

People's Democratic Republic of Algeria
Ministry of Higher Education and Scientific Research
Mohamed Boudiaf University of M'sila
Faculty of Technology



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة المسيلة
كلية التكنولوجيا

Département de Génie Mécanique

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

En vue de l'obtention du diplôme de :

MASTER

En Génie Mécanique

Option : **Energétique**

Présenté par :

Alisaoucha Abderrahmane & Bellatrache Izzeddine

Thème

**Etude numérique comparative de la combustion dans la
chaudière Basée sur les méthodes de V.F**

Devant le jury composé de :

NOM et Prénom	Grade	Qualité
BAKHTI Fatima Zohra	Professeur	Président
DJERAD Abdelkader	MCA	Encadreur
BELKHIRI Khallef	MCA	Examineur

Année Universitaire : 2021 / 2022

N° d'ordre : GM/...../2022

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE-----	1
Chapitre I: Etat de l'art sur les chaudières	
Introduction-----	2
I-1-Aperçu Historique-----	2
I-2-Principe De Fonctionnementd'une Chaudière-----	3
I-3-Technologie Des Chaudières-----	5
I-4-Constitution Globale Des Chaudières-----	6
I-5-Principaux Circuits D'une Chaudière-----	7
I-6-Classification Des Chaudières: -----	8
Chapitre II:Les chaudières	
Introduction -----	10
II-1-Les chaudières à circulation naturelle -----	12
II-2-Les chaudières à circulation assistée-----	13
II-3-Les chaudières à circulation forcée-----	14
II-4-Les chaudières dans un cycle TGV-----	15
II-6-Géométrie d'une chaudière de récupération verticale-----	20
II-7Lacogénération-----	23
II-8-Le repowering-----	25
II-9-Capacités du marché-----	26
Chapitre III:Les 2quations de base de transfert de chaleur	
III-1-Definition-----	28
III-1-1-Conduction Thermique-----	28
III-1-2-Convection Thermique-----	28
III-1-3-Rayonnement Thermique-----	28
III-2-Les Equations Du Transfert Thermique-----	29
III-3-Etablissement De L'equation Differentielle -----	33
III-4- Conditions Aux Limites -----	37
III-5-Methode Des Differences Finies -----	39
III-5-1-Discretisation De L'equation Differentielle De La Chaleur-----	41
III-6- Conduction De Chaleur En 2-Dimensions -----	43
III-6-1- Methodes Numeriques En Regime Permanent-----	43

III-6-1-1. Maillage Numerique-----	44
III-6-1-2. Bilan Thermique -----	44
III-6-2- Les Methodes Numeriques En Regime Variable (Instationnaire)-----	45
III-7- Conduction De Chaleur En 3-Dimensions -----	47
III-7-1. Maillage Numerique -----	47
III-7-2 Bilans Thermiques -----	51
III-8- Conduction De Chaleur En Coordonnees Cylindriques-----	52
III-8-1- Maillage En Coordonnees Cylindriques -----	52
III-9- Les Methodes De Resolution Des Systemes D'equations Algebriques -----	54
III-9-3 Comparaison Des Differentes Methodes :-----	54
Conclusion-----	62
References Bibliographiques	

Remerciements

Je tiens à remercier particulièrement mon directeur de thèse, Doctor DJERAD Abdelkader pour l'assistance qu'ils m'ont accordée durant ce projet de longue haleine. Quelques lignes ne suffiront évidemment pas à exprimer l'étendue de ma gratitude à leur égard.

Je remercie aussi, les autres membres du Département de Génie Mécanique qui ont chacun à leur manière fait tout ce qui était faisable pour que cette thèse voit le jour dans les meilleures conditions .

Nomenclature

<i>Notation</i>	<i>Désignation et unité</i>
A	Aire de la section, (m ²) Diffusivité thermique, (m ² /s)
c	Chaleur spécifique, (j/kg ^{°c})
C(i,j)	Capacité thermique volumétrique,
(J/(m ³ °c)) Edeg	Énergie générée à l'intérieur du solide,
(W) Eii	Énergie emmagasinée, (W)
h	Coefficient de convection, (W/m ² °c)
k	Conductivité thermique, (W/m°c)
L	Longueur du cylindre, (m)
N	Nombre de mailles
qc	Flux de chaleur par convection, (W)
qr	Flux de chaleur par rayonnement, (W)
qx	Flux de chaleur suivant l'axe (x), (W)
qy	Flux de chaleur suivant l'axe (y), (W)
qz	Flux de chaleur suivant l'axe (z), (W)
q	Flux de chaleur généré par la chaleur, (w/m ³)
Ri	Rayon, (m)
Rcyl	Résistance thermique d'un cylindre,
(°c/W) Rmur	Résistance thermique d'un mur,
(°c/W) Rsph	Résistance thermique d'une sphère, (°c/W)
Rx	Résistance thermique suivant l'axe (x),
(°c/W) Ry	Résistance thermique suivant l'axe (y), (°c/W)
Rz	Résistance thermique suivant l'axe (z), (°c/W)
T	Température, (°c ou °k)
t	Temps, (s)
Th	Température ambiante, (°c ou °k)

T_f	Température d'un fluide, ($^{\circ}\text{C}$ ou $^{\circ}\text{K}$)
T_r	Température de rayonnement, ($^{\circ}\text{C}$ ou $^{\circ}\text{K}$)
T_s	Température de la surface, ($^{\circ}\text{C}$ ou $^{\circ}\text{K}$)
V	Volume, (m^3)
Δx	Le pas en espace suivant, (x) (m)
Δy	Le pas en espace suivant, (y) (m)
Δz	Le pas en espace suivant, (z) (m)
δ	Épaisseur, (m)
ρ	Densité du corps, (kg/m^3)
ε	Facteur d'émission de la surface
σ	Constante de Stéphan-Boltzman, (kcal/hm^2)
Δt	Le pas en temps, (s)
x, y, z	Coordonnées spatiale

Introduction générale

Nombreuses industries travaillent à des températures très élevées et, pour chauffer les produits aux températures requises, il faut réaliser des combustions à température encore plus élevée. Deux moyens permettent de relever la température des produits d'une combustion:

- un préchauffage de l'aire de combustion.
- une combustion dans un air enrichi en oxygène, ou éventuellement dans l'oxygène pur.

Le préchauffage de l'air est ordinairement obtenu par échanges thermiques avec les fumées chaudes. il n'est pas techniquement limité que par la température même des fumée et par la tenue des matériaux constituant l'échangeur. des échangeurs métalliques permettent aisément de réaliser un préchauffage de l'air à 500°C ou 600°C. des récupérateurs à base d'éléments réfractaires, permettent de préchauffer l'air à plus haute température de l'ordre de 1200°C.

Industriellement, on utilise les chaudières pour produire la vapeur nécessaire au fonctionnement des procédés. La source de chaleur peut-être fournie par un combustible (gaz, fioul, charbon...) ou une résistance électrique.

L'idée d'utiliser la vapeur comme force motrice remonte au 1^{er} siècle après JC avec l'invention de l'éolipile par Héron d'Alexandrie. La chaudière trouve donc son origine qui remonte à la plus haute antiquité.

En effet, depuis que l'homme a découvert le mode de vie qui consiste à faire bouillir ses aliments, il a ainsi amorcé la mise au point d'une chaudière. Mais il a fallu attendre jusqu'à la fin du 17^{ème} siècle pour voir effectivement apparaître la Marmite de Papin, première application réellement industrielle de la chaudière. Elle sera ensuite très tôt suivie de la première tentative d'application de la force motrice de la vapeur à la navigation. Ainsi, les premières machines à vapeur destinées à l'élévation de l'eau on encore à

la propulsion des voitures ont fait leur apparition vers le milieu du 18^{ème} siècle. Une réalisation remarquable en France fut alors le fardier en 1769 mis au point par l'Ingénieur militaire CUGNOT ; le fardier est destiné à la traction des pièces d'artilleries. Des améliorations successives, surtout à partir de 1828, vont conduire à la mise au point de la première chaudière tubulaire en Grande Bretagne .

Introduction

La chaudière est un générateur de chaleur produisant généralement de l'eau chaude pour le chauffage. Ce n'est pas la seule utilisation d'une chaudière qui peut produire de la vapeur, le plus souvent pour des applications industrielles. Une chaudière comporte un corps de chauffe avec un circuit d'eau intégré qui récupère la chaleur produite par un brûleur utilisant un combustible gaz, fioul, bois ... Elle présente de par son combustible, un rendement de combustion. Selon son dimensionnement et les différents appels de puissance, elle génèrera un rendement de production. C'est dire qu'une chaudière qu'elle soit une chaudière gaz, ou une chaudière au fioul ou une chaudière bois pourra présenter différents rendements selon les applications qu'elle sert. D'où la notion d'économies d'énergie et d'efficacité énergétique de la dite chaudière. L'efficacité des chaudières est désormais réelle. Nous trouvons les meilleurs rendements avec les chaudières à condensation. La chaleur latente des fumées est ainsi récupérée sur le retour d'eau chaude de chauffage. Les fumées sortent plus froides et la chaleur est transférée au circuit de chauffage.

I-1-Aperçu historique :

Tout en sachant que les premiers générateurs de vapeur ont été développés par Heron (120 av. J.-C.), l'ère moderne des chaudières commence au début du XVIIIe siècle avec Savary (1698), Newcomen (1712) et Watt (1769) . Les premières chaudières à tubes de fumées ont été développées par Stevens et Trevithick (1811) et la première chaudière à tubes d'eau par Eve (1825). Le vingtième siècle a surtout été marqué par de nombreux développements dans les domaines du traitement d'eau, des aciers et des techniques de fabrication (soudage). En parallèle, des techniques de combustion (charbon pulvérisé) se développent, les turbines à vapeur apparaissent et les notions de thermodynamique s'affinent. Les augmentations de la pression et de la température de la vapeur sont apparues comme des facteurs essentiels pour l'amélioration du rendement des cycles énergétiques, tandis que l'augmentation de la puissance unitaire a été le principal moteur des réductions de coût. Quelques étapes clés de la technologie moderne ont été : – la combustion à charbon pulvérisé ;

- la resurchauffe ;
- les parois membranes ;
- la circulation forcée d'eau ;
- la marche en pression glissante. Tous ces développements ont été introduits entre 1920 et 1970.

À l'heure actuelle, l'état de la technique peut être résumé de la manière suivante :

– les générateurs de vapeur (chaudières) pour les centrales à charbon sont basés sur la technologie de combustion à « charbon pulvérisé » ou en « lit fluidisé circulant », une circulation eau vapeur de préférence forcée, avec une capacité thermique allant de 600 à 2 600 MWth. Les paramètres eau vapeur vont jusqu'à 300 bar et 620 oC pour la partie haute pression (HP), et des développements en cours visent 350 bar et 700 oC ; – les centrales à gaz sont basées sur des cycles combinés avec turbine à gaz (TAG) et turbine à vapeur (TAV). Les générateurs de vapeur sont du type « récupération » et contiennent des économiseurs, évaporateurs et surchauffeurs à plusieurs niveaux de pression (jusqu'à trois). La circulation eau vapeur est souvent naturelle, mais on peut noter de plus en plus fréquemment l'apparition de chaudières à circulation forcée ;



FigurI-1: chaudière industrielle

I-2-Principe de fonctionnement d'une chaudière:

Quel que soit le modèle que vous avez, le principe de fonctionnement d'une chaudière repose sur des éléments qui varient peu :

- Une chaudière a besoin d'un carburant, d'une source d'énergie: bois, fioul, gaz, électricité, ou plus récemment, air.
- Pour les chaudières à combustion, le carburant est brûlé, et c'est cette action qui produit de la chaleur.
- Pour les modèles électriques ou thermodynamiques, il n'y a pas de combustion, mais l'utilisation d'une source d'énergie "invisible".

- Dans tous les cas, l'énergie utilisée ou dégagée par la combustion sert à produire de la chaleur, qui se transmet ensuite à des circuits reliés à des émetteurs de chaleur (radiateurs, planchers chauffants) et/ou au dispositif d'alimentation en eau chaude.
- Les vapeurs dégagées et résidus de combustion sont évacués, sauf dans les modèles à condensation, dans lesquels la vapeur est réutilisée en circuit interne

I-3-Technologie des chaudières :

La construction des chaudières dépend des facteurs suivants :

- La nature du fluide caloporteur (eau chaude, vapeur d'eau saturée, vapeur surchauffée),
- Les conditions de service (état physique : pression et température) ;
- La nature du combustible (solide, liquide, gazeux) ;
- La mise en œuvre du combustible (manuelle, mécanique, brûleurs,...).
- Les constructeurs ont développé de très nombreux types de chaudières. Celles-ci subissent d'ailleurs constamment des modifications à la suite des progrès scientifiques et technologiques ; néanmoins, il est possible de classer les chaudières en quelques catégories essentielles. Nous y reviendront plus en détails mais avant, quelques notions s'imposent.

Les chaudières, au point de vue construction peuvent être en fonte ou en acier.

I-3-1-Chaudières en fonte

Les différents éléments d'une chaudière en fonte sont obtenus par moulage à partir d'un modèle. Les chaudières en fonte se rencontrent dans la gamme des petites et moyennes puissances (puissances inférieures à 2000th/h). Ce sont généralement des chaudières à eau chaude. La législation actuelle interdit l'emploi de la fonte pour la réalisation des chaudières à eau surchauffée à plus de 110°C et à vapeur à la pression de 0,50 bars effectif (soit 1,50 bars absolus). Décret du 08 Septembre 1967 n°-67782. La construction de ces chaudières s'effectue par juxtaposition d'un certain nombre d'éléments semblables moulés et assemblés par boulons ou des tiges filetées.

I-3-2-Chaudières en acier

Les chaudières en acier sont obtenues par soudage à partir de tôles et de tubes. Il est alors possible de réaliser les formes les plus diverses. Ces chaudières sont utilisées pour toutes les gammes de puissances. Ce type de construction est indispensable pour les appareils à forte pression contenant de l'eau (à plus de 110°C) ou de la vapeur (à plus de 0,50 bars).

I-4-Constitution globale des chaudières

Les chaudières se composent de diverses surfaces d'échange appelées surfaces de chauffe et de réservoirs. Les surfaces de chauffe comportent plusieurs parties : i. Une partie principale où se produit le chauffage (eau chaude et eau surchauffée) ou la vaporisation ; ii. Des parties auxiliaires (pas toujours existantes dans les petites chaudières) dans lesquelles se déroulent divers échanges de chaleur tels que :

- Le réchauffeur d'air de combustion ;
- Le réchauffeur d'eau d'alimentation (économiseur) ;
- Le surchauffeur de vapeur ;
- Et éventuellement, le surchauffeur de vapeur.

I.4.1. Le foyer d'une chaudière Le foyer est dit intérieur quand il est placé à l'intérieur d'un des corps cylindriques de la chaudière, l'eau se trouvant autour du foyer.

Le foyer est dit extérieur quand les flammes et les fumées se développent à l'extérieur du ou des corps cylindriques constituant la chaudière. L'ensemble est enfermé dans une enceinte en maçonnerie réfractaire munie de chicanes obligeant les gaz de la combustion à balayer la surface extérieure des corps avant de se rendre à la cheminée.

I.4.2. Les grilles Dans les chaudières chauffées au charbon, les grilles sur lesquelles brûle le charbon, et qui sont caractérisées par leur surface en m², sont de types fixes ou mobiles. Les grilles fixes sont constituées par de simples barreaux de fonte juxtaposés et reposant sur des sommiers ; ces barreaux laissent entre eux l'espace nécessaire pour le passage de l'air de combustion. Les grilles mécaniques sont de types variés. Les plus couramment employés affectent la forme d'une sorte de tapis métallique à claire-voie passant sur des rouleaux à axe horizontale.

1.4.3. Les tubes d'eau Reliant entre elles et certaines parties du corps de la chaudière, ces tubes, remplis en permanence d'eau, sont disposés dans le passage des gaz chauds au-dessus du foyer. Ces tubes peuvent être verticaux, horizontaux ou inclinés. Dans certains types de chaudières, les tubes d'eau constituent un ensemble très important. Ces faisceaux tubulaires, qui contiennent la majeure partie de l'eau de la chaudière, réalisent la surface de chauffe. Quant au nombre de tubes de faisceaux, il est considérable et de l'ordre de plusieurs milliers dans les chaudières importantes (chaudières multitubulaires).

I.4.4. Les tubes de fumées Ces tubes, dudgeonnés sur le fond des corps, sont en contact avec l'eau par leur surface extérieure, et parcourus intérieurement par les gaz chauds.

I.4.5. Les bouilleurs

Ce sont des corps cylindriques annexes de petites dimensions, exposés directement aux flammes et reliés par leurs deux extrémités au moyen de tuyaux courts et de large section au corps principal situé au-dessus. Une chaudière peut comporter 2, 4 ou même 6 bouilleurs.

I.4.6. Les surchauffeurs et resurchauffeurs Les surchauffeurs et resurchauffeurs sont constitués d'une série de serpentins tubulaires généralement identiques dont l'une des extrémités est raccordée sur un tube de gros diamètre ou collecteur d'entrée de vapeur et l'autre sur un élément semblable ou collecteur de sortie. Suivant la longueur, chaque serpentín comprend un ou plusieurs tubes soudés bout à bout sur bagues.

I.4.7. Les économiseurs Placés sur le circuit des fumées, immédiatement après les derniers faisceaux du générateur dans les chaudières moyennes, à la suite des surchauffeurs et resurchauffeurs dans les installations de grandes puissances, les économiseurs peuvent être en fonte ou en acier. Ils sont constitués de tubes dont le nombre et la longueur varient selon :

- Le volume des fumées ;
- Les températures d'entrée et de sortie des fumées ;
- Les températures d'entrée et de sortie de l'eau d'alimentation ;
- L'espace dont on dispose à l'intérieur de la chaudière ou à l'extérieur.

Les économiseurs entièrement en fonte sont autorisés si le diamètre intérieur des tubes n'excède pas 100mm. Ce sont des tubes avec ailettes lorsqu'ils peuvent être isolés de la chaudière par une vanne, une soupape de sûreté est obligatoire. La limite d'emploi des appareils en fonte est déterminée d'après la résistance de la qualité de fonte utilisée. C'est le constructeur de l'appareil qui le définit. A partir d'une certaine pression, l'emploi exclusif de la fonte n'est plus possible. Un matériau mixte est alors utilisé.

I.4.8. Les réchauffeurs d'air Les réchauffeurs d'air placés après les économiseurs reçoivent les fumées à des températures variant de 350 – 400°C. Ils sont constitués :

- de plaques parallèles (3 à 20mm d'écartement) entre lesquelles circulent alternativement l'air et les gaz ;
- ou des faisceaux dudgeonnés ou soudés dans deux plaques tubulaires et où passent les gaz.

L'air circule autour des tubes par des jeux de chicanes, ou même normalement aux tubes grâce aux tôles de séparation perpendiculaires aux tubes. La circulation est donc dans l'ensemble à contre courant, mais croisée dans chaque section.

I-5-Principaux circuits d'une chaudière et les facteurs influençant leur fonctionnement

Les principaux circuits d'une chaudière sont :

- Le circuit d'eau d'alimentation de la chaudière ;
- Le circuit d'alimentation en combustible ;
- Le circuit d'alimentation en air ;
- Le circuit d'eau chaude ou de vapeur (saturée ou surchauffée) produite,
- Le circuit d'extraction des fumées produites par combustion.

Le fonctionnement d'une chaudière fait essentiellement intervenir trois facteurs :

La combustion d'un combustible (ou la production de chaleur à partir de sources électrique et nucléaire respectivement pour les chaudières électriques et nucléaires) ;

Le passage des fumées de combustion dans la chaudière depuis le foyer de combustion jusqu'à la cheminée,

Et le transfert de chaleur des produits de la combustion au fluide caloporteur (de l'eau essentiellement dans le cadre de cette étude).

Ces trois facteurs auront des influences notables sur le rendement de l'ensemble et sur le fonctionnement correct de l'appareil au cours du temps.

- La combustion d'un combustible (ou la production de chaleur à partir de sources électrique et nucléaire respectivement pour les chaudières électriques et nucléaires) ;
- Le passage des fumées de combustion dans la chaudière depuis le foyer de combustion jusqu'à la cheminée,
- Et le transfert de chaleur des produits de la combustion au fluide caloporteur (de l'eau essentiellement dans le cadre de cette étude).

Ces trois facteurs auront des influences notables sur le rendement de l'ensemble et sur le fonctionnement correct de l'appareil au cours du temps.

I-6-Classification des chaudières:

C'est une gageure que de vouloir établir une classification des chaudières industrielles, celle-ci faisant intervenir trop de critères non significatifs lorsqu'ils sont pris isolément, trop de variantes et trop de combinaisons possibles. Il est évident que chaque modèle de chaudière possède, de par sa conception et ses dimensions en général, une limitation en capacité de production de vapeur ; mais il est bien rare de buter sur tous les critères de limitation en même temps et il suffit souvent de changer un paramètre pour étendre sensiblement la plage d'utilisation.

Donc une description de chaudière se fait par classification :

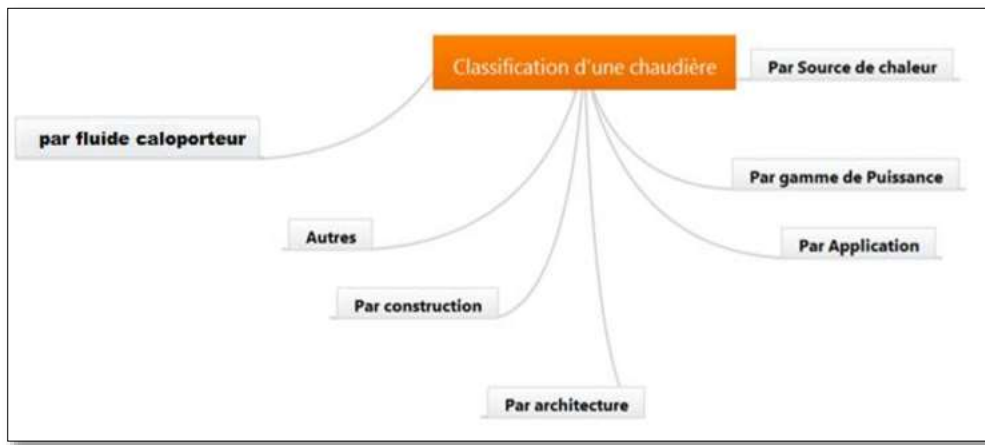


Figure1-2: classification des chaudières

I-6-1-Selon le mode d'emploi

Selon ce mode on distingue : Les chaudières fixes, les chaudières mobiles avec l'application à la traction motrice .

I-6-2-Selon la disposition générale On distingue dans ce mode : Les chaudières horizontales et Les chaudières verticales

I-6-3-Selon le mode de construction Il y a dans ce mode, trois types de chaudières. Les chaudières à bouilleurs ; Les chaudières à tubes fumées et Les chaudières à tubes d'eau ou à faisceaux tubulaires. C'est ce mode de classification qui est utilisé en pratique. Cependant, il existe d'autres modes de classification qui sont tout aussi employés que celui-ci.

I-6-4-Selon le mode chauffage Dans ce mode, on se base sur la disposition du foyer ; ainsi, on distingue : Les chaudières à foyer intérieur à l'appareil et Les chaudières à foyer extérieur.

I-6-5-Selon la nature de la vapeur produite La nature de la vapeur générée par une chaudière est en étroite relation avec la pression de vapeur établie. On distingue alors :

- Les chaudières à basse pression : $P < 5$ bars
- Les chaudières à moyenne pression : $5 \text{ bars} \leq P < 45$ bars
- Les chaudières à haute pression : jusqu'à la pression critique qui est $P = 225,5$ bars ;
- Les chaudières à pression supercritique : $P > 225,5$ bars.

I-6-6-Selon la vitesse de circulation de l'eau Selon ce mode de classification, on distingue quatre classes de chaudières :

- Classe A : ce sont les chaudières dites sans circulation : $V < 1$ m/s
- Classe B : ce sont les chaudières dites à circulation modérée : $1 \leq V < 5$ m/s
- Classe C : ce sont les chaudières dites à circulation accélérée : $5 \leq V < 9$ m/s
- Classe D : ce sont les chaudières à circulation forcée : $V > 9$ m/s.

Plus techniques sont aussi les modes de reconnaissance et de caractérisation sur le site de la pression installée et de la pression de service. C'est pour cette raison qu'on a défini le timbre d'une chaudière .

En effet, selon le décret du 02 Avril 1926, portant réglementation sur les appareils à pression, le timbre d'une chaudière est la pression de levée des soupapes de sûreté qui assure la sécurité en cas de dépression accidentelle, lesdites soupapes étant capable d'évacuer à l'atmosphère plus que le plein débit de la chaudière. Le timbre s'exprime donc en bar effectif et sa valeur correspond à la limite d'utilisation obligatoirement marquée en rouge sur le manomètre réglementaire de la chaudière, la couleur rouge de danger étant choisie pour faciliter le contrôle visuel de non dépassement.

Introduction

Il existe deux grands groupes de chaudières : les chaudières de récupération qui permettent de valoriser l'énergie thermique d'un fluide chaud qui doit être refroidi et les chaudières à combustion, dans lesquelles un combustible est brûlé de manière à transférer l'énergie nécessaire.

Les chaudières à combustion sont conçues en fonction des caractéristiques du fluide caloporteur ou du fluide à vaporiser, ainsi que de celles du combustible à brûler.

Les chaudières de récupération ont, elles aussi, des caractéristiques très variées, dictées par les processus industriels auxquelles elles sont associées. Elles produisent soit de la vapeur de chauffe, utilisée en d'autres points de l'installation qui nécessitent un apport de chaleur, soit de la vapeur énergétique, dont la détente dans des turbines permet d'entraîner certaines machines, telles que des compresseurs, des pompes ou alors des alternateurs connectés à un transformateur pour la production d'électricité.

Nous étudierons plus particulièrement les chaudières de récupération dans un cycle combiné couramment appelé cycle TGV (turbine gaz/vapeur), illustré à la figure I-1. La chaleur contenue dans l'échappement de la turbine à gaz (560°C - 640°C) est utilisée par un cycle thermodynamique mettant en œuvre une turbine à vapeur.

Ce type de centrale présente un rendement net actuellement proche de 55%. La technologie TGV constitue un excellent moyen de production de l'électricité et est amenée à jouer un rôle important dans les années futures.

Les chaudières de récupération peuvent être horizontales ou verticales. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux chaudières verticales construites par la société CMI (Seraing Belgique) puisqu'elles vont servir au développement des différents exemples de ce travail.

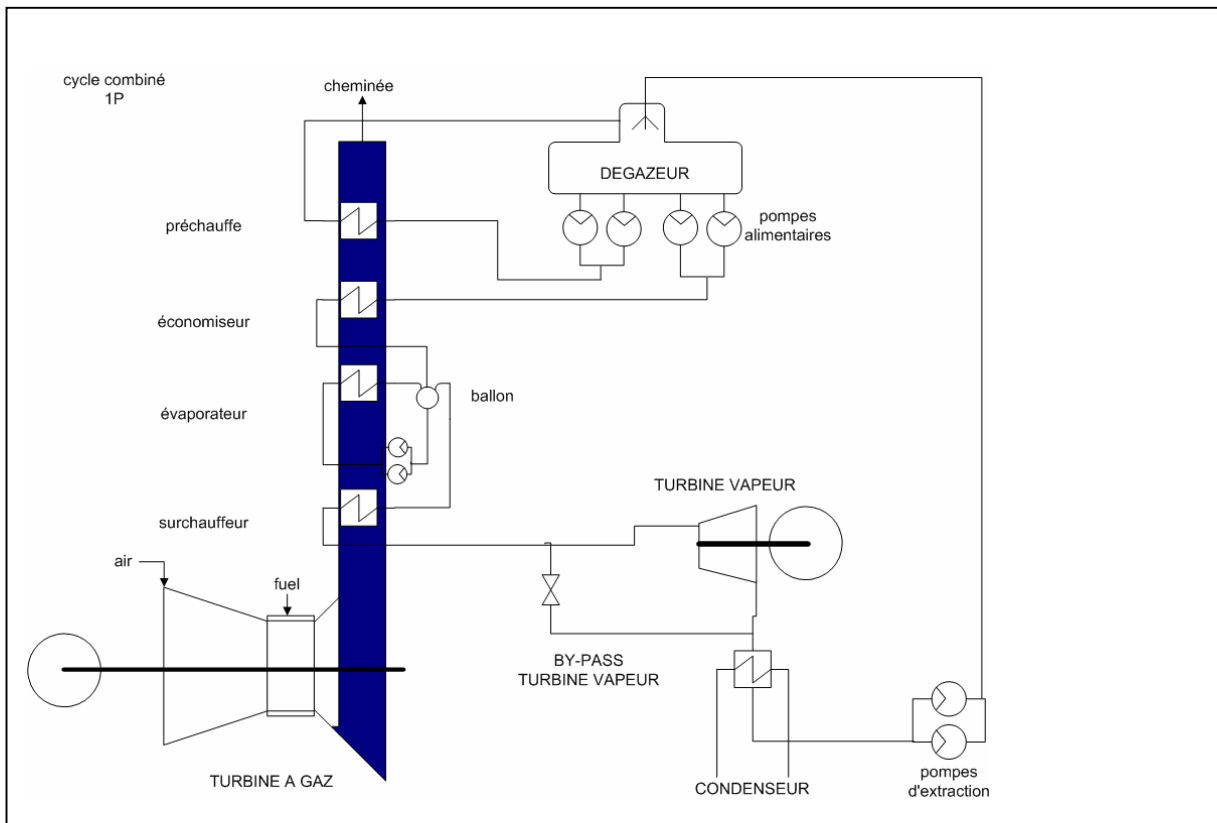


Figure II-1 : Exemple de cycle TGV à un seul niveau de pression

Dans ces chaudières l'eau est réchauffée puis vaporisée et surchauffée dans des tubes horizontaux.

Même s'il est possible de concevoir des cycles thermodynamiques basés sur différents fluides, les chaudières classiques utilisent exclusivement de l'eau liquide qu'elles réchauffent jusqu'à la température de saturation puis qu'elles vaporisent sous forme de vapeur saturée. Très généralement, elles surchauffent ensuite cette vapeur, c'est-à-dire qu'elles en élèvent la température au-dessus de sa température de saturation. La vapeur ainsi produite peut également constituer un fluide caloporteur ; elle est alors générée à une pression telle que sa température de condensation corresponde au niveau de température requis par les organes d'utilisations ; on ne la surchauffe que légèrement, uniquement pour limiter les condensations parasites dans les conduites de transport et de distribution.

Mais, plus généralement, cette vapeur est utilisée comme fluide énergétique, dans un cycle fermé de production d'énergie. Dans ce cas, on cherche à optimiser les pressions et à obtenir les températures de surchauffe les plus élevées possibles dans un contexte économique et technique raisonnable. Les rendements des cycles énergétiques auxquels elles sont associées sont, en effet, des fonctions de ces deux paramètres.

La différence de densité entre les phases vapeur et liquide à saturation décroît quand la pression augmente (voir Figure II-3). C'est pourquoi on ne rencontre pas de chaudière à circulation naturelle à très haute pression (rarement au-delà de 145 bar).

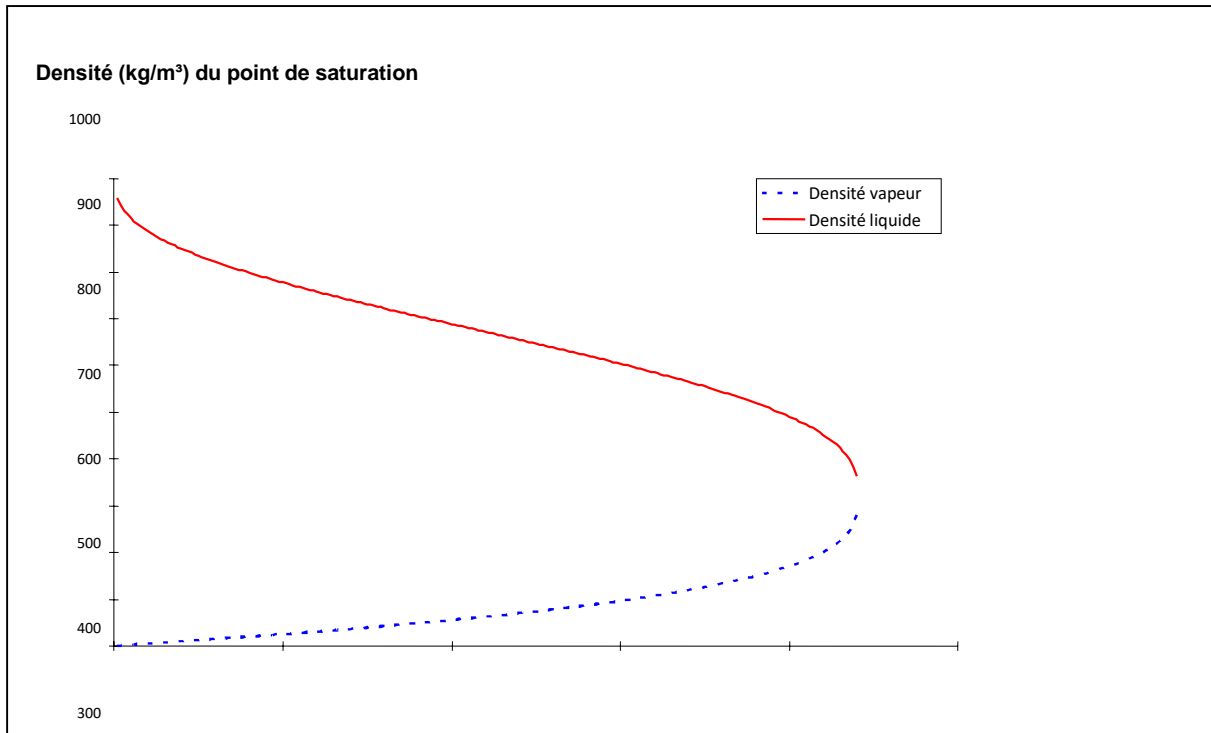


Figure II-3 : Évolution de la densité de l'eau liquide et vapeur avec la pression de saturation. Les chaudières à circulation naturelle n'ayant pas de pompe de circulation à l'évaporateur, présentent l'avantage d'une faible consommation électrique et de coûts de maintenance limités.

II-2-Les chaudières à circulation assistée

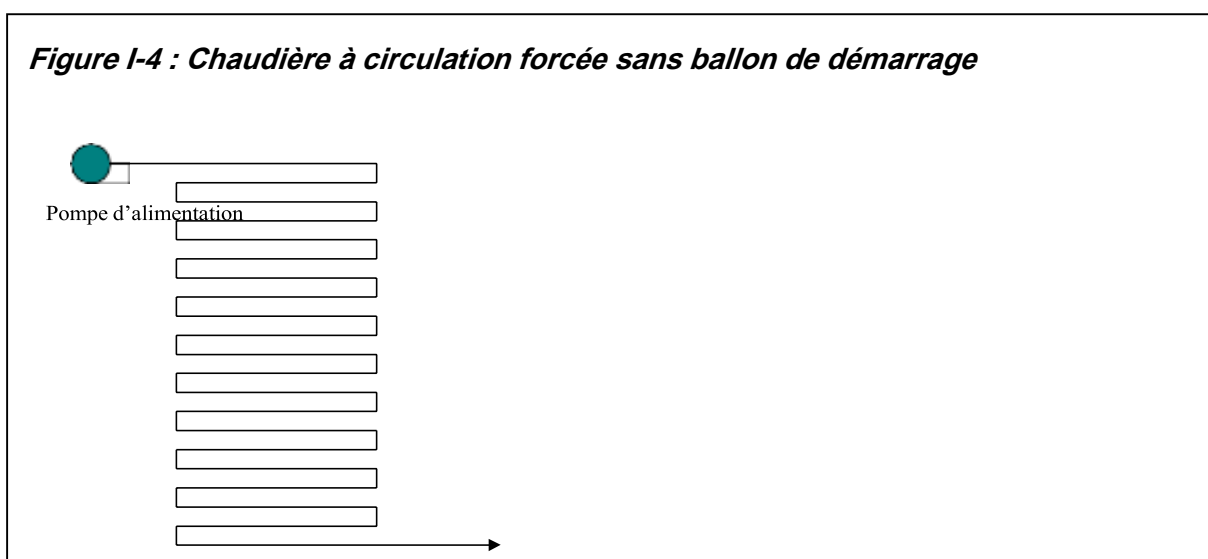


Figure II-4 : Chaudière à circulation forcée sans ballon de démarrage

Lorsque la pression de la vapeur augmente, le tirage naturel dans les tubes de l'évaporateur devient insuffisant. Une pompe de circulation est alors introduite dans la boucle de vaporisation pour vaincre les pertes de charge du mélange eau vapeur à déplacer (voir C'est un schéma couramment rencontré pour des pressions comprises entre 100 et 180 bar. Pour des pressions supérieures, on rencontrera des chaudières à circulation forcée.

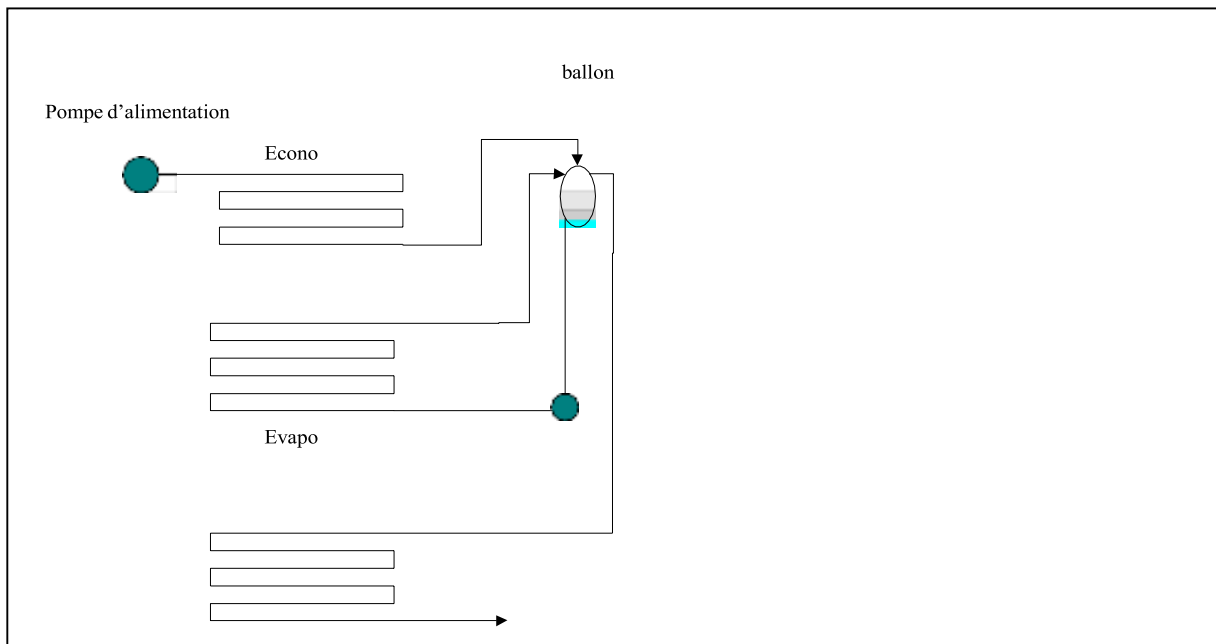


Figure II-5 : Chaudière à circulation assistée

II-3-Les chaudières à circulation forcée

Les chaudières les plus modernes peuvent être à vaporisation totale (once-through boiler en anglais): elles ne comportent théoriquement plus de réservoir matérialisant la séparation eau vapeur (voir Figure II-6) et sont constituées d'un grand nombre de tubes parallèles à l'intérieur desquels l'eau se réchauffe, se vaporise, et se surchauffe en un seul passage.

Une chaudière à circulation forcée diffère d'une chaudière classique, à circulation naturelle ou assistée, de par le nombre d'éléments qui la composent. En effet, une chaudière classique comprend un économiseur, un vaporiseur avec ballon de séparation et un surchauffeur. Dans une chaudière à circulation forcée, on ne peut plus faire la différence entre l'économiseur et le vaporiseur, et s'il subsiste un ballon de séparation, non seulement sa taille est fortement réduite, mais en plus, son utilité est principalement limitée à la phase de démarrage de la chaudière, pendant laquelle l'eau soutirée à la base du ballon est renvoyée vers le dégazeur,

le surchauffeur n'étant opérationnel que lorsque le débit de vapeur sortant du ballon est suffisant (voir Figure II-6).

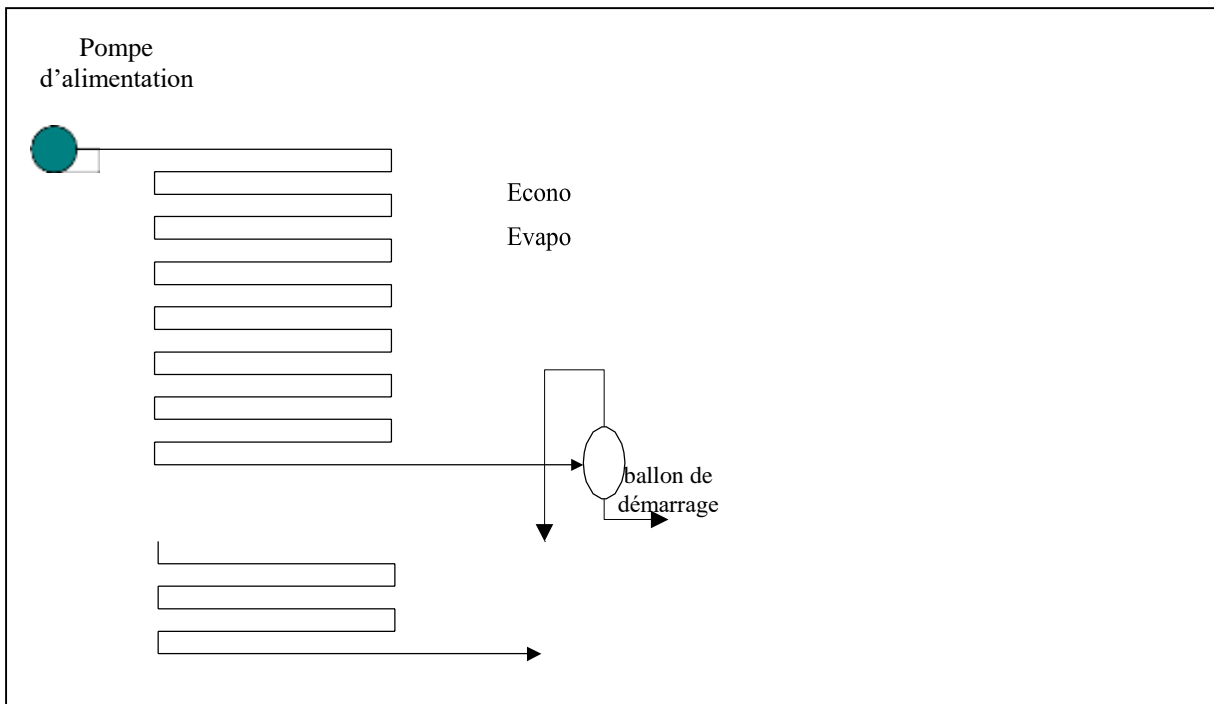


Figure II-6 : Chaudière à circulation forcée avec ballon de démarrage

II-4-Les chaudières dans un cycle TGV

Dans un cycle combiné, les chaudières de récupération doivent être conçues de manière à satisfaire à plusieurs objectifs :

- réduire les irréversibilités de transfert de chaleur,
- accroître l'efficacité du transfert de chaleur,
- minimiser la perte par enthalpie restante des fumées rejetées à la cheminée,
- permettre le réglage de la température de sortie de la vapeur surchauffée à l'entrée de la turbine à vapeur,
- pouvoir être rapidement démarrée pour ne pas perturber le cycle combiné,
- présenter une perte de charge limitée côté fumée pour limiter la contre-pression à l'échappement de la turbine à gaz, ce qui en réduirait le rendement.

Afin de rencontrer ces objectifs, certaines méthodes sont systématiquement utilisées :

- déterminer les niveaux de pression et organiser la circulation générale de façon à minimiser la différence de température entre les fumées et l'eau/vapeur à réchauffer,

- adopter pour chaque échangeur la circulation à contre-courant,
- utiliser un réchauffeur d'air lorsque le cycle le permet (pas de TG)

Considérons une chaudière de récupération composée d'un économiseur, d'un évaporateur et d'un surchauffeur. Si l'eau et les fumées circulent à contre-courant, la différence minimum de température entre les fumées et l'eau définira le point de pincement du procédé.

Deux points de pincement apparaissent dans une chaudière de récupération à simple pression (voir Figure II-7): un point de pincement à la sortie du surchauffeur (F1, E1) et un point de pincement à l'évaporateur (F3, E3). Le point de pincement définit la limite de récupération correspondant à l'énergie maximum récupérable dans les fumées. La connaissance des enthalpies des fumées aux points F1 et F3 permet de déterminer l'énergie disponible tandis que les enthalpies de l'eau aux points E1 et E4 permettent de déterminer le débit de vapeur pouvant être généré dans cette chaudière.

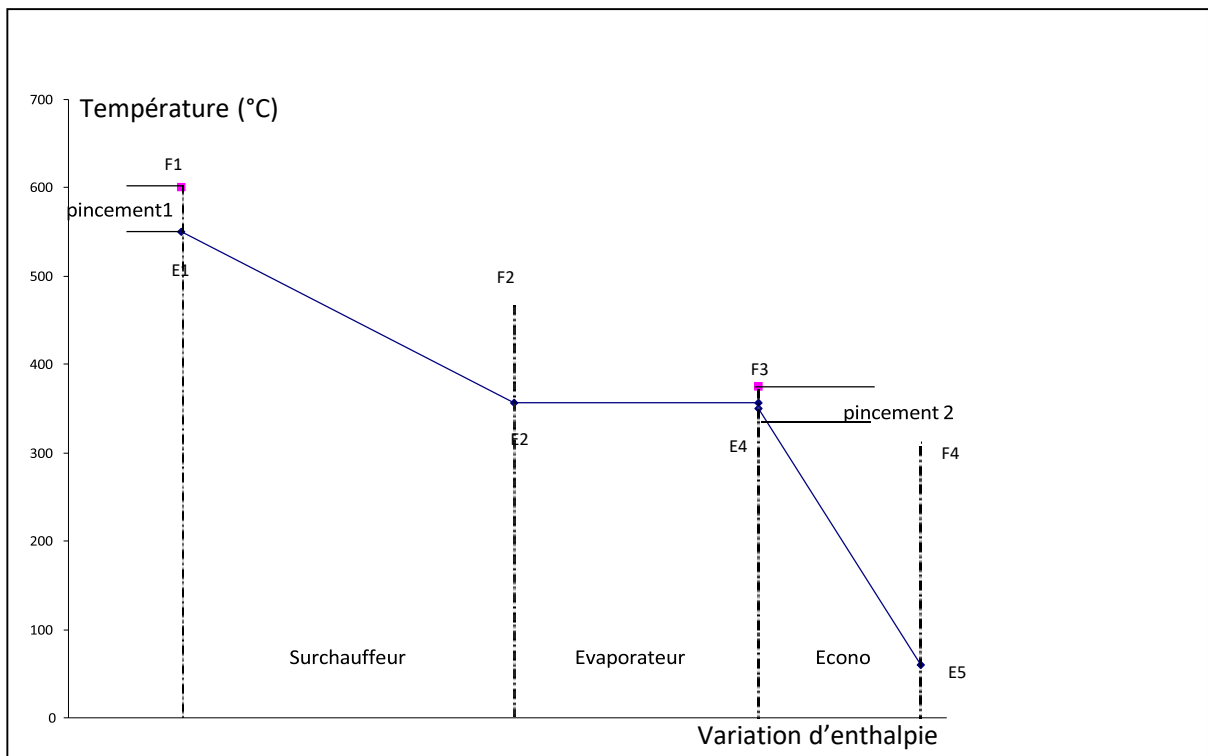


Figure II-7: Évolution des températures dans une chaudière à contre-courant

Par définition, l'échange de chaleur est réversible lorsque les courbes de température se superposent. En pratique, c'est impossible car même en imaginant des surfaces d'échange infinies, il subsisterait un palier pour la vaporisation de l'eau. On peut visualiser les irréversibilités du procédé en représentant l'évolution de la variation d'enthalpie en fonction

CHAPITRE 02

du facteur de Carnot $\eta = T = T^0 = \frac{1}{T}$ Sur ce diagramme, l'aire comprise entre une courbe et l'horizontale à T_0 (15°C) représente l'exergie disponible. L'aire comprise entre la courbe de refroidissement de la fumée et la courbe d'échauffement de l'eau représente l'exergie perdue par échange irréversible. Les poches d'irréversibilité peuvent être réduites en effectuant la vaporisation à différents niveaux de pression. Le nombre de niveaux de pression restera cependant souvent limité à 3 pour garder une structure économiquement rentable.

A titre indicatif, nous allons évaluer les pertes exergétiques dans une chaudière à un seul niveau de pression (180 bar) et les comparer aux pertes dans une chaudière à deux niveaux de pressions (15 bar et 180 bar). La composition des fumées est la suivante :

Composition des fumées (%poids)	
O2	16.92
N2	75.53
CO2	3.61
H2O	2.7
Ar	1.24

Les données thermodynamiques sont calculées à partir du modèle IAPWS (Wagner W. 1998) pour l'eau et PTC4 (ANSI/ASME 1981) pour les fumées.

II-4-1-Chaudière 1P (180 bar)

Pour pouvoir produire 1 kg de vapeur HP surchauffée à 540°C, en acceptant un point de pincement de 18°C à l'évaporateur il faut 6.69 kg de fumées à 600°C. Ces fumées ressortent à la cheminée à 151°C. Les profils de température sont représentés à la Figure

CHAPITRE 02

<u>Eau(180 bar)</u>				<u>Fumée</u>		
<u>T (°C)</u>	<u>état</u>	<u>H(kJ/kg)</u>	<u>S (kJ/K/kg)</u>	<u>T (°C)</u>	<u>H(kJ/kg)</u>	<u>S (kJ/K/kg)</u>
15	liquide	80.05	0.22146	151	128.37	0.58875
357	liquide	1732	3.85221	600	622.76	1.3688
357	vapeur	2509	5.10579			
540	vapeur	3389.5	6.3733			

En fixant $T_0=288.15$ K, on calcule :

- l'exergie perdue par la fumée : $E_1 = \Delta H - T_0 \Delta S = 1804.8$ kJ
- l'exergie reçue par l'eau : $E_2 = 1536.8$ kJ

On en déduit la perte d'exergie due à l'irréversibilité de l'échange

$$\Delta E = E_1 - E_2 = 268 \text{ kJ, soit } 14.8\% \text{ de } E_1$$

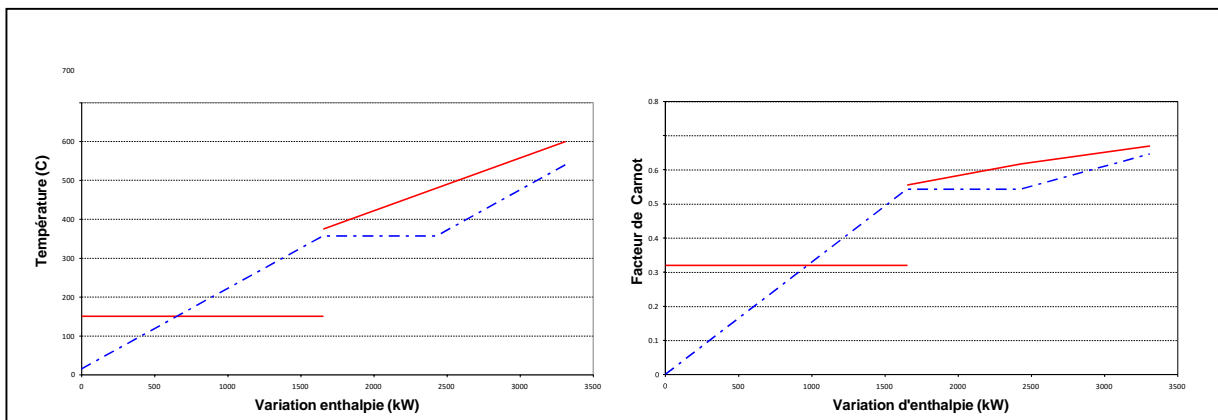


Figure II-8: Chaudière à 1 niveau de pression

L'analyse de la Figure II-8 (facteur de Carnot en ordonnée) montre qu'on pourrait réduire les pertes en insérant la production d'une nouvelle quantité de vapeur sous la température de saturation de la vapeur HP. Cette vapeur doit donc être à une pression inférieure et peut être surchauffée jusque $T < T^{\text{sat,HP}}$.

II-4-2-Chaudière 2P (180 bar et 15 bar)

L'ajout d'un second niveau de pression permet de diminuer la température des fumées à la cheminée à 100°C (la température à la cheminée ne peut pas être trop basse pour éviter tout

CHAPITRE 02

risque de condensation acide, source de dégradation dans la cheminée). On voit qu'un second point de pincement apparaît au vaporiseur BP.

<u>Eau(15 bar)</u>			
T (°C)	état	H(kJ/kg)	S (kJ/K/kg)
15	liquide	64.41	0.22424
198	liquide	844.71	2.31466
198	vapeur	2790.99	6.443
330	vapeur	3104.39	7.03233

<u>Fumée</u>		
T (°C)	H(kJ/kg)	S (kJ/K/kg)
100	76.46	0.45039
600	622.76	1.3688

En gardant une production de vapeur HP de 1kg ainsi qu'une quantité de fumée de 6.69 kg, on peut produire 0.114 kg de vapeur BP supplémentaire.

En fixant toujours $T_0=288.15$ K, on peut calculer l'exergie:

- pour la fumée : $E_1 = \Delta H - T_0\Delta S = 1885.4$ kJ
- pour l'eau: $E_2 = 1536.8$ kJ (HP) + 123.2 kJ (BP) = 1660 kJ

$$\Delta E = E_1 - E_2 =$$

225.4 kJ, soit
11.95% de E_1

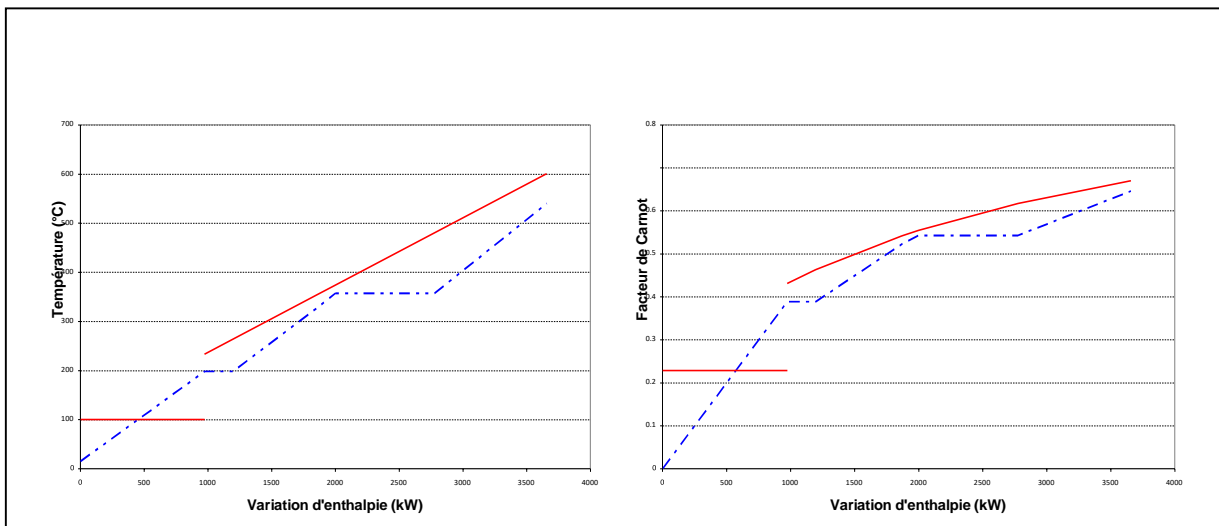


Figure II-9 : Chaudière à 2 niveaux de pression

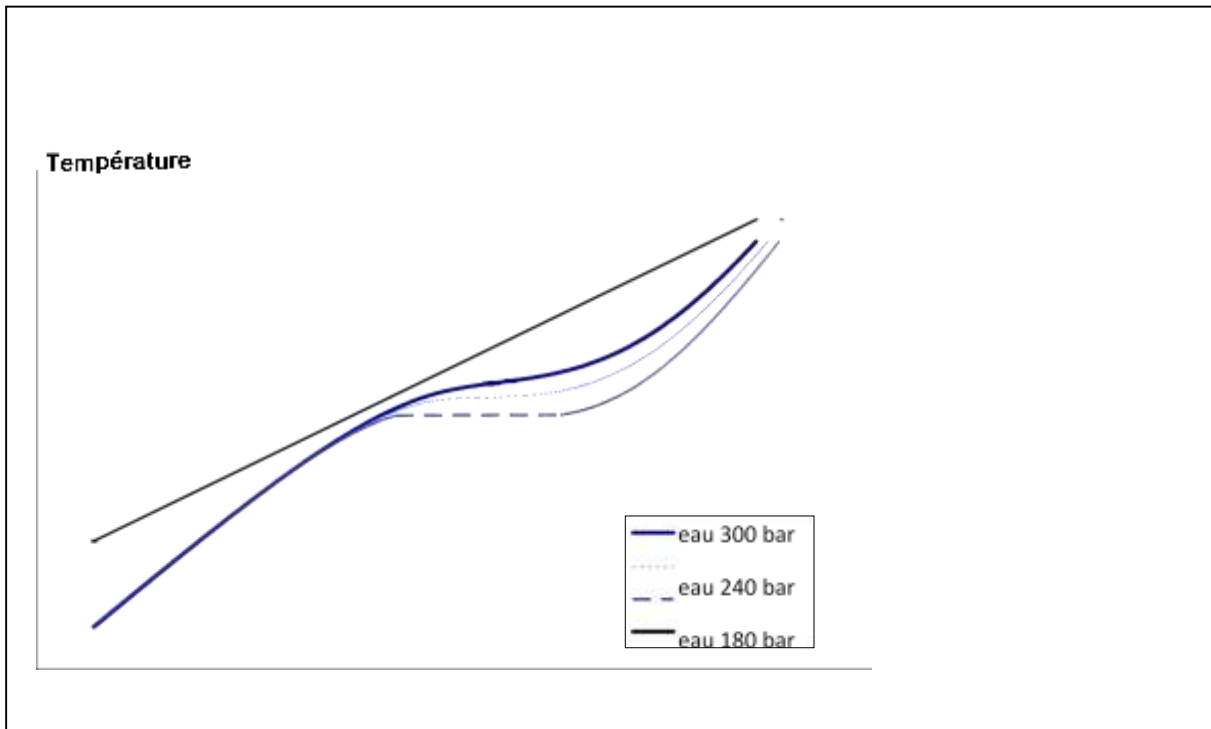


Figure I-10 : Évolution de la température de l'eau dans la chaudière en fonction de la pression

En ajoutant un niveau de pression on a donc réduit les pertes d'irréversibilité de presque 3%.

On peut également réduire les irréversibilités dans une chaudière de récupération en produisant de la vapeur supercritique ($P > 220.64$ bar). Le palier de vaporisation s'atténue et on constate une meilleure concordance entre les courbes des fluides chauds et froids.

En pratique, ce sont les irréversibilités de l'ensemble du cycle TGV qu'il faudra réduire, en ce compris les irréversibilités dues à la détente de la vapeur dans les turbines. Cela se fera notamment en ajoutant une resurchauffe de la vapeur à la sortie de la turbine haute pression.

II-6-Géométrie d'une chaudière de récupération verticale

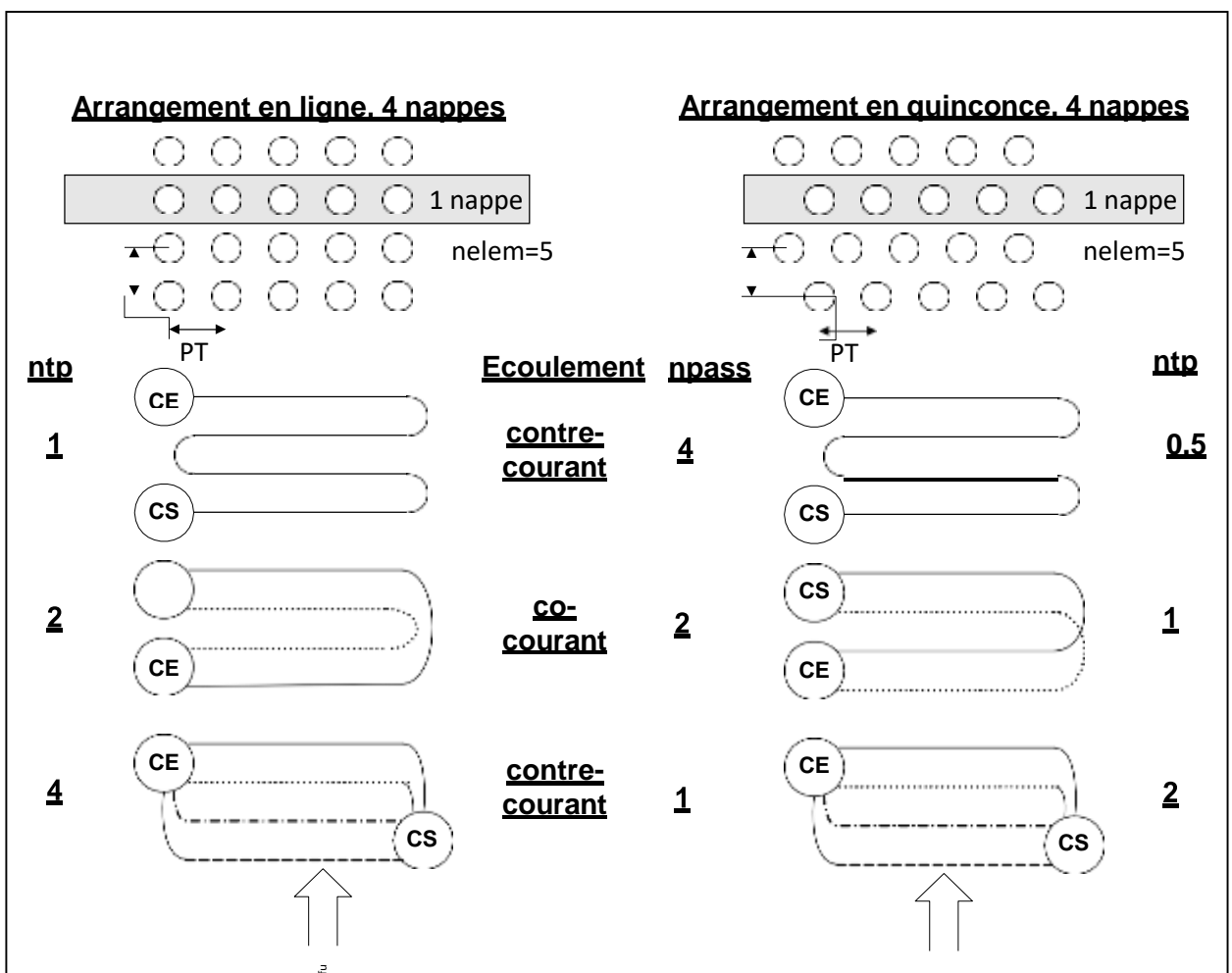
La chaudière verticale, quelle que soit sa configuration, est constituée de plusieurs échangeurs de chaleur. Ces échangeurs comprennent un collecteur d'entrée, une série de tubes (le plus souvent ailetés pour augmenter l'échange thermique) et un collecteur de sortie.

On définira complètement un élément de chaudière en donnant:

- la direction d'écoulement de l'eau par rapport aux fumées : co-courant ou contre-courant. Pour être exact, il faudrait parler de courant croisé puisque les fumées s'écoulent perpendiculairement aux tubes. On parlera cependant de contre-courant lorsque les

fumées rencontrent d'abord les tubes issus du collecteur de sortie (CS) de l'élément et de co-courant lorsqu'elles rencontrent d'abord le collecteur d'entrée (CE);

- le nombre de nappes de tubes ($nrow$), une nappe étant l'ensemble des tubes situés dans un même plan et disposés perpendiculairement à la direction des fumées;
- le nombre de tubes dans une nappe ($nelem$);
- l'arrangement des tubes : en file ou en quinconce ;



FigureII-11 : Géométrie de la chaudière de récupération

le nombre de passes de tubes ($npass$), le nombre de passes indique dans combien de nappes le fluide froid circule lors de son passage d'un collecteur à l'autre;

le nombre de tubes en parallèle (ntp), c'est-à-dire le nombre de tubes faisant partie de la même passe et situés dans le même plan vertical. Il faut remarquer que le calcul du nombre de tubes en parallèle n'est pas identique selon l'arrangement des tubes dans le faisceau.

Le cycle TGV

Aujourd'hui, les nouvelles centrales pour la production d'électricité sont fréquemment de type TGV (cycle combiné ou centrale turbine gaz/vapeur). Ce sont des cycles qui, comme leur nom l'indique, combinent une turbine gaz avec une turbine à vapeur (à condensation). La température élevée des fumées à la sortie de la turbine à gaz permet de vaporiser et surchauffer l'eau entrant dans le cycle vapeur. La chaudière de récupération constitue physiquement l'interface entre la turbine à gaz et la turbine à vapeur.

Chaque chaudière est unique. Elle est directement tributaire des performances et contraintes de la TAG, ainsi que du cycle vapeur choisi par les concepteurs de la centrale. Le choix final est fait en évaluant le rapport coût/bénéfice des différentes possibilités. La solution à trois niveaux de pression est plus intéressante du point de vue énergétique mais représente un investissement supplémentaire par rapport à celle à deux niveaux de pression étant donné la présence d'un évaporateur supplémentaire qui est un appareil assez coûteux. Il y a donc un compromis à trouver.

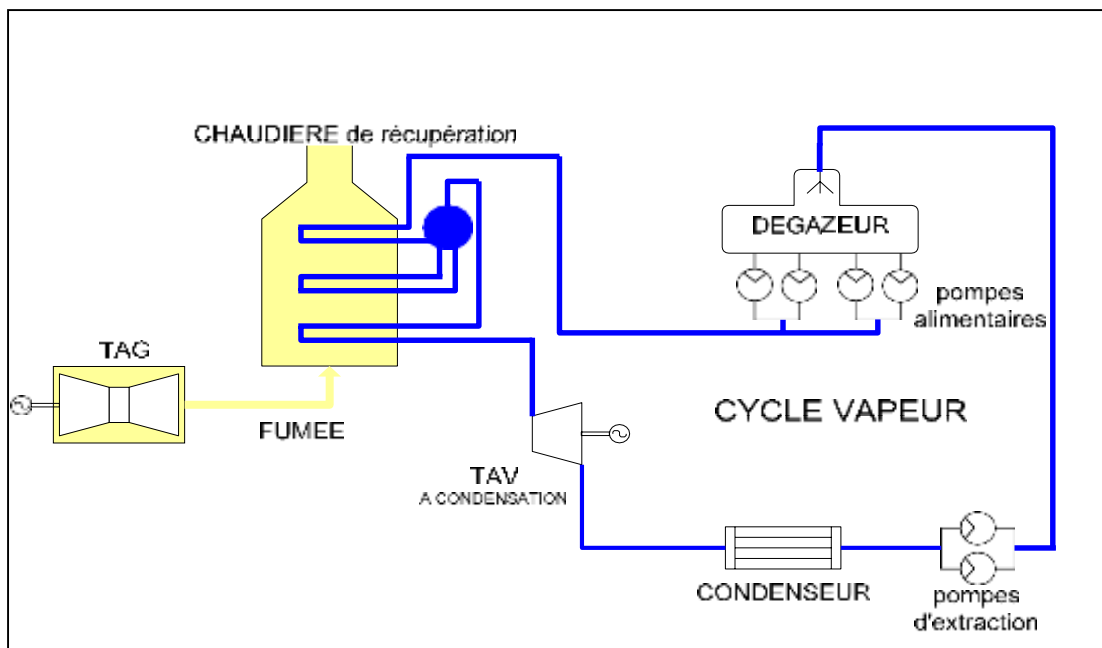


Figure II-12 : Exemple de cycle combi

Le rendement d'une centrale classique est compris entre 38% et 45% selon la taille de l'installation et le nombre de soutirages vapeur. Le rendement des turbines à gaz, qui influence directement la rentabilité de la production d'électricité, se situe entre 35% et 40%, l'émission de CO₂ étant moins de la moitié de l'émission d'une centrale à charbon classique de puissance équivalente. Dans une centrale TGV, les rendements des turbines gaz et vapeur ne sont pas aussi élevés que dans les cycles simples, mais leur combinaison donne tout de même un rendement d'environ 55 %. La baisse du rendement du cycle vapeur est due à la moins bonne qualité de la vapeur (produite dans une chaudière de récupération à la place d'un générateur de vapeur où les fumées sont plus chaudes) ainsi qu'à la simplification du cycle vapeur (suppression de nombreux soutirages intermédiaires lors de la détente de la vapeur) Quant à la baisse du rendement de la turbine à gaz, elle est due à la haute température des gaz en fin de détente, nécessaire pour assurer un échange thermique suffisant dans la chaudière de récupération et à la contrepression induite par la chaudière.

Dans la chaudière de récupération d'un cycle combiné, l'échange de chaleur se fait principalement par convection, contrairement au transfert de chaleur dans un générateur de vapeur de centrale thermique classique qui se fait non seulement par convection mais surtout par rayonnement.

II-7La cogénération

La cogénération consiste à produire de la vapeur nécessaire à un processus industriel en utilisant les gaz d'échappement d'une turbine ou d'un moteur à gaz, en lieu et place d'une chaudière classique comme on en rencontre sur la plupart des sites industriels. Dans son principe, une cogénération au gaz est un cycle combiné (TGV) où on a supprimé la turbine à vapeur (voir Figure II-14).

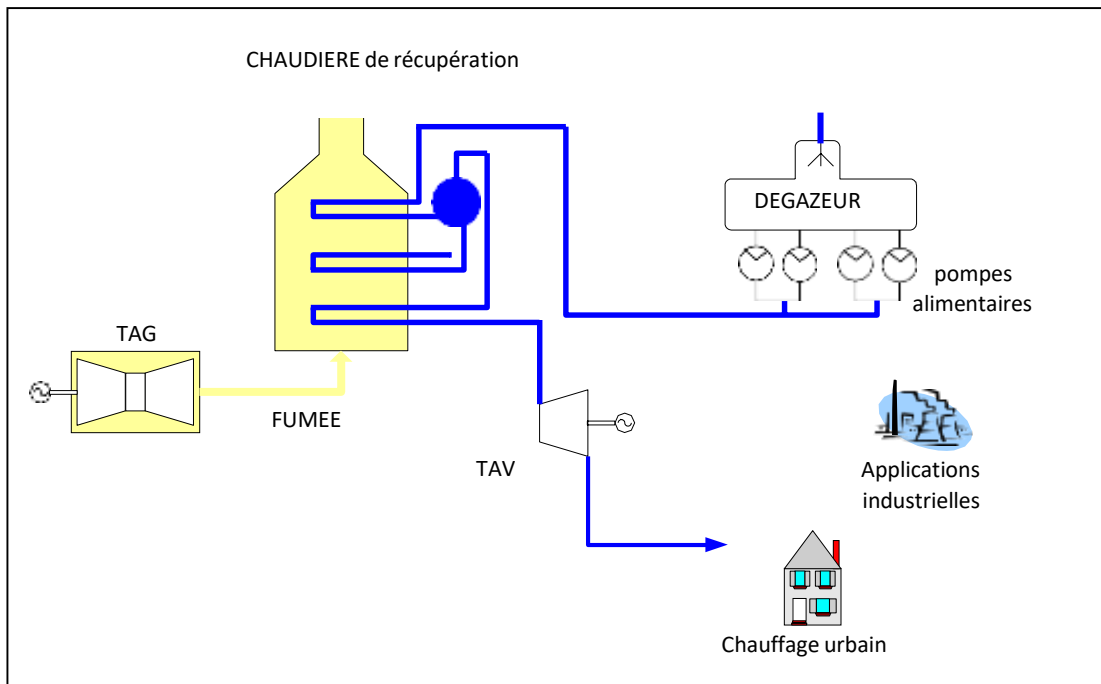


Figure I-13: Exemple de production combinée chaleur-force

La cogénération a du sens sur le plan énergétique uniquement si la chaleur produite est utilisée à bon escient. Si on ne valorise pas la chaleur produite par une installation de cogénération, on obtient une unité de production d'électricité avec un rendement inférieur à celui des centrales TGV actuelles.

En cogénération, la chaudière de récupération est l'interface entre la turbine à gaz et le consommateur de chaleur.

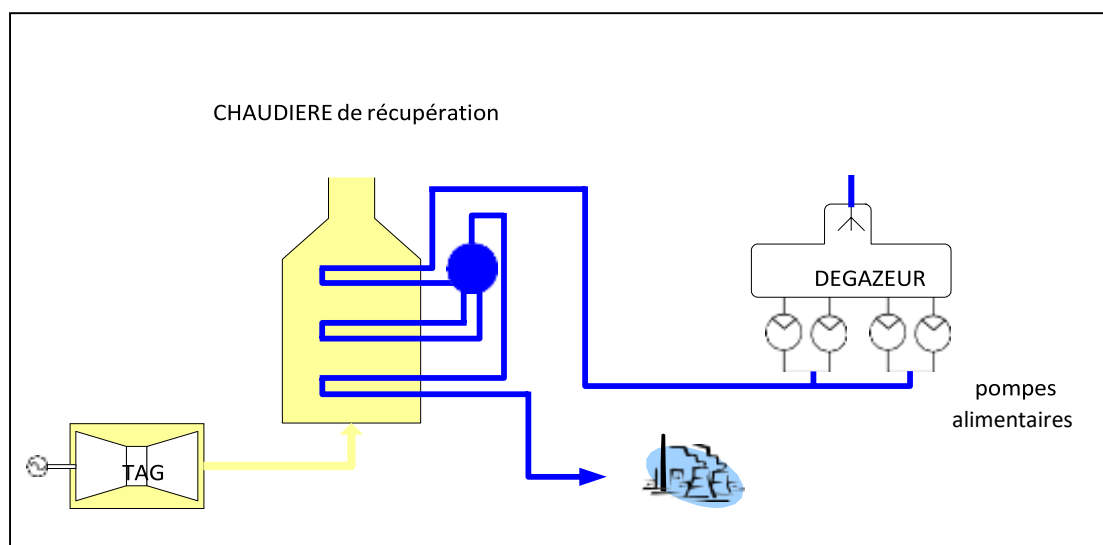


Figure II-14 : Exemple de cogénér

Un cycle combiné dont on soutire une partie de la vapeur de la turbine à vapeur peut aussi être considéré comme de la cogénération, on parlera également de production combinée chaleur-force. Dans ce cas, la turbine à vapeur sera à contre-pression car la vapeur à la sortie de la turbine n'est pas condensée mais déviée vers un réseau vapeur en vue d'application thermique industrielle ou urbaine (chauffage urbain) (voir Figure II-13). Auparavant, on pouvait également rencontrer ces unités de chauffage urbain sans TAG (par exemple dans l'unité qui était exploitée par INTERVAPEUR à Verviers)

II-8-Le repowering

Le repowering se présente comme une manière efficace d'améliorer les performances d'une centrale classique existante (cycle à vapeur seul) en y greffant un cycle gaz. On obtient donc un cycle combiné (TGV) dont le rendement est bien plus élevé que le rendement d'une centrale classique tout en profitant des installations existantes (turbine à vapeur, condenseur, tour de refroidissement,...). Le coût du repowering est donc modéré comparé au coût d'une installation TGV neuve. Lors d'un repowering, la chaudière à combustion est remplacée par une chaudière de récupération puisqu'il s'agit d'utiliser l'enthalpie disponible à la sortie de la turbine à gaz en lieu et place du générateur de vapeur.

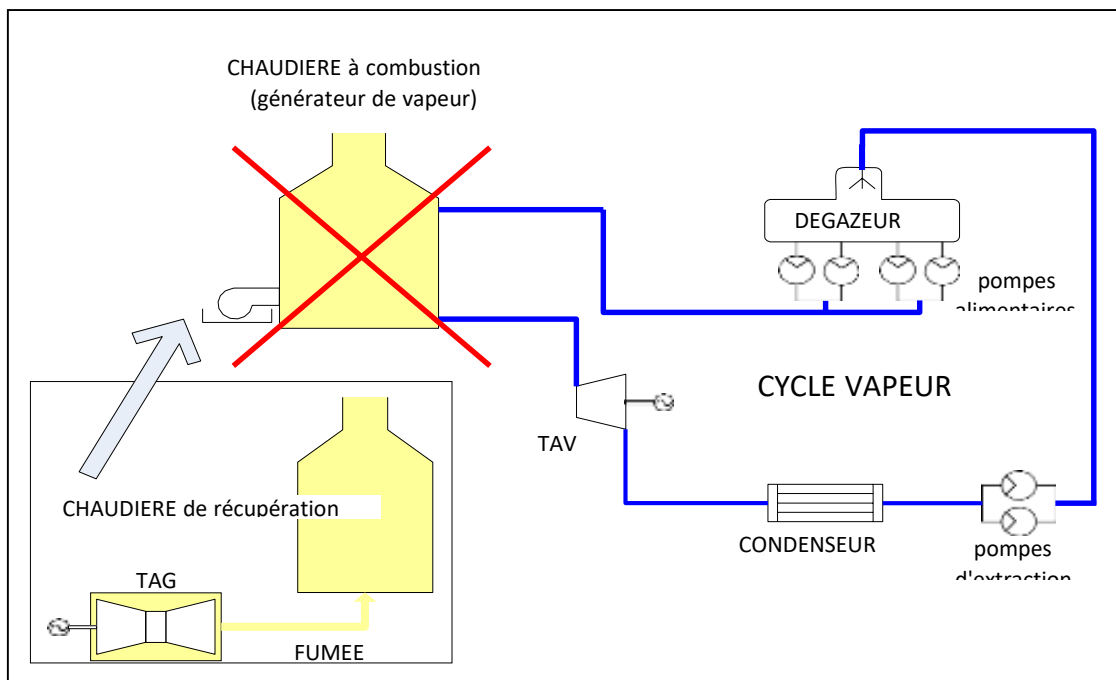


Figure II-15 : Exemple de repowering

Certains schémas envisagent d'utiliser l'effluent d'une TAG comme comburant préchauffé pour une chaudière à combustion classique, qui devient alors une unité de postcombustion. Cette alternative ne permet plus d'utiliser de préchauffeur d'air. Elle se complète bien par une installation de chauffage urbain, où la chaleur à bas potentiel qui serait utilisée par le préchauffeur d'air classique, peut être employée pour la production d'eau chaude.

II-9-Capacités du marché

Deux paramètres importants interviennent dans le marché des chaudières de récupération : la consommation électrique augmente ;

les accords de Kyoto, qui engagent les pays signataires à réduire leurs émissions de gaz à effet de serre.

Puisque la consommation électrique croît, le parc électrique va devoir être agrandi. En Belgique, il va peut-être falloir remplacer les centrales nucléaires qui devraient être progressivement arrêtées à l'horizon 2015. Pour des raisons essentiellement économiques, les cycles présentant les meilleurs rendements seront choisis. Il s'agit des cycles TGV pour la production centralisée d'électricité tandis que la cogénération apparaît comme une solution alternative économiquement intéressante à la production centralisée, pourvu bien entendu qu'il existe des besoins de chaleur à proximité. La production d'électricité à partir des énergies renouvelables serait écologiquement plus intéressante, mais elles ne peuvent en aucun cas assurer la production de base de l'électricité en Belgique.

Afin de réduire les émissions de gaz à effet de serre, les centrales thermiques classiques au charbon, grandes productrices de ce type de gaz, devront être adaptées. La dépollution poussée des fumées est une solution fort coûteuse. Le repowering ou le remplacement des centrales par des TGV pourraient être envisagés, mais ces solutions impliquent une modification du combustible, ce qui n'est pas toujours possible. La centrale IGCC est une centrale à cycle combiné qui, au lieu de brûler du gaz naturel, brûle du gaz de synthèse ($\text{CO} + \text{H}_2$). Celui-ci est obtenu à partir de la gazéification du charbon. Le gaz brut issu du gazéifieur est composé d'un certain nombre de constituants polluants qui doivent être éliminés avant l'admission du gaz dans la turbine

à gaz. L'IGCC permet donc de garder le charbon comme combustible tout réduisant fortement la pollution atmosphérique.

Quelle que soit la technologie choisie, une chaudière de récupération sera nécessaire à l'arrière de la turbine à gaz.

C'est dans ce contexte que le sujet de cette thèse a été choisi. Une meilleure maîtrise de la modélisation interne des chaudières (maîtrise du processus de dimensionnement des surfaces d'échange pour des échanges thermiques non-standards : circulation forcée, super critique, etc) est nécessaire. Elle permet une meilleure prédiction des performances de la chaudière ainsi qu'une meilleure prédiction des données mécaniques de conception (P_{design} , T_{design}). La chaudière pourra ainsi profiter de façon optimale de l'enthalpie des fumées de la turbine à gaz pour produire de la vapeur de bonne « qualité » pour le cycle à vapeur. Cela optimisera également le rendement global du cycle.

Introduction

Lorsque deux systèmes sont à des températures différentes, le système le plus chaud cède de la chaleur au plus froid. Il y a échange thermique ou encore transfert thermique entre ces deux systèmes. Cette situation se rencontre dans de nombreuses situations industrielles (moteurs thermiques ou domestique (chauffage de l'habitat)). Un transfert d'énergie donne lieu à un flux de chaleur qui correspond à un déplacement de l'énergie du plus chaud vers le plus froid. Comme on le verra par la suite, le flux de chaleur dont la densité locale est notée $\sim \varphi$ est une grandeur vectorielle, ce qui signifie qu'un flux de chaleur est caractérisé non seulement par son intensité mais aussi par sa direction. Il est défini en chaque point de l'espace et a l'unité d'une densité surfacique de puissance (W/m^2). Il existe trois modes essentiels de transferts de chaleur: la conduction, le rayonnement et la convection.

III-1-Définition

Le sens du toucher permet de classer les corps suivant leur température, mais ce simple repérage est imprécis et ne permet pas de chasser les corps très chauds ou très froids, les physiciens ont d'abord simplement appris à repérer la température avec des thermomètres faisant intervenir la variation d'une grandeur avec la température (par exemple la dilatation d'un liquide) puis grâce aux progrès de la thermodynamique, ils ont réussi à faire de la température une grandeur mesurable.

A l'échelle macroscopique, un transfert thermique s'effectue toujours du corps chaud vers le corps froid.

On distingue trois modes de transfert thermique: par conduction, par convection et par rayonnement.

III-1-1-Conduction thermique

L'écoulement de la chaleur se passe à l'intérieur d'un milieu qui peut être solide, liquide ou gazeux. Les molécules du milieu transfèrent l'énergie entre eux sans déplacement important, ainsi le mode de transfert se fait à travers un support matériel fixe.

Dans les liquides, le transfert de l'énergie se fait entre une région voisine où les molécules possèdent une énergie cinématique moyenne inférieure. Dans le cas des métaux, ce transfert se fait par diffusion d'électrons.

III-1-2-Convection thermique

C'est un processus complexe de transfert d'énergie entre une surface solide et un fluide, le processus combine la conduction, l'accumulation de l'énergie et le mouvement du milieu. Il existe deux types de convection: libre (naturelle) et forcée

III-1-3-Rayonnement thermique

C'est un processus dû au phénomène d'ondes électromagnétiques. Il s'effectue dans l'univers (dans la vie) entre deux corps à des températures différentes. L'énergie transférée est appelée chaleur

rayonnée, elle augmente avec la température du corps extérieur.

III-1-4-Combinaison des différents modes de transfert

Ci-dessus nous avons considéré séparément les trois modes de base des échanges thermiques. Dans la réalité, les différents modes sont le plus souvent intimement liés: conduction et rayonnement dans le cas de solides non opaques (verres, matières plastiques,) ou encore conduction, convection et rayonnement dans les fluides.

Compte tenu des diverses remarques ci-dessus, on conçoit aisément que la résolution des problèmes de transfert thermique passe d'abord par une bonne connaissance des processus d'échanges élémentaires.

III-2-Les équations du transfert thermique

Toute étude technique significative exige une réponse chiffrée. Pour réaliser une telle étude des problèmes de transmission de chaleur, on doit examiner les lois physiques et les relations régissant les différents mécanismes de l'écoulement de chaleur.

a- Conduction

La relation fondamentale de la transmission de chaleur par conduction, établit que le flux de chaleur par conduction transmis dans le matériau, est égale au produit de trois quantités:

k : la conductivité thermique

A : l'aire de la section à travers laquelle s'écoule la chaleur par conduction, cette section étant mesurée perpendiculairement à la direction du flux thermique.

$\frac{dT}{dx}$: le gradient de température dans la section, c'est-à-dire le rapport de la variation de température T à la distance x parcourue par le flux thermique.

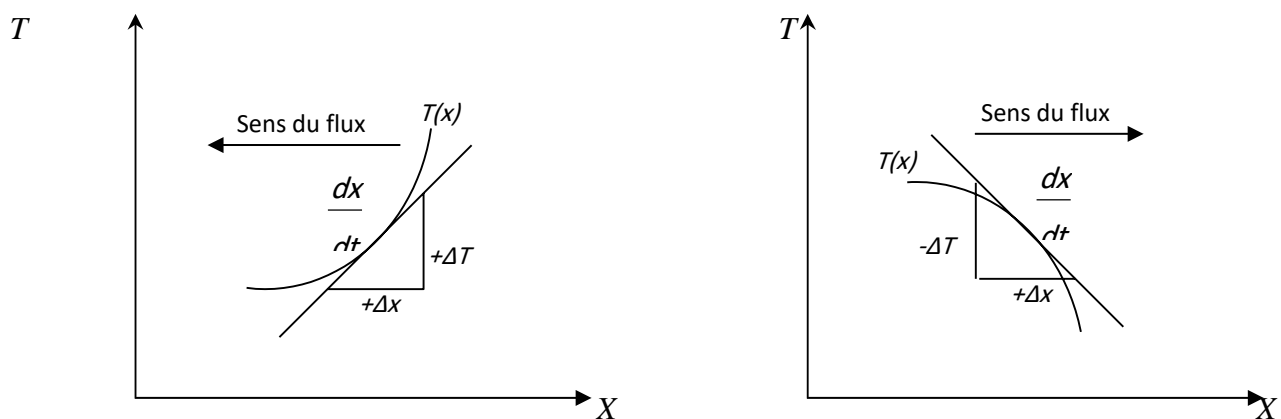


Fig.3.1. Schéma indiquant le sens du flux

Pour écrire l'équation de la conduction de chaleur sous forme mathématique, nous devons adopter un signe conventionnel. Nous considérerons que le sens des (x) croissant serait dans le sens positif de l'écoulement de chaleur. En outre, comme le deuxième principe de la thermodynamique implique nécessairement, que la chaleur s'écoule des points les plus chauds vers les points les plus froids, le flux serait donc positif lorsque le gradient de température est négatif.

En conséquence, l'équation élémentaire de la conduction unidimensionnelle en régime stationnaire s'écrit:

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx} \quad (\text{III.1})$$

Proposée par J. B. FOURIER en 1822.

Pour l'uniformité de l'équation, le flux de chaleur, q_x est exprimé en $kcal/h$ et l'aire A en m^2 .

$\frac{dT}{dx}$, le gradient de température est exprimé en $^{\circ}C/m$ et k , la conductivité du matériau, indique la quantité de chaleur qui traverse une surface d'aire unité si le gradient de température est égale à l'unité. L'unité de k est $kcal/hm^{\circ}C$.

En général, la conductivité thermique k varie avec la température, cependant dans beaucoup de problèmes pratiques, cette variation est suffisamment faible pour qu'elle soit négligée.

b- Convection

Le flux de chaleur transmise par convection entre une surface et un fluide peut être évalué par la relation:

$$Q_c = h_c \cdot A \cdot dT \quad (\text{III. 2})$$

Relation proposée par I. NEWTON en 1701, dans laquelle:

- q_c : flux de chaleur par convection.
- A : aire de surface de transmission de chaleur.
- dT : différence de température entre la surface T_s et celle du fluide T_{∞} loin de la surface S .
- h_c : unité de conductance thermique moyenne de convection superficielle de transmission de chaleur.

Il est utile de signaler que la valeur numérique de h_c , dans un système, dépend de la forme géométrique de la surface, de la vitesse et également des propriétés physiques du fluide, et souvent même de la différence de température dT . En fait, ces quantités ne sont pas nécessairement constantes à la surface. Aussi le coefficient d'échange de chaleur par convection peut varier d'un point à un autre.

c- Rayonnement

La quantité d'énergie quittant une surface sous forme de chaleur rayonnée dépend de la température absolue et de la nature de la surface d'un corps noir ou d'un radiateur. Elle est donnée par:

$$q_r = \sigma \cdot A \cdot T^4 \quad (\text{III. 3})$$

Cette équation a été établie expérimentalement par J. STEPHAN en 1879 et démontrée théoriquement par L. BOLTZMAN en 1884.

Avec:

A : aire de surface en m^2

T : température absolue en degré Kelvin

σ : constante de STEPHAN-BOLTZMANN dont la valeur avec les unités choisies, est $4,88.10^{-8} \text{ kcal/hm}^2\text{°K}^4$.

L'examen de cette dernière équation montre que la quantité de chaleur transmise par rayonnement à partir d'un corps noir dont la surface est portée à la température supérieure au zéro absolu est proportionnelle à la quatrième puissance de la température absolue. Alors que l'intensité de rayonnement est indépendante des conditions du milieu environnant, un transfert effectif de la chaleur rayonnée nécessite une différence de température superficielle entre deux corps qui échangent de la chaleur. Si le corps noir est entouré d'une enceinte dont la surface également noire, c'est-à-dire qu'elle absorbe toute l'énergie de rayonnement incident, la quantité de chaleur effective transmise par rayonnement est donnée par:

$$q_r = \sigma . A (T_1^4 - T_2^4) \quad (\text{III. 4})$$

Où T_2 est la température superficielle de l'enceinte en degrés centésimaux absolus.

Les solides réels émettent une intensité de rayonnement plus faible que celle des corps noirs. Les solides sont appelés corps gris s'ils émettent une fraction de l'intensité de rayonnement du corps noir à la même longueur d'onde et à la même température.

La quantité de chaleur effective transmise d'un corps gris à la température T_1 à un corps noir à T_2 entourant le premier est:

$$q_r = \sigma . \epsilon . A (T_1^4 - T_2^4) \quad (\text{III. 5})$$

Où ε est le facteur d'émission de la surface grise, égale au rapport de l'intensité rayonnée par le corps à celle émise par le corps noir à la même température.

d- Energie générée à l'intérieur du solide

A coté des énergies qui passent à travers le corps, il y a aussi l'énergie générée à l'intérieur du solide par les sources chimiques, électriques, nucléaires, et qui est transformée en énergie thermique. Cette énergie est donnée par:

$$E_{deg} = qV \quad (\text{III. 6})$$

Où:

E_{deg} : énergie dégagée

q : est le flux de chaleur généré par unité de temps et de volume

V : est le volume du corps.

e- Energie emmagasinée

Une partie de l'énergie qui passe à travers les solides peut être emmagasinée sous forme de variation d'énergie interne du solide. Ce phénomène est décrit par:

$$E_{ci} = \rho.c.V \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{III. 7})$$

Où ρ est la densité du solide et e sa chaleur spécifique.

III-3-Etablissement de l'équation différentielle

Avant d'entreprendre l'étude des problèmes particuliers, nous allons établir l'équation différentielle définissant la répartition des températures dans un corps, ensuite à l'aide de certaines hypothèses, nous transformerons cette équation après l'avoir simplifiée afin de la mettre sous des formes appropriées aux cas qui font l'objet de cette étude.

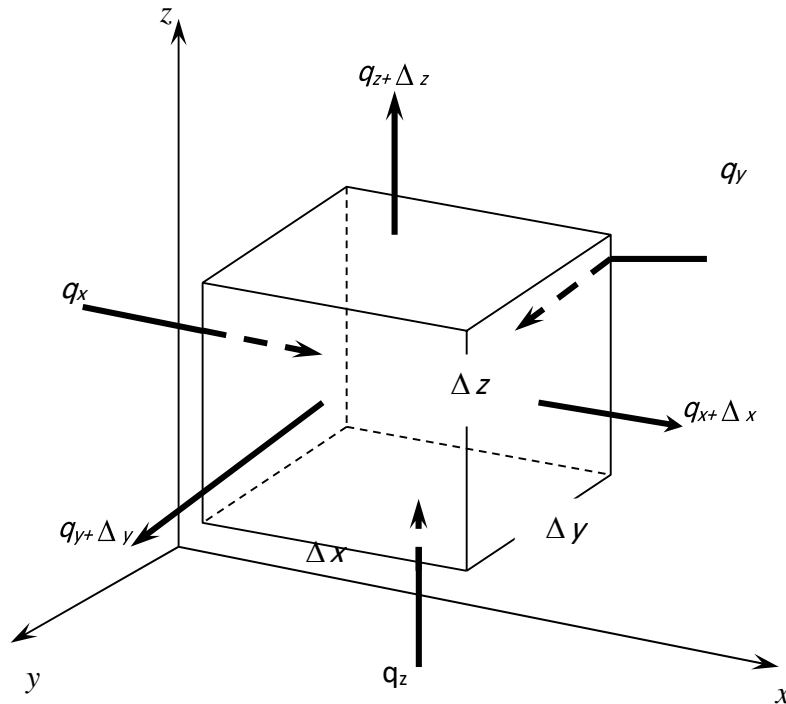


Fig. III-2 Schéma indiquant les notions pour l'établissement de l'équation différentielle de conduction en coordonnées cartésiennes .

Considérons un petit parallélépipède, découpé dans un corps de côté dx , dy , dz . L'équation définissant la répartition de température s'obtient en décrivant le principe de la conservation de l'énergie pour l'élément considéré pendant un temps dt .

Le bilan des énergies s'écrit littéralement, sous la forme:

<i>Chaleur qui entre pendant dt</i>	+	<i>Chaleur dégagée dans la masse par des sources internes pendant dt</i>	=	<i>Chaleur qui sort pendant dt</i>	+	<i>Chaleur due à la variation de l'énergie interne pendant dt</i>
-------------------------------------	---	--	---	------------------------------------	---	---

$$E_{in} + E_{deg} = E_{sort} + E_{ei}$$

$$(q_x + q_y + q_z)dt + q(d_x d_y d_z)dt = (q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz})dt + c.\rho dT(dx dy dz) \quad (\text{III.8})$$

Où:

dt: est la variation du temps

qx, qy, qz: flux de chaleur qui entrent comme

indiqué sur la fig. III-2

qx+dx, qy+dy, qz+dz: flux de chaleur qui

sortent des faces comme indiqué sur la figure.

c: chaleur spécifique du matériau

ρ : densité du corps

T: est la fonction de x, y, z et du temps

t; $T=f(x, y, z, t)$

L'équation générale de conduction dans un système de coordonnées cylindriques s'écrit:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{III. 19})$$

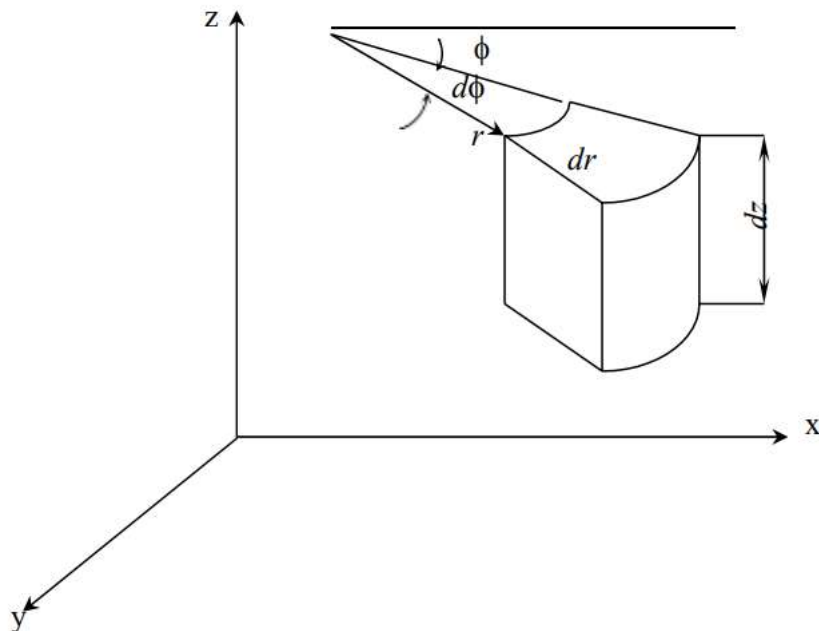


Fig. I-3 Système de coordonnées cylindriques

L'équation générale de la conduction dans un système de coordonnées sphériques s'écrit:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{III.5})$$

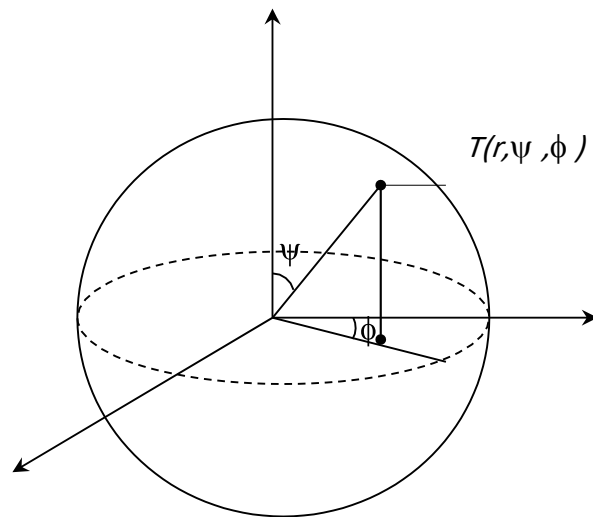


Fig. III-4 Système de coordonnées sphériques

III-4- Conditions aux limites

La solution analytique d'un problème de conduction en régime permanent s'exprime par une certaine fonction $T(x, y, z, t)$ représentant la température qui devra satisfaire à l'équation différentielle propre du problème. Cette équation différentielle ne fait qu'exprimer comment les variations de température se font dans l'espace et le temps, mais pour que le phénomène soit décrit complètement, il faut que la solution trouvée satisfait aussi aux conditions aux limites (spatiales et temporelles).

a- Conditions initiales

Elles expriment dans les problèmes en régime non-permanent, la distribution spatiale des températures à un instant donné, le plus souvent pris comme origine de temps:

$$T(x, y, z, 0) = f(x, y, z) \quad \text{à } t=0$$

b- Conditions aux limites spatiales

Elles expriment comment, à partir de l'instant zéro, variant sur les frontières du corps étudié, la température ou sa dérivée, ou encore une combinaison des deux.

b-1 Condition de Dirichlet ou du premier type

La distribution de la température à la surface frontière considérée est donnée en fonction du temps et pour tous les points de la surface:

$$T = f_1(x, y, z, t) \quad (\text{III. 12})$$

Souvent, on aura affaire à l'un des cas particuliers, où la température en surface ne dépend que de la position du point:

$$T = f_1(x, y, z) \quad (\text{III. 13})$$

Où du temps seulement, où cette température est constante dans le temps et uniforme sur la surface, c'est-à-dire une constante dans le sens mathématique du mot

b-2 Condition de Neumann ou du deuxième type

On impose la densité de flux à la surface, pour tous les points de la surface et en fonction du temps:

$$\frac{q}{A} = -k \frac{\partial T}{\partial x} = f_2(x, y, z, t) \quad (\text{III. 14})$$

b-3 Condition de Fourier ou du troisième type

On impose au fluide ambiant une température T_∞ , très loin et en outre un coefficient de convection h pour l'échange entre la paroi ($x=L$ par exemple) et le fluide. La condition s'exprimera par:

$$k \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = h[T(L, t) - T_\infty(t)] \quad (\text{I. 24})$$

Souvent, la température T_s de la surface n'est pas connue et comme h dépend de T_s , T_∞ , la vitesse,.....etc., on aura fréquemment recours aux approximations successives.

La formule la plus générale de la conduction de FOURIER sur la frontière s'écrit:

$$h(T) + k \frac{\partial T}{\partial n} = hT_\infty = f_3(x, y, z, t) \quad (\text{I. 25})$$

Où $\frac{\partial T}{\partial n}$ est la dérivée effectuée le long de la normale extérieure à la surface.

Lorsque la résolution analytique d'un système d'équations différentielles devient difficile, les méthodes numériques et analogiques fournissent les réponses nécessaires.

A présent deux grandes approches numériques sont utilisées dans la résolution

des équations à dérivées partiales en transfert de chaleur ; la méthode des différences finies (MDF) et la méthode des éléments finis (MEF). Chaque méthode à ces avantages qui dépendent de la nature du problème physique à résoudre. La méthode des différences finies est facile à formuler, peut être facilement étendue aux problèmes bidimensionnels et tridimensionnels. En plus avec l'arrivée de techniques du maillage automatique, la MDF est devenue comparable à la MEF.

Dans ce chapitre on va concentrer notre attention sur la solution numérique par la méthode des différences finies, outil extrêmement utilisé en transfert thermique pour résoudre des problèmes en régimes permanent et variable dans des corps à géométrie simple ou complexe avec des conditions aux limites non simples.

III-5-Méthode des différences finies

La méthode des différences finies est la méthode numérique la plus ancienne et fut la première utilisée pour résoudre des problèmes thermiques. Elle consiste à diviser le volume de l'espace où la solution est recherchée en un réseau de points espacés régulièrement ou irrégulièrement pour constituer ce que l'on appelle un maillage. La solution du problème est ensuite calculée en chaque point du maillage. L'approximation réside dans le remplacement de chaque dérivée de l'équation de **POISSON/LAPLACE** par une expression aux différences finies, exprimant la valeur de l'inconnue en un point en fonction de sa valeur aux points voisins (fig. III-1).

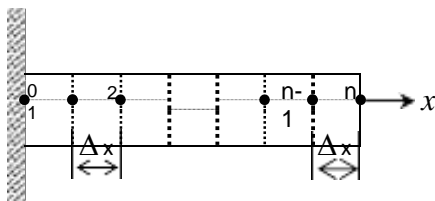


Fig. III.5.(a) Barre unidimensionnelle divisée en éléments de différences finies

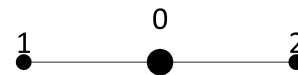


Fig. III.5.(b) Modèle de différences finies pour un système unidimensionnel

L'équilibre thermique permet d'écrire en 3-D :

$$\frac{T_{i-1,j,k}-T_{i,j,k}}{R_x(i-1,j,k)} + \frac{T_{i+1,j,k}-T_{i,j,k}}{R_x(i+1,j,k)} + \frac{T_{i,j-1,k}-T_{i,j,k}}{R_y(i,j-1,k)} + \frac{T_{i,j+1,k}-T_{i,j,k}}{R_y(i,j+1,k)} + \frac{T_{i,j,k-1}-T_{i,j,k}}{R_z(i,j,k-1)} + \frac{T_{i,j,k+1}-T_{i,j,k}}{R_z(i,j,k+1)} = 0 \quad (\text{III. 1})$$

$T_{i,j,k}$, $T_{i,j-1,k}$, $T_{i,j+1,k}$, $T_{i-1,j,k}$, $T_{i+1,j,k}$, $T_{i,j,k-1}$ et $T_{i,j,k+1}$: sont des températures des nœuds (i,j,k) , $(i,j-1,k)$, $(i,j+1,k)$, $(i-1,j,k)$, $(i+1,j,k)$, $(i,j,k-1)$ et $(i,j,k+1)$

$R_x(i-1,j,k)$ et $R_x(i+1,j,k)$: sont des résistances thermiques selon l'axe x .

$R_y(i,j-1,k)$ et $R_y(i,j+1,k)$: sont des résistances thermiques selon l'axe y .

$R_z(i,j,k-1)$ et $R_z(i,j,k+1)$: sont des résistances thermiques selon l'axe z .

L'équation (III. 1) représente le cas tridimensionnel, mais elle est adaptable aux géométries mono et bi-dimensionnelles.

III-5-1-Discrétisation de l'équation différentielle de la chaleur

Considérons un solide à trois dimensions (sans source de chaleur) et dont la température

$T(x, y, z)$ satisfait l'équation de LAPLACE.

$$\frac{\partial T}{\partial x^2} + \frac{\partial T}{\partial y^2} + \frac{\partial T}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{III.8})$$

Considérons un nœud intérieur $P(x, y, z)$ entouré par les points 1, 2, 3, 4, 5 et 6 dont les coordonnées sont indiquées sur la figure suivante:

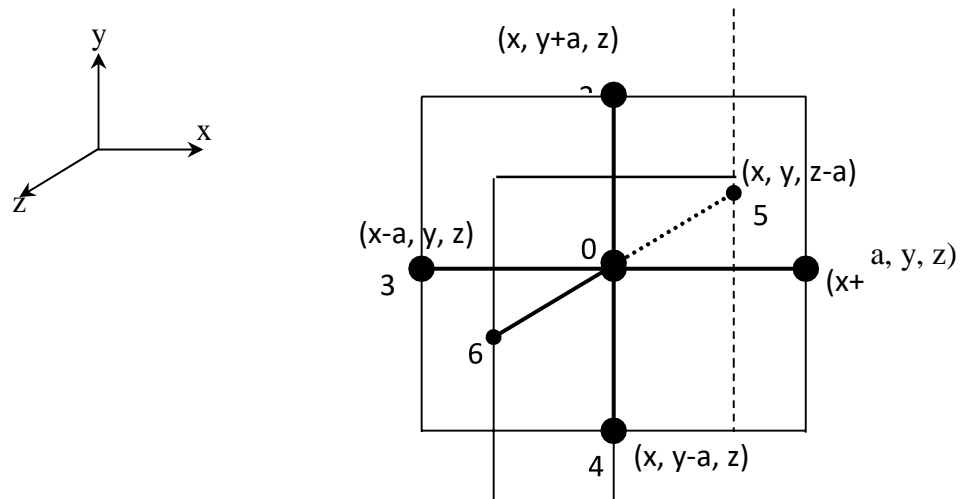


Fig. II. 2 Maillage de différences finies en trois dimensions

Exprimons au moyen de développement de Taylor les températures T_1 et T_3 en fonction de T_0 .

$$T_1 = T_0 + a \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_p + \frac{a^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_p + \frac{a^3}{3} \cdot \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right)_p + \dots$$

$$T_3 = T_0 + a \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_p - \frac{a^2}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_p + \frac{a^3}{3} \cdot \left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right)_p + \dots$$

En ajoutant membre à membre, on trouve:

$$T_1 + T_3 = 2T_0 + a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_p + O(a^4) \quad (\text{II. 3})$$

De même, on peut écrire un développement en série de Taylor pour T_2 et T_4 :

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_p = \frac{T_2 + T_4 - 2T_0}{a^2}$$

Et même chose pour T_5 et T_6 :

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)_p = \frac{T_5 + T_6 - 2T_0}{a^2}$$

Et même chose pour T_5 et T_6 :

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)_p = \frac{T_5 + T_6 - 2T_0}{a^2} \quad (\text{III. 6})$$

D'après les relations ci-dessus, on peut tirer facilement l'expression de T_0 en fonction des températures avoisinantes et ce selon le cas:

Cas unidimensionnel:

$$T_0 = \frac{T_1 + T_3}{2} \quad (\text{III. 13})$$

Cas bi-dimensionnel:

$$T_0 = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4}{4} \quad (\text{III. 14})$$

Cas tri-dimensionnel:

$$T_0 = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6}{6} \quad (\text{III. 15})$$

Ainsi l'approximation par des différences finies de l'équation (III. 12) devient:

$$\frac{T_{i+1,j,k} + T_{i-1,j,k} - 2T_{i,j,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1,k} + T_{i,j-1,k} - 2T_{i,j,k}}{(\Delta y)^2} + \frac{T_{i,j,k+1} + T_{i,j,k-1} - 2T_{i,j,k}}{(\Delta z)^2} = 0$$

Si $\Delta x = \Delta y = \Delta z$, alors

$$T_{i+1,j,k} + T_{i-1,j,k} + T_{i,j+1,k} + T_{i,j-1,k} + T_{i,j,k+1} + T_{i,j,k-1} - 6T_{i,j,k} = 0$$

Si, on tient compte d'une source de chaleur, on ajoute le terme $\frac{q}{k}$ dans

l'équation générale et on obtient:

$$\frac{T_{i+1,j,k} + T_{i-1,j,k} - 2T_{i,j,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1,k} + T_{i,j-1,k} - 2T_{i,j,k}}{(\Delta y)^2} + \frac{T_{i,j,k+1} + T_{i,j,k-1} - 2T_{i,j,k}}{(\Delta z)^2} + \frac{q}{k} = 0$$

Et pour $\Delta x = \Delta y = \Delta z$,

$$T_{i+1,j,k} + T_{i-1,j,k} + T_{i,j+1,k} + T_{i,j-1,k} + T_{i,j,k+1} + T_{i,j,k-1} + \frac{q}{k} (\Delta x)^2 - 6T_{i,j,k} = 0$$

III-6- Conduction de Chaleur en 2-Dimensions

III-6-1- Méthodes Numériques en Régime Permanent

Les équations qui gouvernent le phénomène de conduction bidimensionnel en régime permanent pour $T(x, y)$ sont :

Système sans source de chaleur (LAPLACE): Ici q (W/m³) est le flux apporté par une source de chaleur.

Système sans source de chaleur (LAPLACE):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Système avec source de chaleur :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q}{k} = 0 \quad (\text{III. 16})$$

III-6-1-1. Maillage Numérique

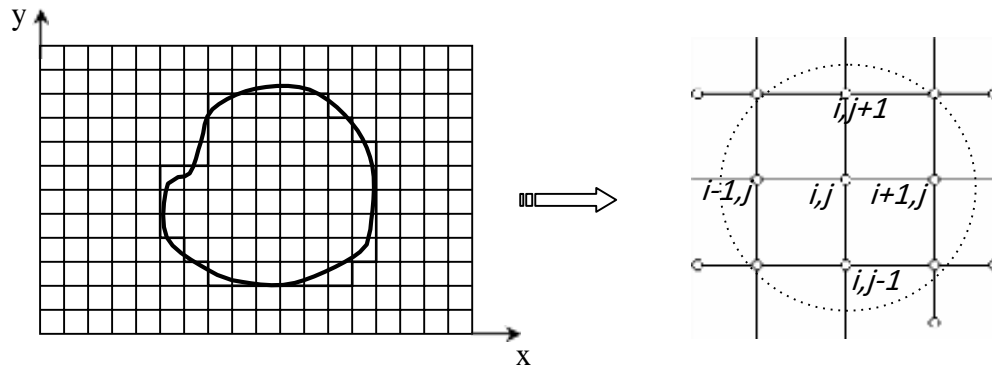


Fig. III-3 Représentation 2D d'un modèle simulé par la méthode des différences finies.

III-6-1-2. Bilan thermique

D'après la figure ci-après en régime stationnaire sans source de chaleur, en reposant sur la loi des nœuds (KIRTCHOFF): la somme des courants vers un nœud est nulle. Par analogie, et pour un système bi-dimensionnel, on écrit:

$$q_{1-0} + q_{2-0} + q_{3-0} + q_{4-0} = 0 \quad (\text{III. 18})$$

$$-k(1.\Delta y) \frac{T_0 - T_1}{\Delta x} - k(1.\Delta y) \frac{T_0 - T_3}{\Delta x} - k(1.\Delta x) \frac{T_0 - T_2}{\Delta y} - k(1.\Delta x) \frac{T_0 - T_4}{\Delta y} = 0 \quad (\text{III. 19})$$

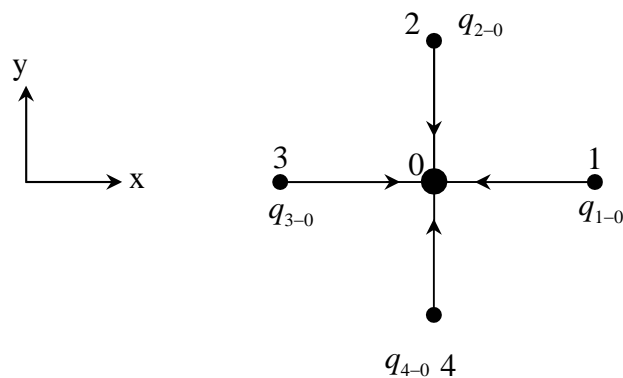


Fig.III.4. Schéma de discrétisation avec la méthode des différences finies.

III-6-2- Les Méthodes Numériques en Régime Variable (Instationnaire)

Du point de vue mathématique, il s'agit des méthodes numériques appliquées aux équations aux dérivées partielles du type parabolique, où, en conduction, le temps intervient en plus les dimensions spatiales.

Le concept général de la méthode numérique appliquée aux problèmes instationnaires est le même que celui que nous avons rencontré précédemment pour les problèmes stationnaires : diviser la matière en régions au centre desquelles on place un nœud ; effectuer pour chacun des nœuds un bilan thermique où interviennent la température du nœud considéré, celle de ses voisins et les propriétés thermiques de la matière. En instationnaire, figurera un terme capacitif représentant l'augmentation d'énergie interne pendant un intervalle de temps.

Les équations qui gouvernent le phénomène de conduction bidimensionnel en régime variable pour $T(x, y, t)$ sont :

Systeme sans source de chaleur :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{III. 17})$$

Systeme avec source de chaleur :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{III. 18})$$

Ici ;

q (W/m^3) : est le flux apporté par une source de chaleur.

$\alpha = \frac{k}{\rho c}$ (m^2/s) est la diffusivité thermique, (k) est le coefficient de conductivité

thermique, (ρ) est la masse volumique et (c) est la chaleur spécifique.

La variable temporelle est, de même que les variables spatiales, discrétisée en différences finies. La figure (II. 5) montre la relation température-temps d'un nœud (n).

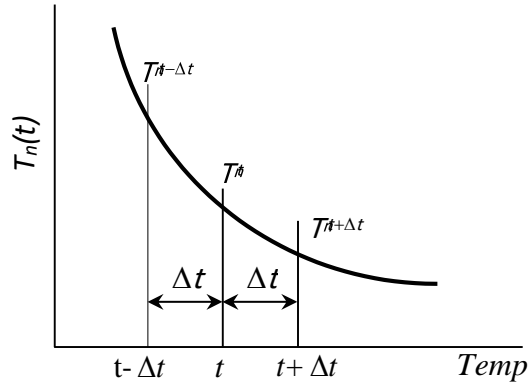


Fig. III. 6 L'histoire température-temps d'un point nodale

La dérivée première de la température par rapport au temps est discrétisée ainsi :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t} \quad (\text{II. 19})$$

La variable temps est discrétisée en des différences finies progressives.

Et par conséquent l'équation (II. 18) peut être discrétisée, ainsi :

$$\frac{T_{i+1,j,k}^t + T_{i-1,j,k}^t - 2T_{i,j,k}^t}{(\Delta x)_2} + \frac{T_{i,j+1,k}^t + T_{i,j-1,k}^t - 2T_{i,j,k}^t}{(\Delta y)_2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_{i,j,k}^{t+\Delta t} - T_{i,j,k}^t}{\Delta t} \quad (\text{II. 20})$$

Il faut noter que C_i : est la capacité thermique représentant l'augmentation d'énergie interne d'un nœud pendant un intervalle de temps Δt [1].

$$C_i = \rho \cdot c \cdot \Delta V_i ; \quad \Delta V_i : \text{ est l'élément de volume.}$$

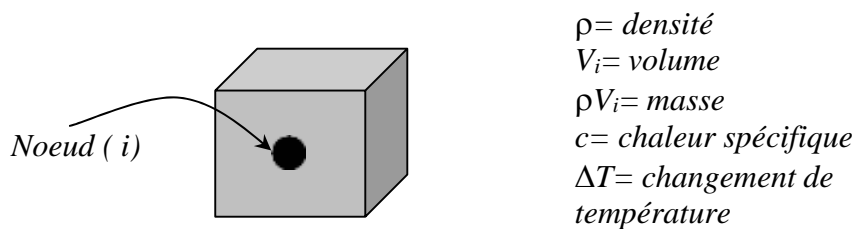


Fig. III. 7 Le changement en énergie interne d'un élément de volume entourant un nœud pendant un intervalle de temps ΔT [24].

Le changement en énergie interne d'un élément de volume d'un nœud pendant un intervalle de temps est donné par la relation suivante :

$$\Delta U = \rho V_i c \Delta T = \rho V_i c (T_i^{t+1} - T_i^t) \quad (\text{III. 22 b})$$

Les résistances thermiques pour différentes géométries et conditions aux limites sont données au tableau (III. 1).

III-7- Conduction de Chaleur en 3-Dimensions

Les équations qui gouvernent le phénomène de conduction tridimensionnel en régime variable pour $T(x, y, z, t)$ sont :

Système sans source de chaleur :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{III. 23})$$

Système avec source de chaleur :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{III. 24})$$

Ici q (W/m^3) est le flux apporté par une source de chaleur thermique volumétrique.

$a = \frac{k}{\rho c}$ (m^2/s) est la capacité

II-3-1. Maillage numérique

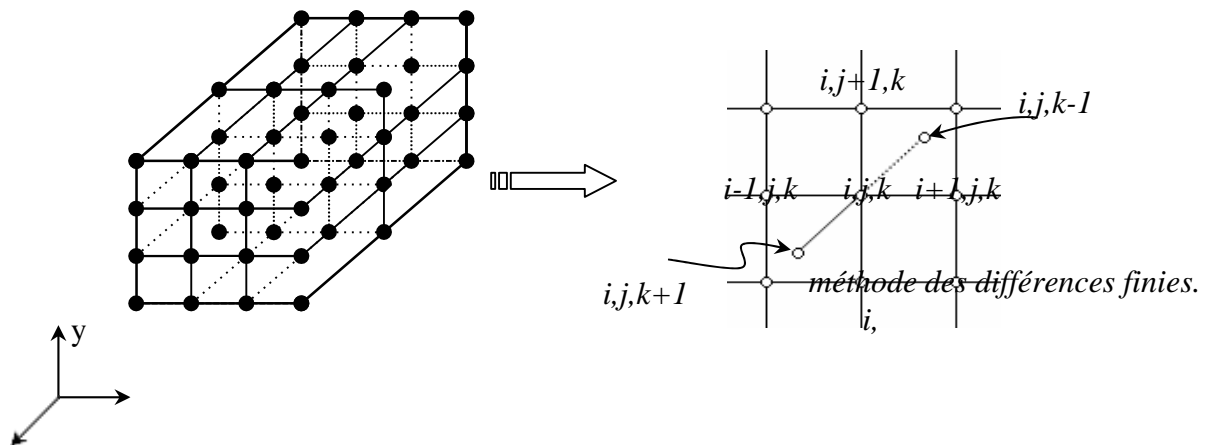


Fig. III-8 Représentation 3D d'un modèle simulé par la

Les équations données au tableau ci-dessus sont valables pour tout les *nœuds internes*. Pour les nœuds aux frontières, les équations sont modifiées selon le cas présenté. Considérons les cas les plus pratiques :

1/ Nœud avec condition de convection en surface

$$R_x(i+1,j,k) = \frac{1}{h\Delta y \cdot \Delta z}; \quad R_x(i-1,j,k) = \frac{\Delta x}{k\Delta y \cdot \Delta z}$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta z}; \quad R_y(i,j-1,k) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta z}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{\Delta z}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta y}; \quad R_z(i,j,k-1) = \frac{\Delta z}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta y}$$

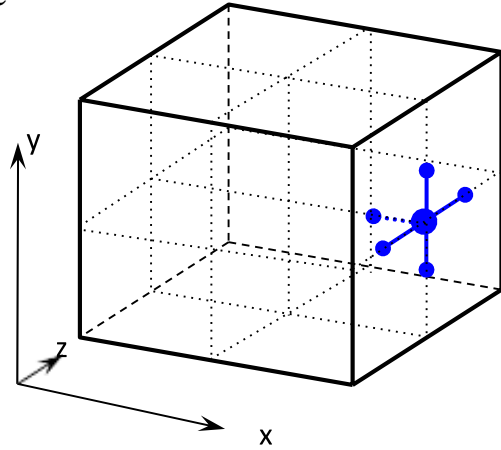


Fig. III. 9 Nœud avec condition de convection en surface

2/ Nœud sur une surface isolée

$$R_x(i-1,j,k) = \frac{\Delta x}{k\Delta y \cdot \Delta z}; \quad R_x(i+1,j,k) = \infty$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta z}; \quad R_y(i,j-1,k) = \frac{\Delta y}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta z}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{\Delta z}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta y}; \quad R_z(i,j,k-1) = \frac{\Delta z}{k \frac{\Delta x}{2} \cdot \Delta y}$$

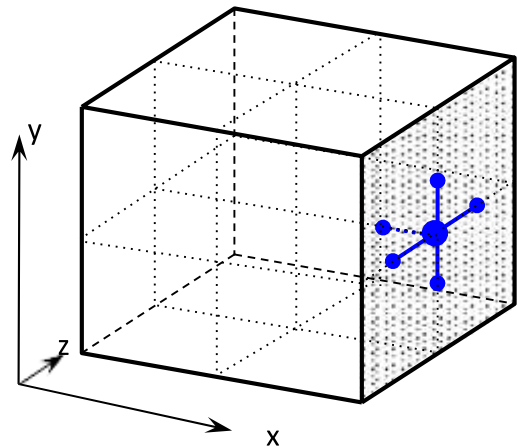


Fig. III. 10 Nœud sur une surface isolée

3/ Nœud sur un coin extérieur avec condition de convection en surface

$$R_x(i+1,j,k) = \frac{1}{h \frac{\Delta y}{2} \Delta z} ; R_x(i-1,j,k) = \frac{\Delta x}{k \frac{\Delta y}{2} \Delta z}$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{1}{h \Delta x \frac{\Delta z}{2}} ; R_y(i,j-1,k) = \frac{\Delta y}{k \Delta x \Delta z}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{\Delta z}{k \Delta x \Delta y} ; R_z(i,j,k-1) = \frac{1}{h \Delta x \Delta y}$$

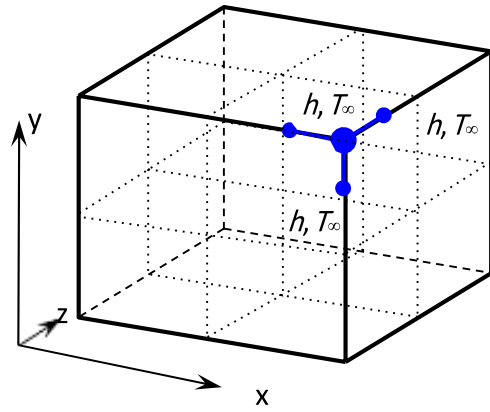


Fig. III. 11 Nœud sur un coin extérieur avec condition de convection en surface

4/ Nœud sur une arête externe avec condition de convection en surface

$$R_x(i-1,j,k) = \frac{\Delta x}{k \frac{\Delta y}{2} \Delta z} ; R_x(i+1,j,k) = \frac{1}{h \frac{\Delta y}{2} \Delta z}$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{1}{h \frac{\Delta x}{2} \Delta z} ; R_y(i,j-1,k) = \frac{\Delta y}{k \Delta x \Delta z}$$

$$R_z(i,i,k+1) = \frac{\Delta z}{h \Delta x \Delta y} ; R_z(i,i,k-1) = \frac{\Delta z}{h \Delta x \Delta y}$$

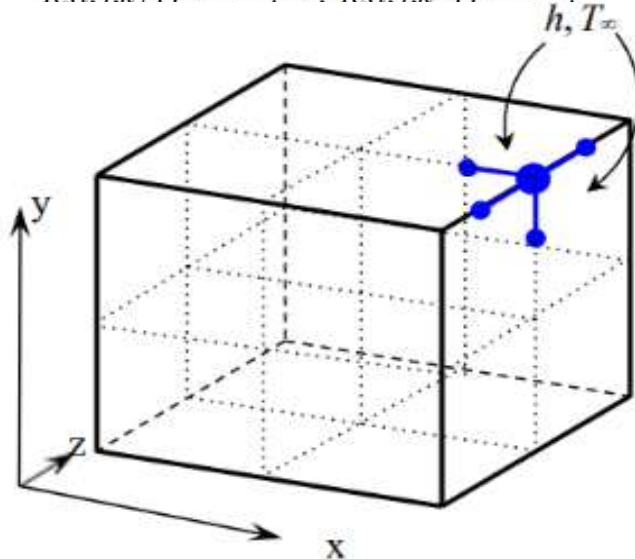


Fig. III. 6 Nœud sur une arête externe avec condition de convection en surface

5/ Nœud sur une arête interne avec condition de convection ensurface

$$R_x(i+1,j,k) = \frac{1}{h\Delta y\Delta z}; \quad R_x(i-1,j,k) = \frac{\Delta x}{k\Delta y \cdot \frac{\Delta z}{2}}$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{4\Delta y}{3\cdot k\Delta x\Delta z}; \quad R_y(i,j-1,k) = \frac{4\Delta y}{3\cdot k\Delta x\Delta z}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{\Delta z}{k\frac{\Delta x}{2}\Delta y}; \quad R_z(i,j,k-1) = \frac{\Delta z}{k\Delta x\Delta y}$$

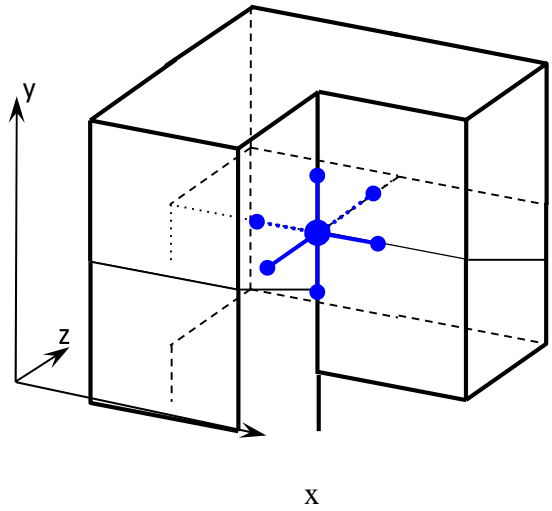


Fig. III. 13 Nœud sur une arête interne avec conditione convection en surface

6/ Nœud sur un coin interne

$$R_x(i+1,j,k) = \frac{\Delta x}{k\Delta y\Delta z}; \quad R_x(i-1,j,k) = \frac{4\Delta x}{3\cdot k\Delta y\Delta z}$$

$$R_y(i,j+1,k) = \frac{\Delta y}{k\Delta x\Delta z}; \quad R_y(i,j-1,k) = \frac{4\Delta y}{3\cdot k\Delta x\Delta z}$$

$$R_z(i,j,k+1) = \frac{4\Delta z}{3\cdot k\Delta x\Delta y}; \quad R_z(i,j,k-1) = \frac{\Delta z}{k\Delta x\Delta y}$$

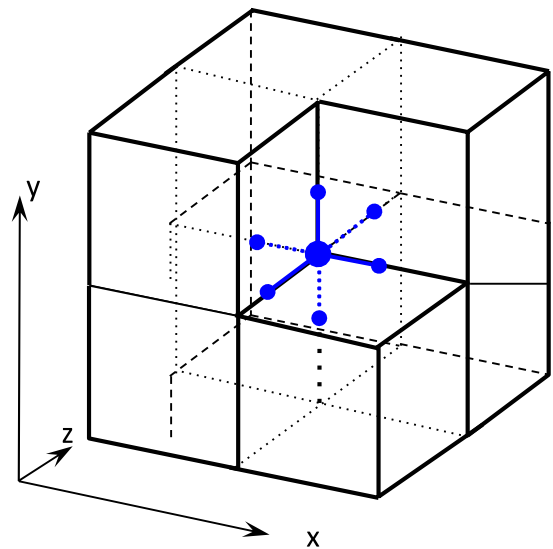


Fig. III. 13 Nœud sur un coin interne

7/ Nœud sur un coin interne avec condition de convection en surface

$$R_x(i+1, j, k) = \frac{\Delta x}{k \frac{\Delta y}{2} \Delta z}; \quad R_x(i-1, j, k) = \frac{\Delta x}{k \frac{\Delta y}{2} \Delta z}$$

$$R_y(i, j+1, k) = \frac{4}{3 \cdot h \Delta x \Delta z}; \quad R_y(i, j-1, k) = \frac{4 \cdot \Delta y}{3 \cdot k \Delta x \Delta z}$$

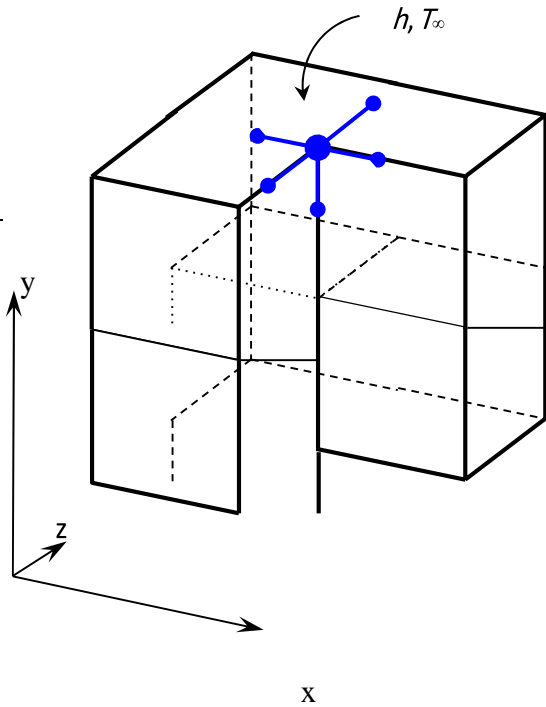
$$R_z(i, j, k+1) = \frac{\Delta z}{k \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2}}; \quad R_z(i, j, k-1) = \frac{\Delta z}{k \Delta x \cdot \frac{\Delta y}{2}}$$


Fig. II. 14 Nœud sur un coin interne avec condition de convection en surface

III-7-2 Bilans thermiques

Un équilibre thermique est calculé pour chaque nœud. Le flux thermique total au nœud (i, j, k) depuis les six nœuds du voisinage est $Q_{i,j,k}$ (W) :

$$Q_{i,j,k} = R_x(i-1, j, k) \cdot (T_{i-1, j, k} - T_{i, j, k}) + R_x(i+1, j, k) \cdot (T_{i+1, j, k} - T_{i, j, k}) +$$

$$R_y(i, j-1, k) \cdot (T_{i, j-1, k} - T_{i, j, k}) + R_y(i, j+1, k) \cdot (T_{i, j+1, k} - T_{i, j, k}) +$$

$$R_z(i, j, k-1) \cdot (T_{i, j, k-1} - T_{i, j, k}) + R_z(i, j, k+1) \cdot (T_{i, j, k+1} - T_{i, j, k}) \quad (\text{III. 25})$$

ou :

$$Q_{i,j,k} = q_{i-1, j, k} + q_{i+1, j, k} + q_{i, j-1, k} + q_{i, j+1, k} + q_{i, j, k-1} + q_{i, j, k+1} \quad (\text{III. 26})$$

Le changement en énergie d'un nœud est dû aux variations comme celles liées aux sources de chaleurs ou autres mécanismes. Ce changement est effectué par addition ou soustraction à la variable $Q_{i, j, k}$ comme le terme $q'' \cdot dx dy dz$.

Un autre avantage de l'introduction de $(Q_{i, j, k})$ est que moins de données doivent être assignées dans la mémoire d'ordinateur.

III-8- Conduction de chaleur en coordonnées cylindriques

L'équation générale de la conduction dans un système de coordonnées cylindriques est :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II. 28})$$

III-8-1- Maillage en coordonnées cylindriques

Dans cette étude, on va s'intéresser aux systèmes axisymétriques et par conséquent, on va considérer un processus thermique radiale et vertical, rotationnel et symétrique autour de l'axe (z). La température au long du rayon r et à la distance verticale z en temps t est notée par $T(r, z, t)$.

Dans la direction radiale, le rayon r est divisé en intervalles d'épaisseur Δr et dans la direction verticale la distance z est divisée en intervalles d'épaisseur Δz .

Dans le sens radiale, on a :

$$r_1 = r_{int} + \Delta r ; \quad r_i = r_{i-1} + \Delta r ; \quad r_{ext} = r_i + n\Delta r$$

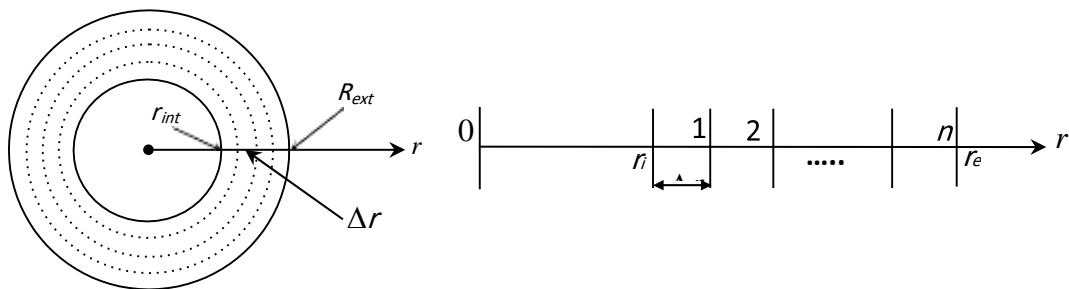


Fig. III. 18 Maillage en sens radiale

Dans la direction verticale (z), le maillage peut être conduit comme étant en 2-D:

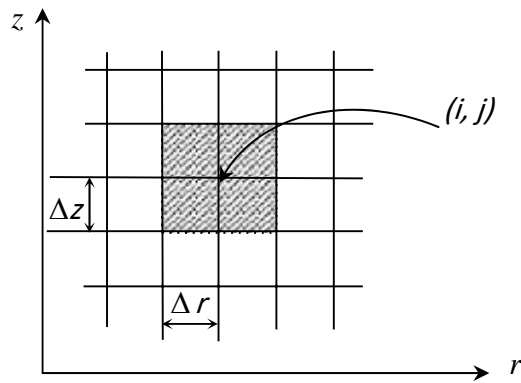


Fig. III. 19 Maillage en coordonnées cylindriques (r, z)

Pour le cas des cylindres courts et pleins et si le problème admet une conversion en 2-D, le maillage le plus utilisé est celui en (r, ϕ).

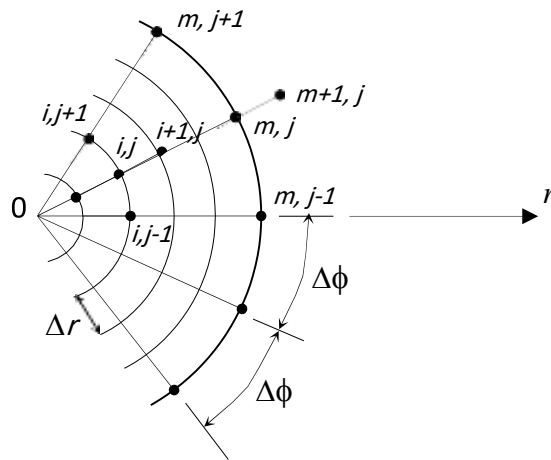


Fig. III. 20 Maillage en coordonnées cylindriques (r, ϕ) [17].

III-9- Les méthodes de résolution des systèmes d'équations algébriques

Le problème est ainsi discrétisé en un système d'équations que l'on peut résoudre numériquement. Le succès considérable de cette méthode largement répandue et qui joue toujours un rôle important dont l'analyse numérique tient en fait de sa simplicité, notamment pour la conception du maillage et la vitesse de résolution du système d'équations qui en découle. Plusieurs méthodes de résolution numérique des systèmes d'équations existent. Le choix de la procédure du système d'équation à traiter dépend de la structure de la matrice et de la taille du problème.

Il existe deux méthodes numériques:

III-9-1-Méthode directe: qui se définit sous la forme d'équation de récurrence et conduit à la solution en un nombre fini d'étapes.

III-9-2Méthode indirecte (itérative): qui évalue la solution exacte du problème par approximations successives de celle-ci.

III-9-3 Comparaison des différentes méthodes :

Les deux facteurs de comparaison à considérer, quand on a le choix entre plusieurs méthodes de résolution d'un système d'équations est la quantité de mémoire occupée et le temps de calcul de l'ordinateur. Les méthodes directes de résolution d'un système de N équations linéaires, avec une largeur de bande de la matrice de $(2n+1)$ exigent au moins $N(2n+1)$ emplacements de mémoire tandis que le temps de calcul est en gros égal à $N.n^2$. Les méthodes indirectes (itératives) exigent en principe moins d'espace mémoire, car elles n'emmagasinent que les coefficients non nuls de la matrices. Elles sont particulièrement indiquées quand les équations sont non linéaires ou quand l'espace mémoire est fortement restreint.

En définitif, les appréciations quand à savoir qu'elle méthode est meilleure ou qu'elle famille de méthodes est la meilleure, dépendent non seulement des caractéristiques intrinsèques du problème étudié, mais aussi des possibilités de l'ordinateur utilisé. C'est pour cela que ces appréciations peuvent varier rapidement avec le temps. Jusqu'à récemment, la position généralement acceptée était la suivante, N désigne le nombre d'équations du système: - Les méthodes directes conviennent le mieux pour de petites

valeurs de N et une matrice (celle qu'est formée par les coefficients) dense (c'est-à-dire possède peu d'éléments nuls). - Les méthodes indirectes conviennent mieux pour de grandes valeurs de N et une matrice éparses (c'est-à-dire possède beaucoup d'éléments nuls). On accorde la préférence aux méthodes indirectes pour les très grandes valeurs de N et aussi pour les grandes valeurs de N avec des matrices éparses mais non tridiagonales. Les problèmes en conduction ne correspondent normalement pas à de telles matrices (tri-diagonales).

CONCLUSION

A partir de cette étude nous concluons que l'équation de chaleur est utilisée dans le domaine industriel et son application est très vaste dans l'industrie chimique, nous ont permis de dégager les conclusions suivantes:

La méthode des volumes finis est une méthode très générale qui peut résoudre facilement les problèmes de la conduction de la chaleur.



REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] : Pierre Cormault, «Cours de Thermique théorique et pratique», Edition Janvier, 1999.

[2] : Yves JANNOT, «TRANSFERTS THERMIQUES », Ecole des Mines Nancy 2^{ème} année, 2012, 5,6.

[3] : «Transfert thermique »

http://fr.wikipedia.org/wiki/Transfert_thermique,

Dernière modification de cette page le 26 mars 2013 à 16:25

[4] : Dominique Marchio et Paul Reboux, «Introduction Aux Transferts Thermiques », École des mines de Paris,ISBN : 978291176293, 2008,

