



N° d'ordre :

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique

Université de M'sila
Faculté des Sciences
Département de Physique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

MASTER

Domaine : **Sciences de la matière**

Filière : **Physique**

Option : **Physique des Particules à haute Energie**

Par

REFICE Oumessaad

THEME

Titre

Electrodynamique Quantique non commutative

Soutenu le : 19 / 06 /2014

Devant le jury composé de :

N.Geussmai M.A.B	Univ. de M'sila	Président
Y.Sabri M.A.B	Univ. de M'sila	Rapporteur
M.Ghmaid M.A.A	Univ. de M'sila	Examineur
	Univ. de M'sila	Examineur
	Univ. de M'sila	Examineur

Promotion Juin 2014

REMERCIEMENT

**Au nom d'Allah le tout miséricordieux le très,
miséricordieux**

**Louange à Dieu, le seigneur de l'univers qui nous
a donné beaucoup de bénédiction et grâce à lui
nous avons pu avancer vers notre destination,
et nous remercions tous les enseignants pour
leur travail dur pour nous, nous remercions
également et surtout notre superviseur le
professeur Sabri Youcef sur tout ce que nous a
donné.**

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Théories quantiques des champs non commutatifs	3
1.1.1	Généralités	3
1.1.2	Construction du produit-étoile	4
1.1.3	Propriétés le produit étoile	7
8		
2	Quantification lagrangienne et canonique	9
2.1	Quantification lagrangienne	9
2.1.1	Densité lagrangienne et action :	9
2.1.2	Equation de mouvement	10
2.1.3	Le champ conjugué	11
2.1.4	Théorème de Noéther	12
2.2	Quantification canonique	15
2.2.1	Relation de non commutation	15
2.2.2	Hamiltonien	15
2.2.3	Propagateur de Feynman	17
2.2.4	Champ de jauge	19
3	Electrodynamique quantique non commutative	20
3.1	Règles de Feynman	21
3.2	Diffusion électron-positron	22
4	conclusion	27
4.1	References	28

Chapitre 1

Introduction

L'objectif de ce memoire est l'étude de la theorie quantique électrodynamique non commutative, qui d'un point de vue mathématique, constitue en la formulation de la théorie dans un espace-temps non commutatif.

Il est bien connu qu' un espace géométrique est complètement décrit par l'algèbre des fonctions , c'est le cas de l'espace des phase en physique classique(dans sa formulation Hamiltonienne), dont l'algèbre des fonctions est commutative. En mécanique quantique \hat{x}, \hat{p} engendrent l'algèbre des observebles quantiques qui est non commutative et que enfin on peut dire que l'algèbre des fonctions de l'espace des phases dans la physique quantique introduit une géométrie d'un type nouveau et correspond à ce que nous pourrions appeler un transfert de niveau de réalité ou de niveau de relations, le fait remarquable est que les différentes structures intervenant aussi bien dans les théories classiques que dans les théories quantiques semblent pouvoir s'intrepréter de manière naturelle dans un langage commun qu' est celui de la géométrie non commutative .

Notons enfin que toute quantification de l'espace-temps conduit à une modification profonde des concepts actuels de la physique quantique. En effet on assiste à la modification de deux relations de la physique quantique , les commutateurs entre \hat{x} et \hat{p} et la relation d'incertitude de Heisenberg .

1.1 Théories quantiques des champs non commutatifs

1.1.1 Généralités

La théorie non commutative des champs [1, 2] est une théorie des champs définie sur un espace temps muni d'une géométrie non commutative. Dans les années passées, beaucoup de travail a été consacré à l'étude de telles théories, c-à-d les théories des champs sur le plan de Moyal. Heisenberg et Dirac ont discuté, vers la fin des années 30, l'idée d'un espace de phase quantique qui devrait être non commutative et qui peut être décrit par une algèbre quantique. Le but poursuivi par Heisenberg, en étendant les relations d'incertitude au secteur des coordonnées est que la non commutativité de ces dernières lisseraient les singularités dues aux courtes distances (hautes énergies) typiques de la théorie quantique des champs. Le premier papier sur ce sujet a été publié par Snyder en 1947. Le concept de la renormalisation n'était pas encore bien établi et donc les divergences UV dans la théorie quantique des champs posaient toujours des problèmes sérieux. Pour résoudre ces problèmes Snyder a présenté sa version d'un espace-temps quantifié[3] (voir également [4]). L'idée était d'employer une structure non commutative de l'espace-temps aux échelles très petites des longueurs d'ondes par l'introduction d'un cut-off $UV \Lambda$. Après les travaux de Von Neumann et plus récemment Connes [5], les études mathématiques et physique sur la géométrie non commutative sont devenues très importantes.

La démarche canonique pour définir une théorie des champs sur un espace-temps non commutatif à très courtes distances est qu'en plus de la relation d'incertitude de Heisenberg entre les coordonnées et les moments, il y faut introduire une incertitude entre les différentes coordonnées, ce qui est équivalent à définir une incertitude minimale sur la position au delà de laquelle on peut qualifier l'espace-temps de flou.

Comme dans la quantification de l'espace de phase classique, l'espace-temps peut être quantifié en remplaçant les coordonnées x_μ par des opérateurs hermitiens \hat{x}_μ , obéissant aux relations de commutation

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\theta_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

lesquelles impliquent la non commutativité de l'espace-temps, avec $\theta_{\mu\nu}$ une matrice antisymétrique, à valeurs réelles, constantes et de dimension $d \times d$ où d est la dimension de l'espace-temps. Par analogie avec la mécanique quantique ce paramètre de déformation $\theta_{\mu\nu}$ joue le même

rôle que \hbar , du fait de la ressemblance avec la relation canonique de commutation

$$[x, p] = i\hbar \quad (1.2)$$

Puisque les opérateurs \hat{x}_μ ne commutent pas, ils ne peuvent pas être diagonaliser simultanément et par conséquent induisent la relation d'incertitude suivante

$$\Delta x_\mu \Delta x_\nu \gtrsim \frac{1}{2} |\theta_{\mu\nu}| \quad (1.3)$$

Beaucoup plus tard, et précisément en 1996, Filk [6] a montré que les divergences qui entachent la théorie des champs persistaient encore. En plus de ces divergences, les travaux parus en 1999 de [7, 8] ont démontré l'existence d'un mixage de divergences UV et IR (UV/IR). Ce résultat est très loin de l'intuition dominante en théorie des champs ordinaire à cause de la localité.

Un autre champ d'intérêt, où la non commutative de l'espace-temps pourrait jouer un rôle important, est la gravité quantique. La synthèse des principes de la mécanique quantique et de la relativité générale classique mène à une incertitude de l'espace-temps [9, 10]. Comme il a été montré par Seiberg et Witten [11], la géométrie non commutative est présente dans la théorie des coordonnées. Dans la physique de la matière condensée, le concept d'espace-temps non commutative est appliqué aussi puisque, la théorie des électrons dans un champ magnétique projeté sur le niveau le plus bas de Landau peut être décrite par une théorie des champs non commutative [12], où cette fois $\theta_{\mu\nu}$ est proportionnel à l'inverse du champ magnétique. Par ailleurs, les travaux de Calmet et al [13] ouvrent le chemin vers une extension non commutative très naturelle du Modèle Standard.

Les études sur les extensions non commutative des théories telles la QED et la QCD peuvent fournir des preuves sensibles d'un espace-temps quantifié. Finalement la géométrie non commutative a apportée une contribution dans la résolution des problèmes relatifs à la singularité qui existe sur les espaces commutatifs [14].

1.1.2 Construction du produit-étoile

L'approche de base dans la géométrie non commutative est de remplacer l'algèbre abélienne par une algèbre non abélienne, dans cette algèbre non commutative, les relations de commutation entre les coordonnées sont données par la relation (1.1), où la multiplication dans cette

algèbre est donnée par $*$ -produit définie par :

$$\begin{aligned} W : A &\longrightarrow \hat{A} \\ w(f * g) &:= w(f) \cdot w(g) = \hat{f} \cdot \hat{g} \end{aligned} \quad (1.4)$$

où w est un isomorphisme et $f, g \in A$ et $\hat{f}, \hat{g} \in \hat{A}$.

Pour éviter la manipulation délicate du $*$ -produit, on a recours à une procédure due à Weyl et qui repose sur la transformée de Fourier suivante, où \hat{f} opérateur

$$\hat{f} = w(f) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int d^n k e^{ik_\mu x^\mu} \tilde{f}(k) \quad (1.5)$$

tel que :

$$\tilde{f}(k) = \int d^n x e^{-ik_\mu x^\mu} f(x) \quad (1.6)$$

Ainsi l'isomorphisme (1.4) s'écrit :

$$w(f * g) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \iint d^n k d^n p e^{ik_\mu x^\mu} e^{ip_\nu x^\nu} \tilde{f}(k) \tilde{g}(p) \quad (1.7)$$

Dans le cas non commutatif, on remplace le produit ordinaire par le produit étoile (Weyl) défini par

$$e^{ik_\mu x^\mu} * e^{ip_\nu x^\nu} = e^{-\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} k_\mu p_\nu} e^{i(k_\mu + p_\mu) x^\mu} \quad (1.8)$$

dans ce cas l'équation (1.7) devient ainsi :

$$(f * g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint d^n k d^n p e^{i(k_\mu + p_\mu) x^\mu} e^{-\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} k_\mu p_\nu} \tilde{f}(k) \tilde{g}(p) \quad (1.9)$$

Et nous obtenons pour le $*$ -produit la définition de Moyal-Weyl

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &\equiv f(x) \exp\left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu\right) g(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \theta^{\mu_1 \nu_1} \dots \theta^{\mu_n \nu_n} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} f(x) \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_n} g(x) + f(x)g(x). \end{aligned} \quad (1.10)$$

On peut aussi écrire :

$$(f * g)(x) = \left[e^{-\frac{i}{2} \partial_{\varepsilon_\mu} \theta^{\mu\nu} \partial_{x_\nu}} f(x + \varepsilon) g(x + \chi) \right]_{\varepsilon=\chi=0} \quad (1.11)$$

On remarque pour $\theta^{\mu\nu} = 0$ le $*$ -produit devient un produit ordinaire.

On peut démontrer que le commutateur d'une fonction $f(x)$ avec les coordonnées x_μ donne :

$$x_\mu * f(x) - f(x) * x_\mu = i \theta^{\mu\nu} \partial_\nu f(x). \quad (1.12)$$

la généralisation utile de la formule(1.10) est donnée par :

$$f_{1(x_1)} * \dots * f_{n(x_n)} = \prod_{a \prec b} \exp \left(\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x_a^\mu} \frac{\partial}{\partial x_b^\nu} \right) f_{1(x_1)} * \dots * f_{n(x_n)} \quad (1.13)$$

Le *-produit est associatif mais non-commutative

$$[(f * g) * h](x) = [f * (g * h)](x) \quad (1.14)$$

De l'antisymétrie de $\theta^{\mu\nu}$, on peut aboutir à

$$\int (f * g)(x) d^4x = \int (f \cdot g)(x) d^4x. \quad (1.15)$$

d ou on deduit la relation

$$\int (f * g)(x) d^4x = \int (g * f)(x) d^4x. \quad (1.16)$$

Del'éqaution (17) on déduit la propriété cyclique suivante

$$\int (f_1 * f_2 * \dots * f_n)(x) d^4x = \int (f_n * f_1 * f_2 * \dots * f_{n-1})(x) d^4x \quad (1.17)$$

x^μ sont les coordonnées dans l'espace-temps vérifiant

Le produit de deux champs ψ et Ψ opérant dans l'espace-temps non commutative est donné par le *-produit :

$$\begin{aligned} (\psi * \Psi)(p) &= \left[\exp \left(-\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial p^\mu} \frac{\partial}{\partial p^\nu} \right) \psi(p) \Psi(p) \right] \\ &= \psi(p) \Psi(p) - \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial p^\mu} \psi(p) \frac{\partial}{\partial p^\nu} \Psi(p) + O(\theta^2) \end{aligned} \quad (1.18)$$

avec

$$\theta^{\mu\nu} = -\theta^{\nu\mu} \quad (1.19)$$

Définissons maintenant la notation suivant :

$$[\psi(p), \Psi(p)]_* \equiv \psi(p) * \Psi(p) - \Psi(p) * \psi(p) \quad (1.20)$$

On a dans l'espace non commutative :

$$[\hat{p}^\mu, \hat{p}^\nu]_* = [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu} \quad (1.21)$$

Donc on va travailler avec les coordonnées x de l'espace-temps et le nouveau produit (*-produit) définit par :

$$\begin{aligned}
(\psi * \Psi)(x) &= \left[\exp \left(\frac{-i}{2} \theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu} \right) \psi(x) \Psi(y) \right]_{x=y} \\
&= \psi(x) \Psi(x) - \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi(x) \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Psi(x) + O(\theta^2) \\
&= \left[1 - \frac{i}{2} x \theta x + \dots \right] \psi(x) \Psi(x) \\
&= \exp \left(-\frac{i}{2} x \theta x \right) \psi(x) \Psi(x)
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Avec la notation :

$$-\frac{i}{2} x \theta x = -\frac{i}{2} x_\mu \theta^{\mu\nu} x_\nu \tag{1.23}$$

1.1.3 Propriétés le produit étoile

- Associative :

$$[(f * g) * h](x) = [f * (g * h)](x) \tag{1.24}$$

En effet, dans à l'espace des moments

$$\begin{aligned}
[(f * g) * h](x) &= \int d^4 k d^4 q \widehat{f}(k) \widehat{g}(q) e^{-\frac{i}{2} k \theta q} e^{i(k+q)x} * h(x) \\
&= \int d^4 k d^4 q d^4 p \widehat{f}(k) \widehat{g}(q) \widehat{h}(p) e^{-\frac{i}{2} k \theta q} e^{-\frac{i}{2} (k+q) \theta p} e^{i(k+q+p)x}
\end{aligned} \tag{1.25}$$

*-produit le signe intégrale :

$$\int (f * g)(x) d^4 x = \int (g * f)(x) d^4 x \tag{1.26}$$

Qui se démontre de la manière suivante :

$$\int (f * g)(x) d^4 x = \int d^4 k d^4 q \widehat{f}(k) \widehat{g}(q) e^{-\frac{i}{2} k \theta q} e^{i(k+q)x} \tag{1.27}$$

Et

$$\int (g * f)(x) d^4 x = \int d^4 q d^4 k \widehat{g}(q) \widehat{f}(k) e^{-\frac{i}{2} q \theta k} e^{i(q+k)x} \tag{1.28}$$

La conjugaison complexe :

$$(f * g)^* = f^* * g^* \quad (1.29)$$

La règle leibniz :

Il est facile de vérifier que la dérivée de *-produit satisfait à la règle de leibniz :

$$\partial_\mu (\psi * \Psi)(x) = \partial_\mu \psi(x) * \Psi(x) + \psi(x) * \partial_\mu \Psi(x) \quad (1.30)$$

Remarque : l'objet de ce mémoire est d'étudier la théorie des champs fermionique définie sur un espace des moments non commutative, dans cette théorie le produit entre les champs est généralisé via le produit " étoile".

Ce travail est divisé en trois chapitre.

Dans le premier chapitre nous allons donner un rappel historique sur l'apparition de la théorie des champs non commutative et un rappel mathématique sur le produit étoile.

le deuxième chapitre contient deux parties. dans la première, nous allons étudier le formalisme lagrangien de la théorie non commutative des champs, ou nous déduirons les équations du mouvement et du champ conjugué à partir de d'une densité lagrangienne non commutative. et on terminera par le théorème de Noether. dans la deuxième partie nous nous intéresserons à la quantification canonique. ou nous allons calculer le propagateur de Feynman, le tenseur de moment-énergie pour le cas non commutatif.

Le troisième chapitre concerne l'étude de l'interaction au cas non commutative, ou nous allons déduire les règles de Feynman pour ce cas en calculant la fonction de vertex. et on terminera par le calcul de la section efficace de la diffusion électron-positron.

Chapitre 2

Quantification lagrangienne et canonique

2.1 Quantification lagrangienne

2.1.1 Densité lagrangienne et action :

Nous allons construire le formalisme lagrangien de la théorie quantique de l'électrodynamique non commutative en utilisant une densité lagrangienne déformée. En remplaçant le produit habituel par le produit non commutative dans la densité lagrangienne on obtient :

$$L = \bar{\Psi} i\gamma^\mu * \partial_\mu \Psi + i\gamma^\mu \partial_\mu \bar{\Psi} * \Psi - m\Psi * \Psi - V(\bar{\Psi}, \Psi) \quad (2.1)$$

où m est une constante et $\partial_\mu \Psi \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu}$, $V(\bar{\Psi}, \Psi)$ est le terme d'interaction .

Nous définissons l'action S sur une région arbitraire R de l'espace-temps en absence de l'interaction par :

$$\begin{aligned} S[\Psi, \bar{\Psi}] &= \int_R d^4x \mathcal{L}^*(\Psi, \partial_\mu \Psi, \bar{\Psi}, \partial_\mu \bar{\Psi}) \\ &= \int_R d^4x [\bar{\Psi} i\gamma^\mu * \partial_\mu \Psi + i\gamma^\mu \partial_\mu \bar{\Psi} * \Psi - m\bar{\Psi} * \Psi] \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.1.2 Equation de mouvement

Comme dans le cas commutative, les équations de mouvement, s'obtiennent en utilisant le principe de moindre action $S[\Psi, \bar{\Psi}]$ qui stipule que

$$\delta S = 0 \quad (2.3)$$

pour l'action libre on peut écrire :

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_R d^4x \delta L(\Psi, \partial_\mu \Psi, \bar{\Psi}, \partial_\mu \bar{\Psi}) \\ &= \int_R d^4x [L(\Psi + \delta\Psi, \partial_\mu \Psi + \delta(\partial_\mu \Psi), \bar{\Psi} + \delta\bar{\Psi}, \partial_\mu \bar{\Psi} + \delta(\partial_\mu \bar{\Psi})) - L(\Psi, \partial_\mu \Psi, \bar{\Psi}, \partial_\mu \bar{\Psi})] \end{aligned} \quad (2.4)$$

en introduisant (2.1) avec $V = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_R d^4x \{ [i(\bar{\Psi} + \delta\bar{\Psi}) \gamma^\mu * \partial_\mu (\Psi + \delta\Psi) + i\gamma^\mu \partial_\mu (\bar{\Psi} + \delta\bar{\Psi}) * (\Psi + \delta\Psi) \\ &\quad - m(\bar{\Psi} + \delta\bar{\Psi}) * (\Psi + \delta\Psi)] - [i\bar{\Psi} \gamma^\mu * \partial_\mu \Psi + i\gamma^\mu \partial_\mu \bar{\Psi} * \Psi - m\bar{\Psi} * \Psi] \} \\ &= \int_R d^4x \{ [i\bar{\Psi} \gamma^\mu * \partial_\mu \Psi + \bar{\Psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \delta\Psi + \delta\bar{\Psi} i\gamma^\mu * \partial_\mu \Psi + i\delta\bar{\Psi} \gamma^\mu * \partial_\mu \delta\Psi \\ &\quad + i\gamma^\mu \partial_\mu \bar{\Psi} * \Psi + i\gamma^\mu \partial_\mu \bar{\Psi} * \delta\Psi + i\gamma^\mu \partial_\mu \delta\bar{\Psi} * \Psi + i\gamma^\mu \partial_\mu \delta\bar{\Psi} * \delta\Psi \\ &\quad - m\bar{\Psi} * \Psi - m\bar{\Psi} * \delta\Psi] - m\delta\bar{\Psi} * \Psi - m\delta\bar{\Psi} * \delta\Psi - \bar{\Psi} i\gamma^\mu * \partial_\mu \Psi \\ &\quad - i\gamma^\mu \partial_\mu \bar{\Psi} * \Psi + m\bar{\Psi} * \Psi] \} \end{aligned} \quad (2.5)$$

puisque les variations sont petites, on peut éliminer les termes d'ordres 2. donc (2.5) se réduit à

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_R d^4x [\bar{\Psi} i\gamma^\mu * \partial_\mu \delta\Psi + \delta\bar{\Psi} i\gamma^\mu * \partial_\mu \Psi + i\gamma^\mu \delta\partial_\mu \bar{\Psi} * \Psi \\ &\quad + i\gamma^\mu \partial_\mu \bar{\Psi} * \delta\Psi - m\bar{\Psi} * \delta\Psi - m\delta\bar{\Psi} * \Psi] \\ &= \int_R d^4x [\delta\bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) * \Psi + \bar{\Psi} * (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \delta\Psi] \\ &\quad + [\delta\bar{\Psi} (i\gamma^\mu (\overleftarrow{\partial}_\mu + \overrightarrow{\partial}_\mu) - m) * \delta\Psi] \end{aligned} \quad (2.6)$$

comme la variation de S sur de R s'annule, c-à-d

$$\begin{aligned} \delta S = \int_R d^4x & [\delta\bar{\Psi} (i\gamma^\mu * \partial_\mu - m) \Psi + \bar{\Psi} (i\gamma^\mu * \partial_\mu - m) \delta\Psi \\ & + \delta\bar{\Psi} \left(i\gamma^\mu \left(\overleftarrow{\partial}_\mu + \overrightarrow{\partial}_\mu \right) - m \right) * \delta\Psi] = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Comme sur la frontière de l'hypersurface on a

$$\delta\bar{\Psi} = \delta\Psi = 0 \quad (2.8)$$

alors

$$\delta S = \int_R d^4x [\delta\bar{\Psi} (i\gamma^\mu * \partial_\mu - m) \Psi + \bar{\Psi} (i\gamma^\mu * \partial_\mu - m) \delta\Psi] \quad (2.9)$$

On a dans propriété *-produit :

$$\int f * g d^4x = \int f \cdot g d^4x \quad (2.10)$$

Dans ce cas on trouve les équations de mouvement :

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi = 0 \quad (2.11)$$

$$\bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) = 0 \quad (2.12)$$

les solutions de cette equation sont données par :

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \Psi^+(x) + \Psi^-(x) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega(k)} \sum_\alpha [(a_\alpha(k) U^\alpha(k) e^{-ikx} + b_\alpha^+(k) V^\alpha(k) e^{ikx})] \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.1.3 Le champ conjugué

Par analogie avec la théorie des champs commutative, nous définissons le champ canoniquement conjugué $\Pi(x)$ dans la théorie des champs non commutative par

$$\Pi(x) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\circ \Psi)} \quad (2.14)$$

La densité lagrangienne libre est :

$$\begin{aligned}
L &= i \left[e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu}} (\bar{\Psi}(x)\gamma^\alpha \partial_\alpha \Psi(y) + \partial_\alpha \bar{\Psi}(x)\gamma^\alpha \Psi(y) - m\bar{\Psi}(x)\Psi(y)) \right]_{x=y} \\
&= i\bar{\Psi}(x)\gamma^\alpha \partial_\alpha \Psi(x) - \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} \partial_\mu \bar{\Psi}(x)\gamma^\alpha \partial_\nu \partial_\alpha \Psi(x) + i\partial_\alpha \bar{\Psi}(x)\gamma^\alpha \Psi(x) \\
&\quad - \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\mu \bar{\Psi}(x)\gamma^\alpha \partial_\nu \Psi(x) m\bar{\Psi}(x)\Psi(x) + \frac{im}{2}\theta^{\mu\nu} \partial_\mu \bar{\Psi}(x)\partial_\nu \Psi(x) + .. \quad (2.15)
\end{aligned}$$

où $\mu, \nu = \overline{0, 3}$. puisque θ est antisymétrique, $\theta^{00} = \theta^{ii} = 0$ et $\theta^{\mu\nu} = -\theta^{\nu\mu}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
L &= i\bar{\Psi}(x)\gamma^0 \partial_0 \Psi(x) + \bar{\Psi}(x)\gamma^i \partial_i \Psi(x) - \frac{i}{2}\theta^{0i} \partial_0 \bar{\Psi}(x)\gamma^0 \partial_i \partial_0 \Psi(x) - \frac{i}{2}\theta^{0i} \partial_0 \bar{\Psi}(x)\gamma^j \partial_i \partial_j \Psi(x) \\
&\quad - \frac{i}{2}\theta^{i0} \partial_i \bar{\Psi}(x)\gamma^0 \partial_0 \partial_0 \Psi(x) - \frac{i}{2}\theta^{i0} \partial_i \bar{\Psi}(x)\gamma^j \partial_0 \partial_j \Psi(x) + i\gamma^0 \partial_0 \bar{\Psi}(x)\Psi(x) \\
&\quad + i\gamma^i \partial_i \bar{\Psi}(x)\Psi(x) - \frac{i}{2}\theta^{0i} \partial_0 \partial_0 \bar{\Psi}(x)\gamma^0 \partial_i \Psi(x) - \frac{i}{2}\theta^{0i} \partial_j \partial_0 \bar{\Psi}(x)\gamma^j \partial_i \Psi(x) \\
&\quad - \frac{i}{2}\theta^{i0} \partial_0 \partial_i \bar{\Psi}(x)\gamma^0 \partial_0 \Psi(x) - \frac{i}{2}\theta^{i0} \partial_j \partial_i \bar{\Psi}(x)\gamma^j \partial_0 \Psi(x) - m\bar{\Psi}(x)\Psi(x) \\
&\quad + \frac{im}{2}\theta^{0i} \partial_0 \bar{\Psi}(x)\partial_i \Psi(x) + \frac{im}{2}\theta^{i0} \partial_i \bar{\Psi}(x)\partial_0 \Psi(x) + O(\theta^2) \quad (2.16)
\end{aligned}$$

en remplaçant dans (2.14), on obtient :

$$\begin{aligned}
\Pi(x) &= i\bar{\Psi}(x)\gamma^0 - \frac{i}{2}\theta^{i0} \partial_0 \partial_i \bar{\Psi}(x)\gamma^0 - \frac{i}{2}\theta^{i0} \partial_j \partial_i \bar{\Psi}(x)\gamma^j + \frac{im}{2}\theta^{i0} \partial_i \bar{\Psi}(x) \\
&= i \left(\bar{\Psi}(x)\gamma^0 - \frac{i}{2}\theta^{i0} \partial_\alpha \partial_i \bar{\Psi}(x)\gamma^\alpha + \frac{im}{2}\theta^{i0} \partial_i \bar{\Psi}(x) \right) \quad (2.17)
\end{aligned}$$

puisque $\theta^{00} = 0$, on peut ajouter les termes $\frac{im}{2}\theta^{00} \partial_0 \bar{\Psi}(x)$ et $\frac{i}{2}\theta^{00} \partial_\alpha \partial_0 \bar{\Psi}(x)\gamma^\alpha$, d'où

$$\begin{aligned}
\Pi(x) &= i \left(\bar{\Psi}(x)\gamma^0 - \frac{i}{2}\theta^{i0} \partial_0 \partial_\alpha \bar{\Psi}(x)\gamma^\alpha + \frac{im}{2}\theta^{i0} \partial_i \bar{\Psi}(x) + \frac{im}{2}\theta^{00} \partial_0 \bar{\Psi}(x) \right) \\
&= i\bar{\Psi}(x)\gamma^0 + \frac{i}{2}\theta^{\mu 0} \partial_\mu (-\partial_\alpha \bar{\Psi}(x)\gamma^\alpha + m\bar{\Psi}(x)) \quad (2.18)
\end{aligned}$$

en utilisant l'équation (2.12), on obtient :

$$\Pi(x) = i\bar{\Psi}(x)\gamma^0 \quad (2.19)$$

2.1.4 Théorème de Noéther

Maintenant que nous avons développé la différentiation fonctionnelle pour notre théorie nous pouvons prolonger le théorème de Noéther aux théories non commutatives des champs.

Supposons que notre action possède une symétrie continue et que l'ensemble de toutes les symétries de l'action forme un groupe de symétrie.

La variation de l'action est donnée par :

$$\delta S = \int_R d^4x \delta L(\Psi, \partial_\mu \Psi, \bar{\Psi}, \partial_\mu \bar{\Psi}, x^\mu) \quad (2.20)$$

alors

$$\begin{aligned} \delta S = \int_R d^4x \left[\frac{\partial L}{\partial \Psi} * \delta \Psi + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \Psi)} * \delta (\partial_\mu \Psi) + \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \right. \\ \left. \delta (\partial_\mu \bar{\Psi}) * \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} + \delta \bar{\Psi} * \frac{\partial L}{\partial \bar{\Psi}} \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

On a les propriétés suivantes

$$\delta (\partial_\mu \Psi) = \partial_\mu (\delta \Psi) \quad (2.22)$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \Psi)} * \partial_\mu (\delta \Psi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \Psi)} * \delta \Psi \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \Psi)} \right) * \delta \Psi \quad (2.23)$$

$$\partial_\mu (\delta \bar{\Psi}) * \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} = \partial_\mu \left(\delta \bar{\Psi} * \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} \right) - \delta \bar{\Psi} * \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} \right) \quad (2.24)$$

d'où

$$\begin{aligned} \delta S = \int_R d^4x \left\{ \left[\frac{\partial L}{\partial \Psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \Psi)} \right) \right] * \delta \Psi + \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \Psi)} * \delta \Psi \right) \right. \\ \left. + \delta \bar{\Psi} * \left[\frac{\partial L}{\partial \bar{\Psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} \right) \right] + \partial_\mu \left(\delta \bar{\Psi} * \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} \right) + \partial_\mu L \delta x^\mu \right\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

en utilisant les équation d'Euler-lagrange on obtient

$$\delta S = \int_R d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \Psi)} * \delta \Psi + \delta \bar{\Psi} * \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} + L \delta x^\mu \right) = 0 \quad (2.26)$$

comme sur la frontière de l hypersurface on a $\Psi = \delta \bar{\Psi} = \delta x^\mu = 0$

$$\delta S = \int_{\partial R} \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \Psi)} * \delta \Psi + \delta \bar{\Psi} * \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} + L \delta x^\mu \right) \partial \sigma_\mu = 0 \quad (2.27)$$

Utilisons maintenant la variation totale des champs Ψ et $\bar{\Psi}$

$$\begin{aligned}
\Delta\Psi'(x') &= \Psi'(x') - \Psi(x) \\
&= \Psi'(x') - \Psi(x') + \Psi(x') - \Psi(x) \\
&= \delta\Psi(x) + (\partial_\mu\Psi)\delta x^\mu
\end{aligned} \tag{2.28}$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{\partial R} \left\{ \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\Psi)} * [\delta\Psi(x) + (\partial_\nu\Psi(x))\delta x^\nu] + [\delta\bar{\Psi}(x) + (\partial_\nu\bar{\Psi}(x))\delta x^\nu] * \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\bar{\Psi})} \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\Psi)} * \partial_\nu\Psi + \partial_\nu\bar{\Psi} * \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\bar{\Psi})} - \delta_\nu^\mu L \right) \delta x^\nu \right\} \partial\sigma_\mu \\
&= \int_{\partial R} \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\Psi)} * \Delta\Psi(x) + \Delta\bar{\Psi}(x) * \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\bar{\Psi})} - \theta_\nu^\mu \delta x^\nu \right] \partial\sigma_\mu
\end{aligned} \tag{2.29}$$

où le tenseur moment-énergie est défini par

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\Psi)} * (\partial_\nu\Psi) + (\partial_\nu\bar{\Psi}) * \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\bar{\Psi})} - \delta_\nu^\mu L \tag{2.30}$$

On suppose maintenant que l'action S est invariante sous le groupe des transformations de $x^\mu, \Psi, \bar{\Psi}$, où les transformations infinitésimales sont caractérisées par un paramètre infinitésimal $\delta\omega^\nu$

$$\Delta x^\mu = x_\nu^\mu \delta\omega^\nu, \Delta\Psi = \Psi_\mu \delta\omega^\mu, \Delta\bar{\Psi} = \bar{\Psi}_\mu \delta\omega^\mu \tag{2.31}$$

en remplaçant dans $\delta S = 0$ on obtient

$$\delta S = \int_{\partial R} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)} * \Psi_\nu(x) + \bar{\Psi}_\nu(x) * \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\Psi})} - \theta_k^\mu x_\nu^k \right) \delta\omega^\nu \partial\sigma_\mu = 0 \tag{2.32}$$

comme $\delta\omega^\mu$ arbitraire on peut écrire

$$\delta S = \int_{\partial R} J_\nu^\mu \partial\sigma_\mu = 0 \tag{2.33}$$

alors

$$\int_R \partial_\mu J_\nu^\mu \partial^4 x = 0 \tag{2.34}$$

avec le courant est

$$J_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} * \Psi_\nu(x) + \bar{\Psi}_\nu(x) * \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} - \theta_k^\mu x_\nu^k \quad (2.35)$$

finalement le theoreme de Gauss conduit finalement á l'équation de continuité

$$\partial_\mu J_\nu^\mu = 0 \quad (2.36)$$

donc de cette équation on peut voir aussi que le courant est conservé, d'où le théorème de Noéther.

2.2 Quantification canonique

2.2.1 Relation de non commutation

Par analogie avec la théorie quantique commutative, la description quantique se construit en remplaçant les quantités classiques par des opérateurs, Nous allons utiliser la même algèbre des opérateurs de la théorie quantique et nous déduirons les trois principaux résultats de la quantifications.

On donne l'algèbre des opérateurs $(b_\alpha(k), b_\beta^+(q), d_\beta(q), d_\alpha^+(k))$

$$\begin{aligned} [b_\alpha(k), b_\beta^+(q)] &= (2\pi)^3 \frac{\omega_k}{m} \delta(k - q) \delta_{\alpha\beta} \\ [d_\beta(q), d_\alpha^+(k)] &= (2\pi)^3 \frac{\omega_k}{m} \delta(k - q) \delta_{\alpha\beta} \\ [d_\beta(q), b_\alpha(q)] &= [b_\alpha(k), b_\alpha(q)] = 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

2.2.2 Hamiltonien

En ramplacant (2.1) dans (2.30), on obtient :

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\bar{\Psi} * \gamma^\mu \partial_\nu \Psi - \partial_\nu \bar{\Psi} * \gamma^\mu \Psi] \quad (2.38)$$

On déduit que le quadri-vecteur impulsion est donnée par la relation :

$$\begin{aligned}
P_\mu &= \int d^3x T_{0\mu} \\
&= \int d^3x i \bar{\Psi} \gamma^0 \overleftrightarrow{\partial}^\mu \Psi \\
&= -\frac{i}{2} \int d^3x \int \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\omega_k \omega_q} \sum_{\alpha, \beta} \left[\left[(iq_\mu) a_\beta^+(q) \bar{U}^\beta(q) e^{iqy} + (-iq_\mu) b_\beta(q) \bar{V}^\beta(q) e^{-iqy} \right] \gamma^0 \right. \\
&\quad * [a_\alpha(k) U^\alpha(k) e^{-ikx} + b_\alpha^+(k) V^\alpha(k) e^{ikx}] - \left. \left[a_\beta^+(q) \bar{U}^\beta(q) e^{iqy} + b_\beta(q) \bar{V}^\beta(q) e^{-iqy} \right] \gamma^0 \right. \\
&\quad * \left. \left[(-ik_\mu) a_\alpha(k) U^\alpha(k) e^{-ikx} + ik_\mu b_\alpha^+(k) V^\alpha(k) e^{ikx} \right] \right] \quad (2.39)
\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}
P_\mu &= -\frac{i}{2} \int d^3x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\omega(k) \omega(q)} (q_\mu + k_\mu) \sum_{\alpha, \beta} a \left[a_\beta^+(q) a_\alpha(k) \bar{U}^\beta(q) \gamma^0 U^\alpha(k) \right] e^{-ikx} * e^{iqy} \\
&\quad - (b_\beta(q) b_\alpha^+(k) \bar{V}^\beta(q) \gamma^0 V^\alpha(k)) e^{ikx} * e^{-iqy} \\
&= \frac{i}{2} \int d^3x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\omega(k) \omega(q)} (q_\mu + k_\mu) \times \sum_{\alpha, \beta} \left[a_\beta^+(q) a_\alpha(k) \bar{U}^\beta(q) \gamma^0 U^\alpha(k) \right] e^{-ikx} e^{iqy} e^{-\frac{i}{2} k \theta q} \\
&\quad - (b_\beta(q) b_\alpha^+(k) \bar{V}^\beta(q) \gamma^0 V^\alpha(k)) e^{ikx} e^{-iqy} e^{-\frac{i}{2} q \theta k} \quad (2.40)
\end{aligned}$$

L'interaction sur x nous donne un $\delta(k - q)$. En int grantsur q on obtien :

$$\begin{aligned}
P_\mu &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\omega(k)^2} k_\mu \\
&\quad \sum_{\alpha, \beta} \left[a^+(k) a(k) \bar{U}^\beta(k) \gamma^0 U^\alpha(k) - b(k) b^+(k) \bar{V}^\beta(k) \gamma^0 V^\alpha(k) \right] \quad (2.41)
\end{aligned}$$

En utilisant la relation :

$$\bar{U}^\beta(k) \gamma^0 U^\alpha(k) = \bar{U}^\beta(k) \gamma^0 U^\alpha(k) = \frac{\omega(k)}{m} \delta_{\alpha\beta} \quad (2.42)$$

on obtient :

$$P_\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\omega(k)} k_\mu \sum_\alpha [a^+(k) a(k) - b(k) b^+(k)] \quad (2.43)$$

on remarque qu'on a obtenu le même résultat de la théorie commutative.

2.2.3 Propagateur de Feynman

L'expression du propagateur est donnée par la moyenne sur le vide du produit étoile des champs de Dirac

$$S(x-y) = \langle 0 | T \{ \Psi(x), \bar{\Psi}(y) \} | 0 \rangle \quad (2.44)$$

on a

$$\begin{aligned} \{ \Psi(x), \bar{\Psi}(y) \} &= \{ \Psi^+(x) + \Psi^-(x), \bar{\Psi}^+(y) + \bar{\Psi}^-(y) \} \\ &= \Psi^+(x) * \bar{\Psi}^+(y) + \Psi^+(x) * \bar{\Psi}^-(y) + \Psi^-(x) * \bar{\Psi}^+(y) + \Psi^-(x) * \bar{\Psi}^-(y) \end{aligned} \quad (2.45)$$

alors

$$\begin{aligned} S(x-y) &= \langle 0 | T \{ \Psi_i(x), \bar{\Psi}_j(y) \} | 0 \rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \{ \Psi_i(x) * \bar{\Psi}_j(y) \} | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \{ \bar{\Psi}_j(y) * \Psi_i(x) \} | 0 \rangle \\ &= \int \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\omega(k)\omega(q)} \sum_{\alpha,\beta} \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [a_\alpha(k)U_i^\alpha(k)e^{-ikx} + b_\alpha^+(k)V_i^\alpha(k)e^{ikx}] \\ &\quad * [a_\beta^+(q)\bar{U}_j^\beta(q)e^{iqy} + b_\beta(q)\bar{V}_j^\beta(q)e^{-iqy}] | 0 \rangle \\ &\quad + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | [a_\beta^+(q)\bar{U}_j^\beta(q)e^{iqy} + b_\beta(q)\bar{V}_j^\beta(q)e^{-iqy}] \\ &\quad * [a_\alpha(k)U_i^\alpha(k)e^{-ikx} + b_\alpha^+(k)V_i^\alpha(k)e^{ikx}] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (2.46)$$

sachant que :

$$a_\alpha | 0 \rangle = b_\alpha | 0 \rangle = 0 \quad (2.47)$$

$$\langle 0 | a_\beta^+ = \langle 0 | b_\beta^+ = 0 \quad (2.48)$$

et en introduisant la representatio integrale de la fonction de Heiviside donnée par :

$$\theta(x^0 - y^0) = \frac{-1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{d\tau}{\tau + i\varepsilon} e^{-i\tau(x^0 - y^0)} \quad (2.49)$$

on obtient

$$\begin{aligned} S(x-y) &= -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{m^2}{\omega(k)\omega(q)} \\ &\quad \times \sum_{\alpha,\beta} \left[\int \frac{d\tau}{\tau + i\varepsilon} \exp(-i\tau(x^0 - y^0)) [a_\alpha(k)a_\beta^+(q)U_i^\alpha(k)\bar{U}_j^\beta(q)] e^{-ikx} * e^{+iqy} \right. \\ &\quad \left. + \int \frac{d\tau}{\tau + i\varepsilon} \exp(-i\tau(y^0 - x^0)) [b_\beta(q)b_\alpha^+(k)V_j^\alpha(k)\bar{V}_i^\beta(q)] e^{ikx} * e^{-iqy} \right] \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$e^{-ikx} * e^{iqy} = e^{-\frac{i}{2}k\theta q} e^{-ikx-iqy}$$

$$e^{ikx} * e^{-iqy} = e^{-\frac{i}{2}k\theta q} e^{ikx-iqy}$$

on ajoute au premier terme la quantité $0 = \langle 0 | a_\alpha^+(k) a_\beta(q) | 0 \rangle$ et la deuxième terme la quantité $0 = \langle 0 | b_\beta^+(k) b_\alpha(q) | 0 \rangle$, nous utiliserons les relations d'anticommution (??, ??) et itegrant sur q on obtient :

$$S_F(x-y) = \frac{-1}{i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int \frac{d^3 k d\tau}{(2\pi)^4} \frac{m}{w_k} \times (\partial_\mu \gamma^\mu + m) \exp \frac{(-i\tau(x^0 - y^0))}{\tau + i\varepsilon} \exp(-ik(x-y))$$

$$+ (\partial_\mu \gamma^\mu - m) \exp \frac{(-i\tau(y^0 - x^0))}{\tau + i\varepsilon} \exp(ik(x-y)] \quad (2.51)$$

utilisons les relations suivantes

$$\sum U(x) \bar{U}(y) = \frac{k_\mu \gamma^\mu + m}{2m} \quad (2.52)$$

$$\sum \bar{V}(y) V(x) = \frac{k_\mu \gamma^\mu - m}{2m} \quad (2.53)$$

on obtient

$$S_F(x-y) = \frac{-1}{i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int \frac{d^3 k d\tau}{(2\pi)^4} \frac{m}{w_k} \frac{k_\mu \gamma^\mu + m}{2m} \exp \frac{(-i\tau(x^0 - y^0))}{\tau + i\varepsilon} \exp(-ik(x-y))$$

$$+ (k_\mu \gamma^\mu - m) \exp \frac{(-i\tau(y^0 - x^0))}{\tau + i\varepsilon} \exp(ik(x-y)]$$

$$= \frac{-1}{i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\gamma^\mu \partial_\mu + m}{2m} \right)_{ij} \int \frac{d^3 k d\tau}{(2\pi)^4} \frac{m}{w_k}$$

$$\int \left(\frac{e^{-i\tau(x^0 - y^0)}}{\tau + i\varepsilon} e^{-ik(x-y)} - \frac{e^{-i\tau(y^0 - x^0)}}{\tau + i\varepsilon} e^{ik(x-y)} \right) \quad (2.54)$$

Maintenant nous considérons $\tau = k_0 - w_k$ pour le premier terme et $\tau = -k_0 - w_k$ pour le deuxième terme puis nous faisons le changement $k \rightarrow -k$ dans le deuxième terme

$$\frac{e^{(-i\tau(x^0 - y^0))}}{\tau + i\varepsilon} e^{-ik(x-y)} = \frac{e^{-ik(x-y)}}{k_0 - w_k + i\varepsilon} \quad \tau = k_0 - w_k \quad (2.55)$$

$$\frac{e^{(-i\tau(x^0 - y^0))}}{\tau + i\varepsilon} e^{ik(x-y)} = \frac{e^{-ik(x-y)}}{-w_k - k_0 + i\varepsilon} \quad \tau = -k_0 - w_k \quad (2.56)$$

En remplaçant dans la formule précédente on obtient

$$\begin{aligned} S_F(x-y) &= \frac{-1}{i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int \frac{d^3k d\tau}{(2\pi)^4} \frac{m}{w_k} \times \left[\frac{(k_\mu \gamma^\mu + m) e^{-ik(x-y)}}{k_0 - w_k + i\varepsilon} + \frac{(k_\mu \gamma^\mu - m) e^{-ik(x-y)}}{-k_0 - w_k + i\varepsilon} \right] \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i(k_\mu \gamma^\mu + m)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \exp(-ik(x-y)) \end{aligned} \quad (2.57)$$

alors

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i(k_\mu \gamma^\mu + m)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \exp(-ik(x-y)) \quad (2.58)$$

Ce résultat est l'expression du propagateur de Feynman pour notre théorie .

2.2.4 Champ de jauge

Dans cette partie on va donner quelques quantités qu'on utilisera dans les chapitres suivants, on commence par la densité lagrangienne du champ de jauge qui s'obtient en remplaçant les champs habituels par des champs non commutatifs

$$L_{EM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} \quad (2.59)$$

les equations d Euler-Lagrange donnent l equation de mouvement

$$\square A^\mu(x) = 0 \quad (2.60)$$

La solution de cette équation est donnée par

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega(k)} [a_\alpha(k) \epsilon^\mu(k) e^{-ikx} + a_\alpha^+(k) \epsilon^\mu(k) e^{ikx}] \quad (2.61)$$

l'expression du son propagateur est donnée

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4k i g_{\mu\nu}}{(2\pi)^4 k^2 + i\varepsilon} e^{-ik(x-y)} \quad (2.62)$$

Ce résultat est l'expression du propagateur de Feynman pour notre théorie

Chapitre 3

Electrodynamique quantique non commutative

Dans ce chapitre nous allons développer la version non commutative de la théorie de l'électrodynamique quantique (QED non commutative), ce qui revient à définir une densité lagrangienne avec un terme d'interaction déformé

Pour étudier l'invariance de jauge, nous considérons une densité lagrangienne déformée donnée par

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} + \bar{\Psi} * \left(i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - m \right) \Psi - e\bar{\Psi}\gamma^\mu * \Psi * A_\mu \quad (3.1)$$

Il faut s'assurer d'abord que cette densité lagrangienne est invariante de jauge. Considérons la transformation de jauge

$$\bar{\Psi}' = \bar{\Psi}e^{i\Lambda}, \Psi' = \Psi e^{-i\Lambda}, A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda \quad (3.2)$$

On a

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \\ &= \partial_\mu \left(A_\nu + \frac{1}{e}\partial_\nu\Lambda \right) - \partial_\nu \left(A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda \right) \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.3)$$

alors

$$-\frac{1}{4}F'_{\mu\nu} * F'^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} \quad (3.4)$$

Le terme champ EM est invariant de jauge

Le terme de masse est invariant telle que

$$-m\bar{\Psi} * \Psi = -m\bar{\Psi}e^{i\Lambda} * \Psi e^{-i\Lambda} = -m\bar{\Psi} * \Psi \quad (3.5)$$

Pour la partie libre fermionique de la densité Lagrangienne on a

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} * \left(i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - m \right) \Psi &= [i\gamma^\mu (-\bar{\Psi}e^{i\Lambda}i * \partial_\mu \Lambda \Psi e^{-i\Lambda} + \bar{\Psi}e^{i\Lambda} * \partial_\mu \Psi e^{-i\Lambda})] \\ &+ [i\gamma^\mu (\bar{\Psi}e^{i\Lambda}i * \partial_\mu \Lambda \Psi e^{-i\Lambda} + \Psi e^{-i\Lambda} * \partial_\mu \bar{\Psi}e^{i\Lambda})] - m\bar{\Psi}e^{i\Lambda} * \Psi e^{-i\Lambda} \\ &= \bar{\Psi} * \left(i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - m \right) \Psi \end{aligned} \quad (3.6)$$

pour le terme d interaction

$$-e\bar{\Psi}\gamma^\mu * \Psi * A_\mu = - \left[e\bar{\Psi}\gamma^\mu * \Psi * A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \Lambda e\bar{\Psi}\gamma^\mu * \Psi * A_\mu \right] \quad (3.7)$$

dans le cas symétrie globale ($\Lambda = \text{cons}$) lagrangienne de QED est invariante

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= \mathcal{L}'_{QED} \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} + \bar{\Psi} * \left(i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - m \right) \Psi - e\bar{\Psi}\gamma^\mu * \Psi * A_\mu \end{aligned} \quad (3.8)$$

mais dans le cas symétrie local ($\Lambda = \Lambda(x)$), lagrangienne de QED n'est pas invariante

$$\mathcal{L}_{QED} \neq \mathcal{L}'_{QED} \quad (3.9)$$

en effet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{QED} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} + \bar{\Psi} * \left(i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - m \right) \Psi - e\bar{\Psi}\gamma^\mu * \Psi * A_\mu \\ &- \partial_\mu \Lambda \bar{\Psi}\gamma^\mu * \Psi * A_\mu \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.1 Règles de Feynman

Comme nous savons le calcul de la section efficace se fait en utilisant les diagrammes de Feynman. Par analogie avec la théorie commutative, les diagrammes de Feynman s'obtiennent en calculant les propagateurs qu'on a déjà calculés et la fonction de vertex.

En effet, l'action d'interaction de l'électrodynamique au cas nous commutative est donnée par

$$\begin{aligned}
S_{int} &= -ie\gamma^\mu \int d^4x (\bar{\Psi} * \Psi * A_\mu)(x) \\
&= -ie\gamma^\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} d^4x e^{-\frac{i}{2}k\theta q} e^{-\frac{i}{2}(k+q)\theta p} e^{i(k+q+p)x} \widetilde{\Psi}(q) \widetilde{\Psi}(k) \widetilde{A}_\mu(p) \quad (3.11)
\end{aligned}$$

et comme $p = k + q$, et $\theta_{\mu\nu}$ est anti-symétrique nous obtenons $e^{-\frac{i}{2}(k+q)\theta p} = e^{-\frac{i}{2}(k+q)\theta(k+q)} = 0$, d où on obtient

$$S_{int} = -ie\gamma^\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-\frac{i}{2}k\theta q} \widetilde{\Psi}(q) \widetilde{\Psi}(k) \widetilde{A}_\mu(p) (2\pi)^4 \delta^4(k + q + p) \quad (3.12)$$

Donc les règles de Feynman pour le calcul des fonctions de Green dans l'espace des moments sont alors :

- A chaque boucle fermionique est associé un signe négatif
- Dessiner tous les diagrammes topologiquement inéquivalents.
- Calculer le signe du diagramme en déterminant le signe associé à chaque ligne fermionique ouverte en ajoutant un signe négatif à chaque boucle fermionique fermée.
- Pour chaque ligne fermionique interne entrante ,on associe le propagateur

$$\frac{i(k_\mu \gamma^\mu - m)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (3.13)$$

- pour chaque ligne fermionique interne sortante,on associe le propagateur

$$\frac{i(-k_\mu \gamma^\mu - m)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (3.14)$$

- pour chaque ligne photonique interne ,on associe le propagateur

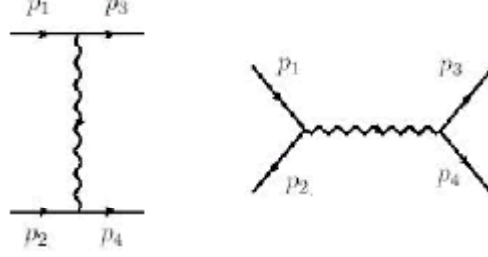
$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} \quad (3.15)$$

- A chaque vertex on associe le facteur

$$-ie(\gamma^\mu)(2\pi)^4 \ell^{-\frac{i}{2}k\theta q} (2\pi)^4 \delta^4(k) \quad (3.16)$$

3.2 Diffusion électron-positron

La représentation diagrammatique de la diffusion $e^-e^+ \longrightarrow e^+e^-$ est donnée par



diffusion electron-positron

La diffusion électron-positron est donnée par les deux diagrammes sur la figure . Le premier représente l'amplitude directe M_1 et le deuxième l'amplitude M_2 obtenu du premier par symétrie d'échange. L'application des règles de Feynman donne

$$\begin{aligned} M_1 &= \bar{V}(p_2, s_2) \left(-ie\gamma^\mu e^{-\frac{iP_2\theta P_1}{2}} \right) U(p_1, s_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2 + i\varepsilon} \bar{U}(p_3, s_3) \left(-ie\gamma^\nu e^{-\frac{iP_3\theta P_4}{2}} \right) V(p_4, s_4) \\ &= ie^2 \frac{e^{-i\frac{(P_2\theta P_1 + P_3\theta P_4)}{2}}}{(p_1 + p_2)^2 + i\varepsilon} \bar{V}(p_2, s_2) \gamma^\mu U(p_1, s_1) \bar{U}(p_3, s_3) \gamma_\mu V(p_4, s_4) \end{aligned} \quad (3.17)$$

et

$$\begin{aligned} M_2 &= \bar{U}(p_3, s_3) \left(-ie\gamma^\mu e^{-\frac{iP_1\theta P_3}{2}} \right) U(p_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 - p_3)^2 + i\varepsilon} \bar{V}(p_2, s_2) \left(-ie\gamma^\nu e^{-\frac{iP_2\theta P_4}{2}} \right) V(p_4, s_4) \\ &= ie^2 \frac{e^{-i\frac{(P_3\theta P_1 + P_2\theta P_4)}{2}}}{(p_1 - p_3)^2 + i\varepsilon} \bar{U}(p_3, s_3) \gamma^\mu U(p_1, s_1) \bar{V}(p_2, s_2) \gamma_\mu V(p_4, s_4) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Maintenant nous allons calculer la section efficace donnée en fonction de l'amplitude de diffusion par

$$d\sigma = \frac{m^4}{\sqrt{p_1 p_2 - m^4}} \int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^2 E_4^2} \frac{d^4 p_4}{(2\pi)^2 E_4^2} (2\pi)^4 \delta(p_4 + p_3 - p_2 - p_1) |M|_{moy}^2 \quad (3.19)$$

Il s'agit ensuite de calculer le carré de l'amplitude. Pour évaluer la section efficace de diffusion d'un état initial non polarisé il faut également prendre la moyenne sur les états de polarisation de l'électron et du positron. Chaque polarisation apparaît d'un état initial avec la même probabilité. Ensuite si l'on s'intéresse pas aux polarisations des particules de l'état final, il faut sommer sur celles-ci. La section efficace non polarisée est alors obtenue à partir de la moyenne suivant

$$|M|_{moy}^2 = \frac{1}{4} \sum_{S_1 S_2 S_3 S_4} |M|^2 \quad (3.20)$$

Où

$$|M|_{moy}^2 = |M_1|_{moy}^2 + |M_2|_{moy}^2 + |M_1 M_2^*|_{moy} + |M_2 M_1^*|_{moy} \quad (3.21)$$

On remarque que $|M_1|^2$ s'écrit comme

$$|M_1|^2 = e^4 \frac{e^{-i(P_2 \theta P_1 + P_3 \theta P_4)}}{(p_1 + p_2)^4 + i\varepsilon} \bar{V}(p_2, s_2) \gamma^\mu U(p_1, s_1) \bar{U}(p_3, s_3) \gamma_\mu V(p_4, s_4) \\ \bar{V}(p_4, s_4) \gamma_\mu U(p_3, s_3) \bar{U}(p_1, s_1) \gamma^\mu V(p_2, s_2) \quad (3.22)$$

Où sous la forme matricielle suivante

$$|M_1|^2 = \frac{e^4}{(p_1 + p_2)^4 + i\varepsilon} \left[\bar{V}_{\alpha_2}(p_2, s_2) (\gamma^\mu)_{\alpha_2 \alpha_1} U_{\alpha_1}(p_1, s_1) \bar{U}_{\alpha_3}(p_3, s_3) (\gamma_\mu)_{\alpha_3 \alpha_4} V_{\alpha_4}(p_4, s_4) \right] \\ \times \left[\bar{V}_{\beta_4}(p_4, s_4) (\gamma_\nu)_{\beta_4 \beta_3} U_{\beta_3}(p_3, s_3) \bar{U}_{\beta_1}(p_1, s_1) (\gamma^\nu)_{\beta_1 \beta_2} V_{\beta_2}(p_2, s_2) \right] \quad (3.23)$$

Cette dernière expression peut être arrangée comme suit

$$|M_1|^2 = \frac{e^4}{(p_1 + p_2)^4} \left[V_{\beta_2}(p_2, s_2) \bar{V}_{\alpha_2}(p_2, s_2) (\gamma^\mu)_{\alpha_2 \alpha_1} U_{\alpha_1}(p_1, s_1) \bar{U}_{\beta_1}(p_1, s_1) (\gamma^\nu)_{\beta_1 \beta_2} \right] \\ \times \left[U_{\beta_3}(p_3, s_3) \bar{U}_{\alpha_3}(p_3, s_3) (\gamma_\mu)_{\alpha_3 \alpha_4} V_{\alpha_4}(p_4, s_4) \bar{V}_{\beta_4}(p_4, s_4) (\gamma_\nu)_{\beta_4 \beta_3} \right] \quad (3.24)$$

où les quantités entre crochets sont des traces . Alors on écrit

$$|M_1|^2 = \frac{e^4}{(p_1 + p_2)^4 + i\varepsilon} Tr \left[V(p_2, s_2) \bar{V}(p_2, s_2) \gamma^\mu U_{\alpha_1}(p_1, s_1) \bar{U}(p_1, s_1) (\gamma^\nu) \right] \\ \times Tr \left[U(p_3, s_3) \bar{U}(p_3, s_3) \gamma_\mu V(p_4, s_4) \bar{V}(p_4, s_4) \gamma_\nu \right] \quad (3.25)$$

Grâce aux relation suivantes

$$\sum_s U(p, s) \bar{U}(p, s) = \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{2m} \quad (3.26)$$

$$\sum_s V(p, s) \bar{V}(p, s) = \frac{\gamma^\nu p_\nu - m}{2m} \quad (3.27)$$

L'équation devient

$$|M_1|^2 = \frac{e^4}{(p_1 + p_2)^4 + i\varepsilon} Tr \left[\frac{\gamma^\mu (p_2)_\mu + m}{2m} \gamma^\mu \frac{\gamma^\nu (p_1)_\nu - m}{2m} \gamma^\nu \right] \\ \times Tr \left[\frac{\gamma^\nu p_{3\nu} - m}{2m} \gamma_\mu \frac{\gamma^\mu p_{4\mu} + m}{2m} \gamma_\nu \right] \quad (3.28)$$

Les traces se calculent aisement en utilisant la relation suivante

$$Tr[(\gamma^\mu p_{\mu i} \pm m) \gamma^\mu (\gamma^\nu p_{\nu j} \mp m) \gamma^\nu] = 4 [p_i^\mu p_j^\nu + p_i^\nu p_j^\mu - g^{\mu\nu} (p_i p_j + m_0^2)] \quad (3.29)$$

Finalement le carré de l'amplitude du diagramme directe est donné par

$$\begin{aligned} |M_1|^2 &= \frac{16e^4}{(p_1 + p_2)^4} [p_2^\mu p_1^\nu + p_2^\nu p_1^\mu - g^{\mu\nu} (p_2 p_4 + m_0^2)] [p_{3\mu} p_{4\mu} + p_{3\nu} p_{4\nu} - g_{\mu\nu} (p_3 p_4 + m_0^2)] \\ &= \frac{16e^4}{(p_1 + p_2)^4 + i\varepsilon} [2(p_1 p_3)(p_2 p_4) + 2(p_1 p_4)(p_2 p_3) + 2m_0^2(p_1 p_2 + p_3 p_4) + 4m_0^4] \quad (3.30) \end{aligned}$$

Comme cette quantité est invariant de Lorentz, elle peut être calculée dans n'importe quel référentiel, et le choix le plus naturel est d'utiliser le référentiel du centre de masse dans lequel les lois de conservations donnent

$$\begin{aligned} p_1^0 &= p_2^0 = p_3^0 = p_4^0 = E \\ \mathbf{p}_1 &= -\mathbf{p}_2, \quad \mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_4 \\ p_1^2 &= p_2^2 = m_0^2, \quad p_3^2 = p_4^2 = m_0^2 \cos^2 \theta \\ p_1 p_2 &= p_3 p_4 = p_1^{02} + \mathbf{p}_1^2 = E^2 + E^2 - m_0^2 = 2E^2 \\ p_1 p_4 &= p_2 p_3 = p_1^{02} + \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_4 = E^2 + (E^2 - m_0^2) \cos \theta = E^2 (1 + \cos \theta) = 2E^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ p_1 p_3 &= p_2 p_4 = p_1^{02} + \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_3 = E^2 - (E^2 - m_0^2) \cos \theta = E^2 (1 - \cos \theta) = 2E^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ s &= (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 = 4E^2, \quad s = (p_1 - p_3)^2 = 2E^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Dans le cas ultrarelativiste on a ($E \gg m_0$), et ceci nous permet de négliger les termes en m_0^2 et m_0^4 . En remplaçant dans (3.30) on obtient bvb

$$\begin{aligned} |M_1|_{moy}^2 &= \frac{e^4}{(p_1 + p_2)^4 m_0^4} \left[2 \left(2E^2 \sin^2 \frac{v}{2} \right)^2 + 2 \left(2E^2 \cos^2 \frac{v}{2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{e^4}{2m_0^4} \left[\sin^4 \frac{v}{2} + \cos^4 \frac{v}{2} \right] \quad (3.31) \end{aligned}$$

Maintenant nous allons calculer la moyenne de carré de l'amplitude du diagramme d'échange en suivant la même méthode utilisée précédemment pour obtenir $|M_1|_{moy}^2$. nous donnerons seulement l'expression finale

$$|M_2|_{moy}^2 = \frac{e^4}{2m_0^4} \left[\frac{1 + \cos^4 \frac{v}{2}}{\sin^4 \frac{v}{2}} \right] \quad (3.32)$$

Le terme d'interférence se calcule aussi de la même manière et est donné par

$$|M_1 M_2^*|_{moy} = -\frac{e^4}{4m_0^4} \frac{\cos^4 \frac{v}{2}}{\sin^2 \frac{v}{2}} e^{-i \frac{(P_2 \theta P_1 + P_3 \theta P_4 - P_1 \theta P_3 - P_2 \theta P_4)}{2}} \quad (3.33)$$

$$|M_2 M_1^*|_{moy} = -\frac{e^4}{4m_0^4} \frac{\cos^4 \frac{v}{2}}{\sin^2 \frac{v}{2}} e^{-i \frac{(P_1 \theta P_3 + P_2 \theta P_4 - P_2 \theta P_1 - P_3 \theta P_4)}{2}} \quad (3.34)$$

il faut calculer les termes suivants dans le referentiel centre de masse

$$p_3 \theta p_1 = p_3^0 \theta_{0i} p_1^i + p_3^i \theta_{i0} p_1^0 + p_3^i \theta_{ij} p_1^j = E (-p_1^i + p_3^i) \theta_{i0} + p_3^i \theta_{ij} p_1^j \quad (3.35)$$

$$p_2 \theta p_4 = p_2^0 \theta_{0i} p_4^i + p_2^i \theta_{i0} p_4^0 + p_2^i \theta_{ij} p_4^j = E (-p_1^i + p_3^i) \theta_{i0} + p_1^i \theta_{ij} p_3^j \quad (3.36)$$

$$p_2 \theta p_1 = p_2^0 \theta_{0i} p_1^i + p_2^i \theta_{i0} p_1^0 + p_2^i \theta_{ij} p_1^j = 2E \theta_{0i} p_1^i \quad (3.37)$$

$$p_3 \theta p_4 = p_3^0 \theta_{0i} p_4^i + p_3^i \theta_{i0} p_4^0 + p_3^i \theta_{ij} p_4^j = -2E \theta_{0i} p_3^i \quad (3.38)$$

en remplaçant (3.35, 3.36, 3.37, 3.38) dans (??, ??) on obtient

$$|M_1 M_2^*|_{moy} = -\frac{e^4}{4m_0^4} \frac{\cos^4 \frac{v}{2}}{\sin^2 \frac{v}{2}} \quad (3.39)$$

$$|M_2 M_1^*|_{moy} = -\frac{e^4}{4m_0^4} \frac{\cos^4 \frac{v}{2}}{\sin^2 \frac{v}{2}} \quad (3.40)$$

Finalement le carré de l'amplitude totale est donnée par

$$|M|_{moy}^2 = \frac{e^4}{8m_0^4} \left[\sin^4 \frac{v}{2} + \cos^4 \frac{v}{2} + \frac{1 + \cos^4 \frac{v}{2}}{\sin^4 \frac{v}{2}} - 2 \frac{\cos^4 \frac{v}{2}}{\sin^2 \frac{v}{2}} \right] \quad (3.41)$$

En remplaçant dans l'expression de la section efficace (3.19) et utilisant la relation suivante

$$\sqrt{p_1 p_2 - m^2} = 2E \mathbf{p}_2 \quad (3.42)$$

la section efficace différentielle pour la diffusion électron-positron dans le cadre de la théorie non locale de l'électrodynamique quantique est finalement donnée par l'expression

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \frac{\alpha^4}{8E^2} \left[\frac{1 + \cos^4 \frac{v}{2}}{2} + \frac{1 + \cos^4 \frac{v}{2}}{\sin^4 \frac{v}{2}} - \frac{2 \cos^4 \frac{v}{2}}{\sin^2 \frac{v}{2}} \right] \quad (3.43)$$

Chapitre 4

conclusion

Dans ce mémoire nous avons procédé à l'étude détaillée d'une théorie des champs non commutative, Dans cette théorie le $*$ -produit de Moyal de la théorie des champs non commutative est prolongé à un $*$ -produit entre les champs, défini en terme d'un tenseur antisymétrique θ_μ utilisé dans le $*$ -produit. Nous sommes limité à l'étude d'une géometrie plus simple dans laquelle le tenseur antisymétrique θ_μ est nul. C'est ainsi que nous avons réussi à obtenir une théorie libre déffirente de la théorie libre dans les deux cas commutative et non commutative.

En effet en théorie des champs non commutative, à cause des propriétés du produit $*$, la partie quadratique de l'action n'est pas changée et par conséquent seulement la partie dans l'interaction peut marquer la non commutativité. C'est un point très important à maintenir dans l'esprit que la théorie des non commutative libre est la même que celle de la théorie commutative et par conséquent les équations classiqess de mouvement des deux formalisme sont semblables.

Le deuxième chapitre contient deux parties. Dans la première partie, nous avons procédé à l'étude classique de la théorie à travers l'utilisation de formalisme lagrangie, Où nous avons pu montre que les équation de mouvements de cette théorie ont la même forme que celles de la théorie non commutative, Nous a conduit à un courant conservé. la deuxième partie qui concernait la quantification canonique, ous avons obtenus un propagateur de Feynman égale à celui de la theorie commutative. Aussi les solutions des équations de mouvement nous ont conduit à un tenseur de moment-énergie égale a celui de la theorie commutative.

Dans le troisieme chapitre nous avons déduit de nouvelles règles de Feynman, où on a obtenu un vertex déformé. Nous avons terminé ce chapitre par l'application ces nouvelles règles

de Feynman au calcul de section efficace différentielle de la diffusion électron-électron ou on a trouvé une correction depend de parametre de non commutativité θ .

ملخص

في هذه الأطروحة درسنا نظرية الديناميكا الكهربائية غير تبادلية حيث تبين أن تأثير الهندسة غير تبادلية لا يظهر في النظرية الحرة. ولكن في حالة التفاعل، حصلنا على قواعد فينمن جديدة أين لاحظنا ظهور معامل أسي. رغم هذا لم نلاحظ تغير في الزاوية الصلبة للتفاعل إلكترون-بوزترون و هذا ناتج عن تشوه قاعدة التناظر في وجود الهندسة الغير تبادلية

Abstract

In this thesis we studied the theory of non-commutative electrodynamics where it was found that the non-commutative does not appear in the free theory. But in case of interaction was obtained Feynman new rules or we notice the appearance of an exponential factor in the vertex function. The cross section of the electron-positron scattering is equal to that of the commutative theory.

RESUME

Dans ce mémoire on a étudié la théorie de l'électrodynamique non commutative où on a trouvé que la non commutativité n apparaisse pas à la théorie libre. Mais au cas d'interaction, on a obtenu des nouvelles règles de Feynman ou on remarque l'apparition d'un facteur exponentiel dans la fonction de vertex. La section efficace de la diffusion électron-positron reste égale à celle de la théorie commutative.