

UNIVERSITÉ DE M'SILA
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET
D'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Master

Spécialité : Mathématiques

Option : Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Sujet

Méthode d'Adomian pour les équations aux dérivées partielles

par

Bouguerra Abederrachid

24-06-2013

Remerciements

Je tiens à remercier vivement le Mr. Bachir GAGUI pour avoir accepté de diriger ce travail, ainsi que pour sa gentillesse, son dévouement et ses conseils précieux.

Je merci aussi le professeur Mostefa NADIR d'avoir accepté la présidence du jury et pour ses conseils qui m'ont été très utiles.

Ainsi qu'aux Mr. Abed El-Kader GASMI pour avoir accepté de juger ce travail et faire partie de jury.

Et à tous les amis et proches qui m'ont aidé à l'élaboration de ce travail.

Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille en particulier mes parents pour leur soutien tout au long de mes études.

Table des matières

Notation	1
Introduction	2
1 Notions fondamentales et définition	4
1.1 Définition d'une série	4
1.1.1 Série à termes positifs	4
1.2 Equations aux dérivées partielles	6
1.2.1 Définition sur les EDPs	6
1.2.2 Classification des EDP quasi-linéaires du deuxième ordre	7
1.3 Quelques applications sur les EDPs	8
1.3.1 Equation de la chaleur dans \mathbb{R}^2	8
2 Méthode d'Adomian	12
2.1 Présentation de la méthode	12
2.2 Les polynômes d'Adomian	14
2.3 Convergence de la méthode décompositionnelle d'Adomian	16
3 Application de la méthode d'Adomian et comparaison	21
3.1 Equation de la chaleur homogène	21
3.2 Equation de la chaleur non homogène	26
3.3 Equation aux dérivée partielle non linéaire	33

Notation

EDPs: Equations aux dérivées partielles.

MDA: Méthode de décomposition d'Adomian.

MDAm: Méthode décompositionnelle d'Adomian modifiée.

A_n : Polynôme d'Adomian.

y_{an} : Solution des EDPs par la méthode analytique (solution exacte).

y_{ad} : Solution des EDPs par la méthode de décomposition d'Adomian (MDA).

$Err = |y_{an} - y_{ad}|$: La différence entre la solution exacte et la solution par(MDA), représente la convergence de y_{ad} vers la solution exacte y_{an} .

$L_x(\cdot)$: La dérivé par rapport à x , $L_x(\cdot) = \frac{\partial}{\partial x}(\cdot)$.

$L_t(\cdot)$: La dérivé par rapport à t , $L_t(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot)$.

$L_t^{-1}(\cdot)$: L'inverse de $L_t(\cdot)$, (opérateur inverce).

H : Espace de Hilbert.

H' : Espace duale de Hilbert.

Introduction

Dans les années 1980, le professeur **Gorge Adomian** à proposée une nouvelle méthode, notée méthode de décomposition d'Adomian (MDA), pour résoudre des équations fonctionnelles de types, (équations intégrales, équations Algébriques, équations aux dérivées partielles(EDPs), équations différentielles ordinaires (EDO),...etc.).

La technique de cette méthode utilise la décomposition de l'opérateur non linéaire par une série, généralisée par un polynôme est appelé polynôme d'Adomian A_n .

Dans ce mémoire on traite des problèmes modèles des équations aux dérivées partielles (EDPs) linéaire et non linéaire, (homogènes et non homogènes).

Il y a plusieurs méthode pour résoudre les EDPs, notamment la transformée de Fourier, séparation des variables...etc.

Notre travail consiste à trouver les solutions de ces équations par la méthode de décomposition d'Adomian, ou la solution du problème modèle donnée sous la forme d'une série.

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 0} u_n(x, t)$$

Pour trouver $u_n(x, t)$, on applique la méthode d'Adomian, dans ce cas en utilisant le polynôme d'Adomian A_n , et on remarque que la convergence de la série est contrôler par des théorèmes données.

Le travail est partagé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on donne des rappels sur les séries (définie quelques types de la séries, séries à terme positive, série absolument convergente,...) et quelques types des équations aux dérivée partielles (EDPs), leurs classification, et le théorème d'approximation (de **Weierstrass**) qui permet d'écrire une fonction par un polynôme.

Dans la deuxième chapitre, on donne le principe de la méthode d'Adomian avec des théorèmes pour calcul le polynôme d'Adomian et des théorèmes pour la convergence de la solution.

Dans le dernier chapitre, on donne des exemples sur les EDPs (linéaire et non linéaire, homogène ou non homogène) pour comparer entre la méthode d'Adomian et quelques méthodes des résolutions des EDPs.

Enfin de ce travail on essaye de conclure que la méthode d'Adomian n'est pas rapidement convergente pour toutes les problèmes des EDPs, mais il existe une modification dans cette méthode pour accélérer la convergence, cette méthode est nommée méthode de décomposition d'Adomian modifiée (MDAm).

Chapitre 1

Notions fondamentales et définition

Dans cette partie on donne des définitions et propriétés pour les séries, et pour les EDPs (classifications des EDPs), et on donne des théorèmes de l'existence et l'unicité de la solution pour les problèmes avec condition aux bords pour les EDPs.

1.1 Définition d'une série

Définition 1.1.1 Soit (u_n) une suite d'éléments de \mathbb{k} avec ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

On pose, pour tout entier naturel n , $u_n = \sum_{p=0}^n u_p$, alors

1) Si la suite (u_n) des sommes partielles converge vers une limite u , on dit que la série de terme général u_n converge (en abrégé: $\sum u_n$ converge). la limite u est alors appelée somme de la série, est on note $u = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

2) Si, au contraire, la suite des sommes partielles (u_n) ne pas converge, on dit que la série $\sum u_n$ diverge

1.1.1 Série à termes positifs

Remarquons que, si (u_n) est une suite de nombres réels positifs, alors la suite (u_n) des somme partielles est croissante.

Proposition 1.1.1 Soit (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels positifs .

On suppose qu'il existe un entier naturel n_0 tel que

$$(\forall n \geq n_0) u_n \leq v_n$$

Alors:

$$\sum v_n \text{ converge} \implies \sum u_n \text{ converge};$$

et, par contraposition,

$$\sum u_n \text{ Diverge} \implies \sum v_n \text{ Diverge};$$

Proposition 1.1.2 (Critère de Cauchy)

Soit (u_n) une suite d'éléments de \mathbb{k} , ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

pour que la série soit $\sum u_n$ soit converge, il faut et il suffit que :

$$(\forall \varepsilon > 0), (\exists n_0 \in \mathbb{N}), (\forall m \in \mathbb{N}), (\forall n \in \mathbb{N}), m \geq n \geq n_0 \implies \left| \sum_{p=n}^m u_p \right| \leq \varepsilon$$

et on a :

série convergent \iff elle est de Cauchy

Théorème 1.1.1 (Règle de Cauchy)

Soit $\sum u_n$ une série à terme strictement positive.

soit:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l, l \in \mathbb{R}$$

- Alors:
- 1) si $l < 1 \implies \sum u_n$ est convergente
 - 2) si $l > 1 \implies \sum u_n$ est divergente
 - 3) si $l = 1 \implies \sum u_n$ pas de conclusion

Preuve. voir [05] ■

Théorème 1.1.2 (Règle de d'Alembert)

Soit $\sum u_n$ une série à terme strictement positive.

soit:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l, l \in \mathbb{R}$$

- alors:
- 1) si $l < 1 \implies \sum u_n$ est convergente
 - 2) si $l > 1 \implies \sum u_n$ est divergente
 - 3) si $l = 1 \implies \sum u_n$ le test ne permet de conclure.

Preuve. voir [05] ■

Proposition 1.1.3 (*Relation entre la Règle de Cauchy et d'Alembert*)

$$\text{si: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l, \quad \forall l \in \mathbb{R}$$

Preuve. voir [05] ■

Définition 1.1.2 *Séries Absolument convergentes*

$\sum u_n$ est Absolument convergente si $\sum |u_n|$ est convergente.

Remarque 1.1.1 $\sum u_n$ est Absolument convergente $\implies \sum u_n$ converge
par contre l'inverse est fausse.

1.2 Equations aux dérivées partielles

1.2.1 Définition sur les EDPs

Définition 1.2.1 Une équation aux dérivé partielle ou EDPs, est une relation faisant intervenir une fonction inconnue u de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , les variables x, y, \dots , ses dérivées partielles, $u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots$. elle s'écrit de façon générale

$$f(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, \dots) = 0 \quad (1.2.1)$$

L'équation(1.2.1) est considérée dans un domaine Ω de \mathbb{R}^n

les solution de l'équation aux dérivées partielles (1.2.1) sont les fonctions qui vérifient cette équation dans Ω .

Exemple 1.2.1 Quelques équations

$$u^2 \frac{d^2 u}{dx dy} + \frac{du}{dx} = y \quad (1.2.2)$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + 2y^2 \frac{d^2 u}{dx dy} + 3x \frac{d^2 u}{dy^2} = 1 \quad (1.2.3)$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 = 1 \quad (1.2.4)$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \quad (1.2.5)$$

les fonctions $u(x, y) = (x + y)^3$ et $u(x, y) = \sin(x - y)$ sont toutes deux des solutions de(1.2.5).

Définition 1.2.2 *L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est l'ordre de la dérivée partielle d'ordre le plus élevé intervenant dans l'équation.*

par exemple :

-les équations (1.2.2), (1.2.3), (1.2.5), sont d'ordre 2 .

-les équations (1.2.4), est d'ordre 1 .

Définition 1.2.3 *Une équation aux dérivées partielles linéaire si est linéaire par rapport à la fonction u et à toutes ses dérivées partielles.*

-les équation (1.2.3), (1.2.5), sont linéaires.

-les équation (1.2.2), (1.2.4), sont non linéaire.

Définition 1.2.4 *Une équation aux dérivées partielles quasi-linéaire est linéaire par rapport aux dérivées partielles d'ordre le plus élevé de la fonction u .*

- l'équation (1.2.2) est quasi linéaire.

Définition 1.2.5 *une équation aux dérivées partielles linéaire homogène est vérifiée pour $u = 0$ (si elle est écrite de la façon usuelle, le second membre, ne contenant ni u ni ses dérivée partielle, est identiquement nul).*

-l'équation (1.2.5) est linéaire et homogène.

1.2.2 Classification des EDP quasi-linéaires du deuxième ordre

EDPs quasi-linéaire du deuxième ordre définies dans \mathbb{R}^2

Une équations aux dérivées partielles quasi-linéaire du second ordre est du type:

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) \quad (1.2.6)$$

où $u(x, y)$ est la fonction inconnue et où a, b, c et F sont quatre fonctions définie sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est à valeurs dans \mathbb{R} .

Définition 1.2.6 *Une courbe est dit caractéristique par rapport à l' EDPs (1.2.6) si on a :*

$$a(x, y)(dy)^2 - 2b(x, y)dx dy + c(x, y)(dx)^2 = 0 \quad (1.2.7)$$

si $a = 0$ et $c = 0$, ce sont des droites $x = cste$ et $y = cste$. si $a \neq 0$, on peut aussi écrire l'équation (1.2.7) sous la forme:

$$a(x, y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b(x, y)\frac{dy}{dx} + c(x, y) = 0 \quad (1.2.8)$$

L'équation du second degré à coefficients réels en $\frac{dy}{dx}$ (1.2.8) peut avoir 2 racines réelles ou 1 double ou 2 complexes conjugué"est selon le signe du discriminant $4(b^2 - ac)$. les équations aux dérivées partielles quasi-linéaires du second ordre sont classées en trois catégories selon le signe de $b^2 - ac$.

Classification des EDPs quasi-linéaires du second ordre

-si $b(x, y)^2 - a(x, y)c(x, y) \succ 0$ dans un domaine D , l'équation est dite **hyperbolique**

-si $b(x, y)^2 - a(x, y)c(x, y) = 0$ dans un domaine D , l'équation est dite **parabolique**

-si $b(x, y)^2 - a(x, y)c(x, y) \prec 0$ dans un domaine D , l'équation est dite **elliptique**

1.3 Quelques applications sur les EDPs

Nous allons étudions dans ce **cas** quelques exemples des EDP linéaire du deuxième ordre.

Remarque 1.3.1 La solutions $u(x, t) = 0$, est un solution *trivial*.

1.3.1 Equation de la chaleur dans \mathbb{R}^2

Soit le problème mixte (parabolique) avec les conditions Dirichlet:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & , (t, x) \in \mathbb{R}^+ * [0, l] \\ \varphi(x) = u(0, x) \\ u(0, t) = a \quad , \quad u(l, t) = b \quad , (a, b) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (2)$$

cherchons une solution élémentaire de la forme

$$u(t, x) = f(x)g(t) \quad (1.3.1)$$

en remplaçant (1.3.1) dans (2) alors:

$$\frac{g'}{g}(t) = \frac{f''}{f}(x) \quad (1.3.2)$$

Théorème 1.3.1 les conditions aux bord impliquent que $k < 0$ ($k = -\theta^2$).

Preuve. Du fait des conditions aux limites, $f(x)$ doit d'annuler en $x = 0$ et $x = l$ et on impose les conditions $f(0) = f(l) = 0$.

Dans le cas $k = \theta^2$ ($\theta \in \mathbb{R}^*$), la solution de (1.3.2) s'écrit, $f(x) = A \exp \theta x + B \exp -\theta x$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et la condition aux limites implique $A = B = 0$.

De plus, il est facile de voir que le cas $k = 0$ donne là encore $f \equiv 0$.

Finalement, si $k = -\theta^2$ ($\theta \in \mathbb{R}^*$), on trouve cette fois une solutions non triviale sous la forme $f(x) = A \cos \theta x + B \sin \theta x$, qui satisfait aux conditions aux limites sous la forme $f(x) = B \sin \theta x$, avec $\theta = \theta_n = \frac{n\pi}{l}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Ainsi, pour chaque valeur de n correspond une solution

$$f_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad x \in]0, l[.$$

■

Pour le théorème (1.3.1) on a

$$\frac{g'}{g}(t) = -k^2, \quad \frac{f''}{f}(x) = -k^2$$

$$\text{d'où } g(t) = A e^{-k^2 t} \quad \text{et} \quad f(x) = B \cos kx + C \sin kt$$

alors

$$u(x, t) = A e^{-k^2 t} (B \cos kx + C \sin kt)$$

et pour trouver les constante A, B, C , et k on utilise les condition initiales de le problème(2)

Pour a, b non nuls ($a \neq 0, b \neq 0$)

On pose: $v = u + \alpha x + \lambda$ une solution de(2)

avec: $v(t, 0) = v(t, l) = 0$ donc

$$\begin{cases} a + \lambda = 0 \\ b + \alpha l + \lambda = 0 \end{cases}$$

alors: $\lambda = -a, \alpha = \frac{a-b}{l}$

$$v(t, x) = u + \frac{a-b}{l} x - a$$

nous avons alors: $v(t, x) = A e^{-k^2 t} (B \cos kx + C \sin kx)$

et on à $v(t, 0) = v(t, l) = 0$

$$\implies B = 0, \quad k = \frac{n\pi}{l}, \quad n \in \mathbb{N}$$

ce qui donne $v = \sum_{n \geq 0} C_n e^{-k^2 t} \sin kx$

or pour $t = 0$ on a $v(0, x) = \varphi(x) + \frac{a-b}{l}x - a$,
 donc: $u(t, x) = \frac{b-a}{l}x + a + \sum_{n \geq 0} C_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi}{l} x$

$$C_n = \int_0^l (\varphi(s) + \frac{a-b}{l}s - a) \sin \frac{n\pi}{l} s ds$$

Existence et l'unicité de la solution de l'équation de la chaleur

Pour l'existence et l'unicité on a le théorème suivant

Le théorème de Lax-Miligram

On part ici avec la forme générale:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ telle que} \\ a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (1.3.3)$$

avec V est un espace de Hilbert le problème variationnel posé sur un espace V muni d'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_V$. le théorème suivant nous donne l'existence et l'unicité d'une solution de(1.3.3):

Théorème 1.3.2 (*Lax- Miligram*)

On suppose que

(i) V est un espace de Hilbert;

(ii) l est une forme linéaire continue sur V : il existe donc une constante $c_1 \geq 0$ telle que pour tout v dans V , $|l(v)| \leq c_1 \|v\|_V$;

(iii) a est une forme bilinéaire continue sur V :il existe une constante $c_2 \geq 0$ telle que pour tous u et v dans V , $|a(u, v)| \leq c_2 \|u\|_V \|v\|_V$;

(iv) a est coercive sur V , ce qui signifie qu'il existe une constante $\alpha \geq 0$ telle que pour tout v dans V .

Alors, le problème (1.3.3) admet une solution unique $u \in V$.

Preuve. voire [10] ■

unicité de la solution

En multipliant (2) par u et en intégrant par rapport à x alors:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l u^2 \partial x = \int_0^l u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \partial x$$

or
$$\int_0^l u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \partial x = \left[u \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=l} - \int_0^l u^2 \partial x$$

supposons que $a = b = 0$. la fonction $t \longrightarrow \int_0^l u^2 \partial x$ est positive et décroissante.

supposons maintenant que (2) admet deux solutions u_1 et u_2 , alors $w = u_1 - u_2$ est encore solution de (2) avec

$$v(0, x) = u_1(0, x) - u_2(0, x) = 0$$

écrivons (2) pour v , alors on a aussi

$$t \longrightarrow \int_0^l v^2(t, x) \partial x \geq 0 \text{ et décroissante.}$$

$$\text{or } v(0, x) = 0 \Rightarrow v \equiv 0$$

Théorème 1.3.3 (Approximation de Weierstrass)

soit un I intervalle fermée et bornée. on pose: $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue donc pour toute $\varepsilon \geq 0$, il existe un polynôme de fonction $p_\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que:

$$|f(x) - p_\varepsilon(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I; \quad (1.3.4)$$

ou équivalent

$$\sup \{|f(x) - p_\varepsilon(x)| : x \in I\} < \varepsilon$$

Preuve. Pour la preuve voir [01]. ■

Chapitre 2

Méthode d'Adomian

Dans ce chapitre on donne le principe de la méthode de décomposition d'Adomian pour résoudre quelque problème des EDPs, la technique de cette méthode décomposer le terme non linéaire par une série sous la forme:

$$N(u(x)) = \sum_{n \geq 0} A_n$$

avec A_n est le polynôme d'Adomian .

Enfin on donne des théorèmes pour obtenir le polynôme d'Adomian, et pour la convergence de la MDA pour les EDPs.

2.1 Présentation de la méthode

Etant donné une équation fonctionnelle:

$$F(u(x)) = g(x) \tag{2.1.1}$$

où F un opérateur différentielle non linéaire possédant des termes linéaires et des termes non linéaires,

On décompose le terme linéaire à $L + R$, avec L est inversible et R le reste. et $u(x)$ la fonction inconnue, $g(x)$ est une fonction donnée.

L'équation (2.1.1) devient:

$$L(u(x)) + R(u(x)) + N(u(x)) = g(x) \quad (2.1.2)$$

Avec N est un opérateur non linéaire.

et puisque L est inversible, l'équation (2.1.2), devient:

$$u(x) = \theta + L^{-1}(g(x)) - L^{-1}(R(u(x))) - L^{-1}(N(u(x))) \quad (2.1.3)$$

avec θ une fonction vérifiant: $L\theta = 0$

la méthode décompositionnelle d'Adomian consiste à trouver la solution $u(x)$ sous forme d'une série $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$, et décomposé le terme $N(u(x))$ sous la forme:

$$N(u(x)) = \sum_{n \geq 0} A_n$$

où A_n sont ne dépendant que de u_0, u_1, \dots, u_n et appelés polynôme d'Adomian, et sont obtenue comme suite:

$$\text{posons: } v = \sum_{i \geq 0} \lambda^i u_i \quad , \quad N\left(\sum_{i \geq 0} \lambda^i u_i\right) = \sum_{i \geq 0} \lambda^i A_i$$

avec λ est un paramètre réel

$$\Rightarrow \quad A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N\left(\sum_{i \geq 0} \lambda^i u_i\right) \right]_{/\lambda=0} \quad (2.1.4)$$

En remplaçant $u(x)$ et $N(u(x))$ par leurs séries,

on obtient:

$$\sum_{i \geq 0} u_i(x) = \theta + L^{-1}(g(x)) - L^{-1}\left(R\left(\sum_{i \geq 0} u_i(x)\right)\right) - L^{-1}\left(\sum_{i \geq 0} A_i\right)$$

le termes de la série $\sum_{i \geq 0} u_i(x)$ sont identifiés par les formules suivant:

$$\begin{cases} u_0 = \theta + L^{-1}(g(x)) \\ u_1 = -L^{-1}(R(u_0(x))) - L^{-1}(A_0(x)) \\ \vdots \\ u_{N+1} = -L^{-1}(R(u_n(x))) - L^{-1}(A_n(x)) \end{cases} \quad (2.1.5)$$

on voit clairement que tous les termes de la série, solution sont défini sans ambiguïté .

car ils ne dépendent que des termes calculés aux étapes précédents.

On donne maintenant des théorèmes très importants que l'expression de A_n très simple que l'expression (2.1.4), est on donne une condition suffisante de convergence.

2.2 Les polynômes d'Adomian

Définition 2.2.1 Les polynômes d'Adomian sont définis par la formule:

$$\begin{cases} A_0(u_0) = N(u_0) \\ A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^n \lambda^i u_i \right) \right] \right]_{/\lambda=0} \end{cases} \quad (2.2.1)$$

la formule proposée par **G. Adomian** pour le calcul des polynômes d'Adomian $(A_n)_{n \geq 0}$ est la suivante:

$$\begin{aligned} A_0(u_0) &= N(u_0) \\ A_1(u_0, u_1) &= u_1 \frac{\partial}{\partial u} N(u_0) \\ A_2(u_0, u_1, u_2) &= u_2 \frac{\partial}{\partial u} N(u_0) + \frac{1}{2!} u_1^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} N(u_0) \\ A_3(u_0, u_1, u_2, u_3) &= u_3 \frac{\partial}{\partial u} N(u_0) + u_1 u_2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} N(u_0) + \frac{1}{3!} u_1^3 \frac{\partial^3}{\partial u^3} N(u_0) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

La relation (2.2.2) permet de trouver les polynômes A_n , mais en pratique, il est difficile de les déterminer quand n devient grand ($n \geq 5$). par la suite d'autres formules qui est proposées les polynôme A_n , mais elles s'avèrent inefficaces en pratique vu leur complexité d'une part et l'absence de justification de l'écriture de ces formules d'autre part.

C'est dans les années 1994 que **K. Abbaoui** propose et démontre une formules récurrente pratique de calcul des A_n , la formule d'Abbaoui est déduite de la relation(2.2.2) donnée dans la définition des polynômes d'Adomian:

Théorème 2.2.1 Les polynômes d'Adomian sont déterminés à partir des formules suivantes:

$$A_0(u_0) = N(u_0) \quad (2.2.3)$$

$$A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \sum_{|nk|=n} N^{(|k|)}(u_0) \frac{u^k}{k!}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.2.4)$$

où,

$$\begin{aligned} u^k &= u_0^k u_1^k \dots u_n^k, \\ k! &= k_1! k_2! \dots k_n!, \\ |nk| &= k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n. \end{aligned}$$

Preuve. Soit la fonction:

$$F(\lambda) = f(u_n(\lambda))$$

en faisant un développement de **Taylor** autour de $\lambda = \lambda_0$ et en utilisant la formule de **Newton**, on obtient:

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= f(u_n(\lambda)) \\ &\simeq \sum_{l=0}^n \sum_{|k|=l} (\lambda - \lambda_0)^{|nk|} \frac{(u_n^{(1)}(\lambda))^{k_1} \dots (u_n^{(n)}(\lambda))^{k_n}}{|k| (1!)^{k_1} \dots (n!)^{k_n}} f^{(l)}(u_n(\lambda_0)) \end{aligned}$$

par identification, on à: (nous tirons:)

$$\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} f(u_n(\lambda)) = n! \text{ multiplié par le coefficient de } (\lambda - \lambda_0)^n$$

En posant $\lambda_0 = 0$, on déduit la formule(2.2.4). ■

L'utilisation de la formule ci fait de la difficulté de trouver les k_i pour $i \geq 3$ solution de l'équation :

$$|nk| = n$$

D'où le corollaire suivant:

Corollaire 2.2.1 *La formule suivante permet également de déterminer les polynômes d'Adomian:*

$$\begin{aligned} A_0(u_0) &= N(u_0) \\ A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) &= \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n} N^{(\alpha_1)}(u_0) \frac{u_1^{(\alpha_1 - \alpha_2)}}{(\alpha_1 - \alpha_2)!} \dots \frac{u_{n-1}^{(\alpha_{n-1} - \alpha_n)}}{(\alpha_{n-1} - \alpha_n)!} \frac{u_n^{\alpha_n}}{\alpha_n!}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Preuve. Elle est déduite de la relation (2.2.4) en passant

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \alpha_1 - \alpha_2 \\
 &\vdots \\
 k_{n-1} &= \alpha_{n-1} - \alpha_n \\
 k_n &= \alpha_n \\
 |nk| &= |\alpha| = n \\
 |k| &= \alpha_1
 \end{aligned}$$

le corollaire est ainsi démontré. ■

Théorème 2.2.2 *Les polynômes d'Adomian sont données par les formules*

$$\begin{cases} A_0 = N(u_0) \\ A_n = \sum_{p_1+2p_2+\dots+np_n=n} \frac{1}{p_1!p_2!\dots p_n!} N^{(p_1+p_2+\dots+p_n)}(u_0) \cdot u_1^{p_1} \dots u_n^{p_n} \end{cases} \quad \forall n \geq 1 \quad (2.2.5)$$

2.3 Convergence de la méthode décompositionnelle d'Adomian

Les fondements mathématiques de la méthode sont au professeur **Y.Cherruault** et à son équipe de recherche du laboratoire **Medimat**.

D'importants théorèmes ont été donnés impliquant des conditions suffisantes de convergence.

Toutes ces conditions portent sur l'opérateur non linéaire N .

En effet, de la relation (2.1.5) on déduit:

Théorème 2.3.1 *Si:*

$$\sum_{n \geq 0} A_n \prec +\infty \text{ alors } \sum_{n \geq 0} u_n \prec +\infty$$

et réciproquement.

Preuve. voir [07] ■

Notons d'abord que la méthode décompositionnelle appliquée à l'équation $u - Nu = f$ se ramène à la recherche d'une suite

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

avec $S_0 = 0$ et vérifiant la relation récurrente suivante:

$$S_{n+1} = N(u_0 + S_n), \quad S_0 = 0, \quad u_0 = f, \quad n = 1, 2, \dots$$

On déduit le résultat de convergence suivant:

Théorème 2.3.2 *Si l'opérateur N est un contraction (c'est à dire vérifie $\|N\| < \delta < 1$) alors la suite $(S_n)_n$ satisfaisant la relation de récurrence $S_{n+1} = N(u_0 + S_n)$ avec $S_0 = 0$, $n \geq 0$ converge vers S solution de $S = N(u_0 + S)$*

Preuve. Pour la preuve voir [07]. ■

Corollaire 2.3.1 *Si N est un contraction alors les séries u_n et A_n sont convergentes.*

De plus $\sum_{n \geq 0} u_n$ est un solution de l'équation:

$$u - Nu = f.$$

Un autre résultat important pour la convergence de la méthode décompositionnelle est le suivant:

Théorème 2.3.3 *Si $\|N^{(n)}(u_0)\| < M\alpha^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$ et si $M\alpha \leq \frac{1}{e}$ alors la série décompositionnelle $\sum A_n$ est absolument convergente.*

Preuve. La méthode d'Adomian permette d'écrire:

$$u_{n+1} = A_n, \quad n = 0, 1, \dots \tag{2.3.1}$$

K.Abbaoui montre que:

$$A_n = \sum_{|nk|=n} \frac{1}{k!} N^{(|k|)}(u_0)(A_{0[k_1]}, \dots, A_{n-1[k_n]})$$

Montrons par récurrence que:

$$\|A_n\| \leq \frac{(n+1)^n}{(n+1)!} M^{n+1} \alpha^n, \quad n \geq 0 \tag{2.3.2}$$

pour $n = 0$, il est clair que (2.3.2) est vraie.

Supposons que (2.3.2) vrai jusqu'à n et montrons qu'elle est vérifiée pour $n + 1$.

On a:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \sum_{|(n+1)k|=n+1} \frac{1}{k!} N^{(|k|)}(u_0)(A_{0[k_1]}, \dots, A_{n-1[k_{n+1}]}) \\ A_{n+1} &\leq \sum_{|(n+1)k|=n+1} \frac{1}{k!} \|N^{(|k|)}(u_0)\| \|A_0\|^{[k_1]}, \dots, \|A_{n-1}\|^{[k_{n+1}]} \\ &\leq \sum_{|(n+1)k|=n+1} \frac{1}{k!} (M\alpha^{(|k|)})(M^{k_1}) \dots \left(\frac{(n+1)^n}{(n+1)!} M^{(n+1)} \alpha^n \right)^{k_{n+1}} \end{aligned}$$

Nous remarquons que le terme:

$$\frac{(n+1)^n}{(n+1)!} M^{(n+1)} \alpha^n$$

n'est autre que le polynôme d'Adomian d'ordre n pour l'opérateur $u = M \exp(\alpha u)$

le polynôme d'Adomian d'ordre $n+1$ s'écrira alors:

$$B_{n+1} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+2)!} M^{(n+2)} \alpha^{n+1}$$

ce qui implique:

$$\|A_{n+1}\| \leq \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+2)!} M^{(n+2)} \alpha^{n+1}$$

Ainsi la démonstration par récurrence est terminée.

D'autre part, en appliquant la formule de Sterling nous obtenons l'inégalité suivante:

$$\frac{(n+1)^n}{(n+1)!} \leq e^{(n+1)}$$

d'où:

$$\|A_n\| \leq \exp(n+1) M^{(n+1)} \alpha^n = M \exp(1) (e\alpha)^n.$$

Finalement, on déduit la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n$ si la condition $M\alpha \leq \frac{1}{e}$ est vérifiée ■

Dans le cas général des équations aux dérivées partielles (EDP), **Y.Cherruault** propose une démonstration de convergence basée sur une formulation variationnelle.

On considère l'équation fonctionnelle suivante:

$$u - N(u) = f$$

On résout ce problème dans un espace de Hilbert H muni de la norme $\|\cdot\|$ et du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_H$, on suppose que $f \in H'$ (dual de H).

On pose les hypothèses suivantes:

$$(H_1) \quad (R(u) - R(v), u - v) \geq K \|u - v\|_H^2 \quad \forall u, v \in H, k > 0.$$

$$(H_2) \quad \forall M > 0, \exists C_M > 0 \text{ telle que } \forall u, v \in H \text{ vérifiant } \|u\| \leq M, \|v\| \leq M \text{ alors}$$

$$(R(u) - R(v), w) \leq C_M \|u - v\| \|w\| \quad w \in H$$

On a alors le:

Théorème 2.3.4 *pour tout $f \in H'$, il existe $u \in H$ tel que $u - N(u) = f$. De plus, la suite définie par:*

$$\begin{cases} u_0 = f \\ u_{n+1} = u_n - \rho(N(u_n)) - u_n, \quad \rho > 0, \quad n \geq 0, \end{cases}$$

converge fortement dans H vers u solution de $u - N(u) = f$.

Preuve. voir [07] ■

Théorème 2.3.5 *Si l'opérateur non linéaire N est Lipchitzien alors la méthode décompositionnelle appliquée au problème:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + N(u) \quad (2.3.3)$$

est convergente.

Preuve. Il suffit de montrer que l'opérateur $T = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - N$ vérifie les hypothèse (H₁) et (H₂).

on a:

$$T((u - v), u - v) = (-D \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u - v) - (N(u) - N(v)), u - v)$$

le terme $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ est un opérateur différentiel, on a donc:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} (u - v), u - v\right) \geq \alpha \|(u - v)\|^2,$$

d'autre part, l'inégalité de Schwartz implique que:

$$(N(u) - N(v), (u - v)) \leq \beta \|(u - v)\|^2,$$

on déduit alors:

$$(T(u - v), u - v) \geq (D\alpha + \beta) \|(u - v)\|^2 = k \|(u - v)\|^2, \quad k = (D\alpha + \beta).$$

L'hypothèse(H₁) est donc vérifiée.

pour vérifier(H₂), soient u, v, w dans H et soit M une constante positive telle que $\|u\| \leq M$ et $\|v\| \leq M$.

On a:

$$\begin{aligned}(T(u - v), w) &= \left(-D \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u - v) - (N(u) - N(v)), w\right) \\ &= \left(-D \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u - v), w\right) + \left((-N(u) - N(v)), w\right) \\ &\leq |D| \|(u - v)\| \|w\| + \beta \|(u - v)\| \|w\| \\ &\leq C_M \|u - v\| \|w\| \quad C_M = |D| + \beta.\end{aligned}$$

les hypothèses sont donc vérifiées.

Le théorème est alors démontré ■

Chapitre 3

Application de la méthode d'Adomian et comparaison

Dans cette chapitre on considère des exemples pour les EDPs, linéaire ou non linéaire (homogène et nonhomogène).

Pour utiliser l'efficacité de la MDA, on compare entre les solutions par la MDA et la solution exacte.

3.1 Equation de la chaleur homogène

On a l'équation de la chaleur avec la condition aux bord homogène et la condition initiale non homogène définie par:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & 0 < x < l, & t \geq 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (3.1.1)$$

il y a plusieurs méthode pour résoudre cette équation. dans ce cas en comparer entre la méthode Analytique (séparation de variable) et la méthode de décomposition D'Adomian.

Méthode de décomposition d'Adomian

dans cette méthode on approximer l'équation (3.1.1) par un opérateur de la forme:

$$L_t u(x, t) = \alpha^2 L_{xx} u(x, t) \quad (3.1.2)$$

avec:

$$\begin{aligned} L_t(\cdot) &= \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} \\ L_{xx}(\cdot) &= \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} \end{aligned}$$

et on pose l'inverse de ce opérateur (notée L_t^{-1}) existe et défini par une forme d'intégrale avec t entre 0 et t .

$$L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) \partial t$$

et aussi on appliqué l'opérateur inverse L_t^{-1} , sur l'équation (3.1.2) on obtient,

$$L_t^{-1} L_t u(x, t) = \alpha^2 L_t^{-1} L_{xx} u(x, t) \quad (3.1.3)$$

ce qui implique que:

$$u(x, t) = u(x, 0) + \alpha^2 L_t^{-1} L_{xx} u(x, t) \quad (3.1.4)$$

et le terme $u(x, 0)$, il résulte pour la condition initiale de (3.1.1), et on note

$$u_0 = u(x, 0) \quad (3.1.5)$$

la méthode D'Adomian consiste à recherche la solution sous la forme d'une série:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n(x, t) \quad (3.1.6)$$

les autre termes $u_n(x, t)$, $n \geq 0$, pouvoir déterminé totalement, chaque terme par le terme précédent puisque u_0 est connue

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha^2 L_t^{-1} L_{xx}(u_0) \\ u_2 &= \alpha^2 L_t^{-1} L_{xx}(u_1) \\ &\vdots \\ u_n &= \alpha^2 L_t^{-1} L_{xx}(u_{n-1}) \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

donc la série de solution est donnée par:

$$u_n(x, t) = u_0 + \alpha^2 \sum_{n=0}^{n=+\infty} [L_t^{-1} L_{xx}(u_{n-1})] \quad (3.1.8)$$

la méthode de décomposition D'Adomian possède l'approximation de la solution $u(x, t)$ par ϕ_k , et k le terme d'approximation.

cette approximation est donnée par:

$$\phi_k = \sum_{n=0}^{n=k-1} u_n(x, t) \quad (3.1.9)$$

et on donne la composante suivante:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= u_0(x, t) \\ \phi_2 &= u_0(x, t) + u_1(x, t) \\ \phi_3 &= u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) \\ &\vdots \\ \phi_k &= u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots + u_{k-1}(x, t) \end{aligned}$$

la composante restante $u_n(x, t)$, $n \geq 1$ peut être déterminée complètement par récurrence, avec u_0 connue.

Exemple 3.1.1 On considère un exemple pour l'équation de la chaleur avec condition aux Dirichlet, homogène qui s'écrit par:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & 0 < x < 1, t \geq 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = \sin \pi x, & 0 \leq x \leq 1, n \geq 1 \end{cases} \quad (3.1.10)$$

Solution analytique:

On cherche une solution de la forme

$$u(x, t) = f(x)g(t) \quad (3.1.11)$$

où f et g sont respectivement de classe C^2 et C^1 dans ces conditions,

on remplacer (3.1.11) dans (3.1.10), on trouve :

$$\frac{f''}{f}(x) = \frac{g'}{g}(t) = \lambda = \text{constante}$$

comme le théorème(1.3.1) on a $\lambda < 0$, ($\lambda = -\theta^2$)

d'ou:

$$\begin{aligned} f''(x) + \theta^2 f(x) &= 0 \\ g'(x) &= -\theta^2 g(x) \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= C \cos(\theta x) + D \sin \theta x \\ g(t) &= A e^{-(\theta)^2 t} \end{aligned}$$

et en déduit une classe de solution particulière données sur $[0, 1] [0, +\infty[$ par:

$$\Rightarrow u(x, t) = (A e^{-(\theta)^2 t}) (C \cos(\theta x) + D \sin \theta x)$$

où $A, C, D \in \mathbb{R}$

et pour les conditions aux limite on à:

$$u(0, t) = A C e^{-(\theta)^2 t} = 0 \text{ et } A e^{-(\theta)^2 t} \neq 0 \Rightarrow C = 0$$

$$u(l, t) = (A e^{-(\theta)^2 t}) (D \sin \theta x) = 0 \text{ et } A e^{-(\theta)^2 t} \neq 0 \text{ et } D \neq 0 \Rightarrow \sin \theta x = 0$$

donc: $\theta = n\pi$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

pour $n = 1$ on à:

$$u(x, t) = C e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$$

avec $C = A \times D$, $C \in \mathbb{R}$

et pour chercher C on peut utiliser les conditions initiale

$$u(x, 0) = C \sin \pi x = \sin \pi x \Rightarrow C = 1$$

Alors la solution analytique est donnée par:

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$$

Solution par la méthode de décomposition d'Adomian:

Pour résoudre l'équation(3.1.10) par la méthode de décomposition d'Adomian, en déduire simplement un opérateur défini par la même forme de (3.1.4) et on utilise (3.1.5) pour cherche u_0 comme:

$$u_0 = \sin(\pi x)$$

et pour calculer les termes u_1, u_2, u_3, \dots on utilise le schéma (3.1.7) présenté dans la méthode d'Adomian

$$\begin{aligned} u_1 &= L_t^{-1} L_{xx}(u_0) &= -\int_0^t \pi^2 \sin \pi x \partial t \\ u_1 &= -\pi^2 t \sin \pi x \\ u_2 &= L_t^{-1} L_{xx}(u_1) &= \pi^4 \frac{t^2}{2} \sin \pi x \\ u_3 &= L_t^{-1} L_{xx}(u_2) &= -\pi^6 \frac{t^3}{6} \sin \pi x \\ u_4 &= L_t^{-1} L_{xx}(u_3) &= \pi^8 \frac{t^4}{24} \sin \pi x \\ u_5 &= L_t^{-1} L_{xx}(u_4) &= -\pi^{10} \frac{t^5}{120} \sin \pi x \\ &\vdots \end{aligned}$$

dans ce cas , on a sixième décompositions (itérations)

alors la série de la solution est donnée par l'expression suivante:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{n=5} u_n(x, t)$$

$$u(x, t) = \sin(\pi x) - \pi^2 t \sin \pi x + \pi^4 \frac{t^2}{2} \sin \pi x - \pi^6 \frac{t^3}{6} \sin \pi x + \pi^8 \frac{t^4}{24} \sin \pi x - \pi^{10} \frac{t^5}{120} \sin \pi x$$

On pose $y_{an} = u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$ la solution par la méthode Analytique

et y_{ad} la solution par la méthode d'Adomian

$Err = |y_{an} - y_{ad}|$ l'erreure entre les deux solution

dans ce cas en compare entre les deux solutions par cet tableau

x	y_{an}	y_{ad}	Err
0.01	2.84587148708201e-002	2.845871483106e-002	3.976063575606e-011
0.02	5.15427732318829e-002	5.154276821514e-002	5.016739759722e-009
0.03	6.99904116494235e-002	6.999032717243e-002	8.447699226255e-008
0.04	8.44527226607620e-002	8.445209906049e-002	6.236002755983e-007
0.05	9.55029319905723e-002	9.550000251032e-002	2.929480247910e-006
0.06	1.03644771317453e-001	1.036344320501e-001	1.033926736271e-005
0.07	1.09320027166343e-001	1.092900726160e-001	2.995455034201e-005
0.08	1.12915340082326e-001	1.128402356271e-001	7.510445526403e-005
0.09	1.14768322250121e-001	1.145997038167e-001	1.686184333785e-004
0.10	1.15173056142472e-001	1.148260875007e-001	3.469686418101e-004

ce qui donne la convergence de la solution par la MDA vers la solution analytique

3.2 Equation de la chaleur non homogène

Introduction

Dans ce cas on considère l'équation de la chaleur non homogène de dimension un (1) donnée par:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + q(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.2.1)$$

avec la condition initiale déterminée par:

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.2.2)$$

et les conditions aux limites donnée par:

$$u(0, t) = \int_0^l \phi(x, t)u(x, t)dx + g_1(t), \quad 0 < t \leq T \quad (3.2.3)$$

$$u(l, t) = \int_0^l \psi(x, t)u(x, t)dx + g_2(t), \quad 0 < t \leq T \quad (3.2.4)$$

et les fonctions f, g_1, g_2, ϕ, ψ et q sont des fonctions connues, T est une constante donnée.

Pour résoudre cette équation il existe plusieurs méthodes, dans ce cas on compare entre la solution exacte de cette équation, et la solution par la méthode de décomposition d'Adomian par des exemples.

Méthode de décomposition d'Adomian

dans ce cas on écrit l'équation (3.2.1) par la forme standard:

$$L_t u(x, t) = L_{xx} u(x, t) + q(x, t) \quad (3.2.5)$$

et l'opérateur différentiel L_t et L_{xx} est donné respectivement par:

$$\begin{aligned} L_t(\cdot) &= \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} \\ L_{xx}(\cdot) &= \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} \end{aligned}$$

on pose l'inverse de cet opérateur existe et défini par $L_T^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) \partial t$.

on applique l'opérateur inverse L_T^{-1} sur l'équation (3.2.5) on trouve:

$$L_t^{-1} L_t u(x, t) = L_t^{-1} L_{xx} u(x, t) + L_t^{-1} q(x, t)$$

ou

$$u(x, t) = u(x, 0) + L_t^{-1} L_{xx} u(x, t) + L_t^{-1} (q(x, t))$$

et le terme $u(x, 0) = f(x)$, il résulte pour les conditions initiales de (3.2.2) et on note $u_0 = (x, 0)$

on décompose la fonction inconnue $u(x, t)$ par la somme des termes et définie une série:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n(x, t) \quad (3.2.6)$$

avec le terme $u_n(x, t)$ et obtenir par la formule récurrente:

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n(x, t) = f(x) + L_t^{-1} \left\{ L_{xx} \left(\sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n(x, t) \right) \right\} + L_t^{-1}(q(x, t))$$

ou bien:

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= f(x) + L_t^{-1}(q(x, t)) \\ u_1(x, t) &= L_t^{-1}(L_{xx}u_0(x, t)) \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

$$u_{k+1}(x, t) = L_t^{-1}(L_{xx}u_k(x, t)) \quad k \geq 0$$

On remarque que la relation récursive est construite par le terme zéro $u_0(x, t)$, pour définir toutes les termes, est donné dans les condition initiale et l'intégrale de la terme source ($q(x, t)$)

Exemple 3.2.1 on considère le problème(3.2.1), avec:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2, \quad 0 < x < 1 \\ g_1(t) &= \frac{1}{4(t+1)^2}, \quad 0 < t < 1 \\ g_2(t) &= \frac{3}{4(t+1)^2}, \quad 0 < t < 1 \\ \phi(x, t) &= x, \quad 0 < x < 1 \\ \psi(x, t) &= x, \quad 0 < x < 1 \\ q(x, t) &= \frac{-2(x^2 + t + 1)}{(t+1)^3}, \quad 0 < t < 1, \quad 0 < x < 1 \end{aligned}$$

avec la solution exacte donnée par:

$$u(x, t) = \left(\frac{x}{t+1}\right)^2 \tag{3.2.8}$$

Solution par la méthode d'Adomian

on écrire le problème donné par un opérateur de la forme

$$L_t u(x, t) = L_{xx}u(x, t) + q(x, t) \tag{3.2.9}$$

avec:

$$\begin{aligned} L_t(\cdot) &= \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} \\ L_{xx}(\cdot) &= \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} \\ L_t^{-1}(\cdot) &= \int_0^t (\cdot) \partial t \end{aligned}$$

en appliquant l'opérateur d'inverse L_T^{-1} sur l'équation(3.2.9) et on prendre:

$$u(x, t) = u(x, 0) + L_t^{-1}L_{xx}u(x, t) + L_t^{-1}(q(x, t))$$

alors on peut appliquer la formule récurrentte

$$u_0 = u(x, 0) = f(x) + L_t^{-1}q(x, t)$$

donc:

$$\begin{aligned} u_0 &= x^2 + L_t^{-1} \left[\frac{-2(x^2 + t + 1)}{(t + 1)^3} \right] \\ u_0 &= x^2 + L_t^{-1} \left[\frac{-2(x^2 + t + 1)}{(t + 1)^3} \right] \\ &= x^2 + \int_0^t \left[\frac{-2(x^2 + t + 1)}{(t + 1)^3} \right] \partial t \\ &= x^2 + \int_0^t \left(\frac{-2x^2}{(t + 1)^3} \right) \partial t + \int_0^t \left(\frac{-2}{(t + 1)^3} \right) \partial t \end{aligned}$$

alors:

$$u_0(x, t) = x^2 + \frac{x^2}{(t + 1)^2} + \frac{2}{t + 1}$$

et

$$u_{k+1}(x, t) = L_t^{-1}L_{xx}u_k(x, t) \quad k \geq 0 \quad (3.2.10)$$

on trouve les autre termes par récurrence

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= L_t^{-1}L_{xx}u_0(x, t) \\ &= \int_0^t \left(\frac{2}{(t + 1)^2} + 2 \right) \partial t \end{aligned}$$

$$u_1(x, t) = \frac{-2}{t + 1} + 2t$$

$$\begin{aligned}
 u_2(x, t) &= L_t^{-1} L_{xx} u_1(x, t) \\
 &= \int_0^t L_{xx} \left(\frac{-2}{t+1} + 2t \right) \partial t \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

alors:

$$u_k(x, t) = 0 \quad \forall k \geq 0 \quad (3.2.11)$$

et la solution donnée par une série comme:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{k=+\infty} u_k(x, t), \quad k \geq 0 \quad (3.2.12)$$

donc:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= x^2 + \frac{x^2}{(t+1)^2} + \frac{2}{t+1} + \frac{-2}{t+1} + 2t \\
 u(x, t) &= \frac{x^2}{(t+1)^2} + x^2 + 2t
 \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

est une solution par la méthode d'Adomian.

t la solution exact donnée par:

$$u(x, t) = \frac{x^2}{(t+1)^2} \quad (3.2.14)$$

On pose $y_{an} = u(x, t) = \frac{x^2}{(t+1)^2}$ la solution Analytique,

et $y_{ad} = u(x, t) = \frac{x^2}{(t+1)^2} + x^2 + 2t$ la solution par la méthode d'Adomian, et

$Err = |y_{an} - y_{ad}|$ l'erreur entre les deux solutions

dans ce cas on compare entre les deux solutions par ce tableau:

x	y_{an}	y_{ad}	Err
0.1	0.00826446280992	0.19826446280992	0.19000000000000
0.2	0.027777777777778	0.387777777777778	0.36000000000000
0.3	0.05325443786982	0.56325443786982	0.51000000000000
0.4	0.08163265306122	0.72163265306122	0.64000000000000
0.5	0.111111111111111	0.861111111111111	0.75000000000000
0.6	0.140625000000000	0.980625000000000	0.84000000000000
0.7	0.16955017301038	1.07955017301038	0.91000000000000
0.8	0.19753086419753	1.15753086419753	0.96000000000000
0.9	0.22437673130194	1.21437673130194	0.99000000000000
1.0	0.250000000000000	1.250000000000000	1.00000000000000

Exemple 3.2.2 dans ce cas on considère le problème (3.2.1)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.2.15)$$

avec les condition

$$u(x, 0) = f(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad 0 < x < 1 \quad (3.2.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = g(t) = 1 \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.2.17)$$

$$\int_0^b u(x, t) \partial x = m(t) = bt + \frac{1}{6}b^3 \quad (3.2.18)$$

est b appartient de $]0, 1[$

Solution par la méthode d'Adomian

on écrire le problème donné par un opérateur de la forme:

$$L_t u(x, t) = L_{xx} u(x, t) \quad (3.2.19)$$

et utiliser l'opérateur inverse L_t^{-1} sur l'équation(3.2.19).

on prendre:

$$u(x, t) = f(x) + L_t^{-1} L_{xx} u_0(x, t) \quad (3.2.20)$$

alors la formule récurrentte est:

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= f(x) + L_t^{-1}(0) \\ &= \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

et

$$u_{k+1}(x, t) = L_t^{-1} (L_{xx}(u_k(x, t)))$$

donc on peut calculer les autres termes par récurrence

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= L_t^{-1} (L_{xx}(u_0(x, t))) \\ &= \int_0^t \partial t \\ &= t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= L_t^{-1} (L_{xx}(u_1(x, t))) \\ &= \int_0^t (0) \partial t \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc

$$u_{k+1}(x, t) = 0 \quad \forall k \geq 2 \quad (3.2.21)$$

ainsi la solution donnée par une forme de série:

$$u(x, t) = u_0 + u_1$$

alors

$$u(x, t) = \frac{1}{2}x^2 + t$$

est la solution par la MDA

x	y_{an}	y_{ad}	Err
0.1	0.1050000000000000	0.1050000000000000	0.0000000000000000
0.2	0.2200000000000000	0.2200000000000000	0.0000000000000000
0.3	0.3450000000000000	0.3450000000000000	0.0000000000000000
0.4	0.4800000000000000	0.4800000000000000	0.0000000000000000
0.5	0.6250000000000000	0.6250000000000000	0.0000000000000000
0.6	0.7800000000000000	0.7800000000000000	0.0000000000000000
0.7	0.9450000000000000	0.9450000000000000	0.0000000000000000
0.8	1.1200000000000000	1.1200000000000000	0.0000000000000000
0.9	1.3050000000000000	1.3050000000000000	0.0000000000000000
1.0	1.5000000000000000	1.5000000000000000	0.0000000000000000

ce qui donne la convergence de la solution par la MDA vers la solution exacte
ça solution coïncident à la solution exacte unique.

3.3 Equation aux dérivée partielle non linéaire

Dans ce cas on compare entre la solution par la méthode d'Adomian et la solution exact
(donnée par les autre méthodes)

L'équation aux dérivées partielles non linéaire utilisée en plusieurs domaines scientifiques
et technique.

On utilise le modél mathématique pour les EDPs donné par:

$$F(u, u_t, u_x, u_y, x, y, t) = 0 \tag{3.3.1}$$

avec les conditions initiales et aux limites

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \phi(x, y), \quad \forall x, y \in \Omega, \quad \Omega \in \mathbb{R}^2 \\ u(x, y, t) &= f(x, y, t), \quad \forall x, y \in \partial\Omega \end{aligned}$$

où Ω le domaine de la solution et $\partial\Omega$ et la frontière de Ω .

Méthode de décomposition d'Adomian pour les EDPs non linéaire

Le principe de la méthode (MDA) pour résoudre des équations non linéaire quand de la forme

$$Lu + Ru + Nu = g \quad (3.3.2)$$

Le terme linéaire décomposer pour $Lu + Ru$, et le terme non linéaire est représenté par Nu , et on pose que l'opérateur linéaire L est inversible facilement est définie par:

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) \partial t$$

On appliqué cet opérateur dans (3.3.2) alors:

$$u = L^{-1}(g) - L^{-1}(Ru) - L^{-1}(Nu) \quad (3.3.3)$$

La méthode de décomposition d'Adomian représente la solution de (3.3.3) par forme d'une série infinité

$$u = \sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n \quad (3.3.4)$$

et l'opérateur non linéaire décomposer par:

$$Nu = \sum_{n=0}^{n=+\infty} A_n \quad (3.3.5)$$

Avec A_n est le polynôme d'Adomian défini par:

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[\Psi \left(\sum_{i=1}^n \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3.6)$$

on remplace l'équation (3.3.4) et (3.3.5) dans l'équation (3.2.3) nous prendrons,

$$u = \sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n = u_0 + L^{-1}(g) - L^{-1}(R(\sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n)) - L^{-1}(\sum_{n=0}^{n=+\infty} A_n) \quad (3.3.7)$$

par conséquent on peut écrire

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \phi + L^{-1}(g) \\
 u_1 &= -L^{-1}(R(u_0)) - L^{-1}(A_0) \\
 u_2 &= -L^{-1}(R(u_1)) - L^{-1}(A_1) \\
 &\vdots \\
 u_n &= -L^{-1}(R(u_{n-1})) - L^{-1}(A_{n-1})
 \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

avec la condition initiale.

donc on peut chercher tous les termes de u et on obtient la solution générale selon la (MDA) est $u = \sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n$

et on peut approximer la solution dans une partie de la série par:

$$u_M = \sum_{n=0}^{n=M} u_n \tag{3.3.9}$$

avec:

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} u_M = 0$$

Application

dans cette partie, on applique la méthode de décomposition d'Adomian sur un modèle d'équation non linéaire et comparer cette solution par la solution exacte par des exemples.

Exemple 3.3.1 On considère le problème hyperbolique non linéaire:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = u \frac{\partial u}{\partial x}(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 \leq t \leq 1 \tag{3.3.10}$$

avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = \frac{x}{10} \quad 0 < x \leq 1 \tag{3.3.11}$$

l'équation (3.3.10) admette une solution exacte donnée par:

$$u(x, t) = \frac{-x}{(t - 10)} \tag{3.3.12}$$

maintenant on utilise MDA pour résoudre l'équation (3.3.10)

dans ce problème nous avoir:

$$Nu = \Psi u = u \frac{\partial u}{\partial x}, g(x, t) = 0, Ru = 0, Lu = \frac{\partial u}{\partial t} \text{ and } \phi = u(x, 0) = \frac{x}{10}$$

on utilise l'équation (3.3.6) le polynôme d'Adomian, et peut être dérivé pour résulter les $A_n, n \geq 0$

$$\begin{aligned} A_n &= u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ A_0 &= u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ A_1 &= u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ A_2 &= u_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ A_3 &= u_3 \frac{\partial u_0}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_0 \frac{\partial u_3}{\partial x} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

alors on peut calculer les termes de la série de solution par récurrence

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{x}{10} \\ u_1 &= \frac{x}{10} \left(\frac{t}{10} \right) \\ u_2 &= \frac{x}{10} \left(\frac{t}{10} \right)^2 \\ u_3 &= \frac{x}{10} \left(\frac{t}{10} \right)^3 \\ &\vdots \\ u_n &= \frac{x}{10} \left(\frac{t}{10} \right)^n \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

est dans l'équation (3.3.4) on obtient:

$$u(x, t) = \frac{x}{10} \left[1 + \frac{t}{10} + \left(\frac{t}{10} \right)^2 + \left(\frac{t}{10} \right)^3 + \dots + \left(\frac{t}{10} \right)^n + \dots \right] \tag{3.3.15}$$

cela déterminé la solution par la MDA.

et on peut vérifier par le tableaux suivante:

x	y_{an}	y_{ad}	Err
0.1	0.01010101010101	0.01010101010100	0.00000000000001
0.2	0.02040816326531	0.02040816326400	0.00000000000131
0.3	0.03092783505155	0.03092783502900	0.00000000002255
0.4	0.04166666666667	0.04166666649600	0.00000000017067
0.5	0.05263157894737	0.05263157812500	0.00000000082237
0.6	0.06382978723404	0.06382978425600	0.00000000297804
0.7	0.07526881720430	0.07526880834900	0.00000000885530
0.8	0.08695652173913	0.08695649894400	0.00000002279513
0.9	0.09890109890110	0.09890104634100	0.00000005256010
1.0	0.11111111111111	0.11111100000000	0.00000011111111

sa montrer que la MDA est converge vers la solution exacte, pour ce exemple.

Exemple 3.3.2 Nous avons considéré le problème suivant:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = x^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right)^2, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.3.16)$$

avec les conditions initials

$$u(x, 0) = 0$$

l'équation (3.3.16) admet une solution exact donnée par:

$$u(x, t) = x^2 \tanh(t)$$

maintenant on utilise MDA pour résoudre cet problème

nous avoir

$$Nu = \Psi(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, g(x, t) = x^2, Ru = 0, Lu = \frac{\partial u}{\partial t}, \text{ and } \phi = u(x, 0) = 0$$

pour l'équation (3.3.6) en obtenir:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 \\
 A_1 &= 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\
 A_2 &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial x} \\
 A_3 &= 2 \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial x} + 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_3}{\partial x} \\
 A_4 &= \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_3}{\partial x} + 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial u_4}{\partial x}
 \end{aligned}$$

est en utilise l'équation (3.3.8) nous avoir

$$\begin{aligned}
 u_0 &= x^2 t \\
 u_1 &= -\frac{1}{3} x^2 t^3 \\
 u_2 &= \frac{2}{15} x^2 t^5 \\
 u_3 &= -\frac{17}{315} x^2 t^7 \\
 u_4 &= \frac{62}{2835} x^2 t^9 \\
 u_5 &= -\frac{1382}{155925} x^2 t^{11} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Alors:

$$u(x, t) = x^2 \left[t - \frac{1}{3} t^3 + \frac{2}{15} t^5 - \frac{17}{315} t^7 + \frac{62}{2835} t^9 - \frac{1382}{155925} t^{11} + \dots \right]$$

sa la solution par la MDA.

qui présenter la solution exact de(3.3.16)

x	y_{an}	y_{ad}	Err
0.1	0.00099667994625	0.00099667994625	0.00000000000000
0.2	0.00789501280900	0.00789501280916	0.00000000000017
0.3	0.02621813512064	0.02621813512613	0.000000000000549
0.4	0.06079183396084	0.06079183266281	0.00000000129802
0.5	0.11552928931500	0.11552923205267	0.00000005726233
0.6	0.19333784411929	0.19333682252111	0.00000102159818
0.7	0.29614021078741	0.29612933798589	0.00001087280152
0.8	0.42498353297142	0.42490221596526	0.00008131700617
0.9	0.58020127486121	0.57973250432406	0.00046877053715
1.0	0.76159415595576	0.75938431938432	0.00220983657145

sa montrer que la MDA est converge vers la solution exacte, pour ce exemple.

Conclusion

Dans ce travail, on utilise la méthode de décomposition d'Adomian pour résoudre des exemples des problèmes de type (EDPs) et on démontre que la méthode de MDA est efficace pour déterminer la solution approchée de ces problèmes donnée (linéaire, non linéaire), mais cette convergence n'est pas stable pour tous les problèmes donnés.

Et pour accélérer la convergence de cette méthode on utilise une modification sur la méthode de décomposition d'Adomian, cette méthode notée MDAm.

Bibliographie

- [1] K.Abbau, *Cours de Magister*, Université de Sétif, 1999.
- [2] A.H.Ali and A.S.J.Al-Saif, *Adomian décomposition method for solving some models of nonlinear partial differential equations*, Basrah Journal of Scienc(A), Vol.26(1)-p1-11, 2008
- [3] R.L. Burdin and J.D.Faires, *Numerical methods*, Third edition, Brooks cole, 2002.
- [4] A. Cheniguel, *Solving Non Homogeneous Heat Equation by the Adomian Decomposition Method*, International Mthematical Forum, Vol. 6,no. 13, p 639-649, 2011
- [5] G.DUPONT, *Séries et intégrales*, Office des Publications Universitaires 29,N° 1412 , Hydra.Alger,1983
- [6] Kamel Al-Khled, Dogan Kaya and Muhammad Aslam Noor, *Numerical comparison of methods for solving parabolic equations*, Applied Mathematics and Computation, vol.157. p 735-743, 2004
- [7] B.O.KONFE,Nouvelles méthodes mathématiques Alinor et Adomian pour la Bio-médecine, Thèse de docteur Université de ouagadougou, 10/12/2005
- [8] L. D. Menza, *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, N° d'imprimeur: 902114, Cassini, parise, 2009.
- [9] M.Moussai, *Distribution: Cours du 1^{er} Master*, Université de M'sila, 2012
- [10] Nelly POINT et Jacques-Hervé SAIAC, *Equations Aux Dérivées Partielles Mathématiques et Méthodes Numériques*, E.S.C.P.I ,G.M.2-Socond Cycle,13 Mai 2008.

[REDACTED]

Résumé:

Dans ce travail on présente la méthode de décompositions d'Adomian pour la résolution des EDPs, du première ordre linéaire et non linéaire et on remarque la différence entre la solution par cette méthode et la solution par des méthodes analytique et on résulte l'efficacité de cette méthode

:Mots clés

méthode de décomposition d'Adomian, les séries, Equation aux dérivées partielles

Abstract:

In this work we present the principal of this methods called Adomian decomposition method (ADM), to solve the linear and non linear equation, the form partial differential equation, and the results obtained are compared between the solution and the exact solution.

Keywords: the Adomian decomposition method, the partial differential equation, the series.