geq \int_{\omega} k(d(x))u_0^{-p} \varphi_1 dx \geq C_0 \|u_0\|_0^{-p} \int_{\omega} k(d(x))d(x) dx.$$

Puisque  $\bar{\omega} \subset \Omega$  étant arbitraire, on déduit

$$\int_{\Omega} k(d(x))d(x) dx < \infty.$$

En utilisant la régularité de  $\partial\Omega$ . Ce qui contredit avec notre hypothèse sur  $k$  (2.9). Par conséquent, (2.10) n'a pas de solution.  $\square$

Une conséquence directe du théorème (2.2) est le résultat suivant :

**Corollaire 2.1.** Soient  $p \geq 0$  et  $q \geq 2$ . alors, il n'y a pas de fonctions  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  tel que

$$\begin{cases} -\Delta u \geq d(x)^{-q} u^{-p}, & u > 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

## 2.4 Existence et unicité des solutions pour un problème elliptiques singulier

**Théorème 2.3.** Soient  $A > \text{diam}(\Omega)$ ,  $p \geq 0$  et  $q > 0$ . Alors, le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = d(x)^{-q}u^{-p}, & u > 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.13)$$

admet une solution unique  $u$  telle que :

(i) Si  $p + q < 1$  :

$$C_1 d(x) \leq u(x) \leq C_2 d(x) \quad \text{dans } \Omega.$$

(ii) Si  $p + q = 1$  :

$$C_1 d(x) \log^{\frac{1}{1+p}} \left( \frac{A}{d(x)} \right) \leq u(x) \leq C_2 d(x) \log^{\frac{1}{1+p}} \left( \frac{A}{d(x)} \right) \quad \text{dans } \Omega.$$

(iii) Si  $p + q > 1$  :

$$C_1 d(x)^{\frac{2-q}{1+p}} \leq u(x) \leq C_2 d(x)^{\frac{2-q}{1+p}} \quad \text{dans } \Omega.$$

où  $C_1, C_2 > 0$ .

*Démonstration.* D'après les propositions 2.4 et 2.5 le problème (2.13) admet une solution une sous-solution  $\underline{u}$  et sur-solution  $\bar{u}$ . et d'après la proposition 2.1 on a  $\underline{u} \leq \bar{u}$ .

Donc, D'après le théorème 2.1 on a

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \bar{u}(x), \quad \text{dans } \Omega.$$

□

**Théorème 2.4.** Soient  $0 < a < 1$ ,  $A > \text{diam}(\Omega)$ ,  $p \geq 0$  et  $q > 0$  telle que  $p + q = 1$ . Alors, le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = d(x)^{-q} \log^{-a} \left( \frac{A}{d(x)} \right) u^{-p}, & u > 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.14)$$

admet une solution unique qui satisfait

$$C_1 d(x) \log^{\frac{1-a}{1+p}} \left( \frac{A}{d(x)} \right) \leq u(x) \leq C_2 d(x) \log^{\frac{1-a}{1+p}} \left( \frac{A}{d(x)} \right) \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.15)$$

où  $C_1, C_2 > 0$ .

*Démonstration.* Soit

$$w(x) = \varphi_1(x) \log^b \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right), \quad \Omega.$$

Où  $b = \frac{1-a}{1+p} \in (0, 1)$ . un calcul simple donne

On a

$$-\Delta w = \lambda_1 \varphi_1(x) \log^b \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) + b(|\nabla \varphi_1(x)|^2 - \lambda_1 \varphi_1^2) \varphi_1^{-1} \log^{b-1} \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) \\ + b(1-b)|\nabla \varphi_1(x)|^2 \varphi_1^{-1} \log^{b-2} \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) \quad \text{dans } \Omega.$$

En utilisant(2.4), nous pouvons trouver  $C_1, C_2 > 0$  tel que

$$C_1 \varphi_1^{-1} \log^{b-1} \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) \leq -\Delta w \leq C_2 \varphi_1^{-1} \log^{b-1} \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) \quad \text{dans } \Omega.$$

Alors,

$$C_1 \varphi_1^{-q} \log^{-a} \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) w^{-p} \leq -\Delta w \leq C_2 \varphi_1^{-q} \log^{-a} \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) w^{-p} \quad \text{dans } \Omega.$$

Nous en déduisons maintenant que  $\underline{u} = mw$  et  $\bar{u} = Mw$  sont respectivement une sous-solution et une sur-solution de (2.14) pour convenable  $0 < m < 1 < M$ . D'où, le problème(2.14) a une solution  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  tel que

$$m \varphi_1 \log^{\frac{1-a}{1+p}} \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) \leq u \leq M \varphi_1 \log^{\frac{1-a}{1+p}} \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) \quad (2.16)$$

L'unicité suit de la proposition(2.1). □

**Corollaire 2.2.** Soient  $C > 0$  et  $a, A, p, q$  être comme dans le théorème (2.4). Alors, il existe  $C_1 > 0$  telle que  $u$  une solution de problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u \geq C d(x)^{-q} \log^{-a} \left( \frac{A}{d(x)} \right) u^{-p}, & u > 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

satisfait

$$u(x) \geq C_1 d(x) \log^{\frac{1-a}{1+p}} \left( \frac{A}{d(x)} \right) \quad \text{dans } \Omega.$$

**Proposition 2.6.** Soient  $A > 3 \text{diam}(\Omega)$  et  $C > 0$ . il existe  $C_1 > 0$  telle que  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  une solution de problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u \geq C d(x)^{-q} \log^{-a} \left( \frac{A}{d(x)} \right) u^{-p}, & u > 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

satisfait

$$u(x) \geq C_1 d(x) \log \left[ \log \left( \frac{A}{d(x)} \right) \right] \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.17)$$

*Démonstration.* Soit

$$w(x) = \varphi_1(x) \log \left[ \log \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right) \right], \quad x \in \Omega.$$

Un calcule facile donne

$$-\Delta w = \lambda_1 \varphi_1 \log \left[ \log \left( \frac{A}{d(x)} \right) \right] + \frac{|\nabla \varphi_1|^2 - \lambda_1 \varphi_1^2}{\varphi_1 \log \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right)} + \frac{|\nabla \varphi_1|^2}{\varphi_1 \log^2 \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right)}$$

$$\leq \frac{C_1}{\varphi_1 \log \left( \frac{A}{\varphi_1(x)} \right)} \quad \text{dans } \Omega.$$

pour  $C_1 > 0$ . En utilisant (2.3) on peut trouver  $m > 0$  assez petit pour que

$$-\Delta mw \leq \frac{C}{d(x) \log \left( \frac{A}{d(x)} \right)} \quad \text{dans } \Omega.$$

Or par principe du maximum on déduit  $u \geq mw$  dans  $\Omega$  et par (2.3) on obtient que  $u$  satisfait l'estimation (2.17).  $\square$

**Théorème 2.5.** Soient  $p \geq 0, A > \text{diam}(\Omega)$  et  $a \in \mathbb{R}$ . Alors, le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = d(x)^{-2} \log^{-a} \left( \frac{A}{d(x)} \right) u^{-p}, & u > 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.18)$$

admet des solutions si seulement si  $a > 1$ . en outre, si  $a > 1$  alors (2.21) admet une solution unique  $u$  et il existe  $C_1, C_2 > 0$  tel que

$$C_1 \log^{\frac{1-a}{1+p}} \left( \frac{A}{d(x)} \right) \leq u(x) \leq C_2 \log^{\frac{1-a}{1+p}} \left( \frac{A}{d(x)} \right) \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.19)$$

*Démonstration.* Soit  $B > A$  telle que la fonction  $k : (0, B) \rightarrow \mathbb{R}, k(t) = t^{-2} \log^{-a} \left( \frac{B}{t} \right)$  est décroissante sur  $(0, A)$ . Alors, toute solution  $u$  de(2.18) satisfait

$$\begin{cases} -\Delta u \geq Ck(d(x))u^{-p}, & u > 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Où  $C > 0$ . En vertu du théorème(2.2) on déduit  $\int_0^A tk(t)dt < \infty$ , c'est-à-dire  $a > 1$

Pour  $a > 1$ , Soit

$$w(x) = \log^b \left( \frac{B}{\varphi_1(x)} \right), \quad x \in \Omega.$$

Où  $b = \frac{1-a}{1+p} < 0$ . il est facile de savoir que

$$-\Delta w = -b(|\nabla\varphi_1|^2 + \lambda_1\varphi_1^2)\varphi_1^{-2} \log^{b-1}\left(\frac{B}{\varphi_1(x)}\right)$$

$$-b(b-1)|\nabla\varphi_1|^2\varphi_1^2\varphi_1^{-2} \log^{b-1}\left(\frac{B}{\varphi_1(x)}\right) \quad \text{dans } \Omega.$$

En choisissant  $B > 0$  assez grand, nous pouvons supposer

$$\log\left(\frac{B}{\varphi_1(x)}\right) \geq 2(1-b) \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.20)$$

par conséquent, d'après(2.4) et (2.20) il existe  $C_1, C_2 > 0$  tel que

$$C_1\varphi_1^{-2} \log^{b-1}\left(\frac{B}{\varphi_1(x)}\right) \leq -\Delta w \leq C_2\varphi_1^{-2} \log^{b-1}\left(\frac{B}{\varphi_1(x)}\right) \quad \text{dans } \Omega.$$

C-à-d

$$C_1\varphi_1^{-2} \log^{-a}\left(\frac{B}{\varphi_1(x)}\right) w^{-p} \leq -\Delta w \leq C_2\varphi_1^{-2} \log^{-a}\left(\frac{B}{\varphi_1(x)}\right) w^{-p} \quad \text{dans } \Omega.$$

Ainsi, d'après(2.3), il suit que  $\underline{u} = mw$  et  $\bar{u} = Mw$  sont respectivement une sous-solution et sur-solution de(2.18) à condition que  $m > 0$  est assez petit et que  $M > 1$  est assez grand.  $\square$

**Corollaire 2.3.** Soient  $C > 0, p \geq 0, A > \text{diam}(\Omega)$  et  $a > 1$ . Alors,il existe  $C_1 > 0$  telle qu'une solution  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  de

$$\begin{cases} -\Delta u \geq d(x)^{-2} \log^{-a}\left(\frac{A}{\varphi_1(x)}\right) u^{-p}, & u > 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.21)$$

satisfait

$$u(x) \geq C_1 \log^{\frac{1-a}{1+p}}\left(\frac{A}{d(x)}\right) \quad \text{dans } \Omega.$$

# SYSTÈME DE LANE-EMDEN AVEC EXPOSANTS NÉGATIFS

Dans ce chapitre, nous allons nous étudier un système de Lane-Emden d'équations elliptiques avec exposants négatifs, nous allons démontrer l'existence, non-existence et l'unicité et régularité d'une solution en se basant sur le théorème de point fixe de Schauder

## 3.1 Notation et position du problème

On considère le problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{-p}v^{-q}, & u > 0 \text{ dans } \Omega \\ -\Delta v = u^{-r}v^{-s}, & u > 0 \text{ dans } \Omega \\ u = v = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

Où  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) est un ouvert bornée et  $p, s \geq 0$  et  $q, r > 0$ .

**Définition 3.1.** Une solution du problème (3.1), est le couple  $(u, v)$  avec  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ , et  $u, v > 0$ .

**Proposition 3.1.** Soit  $(u, v)$  a une solution du système (3.1). Alors, il existe une constante  $C > 0$  tel que

$$u(x) \geq Cd(x) \quad \text{et} \quad v(x) \geq Cd(x) \quad \text{dans } \Omega \quad (3.2)$$

*Démonstration.* Soit  $w$  est une solution du

$$\begin{cases} -\Delta w = 1, & w > 0 \text{ dans } \Omega \\ w = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.3)$$

En utilisant la régularité elliptique (voir théorème (1.7)), on  $w \in C^2(\bar{\Omega})$  de  $\partial\Omega$ . de la même manière de proposition 2.3, On a

$$w(x) \geq C d(x).$$

Alors, d'après la première equation de système 3.1 on a

$$-\Delta u = u^{-p}v^{-q} \geq C$$

Et on a

$$-\Delta w = 1 \Rightarrow -\Delta(Cw) = C$$

Puisque

$$-\Delta u \geq C = -\Delta(Cw), \quad \text{dans } \Omega.$$

Alors, d'après le principe de maximum (1.8) on déduit que :

$$u \geq Cw \geq C d(x) \quad \text{dans } \Omega.$$

et de même manière on obtient  $v(x) \geq C d(x)$  dans  $\Omega$ . où  $C > 0$ .

□

## 3.2 Non-existence

**Théorème 3.1.** Soient  $p, s \geq 0, q, r > 0$  de sorte que l'une des conditions suivantes soit vérifiée

$$(i) \quad r \min \left\{ 1, \frac{2-q}{1+p} \right\} \geq 2;$$

$$(ii) \quad q \min \left\{ 1, \frac{2-r}{1+s} \right\} \geq 2;$$

$$(iii) \quad p > \max\{1, r-1\}, 2r > (1-s)(1+p) \text{ et } q(1+p-r) > (1+p)(1+s);$$

$$(iv) \quad s > \max\{1, q-1\}, 2q > (1-p)(1+s) \text{ et } q(1+s-q) > (1+p)(1+s);$$

Alors le système(3.1) n'a pas de solution.

*Démonstration.* Puisque le système (3.1)est invariant sous la transformée  $(u, v, p, q, r, s) \rightarrow (v, u, s, r, q, p)$ , il suffit de prouver (i) et (iii).

(i) On supposons qu'il existe  $(u, v)$  une solution du système (3.1), Notons qu'il à partir de (i) on a  $0 < a < 2$ .

**Cas 1 :**  $p + q < 1$ , à partir de notre hypothèse (i) on déduit  $r \geq 2$ . En utilisant les estimations (3.2) de la première équation au système (3.1) on trouve

$$\begin{cases} -\Delta u \leq C_1 d(x)^{-q} u^{-p}, & u > 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.4)$$

Pour  $C_1 > 0$ , De la proposition 2.4 (i) nous déduisons maintenant  $u(x) \leq C_2 d(x)$  dans  $\Omega$ , pour  $C_2 > 0$ . En utilisant cette dernière estimation dans la deuxième équation de (3.1). On trouve

$$\begin{cases} -\Delta v \geq C_3 d(x)^{-r} v^{-s}, & v > 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.5)$$

Où  $C_3 > 0$ , Selon le corollaire 2.1, cela est impossible, puisque  $r \geq 2$ .

**Cas 2 :**  $p + q > 1$ . De l'hypothèse (i), nous avons aussi  $\frac{r(2-q)}{1+p} \geq 2$ . De la même manière que ci-dessus  $u$  satisfait (3.4). Ainsi, d'après la proposition 2.4 (iii), il existe  $C_4 > 0$  tel que

$$u(x) \leq C_4 d(x)^{\frac{2-q}{1+p}} \text{ dans } \Omega.$$

En utilisant cette estimation dans la deuxième équation du système (3.1), nous obtenons

$$\begin{cases} -\Delta v \geq C_5 d(x)^{\frac{-r(2-q)}{1+p}} v^{-s}, & v > 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Où  $C_5 > 0$ , ce qui est impossible grâce au corollaire 2.1, puisque  $\frac{-r(2-q)}{1+p} \geq 2$ .

**Cas 3 :**  $p + q = 1$ . De (i) il suit que  $r \geq 2$ . comme dans les deux cas précédents, On trouve facilement que  $u$  est une solution de (3.4). pour un certain  $C_1 > 0$ . En utilisant la proposition 2.4 (ii), il existe  $C_6 > 0$  tel que

$$u(x) \leq C_6 d(x)^{-r} \log^{\frac{1}{1+p}} \left( \frac{A}{d(x)} \right) \text{ dans } \Omega$$

Pour  $A > 3 \text{diam}(\Omega)$ . En utilisant cette estimation dans la deuxième équation de (3.1) on obtient

$$\begin{cases} -\Delta v \geq C_7 d(x)^{-r} \log^{\frac{-r}{1+p}} \left( \frac{A}{d(x)} \right) v^{-s}, & v > 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.6)$$

Où  $C_7 > 0$  est une constante positive. Du théorème (2.2) il s'ensuit que

$$\int_0^1 t^{1-r} \log^{\frac{-r}{1+p}} \left( \frac{A}{d(x)} \right) dt < \infty.$$

Depuis  $r \geq 2$ , la condition intégrale ci-dessus implique  $r = 2$ . Maintenant, En utilisant (3.6) (avec  $r = 2$ ) et le corollaire (2.3), il existe  $C_8 > 0$  tel que

$$v(x) \geq C_8 \log^{\frac{p-1}{(1+p)(1+s)}} \left( \frac{A}{d(x)} \right) \text{ dans } \Omega. \quad (3.7)$$

En utilisant l'estimation (3.7) dans la première du système (3.1), nous en déduisons

$$\begin{cases} -\Delta u \leq C_9 \log^{\frac{q(p-1)}{(1+p)(1+s)}} \left( \frac{A}{d(x)} \right) u^{-p}, & v > 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.8)$$

Où  $C_9 > 0$ . On pose  $0 < a < 1 - p$ . Alors, à partir de(3.8)on peut trouver une constante  $C_{10} > 0$  telle que  $u$  satisfait

$$\begin{cases} -\Delta u \leq C_{10}d(x)^{-a}u^{-p}, & u > 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Par la proposition 2.4 (i) (puisque  $a+p < 1$ ) on dérive  $u(x) \leq C_{11}d(x)$  dans  $\Omega$ , où  $C_{11} > 0$ . En utilisant cette dernière estimation dans la deuxième équation de(3.1) on obtient finalement(notez que  $r = 2$ ) :

$$\begin{cases} -\Delta v \leq C_{12}d(x)^{-2}v^{-s}, & v > 0 \text{ dans } \Omega \\ v = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Ce qui est impossible selon le corollaire (2.1). Par conséquent, le système (3.1) n'admet pas de solution.

(iii) On supposons que le système (3.1) a une solution  $(u, v)$  et soit  $M = \max_{x \in \bar{\Omega}} v$ . De la première équation de (3.1)on a

$$\begin{cases} -\Delta u \geq C_1u^{-p}, & u > 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Où  $C_1 = M^{-q} > 0$ . En utilisant la proposition 2.4(iii), il existe  $C_2 > 0$  tel que  $u(x) \geq C_2d(x)^{\frac{2}{1+p}}$  dans  $\Omega$ . En combinant cette estimation avec la deuxième équation de (3.1), On trouve

$$\begin{cases} -\Delta v \leq C_3d(x)^{-\frac{2r}{1+p}}v^{-s}, & v > 0 \text{ dans } \Omega \\ v = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Puisque  $\frac{2r}{1+p} + s > 0$ , encore une fois par la proposition 2.4(iii) nous obtenons que la fonction  $v$  satisfait

$$v(x) \leq C_4d(x)^{\frac{2(1+p-r)}{(1+p)(1+s)}} \text{ dans } \Omega.$$

Pour tout  $C_4 > 0$ . En utilisant l'estimation ci-dessus dans la première équation de (3.1), nous trouvons  $C_5 > 0$  tel que

$$\begin{cases} -\Delta u \geq C_5d(x)^{\frac{2q(1+p-r)}{(1+p)(1+s)}}u^{-p}, & u > 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Qui contredit le corollaire 2.1 puisque  $q(1+p-r) > (1+p)(1+s)$ . Ainsi, le système (3.1)n'a pas de solution.  $\square$

### 3.3 Existence

L'existence de solution pour système (3.1) est obtenu sous l'hypothèse suivante sur les exposants  $p, q, r, s$  :

$$(1 + p)(1 + s) - qr > 0. \quad (3.9)$$

Nous introduisons également les quantités

$$\alpha = p + q \min \left\{ 1 + \frac{2 - r}{1 + s} \right\}, \quad \beta = r + s \min \left\{ 1 + \frac{2 - q}{1 + p} \right\}$$

Les valeurs ci-dessus de  $\alpha$  et  $\beta$  sont liés au comportement aux limites de la solution à un problème elliptique singulier (2.1) comme explique dans proposition 2.4 en dessus de notre résultat d'existence est le suivante :

**Théorème 3.2.** Soient  $p, s \geq 0, q, r > 0$  satisfaire (3.9) et l'une des conditions suivantes :

(i)  $\alpha \leq 1$  et  $r < 2$ ;

(ii)  $\beta \leq 1$  et  $q < 2$ ;

(iii)  $p, s \leq 1$  et  $q, r < 2$ ;

Alors, le système (3.1) a au moins une solution.

*Démonstration.* (i) On divise la preuve en 6 cas selon le comportement des solutions du problèmes elliptiques singuliers au voisinage du bords comme il est décrit dans la proposition 2.4.

**Cas 1 :**  $r + s > 1$  et  $\alpha = p + \frac{q(2 - r)}{1 + s} < 1$ .

Lidèe est d'appliquer le théorème du point fixe (voir théorème 1.10)

On considère l'application  $\mathcal{F} : C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega})$

défini par  $\mathcal{F}(u, v) = (Tu, Tv)$ , où  $(Tu, Tv)$  est une solution du système

$$\begin{cases} -\Delta(Tu) = v^{-q}(Tu)^{-p}, & Tu > 0 \text{ dans } \Omega \\ -\Delta(Tv) = u^{-r}(Tv)^{-s}, & Tv > 0 \text{ dans } \Omega \\ Tu = Tv = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.10)$$

Il est clair que si  $(u, v)$  est un point fixe de  $\mathcal{F}$  alors  $(u, v)$  est une solution de (3.1).

Notons que d'après les résultats de chapitre 2, Le système 3.10 admet une solution unique  $(Tu, Tv) \in C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega})$ . On a d'après la proposition 3.1 : Toute solution de système (3.1) vérifie  $u(x) \geq C d(x)$  et  $v(x) \geq C d(x)$  pour tout  $x \in \Omega$ .

D'où on a si  $u \in C(\bar{\Omega})$  et  $u \geq C_1 d(x)$  alors

$$-\Delta v = u^{-r} v^{-s} \leq C d(x)^{-r} v^{-s} \text{ dans } \Omega.$$

D'où d'après la proposition 2.4 toute sous-solution  $\underline{v}$  et toute sur-solution  $\bar{v}$  du problème

$$\begin{cases} -\Delta v = d(x)^{-r} v^{-s}, & v > 0 \text{ dans } \Omega \\ v = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.11)$$

satisfaire

$$\bar{v}(x) \geq C_1 d(x)^{\frac{2-r}{1+s}} \quad \text{et} \quad \underline{v}(x) \leq C_2 d(x)^{\frac{2-r}{1+s}} \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.12)$$

et si  $\bar{v}(x) \geq C_1 d(x)^{\frac{2-r}{1+s}}$  alors

$$-\Delta u = v^{-q} u^{-p} \leq C d(x)^{\frac{2-r}{1+s}} u^{-p} \quad \text{dans } \Omega.$$

et d'après la proposition 2.4 toute sous-solution  $\underline{u}$

$$\begin{cases} -\Delta u = d(x)^{\frac{q(2-r)}{(1+s)}} u^{-p}, & u > 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.13)$$

satisfaire

$$\underline{u}(x) \leq C_2 d(x) \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.14)$$

Notons que  $C_1, C_2 > 0$  ne dépendent pas de  $u$  et  $v$  et on peut choisir  $C_1 < 1 < C_2$  ( $C_1$  assez petit et  $C_2$  assez grand).

La solution  $(u, v)$  est donc appartient à l'ensemble

$$\mathcal{A} = \left\{ (u, v) \in C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega}) : \begin{array}{ll} m_1 d(x) \leq u(x) \leq M_1 d(x) & \text{dans } \Omega \\ m_2 d(x)^{\frac{2-r}{1+s}} \leq v(x) \leq M_2 d(x)^{\frac{2-r}{1+s}} & \text{dans } \Omega \end{array} \right\},$$

Où  $0 < m_1 < 1 < M_1$  et  $0 < m_2 < 1 < M_2$  sont des constantes choisies de sorte que :

$$M_1^{\frac{r}{1+s}} m_2 \leq C_1 < C_2 \leq M_1 m_2^{\frac{q}{1+p}} \quad (3.15)$$

et

$$M_2^{\frac{q}{1+p}} m_1 \leq C_1 < C_2 \leq M_2 m_1^{\frac{r}{1+s}} \quad (3.16)$$

(Notez que ce choix est possible ; il suffit de prendre  $M_i > 1$  assez grand et  $m_i = \frac{1}{M_i}$  ( $i = 1, 2$ ) ce choix est pour démontrer que  $\mathcal{F}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ )

Alors, l'existence de solution d'un système (3.1) suit une fois que nous prouvons que  $\mathcal{F}$  a un point fixe dans  $\mathcal{A}$ . Pour ce faire. Nous démontrons que  $\mathcal{A}$  est convexe,  $\mathcal{F}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$  et  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$  est relativement compact. Alors, Par le théorème du point fixe de Schauder(1.10), nous déduisons que  $\mathcal{F}$  a un point fixe dans  $\mathcal{A}$ , ce qui donne l'existence de la solution du système (3.1).

**Étape 1 :** Montrons que  $\mathcal{A}$  est convexe : soient  $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathcal{A}$  alors  $\lambda(u_1, v_1) + (1 - \lambda)(u_2, v_2) \in \mathcal{A}$  où  $\lambda \in ]0, 1[$ .

Donc

$$(\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2; \lambda v_1 + (1 - \lambda)v_2) \in \mathcal{A}$$

On a

$$\lambda m_1 d(x) \leq \lambda u_1(x) \leq \lambda M_1 d(x)$$

et

$$(1 - \lambda)m_1 d(x) \leq (1 - \lambda)u_2(x) \leq (1 - \lambda)M_1 d(x)$$

Alors par addition, on obtient

$$m_1 d(x) \leq \lambda u_1(x) + (1 - \lambda)u_2(x) \leq M_1 d(x)$$

et de la même manière pour  $\lambda v_1 + (1 - \lambda)v_2$ . D'où  $\mathcal{A}$  est convexe.

**Étape 2 :** Montrons que  $\mathcal{F}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$ . Soit  $(u, v) \in \mathcal{A}$ . De

$$v(x) \leq M_2 d(x)^{\frac{2-r}{1+s}} \quad \text{dans } \Omega.$$

il s'ensuit que  $Tu$  satisfait

$$\begin{cases} -\Delta(Tu) \geq M_2^{-q} d(x)^{\frac{-q(2-r)}{1+s}} (Tu)^{-p}, & Tu > 0 \quad \text{dans } \Omega \\ Tu = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Ainsi,  $\bar{u} = M_2^{\frac{q}{1+p}} Tu$  est une sur-solution de (3.13). par (3.14) et (3.16) on obtient

$$Tu = M_2^{\frac{-q}{1+p}} \bar{u} \geq C_1 M_2^{\frac{-q}{1+p}} d(x) \geq m_1 d(x) \quad \text{dans } \Omega.$$

De  $v(x) \geq m_2 d(x)^{\frac{2-r}{1+s}}$  dans  $\Omega$  et de définition de  $Tu$  on en déduit que

$$\begin{cases} -\Delta(Tv) \leq M_2^{-q} d(x)^{\frac{-q(2-r)}{1+s}} (Tv)^{-p}, & Tv > 0 \quad \text{dans } \Omega \\ Tv = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Ainsi,  $\underline{u} = m_2^{\frac{-q}{1+p}} Tv$  est une sous-solution du problème (3.13). Donc, à partir de (3.14) et (3.15) on obtient

$$Tu = m_2^{\frac{-q}{1+p}} \underline{u} \leq C_2 m_2^{\frac{-q}{1+p}} d(x) \leq M_1 d(x) \quad \text{dans } \Omega.$$

Nous avons prouvé que  $Tu$  satisfait

$$m_1 d(x) \leq Tu \leq M_1 d(x) \quad \text{dans } \Omega.$$

Par la même manière, on démonte que  $Tv$ , en utilisant la définition de  $\mathcal{A}$  et les propriétés des sous et sur-solutions du problème (3.11), nous montrons que  $Tv$  satisfait

$$m_2 d(x)^{\frac{2-r}{1+s}} \leq Tv \leq M_2 d(x)^{\frac{2-r}{1+s}} \quad \text{dans } \Omega.$$

Ainsi,  $(Tu, Tv) \in \mathcal{A} \forall (u, v) \in \mathcal{A}$ , C-à-d,  $\mathcal{F}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$ .

**Étape 3 :** Démontrons que  $\mathcal{F}(\mathcal{A})$  est relativement compact.  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}$  est continue. Soit  $(u, v) \in \mathcal{A}$ .

On peut trouver  $0 < a < 2$  tel que

$$0 \leq -\Delta(Tu), -\Delta(Tv) \leq C d(x)^{-a} \quad \text{dans } \Omega.$$

Pour une constante positive  $C > 0$ . En utilisant la proposition (2.2), nous en déduisons maintenant  $Tu, Tv \in C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$  ( $0 < \gamma < 1$ ), Donc, d'après théorème 1.11  $C^{0,\gamma}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow_C C(\Omega)$ .

Alors, pour tout  $(u_n, v_n)$  bornée dans  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{F}(u_n, v_n)$  admet une sous suite convergente dans  $C(\bar{\Omega})$

$$(Tu_n, Tv_n) \rightarrow (U, V)$$

il s'ensuit que  $\mathcal{F}(A)$  est relativement compact.

Il est à prouver que  $\mathcal{F}$  est continue. Pour cela, soit  $\{(u_n, v_n)\} \subset \mathcal{A}$  tel que  $u_n \rightarrow u$  et  $v_n \rightarrow v$  dans  $C(\bar{\Omega})$  comme  $n \rightarrow \infty$ . En utilisant le fait que  $\mathcal{F}$  est compact, il existe  $(U, V) \in \mathcal{A}$  tel que pour une sous-suite on a

$$Tu_{k_n} \rightarrow U, \quad Tv_{k_n} \rightarrow V \quad \text{dans } C(\bar{\Omega}) \text{ comme } n \rightarrow \infty.$$

Par absurde, si  $Tu_n$  et  $Tv_n$  ne converge pas vers  $u$  et  $v$  respectivement, alors il existe une constante  $\varepsilon > 0$  et une sous suite  $Tu_{n_k}, Tv_{n_k}$ , tel que  $\|Tu_{n_k} - u\| > \varepsilon, \|Tv_{n_k} - v\| > \varepsilon$ . Mais d'après ci-dessus, cette sous suite admet une sous suite convergente. Contradiction. Donc  $Tu_n$  et  $Tv_n$  ne converge pas vers  $u$  et  $v$  respectivement et  $\mathcal{F}$  est continue. Cela prouve que  $\mathcal{F}$  est continue.

Nous sommes maintenant prêt pour appliquer d'appliquer le théorème du point fixe de Schauder. Ainsi, il existe  $(u, v) \in \mathcal{A}$  tel que  $\mathcal{F}(u, v) = (u, v)$ , c'est-à-dire  $Tu = u$  et  $Tv = v$ . ce qui implique que  $(u, v)$  est une solution de système (3.1).

Les cinq cas restants seront de la même manière. En raison du comportement aux limites différent des solutions décrites dans la proposition (2.4), l'ensemble  $\mathcal{A}$  et les constantes  $C_1, C_2$  doivent être modifiés en conséquence. Nous indiquerons la manière dont nous choisissons ces constantes afin d'appliquer le théorème du point fixe de Schauder.

**Cas 2 :**  $r + s = 1$  et  $p + q < 1$ .

Si  $(u, v)$  solution du système 3.1 alors d'après la proposition 3.1 on a  $u(x), v(x) \geq C_1 d(x)$  d'où

$$-\Delta v = u^{-r} v^{-s} \leq C d(x)^{-r} v^{-s}$$

Comme  $r + s = 1$  alors d'après la proposition 2.4, On a  $v(x) \leq C d(x) \log^{\frac{1}{1+s}} \left( \frac{A}{d(x)} \right)$

et comme

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^a \log^{\frac{1}{1+s}} \left( \frac{A}{r} \right) = 0, \quad \text{avec } 0 < a < 1.$$

alors

$$\log^{\frac{1}{1+s}} \left( \frac{A}{r} \right) \leq C r^{-r} \quad \text{pour } 0 < r < R$$

D'où  $\exists C_2 > 0$  telle que :

$$v(x) \leq C d(x) \log^{\frac{1}{1+s}} \left( \frac{A}{d(x)} \right) \leq C_2 d(x)^{1-a}$$

Donc, Toute sous-solution  $\underline{v}$  et toute sur-solution  $\bar{v}$  du problèmes (3.11) satisfont les estimations

$$\underline{v}(x) \leq C_2 d(x)^{1-a} \quad \text{et} \quad \bar{v}(x) \geq C_1 d(x) \quad \text{dans } \Omega.$$

D'où

$$C_1 d(x) \leq v(x) \leq C_2 d(x)^{1-a}, \quad \text{avec } 0 < a < 1.$$

et on a

$$-\Delta u = v^{-q} u^{-p} \leq C d(x)^{-q} u^{-p}$$

Alors  $u \leq C_2 d(x)$  et donc  $C_1 d(x) \leq u(x) \leq C_2 d(x)$

De la même manière comme dans le cas 1, On applique le théorème de point fixe (1.10) pour l'application  $\mathcal{F}$  défini sur le convexe

$$\mathcal{A} = \left\{ (u, v) \in C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega}) : \begin{array}{ll} m_1 d(x) \leq u(x) \leq M_1 d(x) & \text{dans } \Omega \\ m_2 d(x) \leq v(x) \leq M_2 d(x)^{1-a} & \text{dans } \Omega \end{array} \right\},$$

Où  $0 < m_i < 1 < M_i (i = 1, 2)$ . sont choisis de la même façon.

**Cas 3** :  $r + s < 1$  et  $\alpha = p + q < 1$ . De la même manière dans le cas 1. On choisit le convexe suivant :

$$\mathcal{A} = \left\{ (u, v) \in C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega}) : \begin{array}{ll} m_1 d(x) \leq u(x) \leq M_1 d(x) & \text{dans } \Omega \\ m_2 d(x) \leq v(x) \leq M_2 d(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right\},$$

Où  $0 < m_i < 1 < M_i (i = 1, 2)$  satisfaire (3.15)-(3.16) pour constantes appropriées  $C_1$  et  $C_2$ .

**Cas 4** :  $r + s < 1$  et  $\alpha = p + q = 1$ .

Comme  $u(x), v(x) \geq C_1 d(x)$ , alors :

$$-\Delta v \leq C d(x)^{-r} v(x)^{-s}$$

et donc  $v(x) \leq C_2 d(x)$  (car  $r + s < 1$  d'après la proposition 2.4)

et on a aussi  $-\Delta u = u^{-p} v^{-q} \leq C d(x)^{-q} u^{-p}$

d'où  $u(x) \leq C d(x) \log \frac{A}{d(x)} \leq C_2 d(x)^{1-a}$ , avec  $0 < a < 1$ .

On choisit donc le convexe

$$\mathcal{A} = \left\{ (u, v) \in C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega}) : \begin{array}{ll} m_1 d(x) \leq u(x) \leq M_1 d(x)^{1-a} & \text{dans } \Omega \\ m_2 d(x) \leq v(x) \leq M_2 d(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right\},$$

**Cas 5** :  $r + s < 1$  et  $\alpha = p + q = 1$ . Soit  $0 < a < 1$  être fixé de telle sorte que  $ar + s > 1$  D'après la proposition 2.4 (i), (iii), il existe  $0 < C_1 < 1 < C_2$  tel que :

Toute sous-solution  $\underline{u}$  du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = d(x)^{\frac{-q(2-ar)}{1+s}} u^{-p}, & u > 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

satisfait

$$\underline{u}(x) \leq C_2 d(x)^a \text{ dans } \Omega.$$

Toute sur-solution  $\bar{u}$  du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = d(x)^{\frac{-q(2-r)}{1+s}} u^{-p}, & u > 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

satisfait

$$\bar{u}(x) \geq C_1 d(x) \text{ dans } \Omega.$$

Toute sous-solution  $\underline{v}$  du problème (3.11) satisfait

$$\underline{v}(x) \leq C_2 d(x)^{\frac{2-r}{1+s}} \text{ dans } \Omega.$$

Toute sur-solution  $\bar{v}$  du problème

$$\begin{cases} -\Delta v = d(x)^{-ar} v^{-s}, & v > 0 \text{ dans } \Omega \\ v = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

satisfait

$$\bar{v}(x) \geq C_1 d(x)^{\frac{2-ar}{1+s}} \text{ dans } \Omega.$$

Nous définissons maintenant

$$\mathcal{A} = \left\{ (u, v) \in C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega}) : \begin{array}{ll} m_1 d(x) \leq u(x) \leq M_1 d(x)^a & \text{dans } \Omega \\ m_2 d(x)^{\frac{2-ar}{1+s}} \leq v(x) \leq M_2 d(x)^{\frac{2-r}{1+s}} & \text{dans } \Omega \end{array} \right\},$$

Où  $0 < m_i < 1 < M_i (i = 1, 2)$  satisfont (3.15)-(3.16) dans lequel constantes  $C_1, C_2$  sont celles données ci-dessus et

$$m_1 [\text{diam}(\Omega)]^{1-a} < M_1, \quad m_2 [\text{diam}(\Omega)]^{\frac{r(1-a)}{1+s}} < M_2.$$

**Cas 6 :**  $r+s = 1$  et  $\alpha = p+q = 1$ . On procédons de la même manière que ci-dessus en considérant

$$\mathcal{A} = \left\{ (u, v) \in C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega}) : \begin{array}{ll} m_1 d(x) \leq u(x) \leq M_1 d(x)^{1-a} & \text{dans } \Omega \\ m_2 d(x) \leq v(x) \leq M_2 d(x)^{1-a} & \text{dans } \Omega \end{array} \right\},$$

Où  $0 < a < 1$  est une constante fixe et  $m_i, M_i (i = 1, 2)$  satisfait (3.15)-(3.16) pour  $C_1, C_2 > 0$  et

$$m_i [\text{diam}(\Omega)]^a < M_i, \quad i = 1, 2.$$

(iii) Soient

$$a = \frac{2(1+s-q)}{(1+p)(1+s)-qr}, \quad b = \frac{2(1+s-r)}{(1+p)(1+s)-qr}.$$

Alors

$$(1+p)a + bq = 2, \quad ar + (1+s)b = 2. \quad (3.17)$$

Puisque  $p + bq = 1$  et  $s + ar > 1$ , d'après de la proposition 2.4(iii) et (3.17) ci-dessus, on trouve  $0 < C_1 < 1 < C_2$  tel que :

Toute sous-solution  $\underline{u}$  et toute sur-solution  $\bar{u}$  du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = d(x)^{-bq} u^{-p}, & u > 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

satisfait

$$\bar{u}(x) \geq C_1 d(x)^a \quad \text{et} \quad \underline{u}(x) \leq C_2 d(x)^a \quad \text{dans } \Omega.$$

Toute sous-solution  $\underline{v}$  et toute sur-solution  $\bar{v}$  du problème

$$\begin{cases} -\Delta v = d(x)^{-ar} v^{-s}, & v > 0 \text{ dans } \Omega \\ v = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

satisfait

$$\bar{v}(x) \geq C_1 d(x)^b \quad \text{et} \quad \underline{v}(x) \leq C_2 d(x)^b \quad \text{dans } \Omega.$$

Comme auparavant, nous définissons maintenant

$$\mathcal{A} = \left\{ (u, v) \in C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega}) : \begin{array}{ll} m_1 d(x)^a \leq u(x) \leq M_1 d(x)^a & \text{dans } \Omega \\ m_2 d(x)^b \leq v(x) \leq M_2 d(x)^b & \text{dans } \Omega \end{array} \right\},$$

Où  $0 < m_1 < 1 < M_1$  et  $0 < m_2 < 1 < M_2$  satisfait (3.15)-(3.16). □

**Corollaire 3.1.** Soient  $p, s \geq 0, q, r > 0$  satisfaisant (3.9).

(i) On pose  $p + q \leq 1$ . Alors le système (3.1) a des solutions si et seulement si  $r < 2$ .

(ii) On pose  $r + s \leq 1$ . Alors le système (3.1) a des solutions si et seulement si  $q < 2$ .

### 3.4 $C^1$ -régularité

**Théorème 3.3.** Soient  $p \geq 0, q, r > 0$  satisfaire(3.9). Alors :

- (i) le système (3.1) admet une solution  $(u, v)$  où  $u \in C^1(\overline{\Omega})$  si et seulement si  $\alpha < 1$  et  $r < 2$ ;
- (ii) le système (3.1) admet une solution  $(u, v)$  où  $v \in C^1(\overline{\Omega})$  si et seulement si  $\beta < 1$  et  $q < 2$ ;
- (iii) système (3.1) admet une solution  $(u, v)$  où  $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$  si et seulement si  $p + q < 1$  et  $r + s < 1$ ;

*Démonstration.* (i) On Supposons que le système (3.1) a une solution  $(u, v)$  avec  $u \in C^1(\overline{\Omega})$ .

Alors, il existe  $C > 0$  tel que  $u(x) \leq Cd(x)$  dans  $\Omega$ . En utilisant ce fait dans la deuxième équation de (3.1), nous déduisons que  $v$  satisfait l'inégalité elliptique (3.5) pour  $C_3 > 0$ . D'après le corollaire (2.1), cela implique  $r < 2$ .

Pour montre que  $\alpha < 1$  nous argumente par contradiction. On Supposons que  $\alpha \geq 1$  et nous divisons notre argument en trois cas.

**Cas 1 :**  $r + s > 1$ . Alors,  $\alpha = p + \frac{q(2-r)}{1+s} \geq 1$ . D'après la proposition (3.1) on a  $u(x) \geq Cd(x)$  dans  $\Omega$ , pour  $C > 0$ . Alors  $v$  satisfait

$$\begin{cases} -\Delta v \leq C_1 d(x)^{-r} v^{-s}, & v > 0 \text{ dans } \Omega \\ v = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.18)$$

Où  $C_1 > 0$ . Depuis  $r < 2$ , d'après la proposition 2.4 (iii) on trouve  $v(x) \leq C_2 d(x)^{\frac{2-r}{1+s}}$  dans  $\Omega$ , pour  $C_2 > 0$ . En utilisant cette estimation dans la équation du système (3.1) on déduisons

$$\begin{cases} -\Delta u \geq C_3 d(x)^{-\frac{q(2-r)}{1+s}} u^{-p}, & u > 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.19)$$

Où  $C_3 > 0$ . Maintenant, D'après le corollaire(2.1) l'égalité ci-dessus est impossible. On supposons que  $\frac{q(2-r)}{1+s} < 2$ .

Si  $\alpha > 1$ , d'après (2.3),(3.19) et la proposition 2.4(iii) On trouve

$$u(x) \geq C_4 d(x)^\tau \geq C_4 \varphi_1(x)^\tau \text{ dans } \Omega. \quad (3.20)$$

Où

$$n = \frac{2 - \frac{q(2-r)}{1+s}}{1+p} \in (0, 1) \text{ et } C_4 > 0.$$

On pose  $x_0 \in \partial\Omega$  et soit  $n$  le vecteur normale de l'unité externe sur  $\partial\Omega$   $x_0$ . En utilisant

(3.20) et le fait que  $0 < \tau < 1$  on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n}(x_0) &= \lim_{t \nearrow 0} \frac{u(x_0 + tn) - u(x_0)}{t} \\ &\leq C_4 \lim_{t \nearrow 0} \frac{\varphi_1(x_0 + tn) - \varphi_1(x_0)}{t} \varphi_1^{n-1}(x_0 + tn) \\ &= C_4 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}(x_0) \lim_{t \nearrow 0} \varphi_1^{\tau-1}(x_0 + tn) \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

D'où,  $u \notin C^1(\overline{\Omega})$ .

Si  $\alpha = 1$  on procède de la même manière, d'après (3.19) et de la proposition 2.4 (ii) on déduit

$$u(x) \geq C_5 d(x) \log^{\frac{1}{1+p}} \left( \frac{A}{d(x)} \right) \geq C_6 \varphi_1(x) \log^{\frac{1}{1+p}} \left( \frac{A}{d(x)} \right) \quad \text{dans } \Omega.$$

Où  $C_5, C_6$ . Comme précédemment, on obtient  $\frac{\partial u}{\partial n} = -\infty, x_0 \in \partial\Omega$ , ce qui contredit  $u \in C^1(\overline{\Omega})$ . **Cas 2 :**  $r + s < 1$ . Alors,  $\alpha = p + q \geq 1$ . Comme dans le cas 1,  $v$  remplit (3.18) la proposition 2.4 (i) on trouve  $v(x) \leq C_7 s(x)$  dans  $\Omega$ . Ainsi, satisfait

$$\begin{cases} -\Delta u \geq C_8 d(x)^{-q} u^{-p}, & u > 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Où  $C_8 > 0$ . D'après le corollaire (2.1) il suit  $q < 2$  depuis  $\alpha = p + q \geq 1$ , il s'ensuit que satisfait l'estimation (ii) (si  $p + q = 1$ ) ou l'estimation (iii) (si  $p + q > 1$ ) dans la proposition 2.4,

En procédant de la même manière qu'avant, on déduit que la dérivée normale de l'unité externe de  $u$  sur  $\partial\Omega$  est  $-\infty$ , ce qui est impossible.

**Cas 3 :**  $r + s = 1$ . Cela donne aussi  $\alpha = p + q \geq 1$ . Comme avant  $v$  satisfait (3.18) et par la proposition 2.4 (ii) on déduisons

$$v(x) \leq C_9 d(x) \log^{\frac{1}{1+s}} \left( \frac{A}{d(x)} \right) \quad \text{dans } \Omega.$$

Où  $C_9 > 0$ . il s'ensuit que  $u$  satisfait

$$\begin{cases} -\Delta u \geq C_{10} d(x)^{-q} \log^{\frac{-q}{1+s}} \left( \frac{A}{d(x)} \right) u^{-p}, & u > 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.21)$$

Où  $C_{10} > 0$ . Si  $q - b \geq 2$  l'inégalité ci-dessus est impossible à la lumière du corollaire (2.1). On suppose que  $q - b < 2$ . Si  $\alpha = p + q > 1$ , nous fixons  $0 < b < \min\{q, p + q - 1\}$  et de (3.21) on a  $u$  satisfait

$$\begin{cases} -\Delta u \geq C_{11} d(x)^{-(q-b)} u^{-p}, & u > 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Où  $C_{11} > 0$ .  $p + q > 1$  d'après la proposition 2.4 (iii) on trouve

$$u(x) \geq C_{12}d(x)^{\frac{2-(q-b)}{1+p}} \quad \text{dans } \Omega.$$

Où  $C_{12} > 0$ . Puisque  $0 < \frac{2-(q-b)}{1+p} < 1$ , on obtient comme avant que la dérivée normale de  $u$  sur  $\partial\Omega$  infini ce qui est impossible.

il reste à considérer le cas  $\alpha = p + q = 1$ , C'est-à-dire,  $p + q = r + s = 1$ . si  $q < 1 + s$ , C'est-à-dire,  $q \neq 1$  et  $s \neq 0$ , par corollaire(2.2) on en déduit

$$u(x) \geq C_{13}d(x)\log^{\frac{1+s-q}{(1+p)(1+s)}}\left(\frac{A}{d(x)}\right) \quad \text{dans } \Omega.$$

pour  $C_{13} > 0$ . En procédant comme précédemment, on obtient  $\frac{\partial u}{\partial n} = -\infty$  sur  $\partial\Omega$ , ce qui est impossible. Si  $q = 1$  et  $s = 0$ , alors nous applique la proposition(2.6) pour obtenir

$$u(x) \geq C_{14}d(x)\log\left[\log\left(\frac{A}{d(x)}\right)\right] \quad \text{dans } \Omega.$$

Où  $C_{14} > 0$ . Cela nous conduit aussi à la même contradiction  $\frac{\partial u}{\partial n} = -\infty$  sur  $\partial\Omega$ , Ainsi, nous avons montre que si le système(3.1) a une solution  $(u, v)$  avec  $u \in C^1(\overline{\Omega})$  alors  $\alpha < 1$  et  $r < 2$ . Inversement, on supposons que  $\alpha < 1$  et  $r < 2$ . Par le théorème (3.3) (i) (cas 1,2 et 3) il existe une solution  $(u, v)$  de (3.1) telle que

$$u(x) \geq c d(x) \quad \text{dans } \Omega.$$

et

$$v(x) \geq c d(x) \quad \text{dans } \Omega, \text{ si } r + s \leq 1$$

ou

$$v(x) \geq c d(x)^{\frac{2-r}{1+s}} \quad \text{dans } \Omega, \text{ si } r + s > 1.$$

pour  $c > 0$ ; En utilisant les estimations ci-dessus, nous trouvons

$$-\Delta u = u^{-p}v^{-q} \leq C d(x)^{-\alpha} \quad \text{dans } \Omega.$$

Pour  $C > 0$ . Par la proposition (2.2), nous en déduisons maintenant  $u \in C^{1,1}(\overline{\Omega})$ . La preuve de (ii) est similaire.

(iii) On Supposons que la système (3.1) admet a une solution  $(u, v)$  avec  $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ . Alors, il existe  $c > 0$  tel que  $v(x) \leq c d(x)$  dans  $\Omega$ . En utilisant cette estimation dans la première équation de (3.1), On trouvons que

$$\begin{cases} -\Delta u \geq C d(x)^{-q} u^{-p}, & u > 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Où  $C$  est une constante positive. Si  $p + q \geq 1$  alors nous combinons le résultat de la proposition (2.4) (ii) – (iii) avec les techniques utilisées ci-dessus pour déduire  $\frac{\partial u}{\partial n} = -\infty$  sur  $\partial\Omega$ , donc  $u \notin C^1(\bar{\Omega})$ . Ainsi,  $p + q < 1$  et de la même manière on obtient  $r + s < 1$ . On suppose que  $p + q < 1$  et  $r + s < 1$ . Par le théorème(3.3) (Cas 3) nous avons que (3.1) a une solution  $(u, v)$  telle que  $u(x), v(x) \geq c d(x)$  dans  $\Omega$ , pour  $c > 0$ . Cela donne

$$-\Delta u \leq C d(x)^{-(p+q)} \quad \text{dans } \Omega.$$

$$-\Delta v \leq C d(x)^{-(r+s)} \quad \text{dans } \Omega.$$

Où  $C > 0$ . donc la proposition (2.2) implique  $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$ . □

### 3.5 Unicité

**Théorème 3.4.** Soient  $p \geq 0, q, r > 0$  satisfaire (3.9) et

(i)  $p + q < 1$  et  $r < 2$ ;

(ii)  $r + s < 1$  et  $q < 2$ ;

Alors, le système(3.1) admet une solution unique.

*Démonstration.* Nous prouvons seulement (i) : le cas (ii) suit de la même manière.

Soient  $(u_1, v_1)$  et  $(u_2, v_2)$  deux solutions du système(3.1). En utilisant la proposition (3.1), il existe  $C_1 > 0$  tel que

$$u_i(x), v_i(x) \geq C_1 d(x) \quad \text{dans } \Omega, i = 1, 2. \quad (3.22)$$

Par conséquent,  $u_i$  il satisfait

$$\begin{cases} -\Delta u_i \leq C_2 d(x)^{-q} u_i^{-p}, & u_i > 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u_i = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Où  $C_2 > 0$ . D'après la proposition 2.4(i) et (3.22), il existe  $0 < C < 1$  tel que

$$C d(x) \leq u_i(x) \leq \frac{1}{C} d(x) \quad \text{dans } \Omega. i = 1, 2. \quad (3.23)$$

Cela signifie que l'on peut trouver une constante  $c > 1$  telle que  $cu_1 \geq u_2$  et  $cu_2 \geq u_1$  dans  $\Omega$ . On montrons que  $u_1 \geq u_2$  dans  $\Omega$ . En supposant le contraire. Soit

$$M = \inf\{A > 1 : Au_1 \geq u_2 \text{ dans } \Omega\}.$$

Par notre hypothèse, nous avons  $M > 1$ . De  $Mu_1 \geq u_2$  dans  $\Omega$ , il s'ensuit que

$$-\Delta v_2 = u_2^{-r} v_2^{-s} \geq M^{-r} u_1^{-r} v_2^{-s} \quad \text{dans } \Omega.$$

Donc  $v_1$  est une solution et  $M^{\frac{r}{1+s}}v_2$  est une sur-solution de

$$\begin{cases} -\Delta w = u_1^{-r}w^{-s}, & w > 0 \text{ dans } \Omega \\ w = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Par la proposition (2.1) on obtient

$$v_1 \leq M^{\frac{r}{1+s}}v_2 \text{ dans } \Omega.$$

L'estimation ci-dessus donne

$$-\Delta u_1 = u_1^{-p}v_1^{-q} \geq M^{\frac{-q}{1+s}}u_1^{-p}v_2^{-q} \text{ dans } \Omega.$$

il s'ensuit que  $u_2$  est une solution et  $M^{\frac{qr}{(1+p)(1+s)}}u_1$  est une sur-solution de

$$\begin{cases} -\Delta w = v_2^{-q}w^{-p}, & w > 0 \text{ dans } \Omega \\ w = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Par la proposition (2.1), nous déduisons maintenant

$$M^{\frac{qr}{(1+p)(1+s)}}u_1 \geq u_2 \text{ dans } \Omega.$$

Puisque  $M > 1$  et  $\frac{qr}{(1+p)(1+s)}$  l'inégalité ci-dessus contredit la minimalité de  $M$ .

Donc,  $M \leq 1$ . Par conséquent,  $u_1 \geq u_2$  dans  $\Omega$ . De même, On déduit  $u_1 \leq u_2$  dans  $\Omega$ .

Alors,  $u_1 \equiv u_2$  qui donne aussi  $v_1 \equiv v_2$ . Par conséquent, le système a une solution unique.  $\square$

---

# Conclusion

---

Dans notre travail, nous avons étudié un système Lane-Emden d'équation elliptiques avec exposants négatifs. Dans notre approche, nous allons étudié ce système par la méthode de sous et sur-solution et par théorème de point fixe de Schouder .

Nous espérons que notre travail sert comme un premier pas vers d'autres travaux qui généralisent les résultats obtenus dans le présent mémoire et on laisse ce mémoire en débat ouvert pour l'étude de système de Lane-Emden pour tout  $p$ .

---

# Bibliographie

---

- [1] C. De Coster, J. Tapka, Introduction la thÈorie des sous et sur solutions Institut des Sciences
- [2] C. Gui, F. Lin, Regularity of an elliptic problem with a singular nonlinearity, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 123
- [3] E. Zeidler. Nonlinear functional analysis and its applications Fixed point theorem. Springer Verlag, New York Berlin Heiderberg, Tokyo, 1985.
- [4] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications, Masson, Paris, 1983.
- [5] J. Busca, R. Manásevich, A Liouville-type theorem for Lane–Emden system, Indiana Univ. Math. J. 51 (2002) 37–51.
- [6] J. Hernández, F.J. Mancebo, J.M. Vega, Positive solutions for singular semilinear elliptic systems, Adv. Differential Equations 13 (2008) 857–880.
- [7] Lawrence C. Evans, Partial Differential Equations.
- [8] L. Dupaigne, M. Ghergu, V. Radulescu, Lane–Emden–Fowler equations with convection and singular potential,
- [9] Marius Ghergu, Lane–Emden systems with negative exponents. et Techniques de Valenciennes (2010) ,1-32
- [10] M. Ghergu, Steady-state solutions for Gierer–Meinhardt type systems with Dirichlet boundary condition, Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009) 3953–3976.
- [11] M. Ghergu, V. Radulescu, On a class of singular Gierer–Meinhardt systems arising in morphogenesis, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 344 (2007) 163–168.
- [12] Ph. Clément, J. Fleckinger, E. Mitidieri, F. de Thélin, Existence of positive solutions for a nonvariational quasilinear elliptic system, J. Differential Equations 166 (2000) 455–477.
- [13] R.H. Fowler, Further studies of Emden’s and similar differential equations, Q. J. Math. (Oxford Ser.) 2 (1931) 259–288.
- [14] S. Chandrasekhar, An Introduction to the Study of Stellar Structure, Dover Publications Inc., New York, 1967.
- [15] V.D. Radulescu, Qualitative analysis of non linear elliptic partial differential equations : Monotonicity Analytic , and Variational Methods , Hindawi , Vol.6 (2008). (1993) 1021–1029. J. Math. Pures Appl. 87 (2007) 563–581.

- 
- [16] V.R. Emden, Gaskugeln, Anwendungen der mechanischen Warmetheorie auf kosmologische und meteorologische Probleme, Teubner-Verlag, Leipzig, 1907.

---

# Résumé

---

**Résumé :** Le but de ce travail est d'étudier l'existence, non-existence et l'unicité de la solution d'un système d'Lane-Emden d'équation elliptiques avec des exposants négatifs. Le système à étudier est le suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{-p}v^{-q}, & u > 0 \text{ dans } \Omega \\ -\Delta v = u^{-r}v^{-s}, & u > 0 \text{ dans } \Omega \\ u = v = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Ce travail est basé sur les outils suivants : fonction de Green, principe de maximum, résultats de compacité et le comportement de la solution au voisinage du bord. On donne des résultats optimales d'existence et non-existence qui dépendent d'exposants  $p, q, r$  et  $s$ .

**Mots clés :** Équations elliptiques de Lane-Emden, système elliptiques, principe de Maximum, régularité elliptique, fonction de Green...

**Abstract :** The aim of this work is to study the existence, non-existence and uniqueness of the solution of a Lane-Emden system of equations with negative exponents. The system to be studied is as follows :

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{-p}v^{-q}, & u > 0 \text{ dans } \Omega \\ -\Delta v = u^{-r}v^{-s}, & u > 0 \text{ dans } \Omega \\ u = v = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

This work is based on the following tools. Green's function, principle of maximum, results of compactness and the behavior of the solution in the vicinity of the edge. optimal existence and non-existence results are given which depend on exponents  $p, q, r$  et  $s$ .

**Keywords :** Lane-Emden elliptical equations, elliptical system, maximum principle, elliptical regularity, Green's function.

