

# MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière** : Mathématiques

**Option** : Mathématiques Discrètes

**Par**

1-REFICE El Batoul

2-OUALID Hind

**Sujet**

## Groupes et Corps Ordonnés

Date de soutenance :

**Devant le jury :**

Mr. AMROUNE Abdelaziz	Université de M'sila	Président
Mr. LADJELAT Lahcene	Université de M'sila	Rapporteur
Mr. SOHEYB Milles	Université de M'sila	Examineur

**Promotion : 2016 / 2017**



# Remerciements

*Avant tout nous remercions **Allah**, le tout puissant d'avoir éclairé notre vie, renforcé notre courage et notre volenté pour finir ce travail.*

*Nous tenons à remercier particulièrement notre directeur de thèse Mr. **LADJELAT Lahcene**, du pôle universitaire Mohammed BOUDIAF pour toute l'aide qu'il nous a apportés et pour sa patience et ses conseils précieux et pour avoir guidé ce travail avec beaucoup d'intérêt.*

*Nous tenons à remercier aussi Mr. **AMROUNE Abdelaziz**, pour avoir accepté de juger ce travail et de présider le jury.*

*Nous tenons à remercier Mr. **SOHEYB Milles**, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail, en acceptant de l'examiner.*

*Nos remerciements s'adressent à tous les enseignants du département de mathématique pour leurs dévouements et leurs générosités.*

*Nous tenons ici à exprimer nos sentiments respectueux à nos chers parents à qui nous dédions ce travail pour leur grand soutien.*

*Un grand merci à nos familles, à nos proches et à nos collègues.*

*Merci* 

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Notions fondamentales</b>	<b>2</b>
1.1 Notions sur les Groupes . . . . .	2
1.1.1 Groupe . . . . .	2
1.1.2 Sous-groupe . . . . .	3
1.2 Notions sur les corps . . . . .	4
1.2.1 Anneaux . . . . .	4
1.2.2 Corps . . . . .	5
1.2.3 Extension d'un corps commutatif . . . . .	5
1.3 Relation binaire sur un ensemble . . . . .	6
1.3.1 Relation d'ordre . . . . .	7
1.4 Ensemble ordonné . . . . .	8
<b>2 Groupes Ordonnés</b>	<b>11</b>
2.1 Groupe ordonné . . . . .	11
2.2 Éléments positifs . . . . .	14
2.3 Groupes filtrants . . . . .	17
2.4 Sous-Groupes engendré par une partie . . . . .	18
2.5 Ensembles inductifs . . . . .	19
2.6 Homomorphismes de groupes ordonnés . . . . .	20
2.7 Bornes supérieure et inférieure dans un groupe ordonné . . . . .	20
2.8 Opérations élémentaires sur les groupes ordonnés . . . . .	22
2.9 Groupe réticulé . . . . .	23
2.10 Partie positive et partie négative . . . . .	25
2.11 Éléments étrangers . . . . .	26
2.12 Éléments extrémaux . . . . .	26
2.13 Groupe continu . . . . .	27
<b>3 Corps Ordonnés</b>	<b>34</b>
3.1 Anneaux ordonnés . . . . .	34
3.2 Corps ordonnés . . . . .	36
3.3 Extensions de corps ordonnés . . . . .	37
<b>Conclusion</b>	<b>40</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>40</b>

# Introduction

En mathématiques, plus précisément en algèbre, une structure algébrique est un type particulier de structure. Sa spécificité par rapport aux autres types de structure est d'être formée d'un ensemble combiné à une ou plusieurs lois de composition, éventuellement complétées par un ordre ou une topologie, le tout satisfaisant un certain nombre d'axiomes.

En algèbre, les structures algébriques sont définies une à une et leurs propriétés sont étudiées séparément.

L'objectif de ce travail est d'étudier une liste des structures algébriques (Groupes et Corps) muni d'une relation d'ordre.

Notre mémoire est constitué de trois chapitres :

Le premier chapitre représente des notions fondamentales sur les groupes, sous groupes, corps, extensions, relation d'ordre, relation d'ordre compatible avec les lois de composition.

Le deuxième chapitre contient une étude sur les groupes muni d'une relation d'ordre et leurs conséquences .

Le troisième chapitre est une étude sur les anneaux et corps ordonnés, et certaines de leurs propriétés essentiels.

# Chapitre 1

## Notions fondamentales

### 1.1 Notions sur les Groupes

#### 1.1.1 Groupe

##### Définition 1.1

Une *loi de composition interne* dans un ensemble non vide  $E$  est une application de  $E \times E$  dans  $E$  qui à tout couple  $(x, y)$  de  $E \times E$  associe un élément  $z$  de  $E$  noté  $z = x.y$ .

##### Définition 1.2

On appelle groupe tout ensemble non vide  $G$  muni d'une loi de composition interne  $"."$ , vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. La loi  $"."$  est associative dans  $G$  : pour tous  $x, y, z \in G$   $x.(y.z) = (x.y).z$ .
2. La loi  $"."$  admet un élément neutre dans  $G$  : C'est-à-dire qu'il existe  $e \in G$  tel que  $x.e = e.x = x$  pour tout  $x \in G$ .
3. Tout élément de  $G$  admet un symétrique dans  $G$  pour la loi  $"."$  :

Pour tout  $x \in G$ , il existe  $x' \in G$  tel que  $x.x' = x'.x = e$ .

### Définition 1.3

On appelle groupe commutatif, ou groupe abélien. Tout groupe  $G$  dont la loi "."  
vérifie de plus la condition supplémentaire de commutativité :

$$x.y = y.x \text{ pour tous } x, y \in G.$$

### Exemples 1.1

1.  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{Q}, +)$ ,  $(\mathbb{R}, +)$  et  $(\mathbb{C}, +)$  sont des groupes commutatifs d'élément neutre 0.
2.  $(\mathbb{Q}^*, \times)$ ,  $(\mathbb{R}^*, \times)$  et  $(\mathbb{C}^*, \times)$  sont des groupes commutatifs d'élément neutre 1.
3.  $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  où  $n \in \mathbb{N}^*$  est un groupe commutatif fini, il est d'ordre (cardinal)  $n$ .
4. Soit  $K$  le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , alors le groupe  $GL_n(K)$  des matrices inversibles  $(n, n)$  est un groupe non abélien si  $n \geq 2$  pour la multiplication des matrices.

### 1.1.2 Sous-groupe

#### Définition 1.4

Soient  $(G, .)$  un groupe et  $H$  un sous-ensemble non vide de  $G$ , on dit que  $H$  est un sous-groupe de  $G$  si :

1.  $H$  contient l'élément neutre  $e$  de  $G$ .
2.  $H$  est stable pour la loi "."  
i.e.  $\forall (h, h') \in H^2, h.h' \in H$ .
3.  $H$  est stable par passage à l'inverse i.e.  $\forall h \in H, h^{-1} \in H$ .

#### Exemple 1.2

Soit  $G$  un groupe d'élément neutre  $e$ , alors  $G$  et  $\{e\}$  sont des sous-groupes de  $G$ .

### Remarque 1.1

Si  $H$  est un sous-groupe d'un groupe  $(G, \cdot)$ , alors pour tout  $(h, n) \in H \times \mathbb{Z}$ ,  $h^n \in H$ .

### Exemples 1.3

1.  $(\mathbb{Z}, +)$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{Q}, +)$  qui est un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  qui est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}, +)$ .
2.  $(\mathbb{Q}^*, \times)$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{R}^*, \times)$  qui est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}^*, \times)$ .
3. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $U_n = \{z \in \mathbb{C}^* / z^n = 1\}$ , alors  $(U_n, \times)$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{C}^*, \times)$ .
4. L'ensemble des matrices diagonales  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$  avec  $a \neq 0$  et  $d \neq 0$  est un sous-groupe de  $GL_2(K)$  avec  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## 1.2 Notions sur les corps

### 1.2.1 Anneaux

#### Définition 1.5

On appelle anneau tout triplet  $(A, +, \times)$  où  $A$  est un ensemble non vide et  $+$  et  $\times$  sont des lois internes sur  $A$  vérifiant les conditions suivantes :

1.  $(A, +)$  est un groupe commutatif dont l'élément neutre est noté 0.
2. La loi  $\times$  est associative.
3.  $A$  possède un élément neutre pour la loi  $\times$  noté 1.
4. La loi  $\times$  est distributive par rapport à  $+$ .

#### Remarque 1.2

Si la loi  $\times$  est commutative, on dit que l'anneau  $(A, +, \times)$  est commutatif .

### Exemples 1.4

1.  $(\mathbb{Z}, +, \times)$ ,  $(\mathbb{Q}, +, \times)$ ,  $(\mathbb{R}, +, \times)$  et  $(\mathbb{C}, +, \times)$  sont quatre exemples d'anneaux commutatifs .
2.  $(\mathbb{R}^n, +, \times)$  est un anneau commutatif pour les lois internes suivantes :

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n).$$

### Notation 1.1

*Soit  $A$  un anneau, on note  $A^*$  l'ensemble des éléments inversibles de  $A$ .*

### Proposition 1.1

*Si  $(A, +, \times)$  est un anneau, alors  $(A^*, \times)$  est un groupe appelé groupe des unités de  $A$ .*

## 1.2.2 Corps

### Définition 1.6

On appelle corps tout anneau commutatif  $(K, +, \times)$  dans lequel tout élément non nul est inversible pour la loi  $\times$ .

### Exemple 1.5

1.  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  sont des corps, mais pas  $\mathbb{Z}$  .

## 1.2.3 Extension d'un corps commutatif

### Définition 1.7

Soient  $K$  et  $L$  deux corps commutatifs. On dit que  $L$  est une extension de  $K$  si  $K \subset L$ .

### Exemples 1.6

1.  $\mathbb{C}$  est une extension de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}$  est une extension de  $\mathbb{Q}$ .
2.  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a; b \in \mathbb{Q}\}$  est une extension de  $(\mathbb{Q}, +, \times)$ .

## 1.3 Relation binaire sur un ensemble

### Définition 1.8

Soit  $E$  un ensemble quelconque, une relation binaire  $R$  sur  $E$  est une partie de  $E \times E$ .

Si  $R$  désigne une relation binaire définie sur  $E$  on note  $xRy$  pour signifier que  $(x, y) \in R$ .

### Exemples 1.7

1. Sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels, on connaît les relations usuelles  $\leq$  et  $=$ .
2. Sur l'ensemble  $\mathbb{Z}$  des entiers relatifs, on définit la relation de divisibilité

$$x \mid y \iff \exists k \in \mathbb{Z}, y = kx.$$

3. Sur l'ensemble  $P(E)$  des parties d'un ensemble  $E$ , l'inclusion est une relation binaire.
4. Sur l'ensemble  $P(E)$  on peut aussi définir une relation  $\delta$  sur  $P(E)$  par :

$$A\delta B \iff A \cap B = \emptyset.$$

### 1.3.1 Relation d'ordre

#### Définition 1.9

Soit  $R$  une relation binaire définie sur  $E$ .  $R$  est une relation d'ordre si :

1.  $R$  est réflexive :  $\forall x \in E \quad xRx$ .
2.  $R$  est anti-symétrique :  $\forall x \in E, \forall y \in E (xRy \text{ et } yRx \Rightarrow x = y)$ .
3.  $R$  est transitive :  $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E (xRy \text{ et } yRz \Rightarrow xRz)$ .

#### Exemples 1.8

1.  $\leq, =$  sont des relations d'ordre sur  $\mathbb{R}$ .
2.  $<$  n'est pas une relation d'ordre sur  $\mathbb{R}$ .
3. La congruence modulo  $n \in \mathbb{N}^*$  n'est pas une relation d'ordre sur  $\mathbb{Z}$ .
4. La relation (... divise...) est une relation d'ordre sur  $\mathbb{N}^*$ , alors qu'elle est non sur  $\mathbb{Z}$ .
5. L'inclusion " $\subset$ " est une relation d'ordre sur  $P(E)$ .

#### Définition 1.10

Soit  $R$  une relation d'ordre sur  $E$ . On dit que  $R$  définit un ordre total sur  $E$  lorsque deux éléments de  $E$  sont toujours comparables pour  $R$ ,

$$\text{c-à-d. } \forall x \in E, \forall y \in E (xRy \text{ ou } yRx).$$

Dans le cas contraire, on dit que l'ordre  $R$  est partiel.

#### Exemples 1.9

1.  $\leq$  définit un ordre total sur  $\mathbb{R}$ .
2. La relation (... divise...) est un ordre partiel sur  $\mathbb{N}$ .
3. L'inclusion " $\subset$ " définit un ordre partiel sur  $P(E)$ .

## 1.4 Ensemble ordonné

### Définition 1.11

Soit  $E$  un ensemble. Si  $\leq$  est une relation d'ordre dans  $E$ , on dit que  $E$  ou  $(E, \leq)$  est un ensemble ordonné.

### Définition 1.12

Soient  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné et  $F$  une partie de  $E$ . On dit que  $y$  est un *majorant* de  $F$  dans  $E$ , si  $y$  est un élément de  $E$  et si pour tout  $x$  de  $F$ ,  $x \leq y$ .

On définit de même les *minorants* de  $F$  dans  $E$ .

### Définition 1.13

Si  $F$  admet un majorant, on dit que c'est une partie majorée de  $E$ .

On définit de même une partie minorée.

Si  $F$  est à la fois majorée et minorée, on dit que c'est une partie bornée.

### Exemples 1.10

1. Dans l'ensemble  $F(]0, 1], \mathbb{R})$  des applications de  $]0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  ordonné par

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in ]0, 1] : f(x) \leq g(x).$$

On considère la partie :

$$E = \{f \in F(]0, 1], \mathbb{R}) \setminus f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}\},$$

cette partie est majorée par la fonction constante égale à 1 et minorée par la fonction constante égale à 0.

2. On considère l'ensemble ordonné  $(P(E), \subset)$ , avec  $E = \{1, 2, 3\}$ , la partie  $F = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 3\}\}$  est bornée :  $\emptyset$  est minorant et  $\{1, 2, 3\}$  est un majorant.

**Définition 1.14**

Un plus grand élément de  $F$  est un majorant de  $F$  qui appartient à  $F$ .

Si  $F$  a un plus grand élément, il est unique, on le note  $\max(F)$ .

De même on définit le plus petit élément de  $F$ , s'il existe il est unique, et noté  $\min(F)$ .

**Exemples 1.11**

1. Dans  $F([0, 1], \mathbb{R})$ , la partie :

$$E = \{f \in F([0, 1], \mathbb{R}) \setminus f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}\}$$

a un plus grand élément, obtenu pour  $n = 0$ . En effet c'est un majorant qui est un élément de cette partie.

2. Dans  $\mathbb{N}^*$ , muni de l'ordre de la division, soit  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ .

Un minorant de  $A$  est un diviseur commun à tous ses éléments : ce ne peut être que 1. Or 1 est un élément de  $A$ , donc  $1 = \min(A)$ .

Un majorant de  $A$  est un multiple commun à tous ses éléments, en particulier à 2, 3, 5, donc il vaut au moins 30. Il n'y a pas de plus grand élément dans  $A$ .

**Définition 1.15**

Un élément  $a$  de  $E$  est borne supérieure de  $F$  dans  $E$ , si  $a$  est le plus petit des majorants de  $F$  dans  $E$ .

Un élément de  $E$  est borne inférieure de  $F$  dans  $E$ , si c'est le plus grand des minorants de  $F$  dans  $E$ .

**Exemple 1.12**

On reprend l'exemple précédent :

$$E = P(\{1, 2, 3\}), F = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}.$$

Il y a un seul majorant,  $\{1, 2, 3\}$  c'est donc la borne supérieure.

Il y a un seul minorant,  $\emptyset$  c'est donc la borne inférieure.

**Définition 1.16**

Soit  $E$  un ensemble ordonné, on dit que  $E$  est bien ordonné, si toute partie non vide  $A$  de  $E$  admet un plus petit élément.

**Exemple 1.13**

$(\mathbb{N}, \leq)$  est bien ordonné.

**Propriété 1.1**

Un ensemble bien ordonné est totalement ordonné.

# Chapitre 2

## Groupes Ordonnés

### 2.1 Groupe ordonné

Soient  $(G, +)$  un groupe commutatif et " $\dots \leq \dots$ " un ordre sur  $G$ .

#### Définition 2.1

On dit que la structure de groupe  $(G, +)$  est compatible avec la structure d'ordre  $(G, \leq)$  si :  $\forall x, y, z \in G : x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ .

On dit aussi que la loi " $\dots + \dots$ " est compatible avec l'ordre  $\leq$ .

#### Définition 2.2

Un groupe ordonné est un triplet  $(G, +, \leq)$  vérifiant les trois axiomes suivants :

- i)*  $(G, +)$  est un groupe commutatif.
- ii)*  $\leq$  est un ordre sur  $G$ .
- iii)* la loi " $+$ " est compatible avec l'ordre  $\leq$ .

#### Exemples 2.1

1. Le triplet  $(\mathbb{Z}, +, \leq)$  est un groupe commutatif ordonné.
2. Le triplet  $(\mathbb{Z}, +, |)$  n'est pas un groupe ordonné car  $2 | 10$  alors que  $2 + 3 = 5 \nmid 10 + 3 = 13$ .

3.  $(\mathbb{Q}, +, \leq)$ ,  $(\mathbb{R}, +, \leq)$  sont des groupes commutatifs ordonnés.
4. Soit  $f(E, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions numériques définies sur un ensemble non vide  $E$ .  $f(E, \mathbb{R})$  muni de l'addition des fonctions est un groupe commutatif. Sur  $f(E, \mathbb{R})$  on définit l'ordre :

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) \leq g(x).$$

$(f(E, \mathbb{R}), +, \leq)$  est un groupe commutatif ordonné.

**Proposition 2.1 (addition des inégalités )**

*Dans un groupe ordonné  $(G, +, \leq)$ , soient  $(x_i)$  et  $(y_i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) deux suites de  $n$  éléments telles que, pour tout  $i$ , on ait  $x_i \leq y_i$ ; alors on a*

$$x_1 + \dots + x_n \leq y_1 + \dots + y_n.$$

**Preuve.**

La démonstration repose sur la récurrence pour  $n$ .

\* Pour  $n = 2$ , supposons qu'on ait  $x_1 \leq y_1$  et  $x_2 \leq y_2$ .

Comme  $(G, +, \leq)$  est un groupe ordonné, on obtient  $x_1 + x_2 \leq y_1 + x_2$  et  $y_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$ . De la transitivité résulte  $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$ .

\* Supposons que la propriété est vrai jusqu'à  $n - 1$  :

$$\text{Soient } \left\{ \begin{array}{l} x_1 \leq y_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \leq y_{n-1} \\ x_n \leq y_n \end{array} \right. \quad \text{alors par l'hypothèse de récurrence}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \dots + x_{n-1} \leq y_1 + \dots + y_{n-1} \\ x_n \leq y_n \end{array} \right. \quad \text{d'après le cas } n = 2 \text{ on}$$

obtient  $x_1 + \dots + x_n \leq y_1 + \dots + y_n$ . ■

### Remarques 2.1

1. Si le groupe n'est pas un groupe ordonné, en général la proposition est fausse, on prend par exemple dans  $(\mathbb{Z}, +, |)$  :  $2 | 10$  et  $3 | 3$ , alors  $2 + 3 \nmid 10 + 3$ .
2. Si  $(G, +, \leq)$  est un groupe ordonné, la réciproque de la proposition 2.1 n'est pas forcément vraie par exemple dans  $(\mathbb{R}, +, \leq)$  on a  
 $x_1 = 3, y_1 = 2, x_2 = 5, y_2 = 9$ .  
 $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$  alors que  $x_1 \not\leq y_1$ .

### Proposition 2.2

*Dans un groupe ordonné  $(G, +, \leq)$  les relations  $x \leq y$  et  $x + z \leq y + z$  sont équivalentes.*

#### Preuve.

On passe en effet de l'une à l'autre par addition aux deux membres de  $z$ , ou de  $(-z)$ . ■

On exprime ce fait en disant que, dans un groupe ordonné  $(G, +, \leq)$ , la structure d'ordre est invariante par translation.

### Corollaire 2.1

*Dans un groupe ordonné  $(G, +, \leq)$  d'élément neutre  $0$ , les relations  $x \leq y$ ,  $0 \leq y - x$ ,  $x - y \leq 0$  et  $-y \leq -x$  sont équivalentes.*

#### Preuve.

On applique en effet la prop 2.2 en prenant successivement  $z = -x$ ,  $z = -y$ , et  $z = -(x + y)$ . ■

On déduit en particulier de ce corollaire que, si  $(G, +, \leq)$  est un groupe ordonné, l'application  $x \rightarrow -x$  de  $G$  sur lui-même transforme sa structure d'ordre en la structure opposée.

## 2.2 Éléments positifs

Soit  $(G, +, \leq)$  un groupe ordonné d'élément neutre 0.

**Définition 2.3** On dit qu'un élément  $x \in G$  est positif si  $0 \leq x$ .

Si  $x \leq 0$ ,  $x$  est appelé élément négatif.

On note par  $\mathcal{P}$  l'ensemble des éléments positifs c-à-d.  $\mathcal{P} = \{x \in G : 0 \leq x\}$ .

Pour deux parties non vides  $A$  et  $B$  de  $G$  on définit les parties :

$$-A = \{-x / x \in A\} \text{ l'ensemble des opposés des éléments de } A.$$

$$A + B = \{a + b / a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

### Proposition 2.3

Si  $(G, +, \leq)$  est un groupe ordonné et  $\mathcal{P}$  l'ensemble des éléments positifs de  $G$ , on a :

1.  $\mathcal{P} + \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$ .
2.  $\mathcal{P} \cap (-\mathcal{P}) = \{0\}$ .

### Preuve.

1. Soit  $(G, +, \leq)$  groupe ordonné; de  $0 \leq x$  et  $0 \leq y$  on déduit  $y \leq x + y$ , et  $0 \leq x + y$  par transitivité; ceci exprime que l'ensemble  $\mathcal{P}$  est stable pour l'addition .

En outre, la relation  $x \leq y$  est équivalente à  $0 \leq y - x$ , c'est-à-dire à

$$y - x \in \mathcal{P}.$$

2. (C)

$$x \in \mathcal{P} \cap (-\mathcal{P}) \Leftrightarrow 0 \leq x \text{ et } x = -a, 0 \leq a = -x \Leftrightarrow 0 \leq x \text{ et } x \leq 0 \Rightarrow x = 0.$$

(D) évident. ■

### **Théorème 2.1**

*Si le groupe commutatif  $G$  admet un sous-ensemble non vide  $\mathcal{P}$  tel que*

1.  $\mathcal{P} + \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$
2.  $\mathcal{P} \cap (-\mathcal{P}) = \{0\}$ ,

*alors on peut définir sur  $G$  une relation d'ordre compatible avec la structure du groupe dont  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des éléments positifs.*

#### **Preuve.**

1. Sur  $G$  on définit la relation  $(x \leq y) \Leftrightarrow ((y - x) \in \mathcal{P})$  c'est une relation d'ordre :

**Réflexivité :**  $\forall x \in G, x - x = 0 \in \mathcal{P}$ , donc  $x \leq x$ .

**Antisymétrie :**  $\forall x, y \in G$

$$\text{On a } \begin{cases} x \leq y \\ y \leq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y - x) \in \mathcal{P} \\ (x - y) \in \mathcal{P} \end{cases} \text{ et comme } -(y - x) = (x - y) \in (-\mathcal{P}).$$

Alors on a  $(x - y) \in \mathcal{P} \cap (-\mathcal{P}) = \{0\}$ . D'où  $x = y$ .

**Transitivité :**  $\forall x, y, z \in G$

$$\text{On a } \begin{cases} x \leq y \\ y \leq z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y - x) \in \mathcal{P} \\ (z - y) \in \mathcal{P} \end{cases} \text{ et comme } \mathcal{P} + \mathcal{P} \subset \mathcal{P} \text{ alors on a}$$

$((z - y) + (y - x)) \in \mathcal{P}$  d'où  $(z - x) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow x \leq z$ .

2. La vérification de la compatibilité avec la structure de groupe est immédiate,

On a :  $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathcal{P}$ .

soit  $z \in G$  :

$$\begin{aligned} y - x &= (y - z) + (z - x) \\ &= (y + z) - (x + z) \in \mathcal{P} \end{aligned}$$

d'où  $x + z \leq y + z$ .

3. Soit  $Q$  l'ensemble des éléments positifs de  $G$  pour l'ordre :

$$x \leq y \Leftrightarrow (y - x) \in \mathcal{P}.$$

On montre que  $Q = \mathcal{P}$  :

i) ( $\subset$ )

$x \in Q$ , donc  $0 \leq x$  ensuite  $x - 0 = x \in \mathcal{P}$ , d'où  $Q \subset \mathcal{P}$ .

ii) ( $\supset$ )

Soit  $x \in \mathcal{P}$ ,  $x = x - 0 \in \mathcal{P}$ , donc  $0 \leq x \Rightarrow x \in Q$ , d'où  $\mathcal{P} \subset Q$ .

Enfin  $Q = \mathcal{P}$ . ■

### Remarques 2.2

1. En vertu de la condition  $\mathcal{P} + \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$ , dans un groupe commutatif ordonné  $G$ , la relation  $0 \leq x$  implique  $0 \leq nx$  pour tout entier naturel  $n$ . Si, de plus, l'élément positif  $x$  du groupe  $G$  est d'ordre fini  $n$ ,  $-x = (n - 1)x$  est positif ; comme

$$\mathcal{P} \cap (-\mathcal{P}) = \{0\},$$

ceci entraîne  $x = 0$ . En particulier, si tous les éléments de  $G$  sont d'ordre fini, on a  $\mathcal{P} = \{0\}$  ; la relation  $x \leq y$  est alors équivalente à  $x = y$  (structure d'ordre discrète).

2. Souvent on désignera un ordre par l'ensemble  $\mathcal{P}$  des éléments positifs pour cet ordre, on dit aussi que  $\mathcal{P}$  est le cône positif.

### Exemples 2.2

1. Dans le groupe additif  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble des éléments  $(x, y)$  satisfaisant à deux inégalités  $ax + by \geq 0$ ,  $cx + dy \geq 0$ , où  $a, b, c, d$  sont des entiers tels que  $ad - bc \neq 0$  ; le cône  $\mathcal{P}$  satisfait aux deux conditions de la prop.2.3. On définit ainsi sur  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  diverses structures d'ordre compatibles avec sa

structure de groupe ; le groupe n'est totalement ordonné pour aucune de ces structures.

2. Pour le groupe additif  $G = \mathbb{R}^2$ . L'ordre lexicographique :

$$((x_1, y_1) < (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 < x_2 \text{ ou } x_1 = x_2, y_1 < y_2))$$

correspond à  $\mathcal{P} = \{(x, y) \in G \mid x > 0, y \text{ quelconque, ou } x = 0, y > 0\}$ .

L'ensemble des points à coordonnées entières et positives ou nulles est aussi un ordre pour  $G$ .

3. Le groupe multiplicatif  $G = \mathbb{Q}_+^*$  des rationnels positifs admet  $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$  comme cône positif pour  $a < b$  veut alors dire  $ba^{-1} \in \mathbb{N}^*$ , en particulier si  $a$  et  $b$  sont des entiers,  $a < b \Leftrightarrow a$  divise  $b$ .

**Remarque 2.1** Un ordre  $\mathcal{P}$  est total si  $\mathcal{P} \cup (-\mathcal{P}) = G$ .

## 2.3 Groupes filtrants

### Définition 2.4

Un ensemble ordonné  $G$  est dit filtrant à droite (resp. à gauche) si, pour tout couple  $(x, y)$  d'éléments de  $G$ , il existe  $z \in G$  tel que  $x \leq z$  et  $y \leq z$  (resp.  $z \leq x$  et  $z \leq y$ ).

### Exemples 2.3

1.  $(\mathbb{R}, \leq)$  ensemble ordonné filtrant à droite et à gauche car :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists z = \max\{x, y\} \in \mathbb{R} \text{ telque } x \leq z \text{ et } y \leq z \text{ et}$$

$$\exists z' = \min\{x, y\} \in \mathbb{R} \text{ telque } z' \leq x \text{ et } z' \leq y.$$

2.  $(\mathbb{N}, |)$  ensemble ordonné filtrant à droite et à gauche car :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N}^2, \exists z = \text{ppcm}(x, y) \in \mathbb{N} \text{ telque } x \mid z \text{ et } y \mid z \text{ et}$$

$$\exists z' = \text{pgcd}(x, y) \in \mathbb{N} \text{ telque } z' \mid x \text{ et } z' \mid y.$$

3. Tout groupe ordonné filtrant à droite  $G$  est aussi filtrant à gauche, et réciproquement : en effet, comme il existe  $z \in G$  tel que  $-x \leq z$  et  $-y \leq z$ , on a  $-z \leq x$  et  $-z \leq y$ . Nous parlerons donc simplement de groupe filtrant.

## 2.4 Sous-Groupe engendré par une partie

Soient  $(G, +)$  un groupe commutatif et  $X \subset G$ .

### Définition 2.5

Le sous groupe de  $G$  engendré par la partie  $X$ , noté  $\langle X \rangle$ , est l'ensemble  $\langle X \rangle = \{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k \mid k \in \mathbb{N}^*, x_i \in X, n_i \in \mathbb{Z}\}$ .

### Remarque 2.2

On peut facilement voir que

$$\langle X \rangle = \{\epsilon_1x_1 + \epsilon_2x_2 + \dots + \epsilon_kx_k \mid k \in \mathbb{N}^*, \epsilon_i = \pm 1, x_i \in X\}.$$

Cas particulier si  $G$  est un groupe ordonné de cône positif  $\mathcal{P}$ , alors

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P} \rangle &= \{\epsilon_1p_1 + \epsilon_2p_2 + \dots + \epsilon_kp_k \mid k \in \mathbb{N}^*, \epsilon_i = \pm 1, p_i \in \mathcal{P}\} \\ &= \left\{ \left( \sum_{\epsilon_i=1} \epsilon_i p_i \right) + \left( \sum_{\epsilon_j=-1} \epsilon_j p_j \right) \mid p_i, p_j \in \mathcal{P} \right\} \\ &= \left\{ \left( \sum_{\epsilon_i=1} p_i \right) + \left( \sum_{\epsilon_j=-1} p_j \right) \mid p_i, p_j \in \mathcal{P} \right\} \\ &= \{p - q \mid p \in \mathcal{P} \text{ et } q \in \mathcal{P}\} \text{ parce que } \mathcal{P} + \mathcal{P} \subset \mathcal{P}. \end{aligned}$$

### Proposition 2.4

*Pour qu'un groupe ordonné  $G$  soit filtrant, il faut et il suffit qu'il soit engendré par ses éléments positifs, c'est-à-dire que tout élément de  $G$  soit différence de deux éléments positifs.*

### Preuve.

En effet. si  $G$  est filtrant, il existe. Pour tout  $x \in G$ . un élément positif  $z$  tel que  $x \leq z$ , et  $x = z - (z - x)$ . Si, réciproquement, on a  $x = u - r$  et  $y = w - t$  avec  $u, r, w, t$  positifs, l'élément  $u + w$  est supérieur à  $x$  et à  $y$ . ■

**Proposition 2.5**

Si  $(x_i)$  est une famille finie d'éléments d'un groupe filtrant  $G$ , il existe  $z \in G$  tel que  $x_i + z$  soit positif pour tout  $i$ .

**Preuve.**

Soit  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  une famille finie d'éléments de  $G$ .

Comme  $G$  est filtrant, on a pour tout  $i \in \overline{1, n}$  :  $x_i = u_i - r_i$ , avec  $u_i$  et  $r_i$  positifs.

Si on prend  $z = r_1 + r_2 + \dots + r_n$ , on a

$$\begin{aligned} x_i + z &= u_i - r_i + r_1 + r_2 + \dots + r_{i-1} + r_i + r_{i+1} + \dots + r_n \\ &= u_i + r_1 + r_2 + \dots + r_{i-1} + r_{i+1} + \dots + r_n \in \mathcal{P}, \text{ pour tout } i \in \overline{1, n}. \blacksquare \end{aligned}$$

## 2.5 Ensembles inductifs

**Définition 2.6**

Un ensemble inductif est un ensemble ordonné dans lequel toute chaîne admet un plus petit majorant.

**Axiome de Zorn :** Tout ensemble inductif, admet au moins un élément maximal.

**Théorème 2.2**

Un ensemble ordonné  $E$  satisfait à la condition maximale si et seulement si toute chaîne de  $E$  admet un plus grand élément.

**Preuve.** Soit  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné.

$\Rightarrow$ ) On suppose que  $E$  satisfait à la condition maximale, alors on a toute chaîne admet un élément maximal. Mais un élément maximal d'une chaîne en est son plus grand élément.

$\Leftrightarrow$ ) Soit  $E'$  un sous-ensemble non vide de  $E$ . Alors toute chaîne de  $E'$  est une chaîne de  $E$  et par conséquent admet par l'hypothèse un plus grand élément (qui appartient à  $E'$ ). L'ensemble  $E'$  est donc inductif et selon l'axiome de Zorn,  $E'$  admet un élément maximal, c'est-à-dire que  $E$  satisfait bien à la condition maximale. ■

## 2.6 Homomorphismes de groupes ordonnés

Conformément aux définitions générales, une application bijective  $f$ , du groupe ordonné  $(G_1, +_1, \leq_1)$  sur le groupe ordonné  $(G_2, +_2, \leq_2)$  est appelé un isomorphisme si la structure de  $(G_2, +_2, \leq_2)$  est obtenue en transportant celle de

$(G_1, +_1, \leq_1)$  au moyen de  $f$ .

### Définition 2.7

Un homomorphisme  $f$  d'un groupe ordonné  $(G_1, +_1, \leq_1)$  dans un groupe ordonné  $(G_2, +_2, \leq_2)$  est une application  $f : G_1 \rightarrow G_2$  vérifiant :

1.  $\forall x, y \in G_1 : f(x +_1 y) = f(x) +_2 f(y)$ .
2.  $\forall x, y \in G_1 : x \leq_1 y \Leftrightarrow f(x) \leq_2 f(y)$ .

Si de plus  $f$  est bijective, on dit que  $f$  est un isomorphisme, et que les groupes ordonnés  $(G_1, +_1, \leq_1)$  et  $(G_2, +_2, \leq_2)$  sont isomorphes.

## 2.7 Bornes supérieure et inférieure dans un groupe ordonné

Si l'ensemble des majorants d'une partie  $F$  d'un ensemble ordonné  $E$  admet un plus petit élément  $a$ , celui-ci, qui est alors unique, est appelé la borne supérieure de  $A$ . Si  $F$  est l'ensemble des éléments d'une famille  $(x_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $E$ , sa

borne supérieure, si elle existe, se note  $\sup x_i$  s'il s'agit d'une famille finie  $(x_i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ), cette borne se note aussi  $\sup_{i \in I} (x_1, \dots, x_n)$ .

La borne inférieure se définit d'une manière analogue et se note *inf*.

**Proposition 2.6**

Soient  $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ,  $(y_\beta)_{\beta \in B}$  deux familles d'éléments d'un groupe ordonné  $G$ , ayant chacune une borne supérieure. Alors la famille  $(x_\alpha + y_\beta)_{(\alpha, \beta) \in A \times B}$  a une borne supérieure, et l'on a  $\sup_{(\alpha, \beta) \in A \times B} (x_\alpha + y_\beta) = \sup_{\alpha \in A} (x_\alpha) + \sup_{\beta \in B} (y_\beta)$ .

**Preuve.**

$$\text{On a : } \forall (\alpha, \beta) \in A \times B \quad \begin{cases} x_\alpha \leq \sup(x_\alpha). \\ y_\beta \leq \sup(y_\beta). \end{cases}$$

Comme  $G$  est ordonné

$$\forall (\alpha, \beta) \in A \times B \quad x_\alpha + y_\beta \leq \sup(x_\alpha) + \sup(y_\beta).$$

Donc

$$\sup(x_\alpha + y_\beta) \leq \sup(x_\alpha) + \sup(y_\beta) \dots \dots (1)$$

Soit  $z$  un majorant de la famille  $(x_\alpha + y_\beta)_{(\alpha, \beta) \in A \times B}$ .

$$\forall \alpha, \beta \quad x_\alpha + y_\beta \leq z, \text{ en fixent } \beta \text{ on a } \forall \alpha \quad x_\alpha \leq z - y_\beta.$$

Pour  $\beta \in B$  :  $z - y_\beta$  est un majorant de la famille  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ,

$$\text{donc } \sup(x_\alpha) \leq z - y_\beta.$$

$$\text{Alors } \sup(x_\alpha) + y_\beta \leq z.$$

De même on a  $y_\beta \leq z - \sup(x_\alpha)$ ,  $z - \sup(x_\alpha)$  est un majorant de la famille  $\{y_\beta\}_{\beta \in B}$ ,

$$\text{donc } \sup(y_\beta) \leq z - \sup(x_\alpha).$$

$$\text{Alors } \sup(x_\alpha) + \sup(y_\beta) \leq z \quad \text{pour tout } z \text{ majorant de } \{x_\alpha + y_\beta\}.$$

Donc

$$\sup(x_\alpha) + \sup(y_\beta) \leq \sup(x_\alpha + y_\beta) \dots \dots (2)$$

(1) et (2) entraînent l'égalité. ■

## 2.8 Opérations élémentaires sur les groupes ordonnés

Si  $(G, +, \leq)$  est un groupe ordonné et  $H$  un sous groupe de  $G$  alors  $(H, +, \leq)$  est un sous groupe ordonné de  $G$ .

### Remarque 2.3

Si  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des éléments positifs de  $G$ , l'ensemble des éléments positifs de  $H$  est  $H \cap \mathcal{P}$ .

### Définition 2.8

Soit  $(G_i, +, \leq_i)$  des groupes ordonnés.

On définit  $G = \prod_i G_i = \{(x_i)_{i \in I} : x_i \in G_i\}$ .

Sur  $G$  On définit l'opération :  $(x_i)_{i \in I} + (y_i)_{i \in I} = (x_i + y_i)_{i \in I}$

alors  $(G, +)$  est un groupe.

### Définition 2.9

Sur  $G$  On définit l'ordre :

$$(x_i)_{i \in I} \leq (y_i)_{i \in I} \Leftrightarrow \forall i \in I, x_i \leq_i y_i.$$

alors  $(G, +, \leq)$  groupe produit ordonné.

### Remarques 2.3

1. Les éléments positifs de  $G$  sont  $(x_i)_{i \in I}$  tel que  $0_i \leq x_i$ .
2. Dans le cas où tous les facteurs  $G_i$  sont identiques à un même groupe ordonné  $H$ ,  $G$  est le groupe  $H^I$  des applications de l'ensemble d'indices  $I$  dans  $H$ , la relation «  $f \leq g$  » entre deux applications de  $I$  dans  $H$  équivaut « quel que soit  $i \in I$ ,  $f(i) \leq g(i)$  »; les applications positives sont celles qui ne prennent que des valeurs positives.

## 2.9 Groupe réticulé

### Définition 2.10

Un groupe réticulé est un groupe ordonné qui pour son ordre est un treillis .

c'est à dire qui est tel que pour tout couple  $(a, b)$  du groupe ordonné on peut définir  $\sup(a, b) = a \vee b$  et  $\inf(a, b) = a \wedge b$  .

Nous nous limiterons au cas commutatif, mais le groupe sera noté multiplicativement .

### Remarques 2.4

1. Le produit de groupes réticulés est un groupe réticulé .
2. Un produit de groupes totalement ordonnés est un groupe réticulé .
3. Un groupe réticulé n'est jamais un treillis complet. Si  $G$  est un groupe réticulé tel que  $\sup G = a$ , alors, quel que soit  $x$ , on a  $a + x \leq a$ , ce qui est impossible pour les  $x \in \mathcal{P}$  .

### Théorème 2.3

Dans un groupe réticulé, pour tout  $a, b, c \in G$  et  $e$  élément neutre dans  $G$  on a :

1.  $a(b \vee c) = ab \vee ac$  et  $a(b \wedge c) = ab \wedge ac$ .
2.  $(b \vee c)(b \wedge c) = bc$ .
3.  $a \vee b = e$  implique  $a \vee b^n = e$ , pour  $n$  entier .

**Preuve.**

$$1. \text{ On a : } \begin{cases} b \leq b \vee c \\ c \leq b \vee c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab \leq a(b \vee c) \\ ac \leq a(b \vee c) \end{cases} \text{ donc } ab \vee ac \leq a(b \vee c),$$

$$\text{et } \begin{cases} ab \leq ab \vee ac \\ ac \leq ab \vee ac \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \leq a^{-1}(ab \vee ac) \\ c \leq a^{-1}(ab \vee ac) \end{cases} \text{ donc } b \vee c \leq a^{-1}(ab \vee ac).$$

2. Faisons  $a = b \vee c$  dans l'égalité  $a(b \wedge c) = ab \wedge ac$  donc :

$$(b \vee c)(b \wedge c) = [(b \vee c)b] \wedge [(b \vee c)c]$$

$$(b \vee c)(b \wedge c) = (b^2 \vee bc) \wedge (bc \vee c^2)$$

$$\text{Mais } \begin{cases} bc \leq b^2 \vee bc \\ bc \leq bc \vee c^2 \end{cases} \Rightarrow bc \leq (b^2 \vee bc) \wedge (bc \vee c^2).$$

On montrerait après échange des  $\leq$  et  $\geq$ ,  $\vee$  et  $\wedge$  que  $(b \vee c)(b \wedge c) \leq bc$ .

3.  $a \wedge b = e(a \wedge b) = (a \vee b)(a \wedge b) = ab$ , soit  $c$  tel que  $a \vee c = e$ . Alors  $a \vee bc \leq e$  puis  $(a \vee b)(a \vee c) = e = a^2 \vee ba \vee ac \vee bc \leq a \vee bc \leq e$ . D'où  $a \vee bc = e$ .

En particulier  $a \vee b^2 = e$  et ainsi de suite. ■

### Définition 2.11

Un élément  $a$  d'un groupe ordonné  $G$  est dit entier si  $a \leq e$ .

Un élément entier  $p$  est dit premier si  $ab \leq p$  implique  $a \leq p$  ou  $b \leq p$ .

Un élément entier  $m$  est dit maximal s'il est distinct de  $e$  et tel que  $m \leq r \leq e$  implique  $r = e$ .

### Théorème 2.4

*Dans un groupe réticulé :*

1. tout élément est quotient de deux éléments entiers .
2. tout élément premier est maximal.

### Preuve.

1. Si  $a$  est un élément du groupe réticulé  $G$ , on a  $a = (a \vee e)(a \wedge e)$  avec  $e \leq a \vee e$  d'où  $(a \vee e)^{-1}$  entier donc  $a = (a \wedge e)/(a \vee e)^{-1}$ .

2. Soit  $p$  un élément premier. Supposons qu'il existe  $x$  tel que  $p \leq x \leq e$  alors  $c = px^{-1} \leq e$  avec  $cx = p$  et  $p \leq c$  ce

qui est contradictoire avec  $p$  premier . ■

### Lemme 2.5

Si  $m$  est un élément maximal d'un groupe réticulé alors  $ab \leq m$ ,  $a \leq e$  et  $b \leq m$  implique  $a \leq m$ .

#### Preuve.

On a  $b \vee m = e$ . Sinon,  $m$  ne serait pas maximal.

d'où  $a = a(b \vee m) = ab \vee am \leq m \vee am \leq m$  (car  $a \leq e$  implique  $am \leq m$ ). ■

### Théorème 2.6

Dans un groupe réticulé, deux produits finis d'éléments maximaux ne peuvent être égaux sans être identiques.

#### Preuve.

Soit l'égalité  $\prod_{i \in I} m_i^{\lambda_i} = \prod_{j \in J} m_j^{\lambda_j}$  de deux produits finis d'éléments maximaux .

Puisque  $m_j' < e$  pour tout  $j \in J$ , alors  $\prod_{i \in I} m_i^{\lambda_i} < m_j'$ , mais selon le lemme 2.5, il existe  $h \in I$  tel que  $m_h \leq m_j'$ , mais  $m_h$  étant maximal, cela implique  $m_h = m_j'$ , puis  $I = J$  donc  $\prod_{i \in I} m_i^{\lambda_i} = \prod_{i \in I} m_i^{\lambda_i}$ . Posons  $a = m_1^{\lambda_1}$ ,  $a^* = m_1^{\lambda_1^*}$  et  $b = \prod_{\substack{i \in I \\ i \neq 1}} m_i^{\lambda_i}$ .

On a  $ab < a^*$  et  $m_1 \vee b = e$ . Sinon  $m_1$  ne serait pas maximal, d'où, selon le le théorème 2.3,  $a^* \vee b = e$  donc  $a = a(a^* \vee b) = aa^* \vee ab \leq a^*$ . On aurait de même  $a^* \leq a$  d'où  $m_1^{\lambda_1} = m_1^{\lambda_1^*}$ , ce qui entraîne  $\lambda_1 = \lambda_1^*$ . ■

## 2.10 Partie positive et partie négative

### Définition 2.12

Dans un groupe réticulé  $G$  on appelle partie positive (resp. partie négative, valeur absolue) d'un élément  $x \in G$ , et on note  $x^+$  (resp.  $x^-$ ,  $|x|$ ) l'élément  $\sup(x, 0)$  (resp.  $\sup(-x, 0)$ ,  $\sup(x, -x)$ ).

### Remarques 2.5

1. Malgré son nom, la partie négative  $x^-$  de  $x$  est un élément positif.
2. Il est clair que l'on a  $x^- = (-x)^+$  et  $|-x| = |x|$ .

Notons aussi les formules suivantes, qui sont conséquences immédiates des définitions et de l'invariance de l'ordre par translation,

$$\begin{cases} \sup(x, y) = x + (y - x)^+, \\ \inf(x, y) = y - (y - x)^+. \end{cases}$$

## 2.11 Éléments étrangers

### Définition 2.13

Dans un groupe ordonné, deux éléments  $x$  et  $y$  sont dits étrangers si l'on a  $\inf(x, y) = 0$ .

Deux éléments étrangers sont nécessairement positifs. Les parties positives et négatives  $x^+$  et  $x^-$  de  $x$  sont des éléments étrangers .

### Remarques 2.6

- Dans un groupe réticulé, si  $x$  et  $y$  sont étrangers et si on a  $0 \leq z$  et  $x \leq y + z$ , alors on a  $x \leq z$ .
- Dans un groupe réticulé, si  $x$  est étranger à  $y$  et  $z$ , il l'est aussi à  $y + z$  .

## 2.12 Éléments extrémaux

### Définition 2.14

On dit qu'un élément  $x$  d'un groupe ordonné  $G$  est extrémal si c'est un élément minimal de l'ensemble des éléments strictement positif de  $G$  .

Soit  $x$  un élément extrémal du groupe ordonné  $G$  ; si  $y$  est un élément positif de  $G$ , l'élément  $\inf(x, y)$ , s'il existe, ne peut donc être égal qu'à  $x$  ou à 0. Ainsi, dans

un groupe réticulé  $G$ , tout  $y$  positif est, soit supérieur, soit étranger à l'élément extrémal  $x$ ; en particulier deux éléments extrémaux distincts sont étrangers.

## 2.13 Groupe continu

Soit  $(G, +, \leq)$  groupe totalement ordonné.

### Définition 2.15

Un groupe  $G$  est dit continu si, d'une part, c'est un treillis conditionnellement complet et si d'autre part, il est dense pour l'ordre c'est-à-dire si entre deux éléments de  $G$ , il y a au moins un troisième.

Soit  $G$  un groupe continu noté additivement. Introduisons l'application

$$\theta : G \rightarrow G \text{ telle que } \theta(x) = 2x = x + x.$$

### Théorème 2.7

*L'application  $\theta$  est un automorphisme du groupe continu  $G$ .*

#### Preuve.

Remarquons que quel que soit  $a > 0$ , il existe  $b > 0$ , tel que  $2b \leq a$ ; il existe en effet  $c \in G$  tel que  $0 < c < a$ . Si  $2c \leq a$ , on prendra  $b = c$ ; si  $a < 2c$ , alors  $a - 2c < 0$  implique  $2(a - c) < a$  et on adoptera  $b = a - c$ .

Montrons que la restriction de  $\theta$  à  $\mathcal{P}$  est une surjection. Pour cela considérons pour  $u \in \mathcal{P}$  fixé, les ensembles  $X = \{x \in G / 2x < u\}$  et  $Y = \{y \in G / 2y > u\}$ .

$X$  est majoré par  $u$  donc  $h = \sup X$  existe. Examinons les trois cas possibles :  $h \in Y$ ,  $h \in X$  et  $h \notin X \cup Y$ .

Si  $h \in Y$ , alors  $2h > u$ . Puisque tout élément de  $Y$  est un majorant de  $X$ ,  $h$  est le plus petit élément de  $Y$ ;  $a_1 = 2h - u > 0$  implique qu'il existe  $b_1 > 0$

tel que  $2b_1 \leq 2h - u$  d'où  $u < 2(h - b_1) \leq 2h$  donc  $h - b_1 \in Y$  en contradiction avec le fait que  $h$  est le plus petit élément de  $Y$  donc  $h \notin Y$ .

Si  $h \in X$ , alors  $2h < u$  et il existe  $b > 0$  tel que  $2b \leq u - 2h$

d'où  $2h < 2(b + h) \leq 2h + u - 2h = u$ . Si  $2(b + h) < u$ , cela implique  $b + h \in X$ , en contradiction avec le fait que  $h = \sup X \in X$ ; donc  $2(b + h) = u$  et  $\theta(b + h) = u$ .

Si  $h \notin X \cup Y$ , alors  $2h = u$  et  $\theta(h) = u$ .

Ainsi un élément  $u \in \mathcal{P}$  admet dans tous les cas un antécédent. D'autre part,  $a < b$  entraîne  $2a < 2b$ , donc  $2a \neq 2b$  si  $a \neq b$ , c'est à dire que la restriction de  $\theta$  est une injection ce qui achève la démonstration . ■

On notera  $u/2 = \theta^{-1}(u)$ , puis  $u/2^n = (\theta^{-1})^n(u)$ , pour tout  $u \in \mathcal{P}$  et tout  $n \in \mathbb{Z}_+$ , et enfin pour tout  $p \in \mathbb{Z}$ , en écrira :  $(p/2^n)(u) = p(u/2^n)$ .

### Définition 2.16 (Archimédien)

un groupe commutatif ordonné  $(G, +, \leq)$  est archimédien si pour tout élément  $a$ ,  $0 < a$  ( $0 =$  élément neutre), et tout élément  $b$ , de  $G$ , il existe un entier naturel non nul  $n$  tel que  $n.a > b$ .

### Théorème 2.8

*Tout groupe continu est archimédien.*

**Preuve.**

$H = \{p/2^n \mid p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_+\}$  est un sous groupe additif de  $\mathbb{Q}$ .

Soit  $u$  un élément fixé d'un groupe continu  $G$ .

L'application  $\Phi_u : H \rightarrow G$  tel que  $r \rightarrow ru$  est un monomorphisme de groupes ordonnés. Posons  $\Phi_u(H) = H(u)$ ; soit  $(H(u))_+$  l'ensemble des éléments positifs du groupe  $H(u)$  et  $m = \sup [(H(u))_+]$ ; puisque l'application  $(H(u))_+ \rightarrow (H(u))_+$

tel que  $x \rightarrow 2x$  est bijective théo 2.7, alors  $2m \in (H(u))_+$  et  $m \leq 2m$  implique  $m = 2m$  d'où  $m = 0$ . Ainsi n'est pas majoré. Le même raisonnement montre que  $\inf [H(u)]_+ = 0$ . Soient  $x$  et  $y$  de  $G$  tel que  $x > 0$ ,  $y > 0$  et  $x < y$ . Il existe  $ru \in (H(u))_+$  tel que  $ru < x$  sinon  $x = \inf [(H(u))_+] = 0$ . Il existe  $r'u \in (H(u))_+$  tel que  $y < r'u$  sinon  $(H(u))_+$  serait majoré .

Donc  $ru < x < y < r'u$  et le monomorphisme  $\Phi_u$  implique  $r < r'$ . Mais  $\mathbb{Q}$  est archimédien; il existe donc  $n$  tel que  $r' < nr$  d'où  $r'u < nru$ , c'est-à-dire  $y < r'u < nru < nx$ . ■

### **Théorème 2.9 (Holder)**

*Tout groupe totalement ordonné archimédien est commutatif.*

#### **Preuve.**

Soit  $G$  un groupe totalement ordonné archimédien, en notation multiplicative. Si  $G$  admet un élément  $a$  strictement positif minimal, alors, pour tout  $b \in G$  strictement positif, il existe un entier naturel  $n$  tel que  $a^n \leq b < a^{n+1}$  ; d'où  $1 \leq ba^{-n} < a$  et par conséquent  $ba^{-n} = 1$  c'est-à-dire  $b = a^n$ . Ainsi tous les éléments strictement positifs du groupe  $G$  s'obtiennent comme puissances de  $a$ ;  $G$  est isomorphe au groupe additif des entiers relatifs  $\mathbb{Z}$ .

Supposons maintenant qu'il n'existe pas d'élément minimal parmi les éléments strictement positifs du groupe  $G$ . Dans ce cas, pour tout  $a > 1$ , il existe  $b > 1$  tel que  $b^2 \leq a$ , selon le théo 2.7. Soient  $u$  et  $v$  deux éléments de  $G$  strictement supérieur à 1. Si  $uv \neq vu$ , posons  $c = u^{-1}v^{-1}uv$  . On peut restreindre la généralité supposer  $c > 1$ , car si  $c < 1$ , on fera jouer à  $u^{-1}$  le rôle de  $u$  et à  $v^{-1}$  le rôle de  $v$  . Il existe donc  $d > 1$  tel que  $d^2 \leq c$  . On peut de plus supposer  $d < u$  ... Ainsi il existe des entiers naturels  $k$  et  $l$  tels que  $d^k \leq u < d^{k+1}$  ,  $d^l \leq v < d^{l+1}$  d'où  $uv < d^{k+l+2}$  et  $u^{-1}v^{-1} \leq d^{-(k+l)}$  c'est-à-dire  $c < d^2$  et comme par hypothèse  $d^2 \geq c$ , nous obtenons une contradiction . La commutativité du groupe est ainsi démontrée . ■

**Définition 2.17 (Section commençante ouverte de  $\mathbb{Q}$ )**

On appelle section commençante ouverte de  $\mathbb{Q}$  tout ensemble  $S \subset \mathbb{Q}$  vérifiant les quatres propriétés suivantes :

1.  $S \neq \emptyset$ .
2.  $S \neq \mathbb{Q}$ .
3.  $\forall x \in S, y \leq x \Rightarrow y \in S$ .
4.  $S$  n'a pas de plus grand élément, i.e.  $\forall x \in S, \exists y \in S, x < y$ .

**Exemple important 2.1 (Le groupe  $\mathbb{R}_1$ )**

Notons  $\sum(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}_1$  l'ensemble des sections commençantes ouvertes de  $\mathbb{Q}$ .

On montre que  $(\mathbb{R}_1, +)$  est un groupe continu :

1. Définissons l'addition sur  $\mathbb{R}_1$  comme l'addition sur l'ensemble des parties de  $\mathbb{Q}$  :

$$s_1 + s_2 = \{x_1 + x_2; x_1 \in s_1, x_2 \in s_2\}.$$

Il est immédiat que l'opération est associative, commutative et qu'elle induit l'addition sur  $\mathbb{Q}$ .

On définit  $s(a) = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq a\}$ .

Considérons  $s(0)$ ; pour tout  $s \in \mathbb{R}_1$ , on a :  $s + s(0) \subset s$ .

Réciproquement, soit  $x \in s$ ; il n'y a pas dans  $s$  de plus grand élément donc il existe  $y \in s$  Tel que  $y > x$ , et  $x - y \in s(0)$  d'où, quel que soit  $x \in s$  :  $x = y + (x - y) \in s + s(0)$ , ce qui implique  $s + s(0) = s$ , c'est-à-dire que  $s(0)$  est élément neutre .

Considérons  $-s$ , au sens de l'opération sur les parties, c'est-à-dire l'ensemble des symétriques des éléments de  $s$ . c'est une section finissante ;  $C(-s)$  complémentaire de  $-s$  dans  $\mathbb{Q}$  est une section commençante . Cette section peut être ouverte

ou fermée par un rationnel; dans ce dernier cas, on le retire et on considère la section commençante ouverte correspondante que nous désignerons par  $C^*(-s)$

$$\begin{aligned} -s &= \{x; \exists u \in s; -u < x\} \\ C(-s) &= \{y; \forall u \in s; -u > y\}. \end{aligned}$$

d'où  $s + C(-s) = \{x + u; x \in C(-s), u \in s\}$  avec  $-u > x$ ,  
c'est-à-dire  $x + u < 0$ . On peut donc affirmer :  $s + C(-s) \subseteq s(0)$ .

Reste à savoir si, à la place de l'inclusion ci-dessus, on a l'égalité c'est-à-dire si un nombre négatif quelconque  $-q$  appartient à  $s + C(-s)$ . Ici intervient le fait que  $\mathbb{Q}$  est un groupe archimédien. Considérons l'ensemble des nombres  $nq$ ,  $q > 0$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Puisque  $s \neq \{\emptyset, \mathbb{Q}\}$  il existe  $a \in s$ , et  $b \in C(s)$ ;  $n_1$  et  $n_2 \in \mathbb{Z}$  tel que  $n_1q < a$  et  $n_2q > b$ , d'où  $n_1q \in s$  et  $n_2q \in C(s)$ . Nécessairement,  $n_1q < n_2q$ , sinon  $n_2q < n_1q$  impliquerait  $n_2q \in s$ . Mais entre  $n_1q$  et  $n_2q$ , il y a un nombre fini de multiples de  $q$ . Il existe donc  $n$  tel que  $nq \in s$  et  $(n+1)q \in C(s)$ , car, dans le cas contraire, pour  $n$  compris entre  $n_1$  et  $n_2$ ,  $nq \in s$  impliquerait  $(n+1)q \in s$ . Il y aurait donc entre  $n_1q$  et  $n_2q$  une infinité de multiples de  $q$  en contradiction avec l'hypothèse. Ainsi  $-(n+1)q \in -C(s) = C(-s)$ ; mais  $-q = nq - (n+1)q \in s + C(-s)$  d'où  $s + C(-s) = s(0)$ .

Ainsi si  $C(-s)$  n'est pas une section fermée, il est élément symétrique de  $s$  pour l'addition. Dans le cas contraire, c'est  $C^*(-s)$  qu'il faut considérer; il pourrait alors se produire que le rationnel retiré de  $C(-s)$  soit justement  $(n+1)q$ . Entre  $nq \in s$  et  $(n+2)q \in C(s)$ , il y aurait alors une différence de  $2q$ . Il suffirait de remplacer dans le raisonnement précédent  $q$  par  $q/2$  pour retrouver une différence de  $q$  et prouver ainsi que  $-q$  appartient à  $s + C^*(-s)$ .

2.  $\mathbb{R}_1$  est ordonnée par la relation d'inclusion et est dense pour cet ordre car si  $s_1 \not\subseteq s_2$  avec  $s_1 \neq s_2$ , alors il existe  $r \in \mathbb{Q}$  tel que  $r \notin s_1$  et  $r \in s_2$  et il est immédiat que  $s_1 \subset s(r) \subset s_2$ . Finalement  $\mathbb{R}_1$  est un groupe continu.

Montrons qu'il est possible d'associer à tout élément  $a > 0$  d'un groupe totalement ordonné archimédien un monomorphisme  $\Psi : G \rightarrow \mathbb{R}_1$ .

Il est commode d'utiliser la notation additive pour l'opération dans  $G$ .

Soit  $a \in G$  un élément strictement positif ( $G_+ \neq a\mathbb{Z}$ ) et  $b$  un élément quelconque de  $G$ . Puisque  $G$  est archimédien, pour tout élément  $mb$  ( $m > 0$ , dans  $\mathbb{Z}$ ), il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $na \leq mb$ .

Notons  $s_b = \{r = (n/m) \in \mathbb{Q} \setminus m > 0; na \leq mb\}$ ;  $s_b$  est une section commençante, car si  $n/m \in s_b$  et  $p/q < (n/m)(q < 0)$ , alors  $pm < qn$  implique  $(pm)a < (qn)a < (qm)b$  d'où  $pa < qb$  et  $p/q \in s_b$ . On a vu que  $s_b \neq \emptyset$ . Établissent que  $s_b \neq \mathbb{Q}$ . Puisque  $G$  est archimédien, il existe un entier naturel  $p$  tel que  $pa > b$  donc  $p \notin s_b$ . Ainsi  $s_b$  permet de définir une section commençante ouverte appartenant à  $\mathbb{R}_1$ ; si  $s_b$  était fermée on supprimerait le plus grand élément. Notons  $\sigma_b$  cette section ouverte.

Nous définissons alors une application  $\Psi : G \rightarrow \mathbb{R}_1$  tel que  $b \rightarrow \sigma_b$ .

Si  $b \leq b'$ , alors  $na \leq mb \Rightarrow a \leq mb'$  donc, si  $n/m \in s_b$ , alors  $n/m \in s_{b'}$ , c'est-à-dire  $s_b \subseteq s_{b'}$ , puis  $\sigma_b \subseteq \sigma_{b'}$ , donc  $\Psi$  est une application croissante.

Montrons que  $\Psi$  est un morphisme de groupes. Si  $n/m \in s_b$  et  $p/q \in s_{b'}$ , alors  $na \leq mb$  et  $pa \leq qb'$  et il vient  $(nq + mp)a \leq mq(b + b')$  d'où :

$$\frac{nq + mp}{mq} = \frac{n}{m} + \frac{p}{q} \in s_{b+b'}.$$

De la même manière, on montrerait que si  $n/m \notin s_b$  et  $p/q \notin s_{b'}$ ,

alors  $(n/m) + (p/q) \notin s_{b+b'}$  d'où  $\Psi(b + b') = \Psi(b) + \Psi(b')$ .

Étudions  $\ker \Psi$ . Si  $b > 0$ , il existe puisque  $G$  est archimédien un entier naturel  $n$  tel que  $nb > a$ , c'est-à-dire  $1/n \in s_b$  et par suite  $\Psi(b) \supset s(0)$  d'où  $\ker \Psi = \{s(0)\}$ .

Notons que  $a \leq a$  implique  $\Psi(a) = s(1)$ . Supposons qu'il existe un autre monomorphisme de groupes ordonnés  $\Phi : G \rightarrow \mathbb{R}_1$  tel que  $\Phi(a) = s(1)$ . Si  $x \in G$ ,

$na \leq mx$  implique  $ns(1) \subseteq m\Phi(x)$  d'où  $n/m \in \Phi(x)$  et  $\sigma_x = \Psi(x) \subseteq \Phi(x)$ . Réciproquement si  $n/m \in \Phi(x)$ , cela implique  $\Phi(na) \subseteq \Phi(mx)$  et puisque  $\Phi$  est un morphisme injectif pour l'ordre :  $na \leq mx$  d'où  $n/m \in \sigma_x$  et  $\Psi(x) = \Phi(x)$  pour tout  $x \in G$ ; donc  $\Psi = \Phi$ , c'est-à-dire que le monomorphisme  $\Psi : G \rightarrow \mathbb{R}_1$  est entièrement déterminé par la relation  $\Psi(a) = s(1)$ .

**Théorème 2.10**

*Tout groupe continu est isomorphe à  $\mathbb{R}_1$ .*

**Preuve.**

Selon le théorème 2.8, tout groupe continu  $G$  est archimédien et il existe donc  $\Psi : G \rightarrow \mathbb{R}_1$  monomorphisme déterminé par la relation  $\Psi(a) = s(1)$ , pour  $a$  fixé dans  $G$ . Soit  $s \in \mathbb{R}_1$  et  $L = \{s_b \subset s; b \in G\}$ . Puisque  $im\Psi$  est un groupe archimédien :  $L \neq \emptyset$ ;  $L$  étant majoré,  $supL$  existe non seulement dans  $\mathbb{R}_1$ , mais dans  $im\Psi$ , puisque ce dernier est un treillis conditionnellement complet. On ne peut avoir  $supL \subset s$  car  $\mathbb{R}_1$  étant dense pour l'ordre  $L$  aurait des éléments entre  $supL$  et  $s$ ; pour la même raison, on ne peut avoir  $supL \supset s$  donc  $supL = s$  et  $s \in im\Psi$  d'où  $im\Psi = \mathbb{R}_1$ . ■

# Chapitre 3

## Corps Ordonnés

### 3.1 Anneaux ordonnés

Soient  $(A, +, \cdot)$  un anneau commutatif et " $\dots \leq \dots$ " un ordre sur  $A$ .

**Définition 3.1 :**

On dit qu'une structure d'ordre sur  $A$  est compatible avec la structure d'anneau de  $A$  si elle est compatible avec la structure du groupe additif de  $A$ , et si elle vérifie l'axiome suivant :

Les relations  $0 \leq x$  et  $0 \leq y$  entraînent  $0 \leq xy \dots (*)$

L'anneau  $(A, +, \cdot)$  muni d'une telle structure d'ordre, est appelé un anneau ordonné.

**Exemples 3.1**

1. Les anneaux  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{Z}$  ordonnés par l'ordre usuel, sont des anneaux ordonnés.
2. Un sous-anneau d'un anneau ordonné, ordonné par l'ordre induit, est un anneau ordonné.

### Proposition 3.1

*Dans un anneau ordonné, les relations  $y \leq x$  et  $0 \leq z$  entraînent  $yz \leq xz$ .*

#### Preuve.

En effet ces inégalités sont respectivement équivalentes à  $0 \leq x - y$ ,  $0 \leq z$  et  $0 \leq (x - y)z$ . ■

On démontre de façon analogue que les relations  $x \leq 0$  et  $0 \leq y$  (resp.  $y \leq 0$ ) entraînent  $xy \leq 0$  (resp.  $0 \leq xy$ ). Ces résultats sont souvent invoqués sous le nom de règles des signes (deux éléments étant dits de même signe s'ils sont tous deux  $\geq 0$  ou tous deux  $\leq 0$ ). Ils entraînent que, si  $A$  est un anneau totalement ordonné, tout carré est positif, et, en particulier, que tout idempotent (par exemple l'élément unité) est positif.

### Exemple 3.2

Sur  $\mathbb{Z}$  il y a la structure d'anneau totalement ordonné :

en effet on a  $0 < 1$ , d'où  $0 < n$ , par récurrence, pour tout entier naturel  $n \neq 0$ .

### Théorème 3.1

*Soit  $(A, +, \cdot, \leq)$  un anneau ordonné et  $\mathcal{P}$  l'ensemble des éléments positifs de  $A$ .  $A$  est un anneau ordonné équivaut à dire que  $\mathcal{P}$  vérifie des propriétés suivantes :*

$$(1) \quad \mathcal{P} + \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$$

$$(2) \quad \mathcal{P}\mathcal{P} \subset \mathcal{P}$$

$$(3) \quad \mathcal{P} \cap (-\mathcal{P}) = \{0\}.$$

#### Preuve.

En effet (1) et (3) traduisent le fait que le groupe additif de  $\mathcal{P}$  est un groupe ordonné, tandis que (2) est la traduction de (\*). ■

Rappelons que, pour que la relation d'ordre définie sur  $A$  soit totale, il faut et il suffit que la propriété suivante soit vraie : (4)  $\mathcal{P} \cup (-\mathcal{P}) = A$ .

### Exemple 3.3

Si, dans  $\mathbb{Z}$ , on prend pour  $\mathcal{P}$  l'ensemble des entiers positifs (au sens usuel) et pairs, on obtient une structure d'anneau non totalement ordonné.

## 3.2 Corps ordonnés

### Définition 3.2

Soient  $(K, +, \cdot)$  un corps commutatif et " $\dots \leq \dots$ " un ordre total sur  $K$ .

On dit que  $K$  est un corps ordonné si sa structure d'ordre et sa structure d'anneau sont compatibles.

### Exemples 3.4

1.  $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$  est un corps ordonné.
2. Un sous-corps d'un corps ordonné, ordonné par l'ordre induit, est un corps ordonné.
3.  $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$  est un corps ordonné

### Remarque 3.1

Soit  $(K, +, \cdot, \leq)$  un corps ordonné et  $a_1, \dots, a_n$  des éléments de  $K$  tels que :

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = 0.$$

En notant  $\mathcal{P}$  le cône positif,  $\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = -a_n^2 \in \mathcal{P} \cap (-\mathcal{P})$ , d'où  $a_n = 0$  et en itérant, on montre que  $a_{n-1} = \dots = a_1 = 0$ . En particulier,  $-1$  n'est jamais une somme de carrés, ce qui permet d'affirmer que  $\mathbb{C}$  n'est pas un corps ordonné.

### 3.3 Extensions de corps ordonnés

Soit  $(K, +, \cdot, \leq)$  un corps ordonné.

#### Définition 3.3

Une extension ordonnée de  $K$  est un couple  $(E, u)$ , où  $E$  est un corps ordonné et  $u$  un homomorphisme croissant de  $K$  dans  $E$ .

Soient  $K$  un corps,  $E$  un corps ordonné et  $u : K \rightarrow E$  un homomorphisme. La relation

$$x \leq y \quad \text{si} \quad u(x) \leq u(y)$$

est une relation d'ordre total sur  $K$  qui le munit d'une structure de corps ordonné, dite induire par celle de  $E$ . Si  $K$  et  $E$  sont deux corps ordonnés, un homomorphisme  $u : K \rightarrow E$  est croissant si et seulement si la structure de corps ordonné de  $K$  est induite par celle de  $E$ . Nous identifierons le plus souvent  $K$  à son image dans  $E$  par  $u$ .

#### Théorème 3.2

*Pour qu'une extension  $E$  d'un corps ordonné  $K$  admette une structure d'extension ordonnée de  $K$ , il faut et il suffit qu'elle vérifie la condition suivante :*

$$(EO) \dots \dots \{ p_1 x_1^2 + \dots + p_n x_n^2 = 0 \Rightarrow p_1 x_1 = \dots = p_n x_n = 0 \}.$$

*pour toute suite finie  $(x_i, p_i)$  de couples d'éléments  $x_i$  de  $E$  et d'élément positifs  $p_i$  de  $K$ .*

*(EO) est équivalente à :*

*(EO') L'élément  $-1$  n'est pas somme d'éléments de la forme  $px^2$  ( $x \in E$ ,  $p \in K$ ,  $p \geq 0$ ).*

#### Preuve.

La condition (EO) est nécessaire : si  $E$  admet une structure d'extension ordonnée de  $K$ , les éléments  $p_i x_i^2$  sont positifs dans  $E$ , donc nuls si leur somme est nulle ; d'autre part,  $p_i x_i^2 = 0$  équivaut à  $p_i x_i = 0$ .

Inversement, supposant la condition  $(EO)$  satisfaite, nous allons définir une relation d'ordre sur  $E$  en construisant une partie  $\mathcal{P}$  de  $E$ , qui satisfasse à (1), (2), (3) et (4), et qui contienne l'ensemble  $K_+$  des éléments positifs de  $K$ . Une telle partie  $\mathcal{P}$  définira bien sur  $E$  une structure d'extension ordonnée de  $K$ , car on aura  $K \cap \mathcal{P} = K_+$ ; en effet, si  $\mathcal{P}$  contenait un élément  $-a < 0$  de  $K$ , à appartiendrait à  $\mathcal{P} \cap (-\mathcal{P})$ , contrairement à (3).

Pour définir  $\mathcal{P}$ , considérons l'ensemble  $\varpi$  des parties de  $E$ , qui vérifient (1), (2) et (3), et qui contiennent la réunion de  $K_+$  et de l'ensemble  $C$  des carrés d'éléments de  $E$ . Cet ensemble  $\varpi$  n'est pas vide, car il contient l'ensemble  $P_0$  des éléments de la forme  $\sum_i p_i x_i^2$  (que  $P_0$  satisfasse à (3) résulte aussitôt de  $(EO)$ ). De plus  $\varpi$  est inductif pour la relation d'inclusion. Il existe alors, d'après l'axiome de zorn, un élément maximal de  $\varpi$ , dont il nous reste à montrer qu'il satisfait à (4); or ceci résulte du lemme suivant : ■

### Lemme 3.3

*Soient  $\mathcal{P} \in \varpi$  et  $x \notin \mathcal{P}$ ; il existe alors  $\mathcal{P}' \in \varpi$  tel que  $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$  et que  $-x \in \mathcal{P}'$*

Prenons  $\mathcal{P}' = \mathcal{P} - x\mathcal{P}$ , et vérifions que  $\mathcal{P}'$  possède les propriétés requises. Comme  $0 \in C \subset \mathcal{P}$ , on a  $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$ . D'où  $C \subset \mathcal{P}'$  et  $K_+ \subset \mathcal{P}'$ . Comme  $1 \in C \subset \mathcal{P}$ , on a  $-x \in \mathcal{P}'$ . On a

$$\mathcal{P}' + \mathcal{P}' = \mathcal{P} - x\mathcal{P} + \mathcal{P} - x\mathcal{P} = \mathcal{P} + \mathcal{P} - x(\mathcal{P} + \mathcal{P}) \subset \mathcal{P} - x\mathcal{P} = \mathcal{P}',$$

d'où (1). On a

$$\mathcal{P}'\mathcal{P}' = (\mathcal{P} - x\mathcal{P})(\mathcal{P} - x\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}\mathcal{P} + x^2\mathcal{P}\mathcal{P} - x(\mathcal{P}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{P}) \subset \mathcal{P} + C\mathcal{P} - x\mathcal{P} \subset \mathcal{P} - x\mathcal{P} = \mathcal{P}',$$

d'où (2). Vérifions enfin (3) : supposons que nous ayons une égalité de la forme  $p - xq = -(r - xs)$  ou  $p, q, r, s$  appartiennent à  $\mathcal{P}$ ; on en déduit la relation  $x(s + q) = p + r$ ; si  $(s + q) \neq 0$ , on a  $x = (s + q)^{-2}(s + q)(p + r) \in C\mathcal{P}\mathcal{P} \subset \mathcal{P}$

contrairement à l'hypothèse ; on a donc  $s + q = 0$ , d'où  $p + r = 0$  ; comme  $\mathcal{P}$  vérifie (3) on en déduit  $s = q = r = p = 0$ , et

$\mathcal{P}' \cap (-\mathcal{P}') = \{0\}$ . Ainsi  $\mathcal{P}'$  est un cône positif appartenant à  $\varpi$  en contradiction avec le choix de  $\mathcal{P}$  dans  $\varpi$ . Il en résulte que l'on ne peut avoir simultanément  $x \notin \mathcal{P}$  et  $-x \notin \mathcal{P}$ .

### Corollaire 3.1 (Théorème d'Artin-Schreier)

*Pour qu'il existe sur un corps commutatif  $E$  une structure d'ordre qui en fasse un corps ordonné, il faut et il suffit que la relation  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$  entraîne  $x_1 = \dots = x_n = 0$ .*

La nécessité est évidente (résulte de exemple 3.4). Réciproquement la condition énoncée entraîne que  $E$  est de caractéristique nulle, donc extension de  $\mathbb{Q}$  ; alors la condition (EO) est vérifiée, et le thé 3.2) montre qu'il existe sur  $E$  une structure d'extension ordonnée de  $\mathbb{Q}$ , c'est-à-dire une structure de corps ordonné.

Il n'existe pas de structure de corps ordonné sur un corps  $E$  où  $-1$  est un carré, et, en particulier, sur un corps algébriquement clos.

### Corollaire 3.2

*Soit  $E$  une extension de  $K$  admettant une structure d'extension ordonnée de  $K$ . Pour qu'un élément  $x \in E$  soit positif pour toutes les structures d'extension ordonnée de  $K$  sur  $E$ , il faut et il suffit que  $x$  soit de la forme  $\sum_i p_i x_i^2$ , où  $x_i \in E$  et où les  $p_i$  sont des éléments positifs de  $K$ .*

La condition est évidemment suffisante ; elle est aussi nécessaire, car (avec les notations de la démonstration du th 3.2), si  $x \notin \mathcal{P}_0$ , il existe un élément maximal  $\mathcal{P}$  de  $\varpi$  tel que  $x \notin \mathcal{P}$  ; on a alors  $-x \in \mathcal{P}$  d'après le lemme 3.3, et comme  $x \neq 0$ ,  $x$  n'est pas positif pour la structure d'ordre définie par  $\mathcal{P}$ .

### Exemple 3.5

Il n'existe pas sur le corps commutatif  $\mathbb{C}$  une structure d'ordre qui en fasse un corps ordonné car  $i^2 + 1 = 0$  avec  $1 \neq 0$ ,  $i \neq 0$ .

# Conclusion

Les groupes et les corps sont des structures algébriques riches par leurs propriétés, ils ont plusieurs applications dans les domaines : Mathématiques et autres.

En particulier, un groupe ou un corps muni d'un ordre possède plusieurs propriétés autres que celles concernant la structure algébrique.

# Bibliographie

- [1] **ALIBERT. D** , *Cours et Exercices Corrigés Relations d'ordre. Entiers. Anneaux et Corps. Nombres réels*, Presses universitaires de Grenoble, 2014.
- [2] **BOAYA. I**, *Cours de Mathématiques, Physique et Chimie MPSI, MP\**, l'ENS Paris, 2005-2006.
- [3] **BOURBAKI. N**, *Eléments de Mathématiques, Algèbre, Chapitre 6*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007, Réimpression Inchangée de L'édition Originale de 1981.
- [4] **DUMAS. F**, *Algèbre : Groupes et Anneaux 1*, Université Blaise Pascal, 2007-2008.
- [5] **GARCIA. L**, *Cours Groupes, Anneaux, Corps*, MPSI Lycée Jean-Baptiste Corot, 2. Janvier 2016.
- [6] **LADJELAT. L**, *Cours Master1, Algèbre Arithmétique*, Université M.Boudiaf de Msila. Année univ 2014-2015.
- [7] **QUERRÉ. J**, *Cours d'Algèbre*, Université de Bretagne Occidentale, 1976.
- [8] **ZIDANI. M. B**, *Structures Algébriques fondamentales*, USTHB, Octobre 2013.

## Résumé :

Ce travail concerne l'étude des propriétés et conséquences des structures algébriques ; à savoir les groupes, les corps, muni d'une relation d'ordre compatible avec la structure algébrique.

Il sera composé de trois chapitres contenant les notions fondamentales, propriétés essentielles et conséquences remarquables.

**Mots-clés:** Relation d'ordre, Ensemble ordonné, Groupes ordonnés, Compatibilité, Anneaux ordonnés, Corps ordonnés, Extension de corps ordonnés.

## Abstract :

This work concerns the study of the properties and consequences of algebraic structures ; Namely the groups, the fields, provided with a relation of order compatible with the algebraic structure.

It will consist of three chapters containing the fundamental notions, essential properties and remarkable consequences.

**Keywords:** Order relation, Ordered set, Ordered groups, Compatibility, Ordered rings, Ordered fields, Extension of ordered fields.

## ملخص :

هذا العمل يتعلق بدراسة خصائص ونتائج البنى الجبرية، التي هي الزمر، والحقول المزودة بعلاقة ترتيب متلائمة مع البنية الجبرية.

هذه المذكرة مجزأة إلى ثلاثة فصول محتوية على مفاهيم أساسية، خصائص جوهرية، نتائج جديرة بالملاحظة.

**كلمات مفتاحية:** علاقة ترتيب، مجموعة مرتبة، زمر مرتبة، تلائم، حلقات مرتبة، حقول مرتبة، توسعة الحقول المرتبة.

