

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

FACULTE : DES SCIENCES

DEPARTEMENT : PHYSIQUE

N° : .....



DOMAINE : SCIENCE DE LA MATIERE

FILIERE : PHYSIQUE

OPTION : PHYSIQUE THEORIQUE

Mémoire présenté pour l'obtention  
Du diplôme de Master Académique

Par: ben Azouz wissame

Intitulé

Nouveau traitement de l'équation de Schrödinger modifiée pour le  
potentiel anharmonique en l'espace phase non commutatif à trois  
dimensions dans les symétries de la mécanique quantique  
généralisée

Soutenu le : 27 /06 /2018 devant le jury composé de:

S.MENOUAR	Université M <sup>ed</sup> BOUDIAF M'sila	Président
A.MAIRECH	Université M <sup>ed</sup> BOUDIAF M'sila	Rapporteur
DHABABI Mourad	Université M <sup>ed</sup> BOUDIAF M'sila	Examineur1
S.MEDJBER	Université M <sup>ed</sup> BOUDIAF M'sila	Examineur2

Année universitaire : 2017/2018

## *Dedicaces*

Je remercie le dieu pour m'avoir donné la force d'accomplir ce travail

Pour aller plus loin In **chaa Allah**

Je dédie ce travail à mes parents, Ma mère pour ses encouragements et ses prières tout au long de mes études, mon père pour tout ce qu'il a fait pour que je puisse avoir ce résultat.

Je dédie à mon frère Walid et mes sœurs Fadhila, Amel, fatna et wafa Malek, et mes amis zahia, rokia, latifa, Karima, iman, Fatiha, samra, ibtissem, khansa, afef ,marwa ,warda et chahira,

Et je les remercie pour leurs

Encouragements et leurs aides, et à ma grande famille

A tout ceux qui aiment Ben Azouz et ceux que Ben Azouz aime

***Remerciements :***

*Avant tout je remercie dieu tout puissant de m'avoir donné le courage, la santé, la patience jusqu'à l'achèvement de ce mémoire.*

*J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur Pr. **A.MAIRECHE** Professeur à l'université de Mohammed Boudiaf M'sila, pour avoir assuré l'encadrement de ce travail. Je le remercie pour son Soutien, son orientation et ses conseils.*

*Je tiens aussi à remercier vivement l'ensemble des membres de jury : Monsieur **M, DEBBABI**, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance, et Monsieur **A.METATELA** d'avoir accepté de faire partie du jury et de Juger ce travail. Je tiens à remercier mes parents qui sont fatigués à cause de moi.*

## Sommaire



### *Introduction générale*

1- Généralité.....	1
2- Le but principale.....	1
3- Représentation de la mémoire.....	2

### *Chapitre I : La structure quantique de l'espace-phase non commutative*

I.1.Introduction .....	3
I.2.Rappelle sur la structure de la mécanique quantique ordinaire .....	3
I.3.la structure quantique de l'espace-phase non commutative.....	6
I.4.produit star.....	7
I.4.1.Formule de Moyal-Weyl.....	7
I.4.2.Propriétés du de produit star.....	8
I.5.la Méthode de Boopp's Shift .....	8
I.6.Application sur le potentiel anharmonique a trois dimensions .....	11

*Chapitre II :*  
*Etude d'équation de Schrödinger pour le potentiel*  
*anharmónique dans l'espace ordinaire à trois*  
*dimensions*

II-1-Introduction.....	13
II.2. Etude de l'équation de Schrödinger pour le potentiel anharmónique dans l'espace - ordinaire à trois dimensions.....	13
II.2.1.Le moment orbitale.....	15

*Chapitre III :*  
**Nouveau traitement de l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel anharmónique dans l'espace phase non commutatif à trois dimensions dans les symétries de la mécanique quantique**

III-1-Introduction.....	18
III.2. L'opérateur d' Hamiltonien pour le potentiel anharmónique dans l'espace-phase Non Commutatif (NC : 3D-RSP).....	18
III.3. L'opérateur Spin-Orbite modifié pour le potentiel anharmónique dans l'espace-phase non commutatif (NC : 3D-RSP).....	22
III.3. Le spectre énergétique .....	23
III.3.1 Le spectre exacte produit par l'opérateur spin-orbite pour le potentiel anharmónique en (NC : 3D-RSP) .....	23
Conclusion générale .....	29
Références Bibliographiques .....	30

# Introduction générale

Malgré le passage de plus d'un siècle du temps sur l'apparition d'une équation Schrödinger, c encore une vraie application par les chercheurs en traitant beaucoup de problèmes physiques niveau atomique et subatomique. Ils ont été de grands succès en réalisation des solutions pour deux phénomènes principales, le potentiel purement Coulombien et l'Oscillateur Harmonique [1-2].

Actuellement, l'équation de Schrödinger est développé par plusieurs méthodes : la méthode de Nikiforov-Uvarov, super-symétrique mécanique quantique, calcule numérique, interactions asymptotique, l'approché de l'intégrale de chemin ...etc. pour étudier les différents un modèles quantique, dans les différents domaines de la science atomique, nucléaire, moléculaire....etc. [3-20].

En cas particulier l'équation de Schrödinger peut être étudié des atomes hydrogéniques et les interactions entre les quarks et l'anti quarks dans les mésons en basé sur le potentiel anharmonique à trois dimensions [21].

## ↳ but principal :

L'objectif principal de ce travail est d'étudier l'équation de Schrödinger modifiée pour atomes hydrogéniques sous l'influence du potentiel anharmonique dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions pour approfondir l'étude le Prof. *Tapas Das*, intitulé par : Treatment of N-dimensional Schrödinger Equation for Anharmonic Potential via Laplace Transform, qui publié en EJTP 13, No. 35 (2016) 207–214 [21].

## ↳ présentation du mémoire :

mémoire est constitué de trois chapitres qui sont structurés comme suit :

### ➤ Chapitre I :

Nous avons exposé quelques notions et hypothèses caractérisé la structure quantique et physique de l'espace-phase non commutatif,

### ➤ Chapitre II :

Nous avons présenté les résolutions de l'équation de Schrödinger pour le potentiel anharmonique dans l'espace ordinaire à 3 dimensions.

➤ **Chapitre III :**

Nous avons étudié l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel anharmonique dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions, on va calculer les corrections d'énergie.

Et en termine par une conclusion qui résume les résultats obtenus de notre travail.

# Chapitre I

## La structure quantique de l'espace-phase non-commutatif à trois dimensions

### I.1. Introduction :

Dans ce premier chapitre ont traité les postulats et les hypothèses caractérisé la structure quantique et physique de l'espace-phase non-commutatif à trois dimensions, les éléments principales sont :

- Rappel sur la structure quantique ordinaire,
- Les nouveaux postulats de l'espace-phase non-commutatif,
- Le produit star et ces propriétés, la formule de Moyal-Weyl,
- La méthode de Bopp's Shift et ces application pour un potentiel centrale général,
- La méthode de Bopp's Shift et ces application pour un potentiel centrale spéciale de la forme  $v(r) = ar^2 + br - \frac{c}{r}$ , connue par le potentiel anharmonique ou Killingbeck potential, dans l'espace-phase non-commutatif à trois dimensions (NC -3D : RSP).

### I.2. Rappel sur la structure de la mécanique quantique ordinaire :

- On sait que les débuts de la physique quantique connue en 1900, lorsque Planck, quantifier l'énergie de la lumière  $E_\gamma = h\nu$   
( $h \approx 6,6262 \cdot 10^{-34}$  *joul - sec onde*).
- Actuellement, la mécanique quantique ordinaire est formulée sur l'espace commutatif des coordonnées de variable et le moment canonique des opérateurs hermétiques  $(x_i, p_i)$ , suivants [1-2] :

$$\begin{cases} [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \\ [x_i, x_j] = 0 \\ [p_i, p_j] = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (I.1)$$

Où  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  et  $\delta_{ij}$  sont la constant de Planck réduit et le symbole ordinaire de Kronecker, respectivement, la quantification satisfait par les deux fondamentales principes concernant l'énergie el l'impulsion  $E$  et  $p_i$  :

$$\begin{aligned} E &\rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \\ p_i &\rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned} \dots\dots\dots (I.2)$$

- On sait que, l'énergie d'une particule de masse  $m_0$  soumise des forces produit par un potentiel  $V(\vec{r}, t)$ , en mécanique classique est donnée par :

$$E = \frac{\vec{P}^2}{2m_0} + V(\vec{r}, t) \dots\dots\dots (I.3)$$

- Maintenant on applique les deux principes de quantification canonique présentée dans l'équation (I.2), on trouve :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta + V(\vec{r}, t) \right] \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} \dots\dots\dots (I.4)$$

Où  $\Delta$  est le laplacien, en trois dimensions prendre l'expression suivant :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \dots\dots\dots (I.5)$$

- L'équation (I.4) connait par l'équation de Schrödinger dans l'espace-temps ordinaire basé sur les postulats présenté par (I.1).  $\Psi(\vec{r}, t)$  Est la fonction complexe d'onde, qui déterminer la probabilité de trouver la particule à l' instant t dans un volume  $d^3r$  entourant le point  $\vec{r}$  [1-2] :

$$dP = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r \dots\dots\dots (I.6)$$

- On peut transformer la fonction complexe d'onde  $\Psi(\vec{r}, t)$  dans l'espace d'impulsion  $\Psi(\vec{p}, t)$  par transformation de Fourier et on détermine la probabilité de  $\vec{p}$  par :

$$dP(\vec{p}) = |\Psi(\vec{p}, t)|^2 d^3p \dots\dots\dots (I.7)$$

Ce qui donne les relations d'incertitude de Heisenberg :

$$\begin{cases} \Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \dots\dots\dots(I.8) \\ \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2} \end{cases}$$

➤ Une valeur très importante caractérisée la mécanique quantique ordinaire, connaît par la valeur moyenne d'un opérateur  $\hat{A}$  noté par  $\langle a \rangle$ , prendre les deux expressions dans le cas à deux et trois dimensions, respectivement :

$$\begin{aligned} \langle a \rangle &= \int \Psi(\vec{r}, t)^* \hat{A} \Psi(\vec{r}, t) d^2 r \\ \langle a \rangle &= \int \Psi(\vec{r}, t)^* \hat{A} \Psi(\vec{r}, t) d^3 r \end{aligned} \dots\dots\dots(I.9)$$

Avec l'élément de surface  $d^2 r$  et l'élément de volume  $d^3 r$ .

➤ Le vecteur densité de courant de probabilité  $\vec{J}(\vec{r}, t)$  est donnée par :

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{2mi} (\Psi^* \Delta \Psi - \Psi \Delta \Psi^*) \dots\dots\dots(I.10)$$

On peut aller à la forme locale de l'équation de continuité ;

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) = 0 \dots\dots\dots(I.11)$$

Ou  $\rho(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2$  traduit la densité de probabilité ; elle est parfaitement semblable à l'équation de conservation de la charge.

➤ En mécanique quantique le moment angulaire global  $\vec{J}$  est la somme des deux moments angulaire  $\vec{L}$  et le moment de spin  $\vec{S}$ , donc [1-2] :

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \dots\dots\dots(I.12)$$

Ce qui permet de trouver le couplage spin-orbite  $\vec{L}\vec{S}$  de la façon suivante :

$$\vec{L}\vec{S} = \frac{1}{2} [\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2] \dots\dots\dots(I.13)$$

Les valeurs propres des opérateurs  $\vec{J}^2, \vec{L}^2$  et  $\vec{S}^2$  en mécanique quantique ( $\hbar = 1$ ) :

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 \Psi &= j(j+1) \Psi \\ \vec{L}^2 \Psi &= \ell(\ell+1) \Psi \dots\dots\dots(I.14) \\ \vec{S}^2 \Psi &= s(s+1) \Psi \end{aligned}$$

Les relations (I.13) et (I.14) permettent d'obtenir :

$$\bar{L}\bar{S}\Psi = \frac{1}{2}[j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)]\Psi \dots\dots\dots(I.15)$$

Avec  $\left|l - \frac{1}{2}\right| \leq j \leq \left|l + \frac{1}{2}\right|$ , donc on peut déduire pour un particule fermionique comme alors

l'électron, les valeurs possible  $j = l + \frac{1}{2}$  et  $j = l - \frac{1}{2}$  correspondant une polarité de spin up et polarité de pin down.

### I.3. La structure quantique de l'espace-phase non-commutatif à trois dimensions :

L'idée du non commutativité de l'espace introduit par Heisenberg dans les années 30 puis développée par H. Syndre à la fin des années 40 [22-23], satisfait par nouveaux structure algébrique, connait par le règle de noncommutative commutations relations [22-52] :

$$\begin{cases} [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \\ [x_i, x_j] = 0 \\ [p_i, p_j] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \\ [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\hbar\theta_{ij} \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\bar{\theta}_{ij} \end{cases} \dots\dots\dots(I.16)$$

Ou  $(i, j = \overline{1, N})$  et N la dimensions de l'espace, l'espace -temps non commutatif est définie en terme d'un ensemble de générateur  $\hat{x}_i$  dits coordonnée non commutatif :

$$\begin{aligned} x_i &\rightarrow \hat{x}_i = f(x_i, p_i) \\ p_i &\rightarrow \hat{p}_i = g(x_i, p_i) \end{aligned} \dots\dots\dots(I.17)$$

Les deux paramètres  $(\theta^{\mu\nu} =, \bar{\theta}^{\mu\nu}) \equiv -(\theta^{\nu\mu} =, \bar{\theta}^{\nu\mu}) = \varepsilon^{\mu\nu}(\theta, \bar{\theta})$  sont deux tenseurs antisymétriques induits par la non commutativité position-position et impulsion-impulsion, respectivement. Il est très important de noter les dimensions  $(\theta^{\mu\nu}, \bar{\theta}^{\mu\nu})$  est  $((Lenngh)^2, (Impulsion)^2)$  respectivement.

Dans ce mémoire de master on sintérisé par l'espace-phase à trois dimensions (N=3), donc les indices prendre les valeurs  $(i, j = \overline{1, 3})$ , dans ce cas particulière, satisfait les règles de commutations canonique suivant :

$$\begin{cases} [\hat{x}_1, \hat{p}_1] = [\hat{x}_2, \hat{p}_2] = [\hat{x}_3, \hat{p}_3] = i\hbar \\ [\hat{x}_1, \hat{x}_1] = [\hat{x}_2, \hat{x}_2] = [\hat{x}_3, \hat{x}_3] = 0 \\ [\hat{x}_1, \hat{x}_2] = i\hbar\theta_{12} \\ [\hat{x}_1, \hat{x}_3] = i\hbar\theta_{13} \\ [\hat{x}_2, \hat{x}_3] = i\hbar\theta_{23} \end{cases} \dots\dots\dots(I.18)$$

Et

$$\begin{cases} [\hat{p}_1, \hat{p}_1] = [\hat{p}_2, \hat{p}_2] = [\hat{p}_3, \hat{p}_3] = 0 \\ [\hat{p}_1, \hat{p}_2] = i\hbar\bar{\theta}_{12} \\ [\hat{p}_1, \hat{p}_3] = i\hbar\bar{\theta}_{13} \\ [\hat{p}_2, \hat{p}_3] = i\hbar\bar{\theta}_{23} \end{cases} \dots\dots\dots(I.19)$$

**Remarque :**

Dans l'espace non commutatif la construction des théories de jauge se fait de la même manière qu'en théorie de jauge sur un espace ordinaire [23-29] :

- Les champs classiques remplacés par les champs non commutatifs.
- Le produit ordinaire commutatif remplacé par le produit de Moyal-Weyl (produit star).

Il très important de noter que les relations de commutation dans l'espace non commutatif, satisfait par nouveaux produit connue par le produit star.

**I.4.Le produit star :**

**I.4.1.Formule de Moyal-Weyl :**

Le formalisme du star-produit introduit par Harman Weyl et Wigner pour permettre une description de la mécanique quantique en termes d'espace phases non commutatif [23-53] :

$$(f * g)(x, p) = (fg)(x, p) - \frac{i}{2} \left( \theta^{\mu\nu} \partial_\mu^x f \partial_\nu^x g + \bar{\theta}^{\mu\nu} \partial_\mu^p f \partial_\nu^p g \right) (x, p) \quad (I.20)$$

Avec  $\partial_\mu^x f(x, p) = \frac{\partial f(x, p)}{\partial x^\mu}$  et  $\partial_\mu^p f(x, p) = \frac{\partial f(x, p)}{\partial p^\mu}$  .  $(f * g)(x, p)$  Représenté la nouvelle produit dans l'espace phase non commutatif et  $(fg)(x, p)$  représenté l'ordinaire produit dans l'espace commutatif.

**I.4.2.Propriétés du de produit star :**

Le produit star vérifie les déférentes propriétés suivant [23-28] :

- a)-non commutatif :

$$f(x, p) * g(x, p) \neq g(x, p) * f(x, p) \quad (I.21)$$

- b)-associatif :

$$(f(x, p) * g(x, p)) * h(x, p) = f(x, p)(g(x, p) * h(x, p)) \quad (I.22)$$

- c)-la relation du complexe conjugué

$$(f(x, p) * g(x, p))^* = f(x, p)^* * g(x, p)^* \tag{I.23}$$

➤ d)-La relation d'intégrale :

$$\int d^D x (f * g)(x, p) = \int d^D x (g * f)(x, p) = \int d^D x f(x, p)g(x, p) \tag{I.24}$$

➤ e)-Permutation cyclique :

$$\int d^D x (f * g * h)(x, p) = \int d^D x (h * f * g) = \int d^D x (f * h * g) \tag{I.25}$$

➤ f)-Satisfait la règle de Leibniz :

$$\partial_\mu (f * g) = \partial_\mu f * g + f \partial_\mu g \tag{I.26}$$

### I.5.1a Méthode de Bopp's Shift :

Pour écrire l'équation de Schrödinger dans l'espace-phase non-commutatif, on applique les étapes suivant [30-53] :

- On remplace la fonction d'onde ordinaire  $\Psi(\vec{r}, t)$  par nouveaux fonction d'onde  $\hat{\Psi}(\vec{\hat{r}}, t)$ ,
- On remplace l'opérateur d'Hamiltonien ordinaire  $H(p_i, x_i)$  par nouveaux operateur  $\hat{H}(\hat{p}_i, \hat{x}_i)$ ,
- On remplace l'énergie ordinaire  $E$  par nouveaux valeur  $E_{nc}$ ,
- On remplace le produit ordinaire par le produit star.

Les quatre étapes permirent d'obteueur l'équation de Schrödinger dans l'espace-phase non-commutatif

$$\hat{H}(\hat{p}_i, \hat{x}_i) * \hat{\Psi}(\vec{\hat{r}}, t) = E_{nc} \hat{\Psi}(\vec{\hat{r}}, t) \tag{I.27}$$

La fonction d'onde  $\hat{\Psi}(\vec{\hat{r}}, t)$  est peut être écrié :

$$\hat{\Psi}(\vec{\hat{r}}, t) = \hat{\Psi}(\vec{\hat{r}}) f(t) \tag{I.28}$$

Cela permet de simplifier l'équation (I.27) :

$$\hat{H}(\hat{p}_i, \hat{x}_i) * \hat{\Psi}(\vec{\hat{r}}) = E_{nc} \hat{\Psi}(\vec{\hat{r}}) \tag{I.29}$$

La méthode Bopp's Shift permet de traité l'équation de Schrödinger déformée (I.27) comme une équation ordinaire à condition d'appliquée les deux translations :

$$H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \Psi(\vec{\hat{r}}) = E_{nc} \Psi(\vec{\hat{r}}) \tag{I.30}$$

Avec l'opérateur d'Hamiltonien  $H(\hat{p}_i, \hat{x}_i)$  peut être écrié en trois variétés [40-53] :

$$\left\{ \begin{array}{l} H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \equiv H\left(\hat{p}_i = p_i + \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j\right) \text{ pour (NC - 3D : RSP)} \\ H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \equiv H\left(\hat{p}_i = p_i, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j\right) \text{ pour (NC - 3D : RS)} \\ H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \equiv H\left(\hat{p}_i = p_i + \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j, \hat{x}_i = x_i\right) \text{ pour (NC - 3D : RS)} \end{array} \right. \quad (\text{I.31})$$

C'est-à-dire, la variété (I.29), (I.30) et (I.31) correspond :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_i \rightarrow \hat{p}_i = p_i + \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j \\ x_i \rightarrow \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j \end{array} \right. \dots\dots\dots (\text{I.32})$$

Et

$$\left\{ \begin{array}{l} p_i \rightarrow \hat{p}_i = p_i \\ x_i \rightarrow \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j \end{array} \right. \dots\dots\dots (\text{I.33})$$

Et

$$\left\{ \begin{array}{l} p_i \rightarrow \hat{p}_i = p_i + \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j \\ x_i \rightarrow \hat{x}_i = x_i \end{array} \right. \dots\dots\dots (\text{I.34})$$

**Notation** : Notre travail est fait dans l'espace-phase non commutatif a trois dimensions, pour cela les coordonnées  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$  et  $(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3)$  dans les relations (I .16), (I .17), (I .18) et (I.19) est remplacé par le commutateur  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  et  $(\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_1 = \hat{x} \\ \hat{x}_2 = \hat{y} \\ \hat{x}_3 = \hat{z} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \hat{p}_1 = \hat{p}_x \\ \hat{p}_2 = \hat{p}_y \\ \hat{p}_3 = \hat{p}_z \end{array} \right. \quad (\text{I.35})$$

Et:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_1 = x_1 - \frac{\theta_{12}}{2} p_2 - \frac{\theta_{13}}{2} p_3 \\ \hat{x}_2 = x_2 - \frac{\theta_{21}}{2} x_2 - \frac{\theta_{23}}{2} x_3 \\ \hat{x}_3 = x_3 - \frac{\theta_{31}}{2} x_1 - \frac{\theta_{32}}{2} x_2 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \hat{p}_1 = p_1 + \frac{\bar{\theta}_{12}}{2} x_2 + \frac{\bar{\theta}_{13}}{2} x_3 \\ \hat{p}_2 = p_2 + \frac{\bar{\theta}_{21}}{2} x_2 + \frac{\bar{\theta}_{23}}{2} x_3 \\ \hat{p}_3 = p_3 + \frac{\bar{\theta}_{31}}{2} x_1 + \frac{\bar{\theta}_{32}}{2} x_2 \end{array} \right. \quad (\text{I.36})$$

Avec le carré de ( $\hat{r}$  et  $\hat{p}$ ) sont donné par :

$$\hat{r}^2 = \hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2 \quad \text{Et} \quad \hat{p}^2 = \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 \quad (\text{I.37})$$

On utilise le produit star pour résoudre l'équation de Schrödinger non commutatif, le but est remplacé le produit star avec le produit habituel par Bopp's shift.

La méthode de Bopp's Shift est considéré comme une conséquence du produit star entre l'opérateur du potentiels  $\hat{V}(\hat{x})$  et La fonction d'onde complexe  $\hat{\Psi}(\hat{r})$  :

$$\left( \frac{\vec{p}^2}{2m_0} + \hat{V}(\hat{x}) \right) * \hat{\Psi}(\hat{x}) \rightarrow \left( \frac{p^2}{2m_0} + V(x) \right) \Psi(x) \quad (\text{I.38})$$

Les deux opérateurs  $\hat{r}$  et  $\hat{p}$  écrire en trois dimension dans l'espace et phase non commutatives [35-53] :

$$\begin{cases} \hat{r}^2 = r^2 - \vec{L}\vec{\theta} \\ \frac{\hat{p}^2}{2m_0} = \frac{p^2}{2m_0} + \frac{\vec{L}\vec{\theta}}{2m_0} \end{cases} \quad (\text{I.39})$$

Et

$$\begin{cases} L\theta = L_x\theta_1 + L_y\theta_2 + L_z\theta_3 \\ \vec{L}\vec{\theta} = L_x\vec{\theta}_{12} + L_y\vec{\theta}_{23} + L_z\vec{\theta}_{13} \end{cases} \quad (\text{I.40})$$

Avec  $\theta = \frac{\theta}{2}$

## I.6. Application sur le potentiel anharmonique à trois dimensions :

On applique les notions du précédent paragraphe sur le potentiel anharmonique  $v(r) = ar^2 + br - \frac{c}{r}$ , ce potentiel composé par trois termes :

- Le terme quadratique : sous la forme  $V_1(r) = ar^2$ , est semblable à l'oscillateur harmonique
- Le terme linéaire : sous la forme  $V_2(r) = ar$
- Le terme de Coulomb : sous la forme  $v_3(r) = -\frac{c}{r}$  est semblable à l'atome

d'hydrogène

L'opérateur Hamiltonien  $H(\hat{p}_i, \hat{x}_i)$  correspondant la variété générale du non commutativité de l'espace-phase :

$$H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \equiv H\left(\hat{p}_i = p_i + \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j\right) \dots\dots\dots (I.41)$$

Dans l'espace –phase non commutatif a trois dimensions (NC-3R : RSP), l'opérateur Hamiltonien  $H(\hat{p}_i, \hat{x}_i)$  est donnée par :

$$H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \equiv H\left(\hat{p}_i = p_i + \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j\right) = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} + V(\hat{r}) \quad (I.42)$$

Avec :

$$V(\hat{r}) = a\hat{r}^2 + b\hat{r} - \frac{c}{\hat{r}} \quad (I.43)$$

et

$$\frac{\hat{p}^2}{2m_0} = \frac{p^2}{2m_0} + \frac{\vec{L}\vec{\Theta}}{2m_0} \dots\dots\dots (I.44)$$

Les résultants de l'équation (I.39) permet de calculer les trois terms  $a\hat{r}$  ,  $b\hat{r}$  et  $-\frac{c}{\hat{r}}$  :

$$\begin{cases} \frac{c}{\hat{r}} = \frac{c}{r} + \frac{c}{2r^3} \vec{L}\vec{\Theta} + O(\theta) \\ b\hat{r} = br - \frac{b}{2r} \vec{L}\vec{\Theta} + O(\theta) \\ a\hat{r}^2 = ar^2 - a \vec{L}\vec{\Theta} + O(\theta) \end{cases} \quad (I.45)$$

Donc

$$v(\hat{r}) = ar^2 + br - \frac{c}{r} + \left\{ \frac{c}{2r^3} - \frac{b}{2r} - a \right\} \vec{L}\vec{\Theta} \dots\dots\dots (I.46)$$

La combinaison entre les deux équations (I.44) et (I.45) donnée :

$$H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \equiv H\left(\hat{p}_i = p_i + \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j\right) = \frac{p^2}{2\mu} + ar^2 + br - \frac{c}{r} + \left(\frac{c}{2r^3} - \frac{b}{2r} - a\right) \vec{L}\vec{\Theta} + \frac{\vec{L}\vec{\Theta}}{2m_0} \quad (I.47)$$

L'opérateur  $H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \equiv H\left(\hat{p}_i = p_i + \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j\right)$  est la somme deux opérateurs

$H(p_i, x_i)$  et  $H_{pert}(p_i, x_i)$

$$H(p_i, x_i) = \frac{p^2}{2m_0} + ar^2 + br - \frac{c}{r} \quad (\text{I.48})$$

Et

$$H_{pert} = \frac{\vec{\mathbf{L}}\vec{\Theta}}{2m_0} + \left( \frac{c}{2r^3} - \frac{b}{2r} - a \right) \vec{\mathbf{L}}\vec{\Theta} \quad (\text{I.49})$$

## Chapitre II

# Etude de l'équation de Schrödinger pour le potentiel anharmonique dans l'espace-ordinaire à trois dimensions

### II.1. Introduction :

L'équation de Schrödinger a été proposée en 1926 sur la base des Matrices de Heisenberg 1925 et c'est développée pour décrire les petits objets (relativement : les atomes), et la résolution analytique de l'équation de Schrödinger à trois dimension reste un problème très important intervenant dans de nombreux calculs de la physique moderne.

Dans ce chapitre on va résumer les solutions de l'équation de Schrödinger pour le potentiel anharmonique à trois dimensions et on révisée les fonctions d'ondes, les énergies correspondante à l'état excités  $n$ .

### II.2. Etude de l'équation de Schrödinger pour le potentiel anharmonique dans l'espace –ordinaire à trois Dimensions :

Le potentiel (Anharmonic) ou anharmonique est considéré potentiel purement central, dépend par la distance  $r$ , physiquement, ce potentiel jeu un rôle très important [21] :

- 1- Pour étudier des atomes hydrogéniques
- 2- Pour étudier les interactions entre les quarks et l'anti quarks dans les mésons.

L'expression analytique de ce potentiel dans les coordonnées sphériques [21] :

$$V(r) = ar^2 + br - \frac{c}{r} \dots\dots\dots \text{(II.1)}$$

Ce potentiel composé par trois termes, le premier terme est le potentiel d'oscillateur harmonique  $V_1(r) = ar^2$  et la deuxième connue par terme linéaire  $V_2(r) = br$  et le dernière le potentiel Colombien  $V_3(r) = -\frac{c}{r}$ . Les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des constantes. Dans l'espace de Hilbert à  $N$  dimension, l'équation de Schrödinger est donnée par:

$$H\Psi(\vec{r}; t) = E\Psi(\vec{r}; t) \dots\dots\dots \text{(II.2)}$$

Où  $E$  est l'énergie total du system et l'opérateur  $H$  donnée par :

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m_0} + V(\vec{r}, t) \dots\dots\dots (II.3)$$

Pour les états stationnaires, la fonction d'onde  $\Psi(\vec{r}; t)$  peut être écrite de la façon suivante :

$$\Psi(\vec{r}; t) = \exp\left(-i \frac{E}{\hbar} t\right) \Psi(\vec{r}) \dots\dots\dots (II.4)$$

Avec  $H$  est composé de deux termes, le premier connu par le terme cinétique et la deuxième le potentiel d'interaction :

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m_0} + V(r) \dots\dots\dots (II.5)$$

Où  $\mu$  est la masse réduite. Si on n'applique les deux principes de quantification canonique

$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  et  $p_i \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x^i}$ , on a trouvé l'équation de Schrödinger ordinaire :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta + V(r) \right] \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} \dots\dots\dots (II.6)$$

Dans l'espace ordinaire à trois dimensions, et en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ , l'opérateur Laplacien s'écrit comme suit :

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 (\sin \theta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \dots\dots\dots (II.7)$$

Où bien, de la forme équivalente :

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2) - \frac{\tilde{L}^2}{\hbar^2 r^2} \dots\dots\dots (II.8)$$

Avec :

$$L^2 = -\hbar^2 \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{(\sin \theta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \dots\dots\dots (II.9)$$

### II.2.1 Les moments cinétiques :

En mécanique quantique, les moments sont classés en trois familles :

- Le moment cinétique orbital noté par  $\vec{L}$
- Le moment de spin, noté par  $\vec{S}$
- Le moment total  $\vec{J} = \vec{S} + \vec{L}$

Le moment cinétique orbital  $\vec{L}$  défini par :

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \dots\dots\dots (II.10)$$

Avec  $\vec{p} = m_0 \vec{V}$  et les composantes cartésiennes est donnée par :

$$\vec{L} = \begin{cases} L_x = y p_z - z p_y \\ L_y = z p_x - x p_z \\ L_z = x p_y - y p_x \end{cases} \dots\dots\dots (II.11)$$

Donc :

$$\begin{cases} L_x = \frac{\hbar}{i} \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ L_y = \frac{\hbar}{i} \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ L_z = \frac{\hbar}{i} \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{cases} \dots\dots\dots (II.12)$$

En coordonnées sphérique  $(r, \theta, \varphi)$  les composantes cartésiennes est donnée par :

$$\hat{L} = \begin{cases} \hat{L}_X = \frac{\hbar}{i} \left( -\cos \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} - \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ \hat{L}_Y = \frac{\hbar}{i} \left( -\sin \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ \hat{L}_Z = \frac{\hbar}{i} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \end{cases} \dots\dots\dots (II.13)$$

et

$$\begin{cases} L_z y_m^l(\theta, \varphi) = m \hbar y_m^l(\theta, \varphi) \\ L^2 y_m^l(\theta, \varphi) = l(l+1) \hbar^2 y_m^l(\theta, \varphi) \end{cases} \dots\dots\dots (II.14)$$

Avec  $l = \overline{0, n-1}$  . Et le moment cinétique  $J$  est :

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2 \dots\dots\dots (II.15)$$

et :

$$\begin{cases} \hat{J}^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle \\ \hat{J}_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle \end{cases} \dots\dots\dots (II.16)$$

Avec l'opérateur de couplage spin-orbite  $\hat{\vec{L}}\hat{\vec{S}}$  peut récrierai sous la forme :

$$\hat{\vec{L}}\hat{\vec{S}} = \frac{1}{2} \left[ (\hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}})^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2 \right] = \frac{1}{2} [\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2] \dots\dots\dots (II.17)$$

La fonction d'onde transformée en coordonnées sphérique :

$$\Psi(\vec{r}, t) \rightarrow \Psi(r, \theta, \varphi) \dots\dots\dots (II.18)$$

Donc l'équation de Schrödinger devient :

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 (\sin \theta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] - V(r) \right\} \Psi(r, \theta, \varphi) \dots \text{(II.19)}$$

$$= E\Psi(r, \theta, \varphi)$$

et

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] - V(r) \right\} \Psi(r, \theta, \varphi) \dots \text{(II-20)}$$

$$= E\Psi(r, \theta, \varphi)$$

Maintenant on écrit les solutions de l'équation de Schrödinger à la forme d'un produit d'une fonction radiale  $R_l(r)$  et d'une fonction angulaire  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  à trois dimensions :

$$\Psi(x) = R_l(r) Y_l^m(\theta, \varphi) \dots \text{(II.21)}$$

Où  $R_l(r)$  est la partie radiale de la fonction d'onde qui dépend seulement de rayon  $r$  et  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  représenté la partie angulaire dépend des angles  $\theta$  et  $\varphi$ . La fonction radiale  $R_l(r)$  satisfait l'équation suivant, dans l'espace à  $N$  dimensions [21] :

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{N-1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+N-2)}{r^2} + 2\mu \left( E - ar^2 - br + \frac{c}{r} \right) \right] R_{nl}(r) = 0 \text{ (II.22)}$$

Dans l'espace à trois dimensions, l'équation (II-22) devient [21] :

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + 2m_0 \left( E - ar^2 - br + \frac{c}{r} \right) \right] R_{nl}(r) = 0 \dots \text{(II-23)}$$

On basé sur le travail de Le Prof. *Tapas Das*, intitulé par : **Treatment of N-dimensional Schrödinger Equation for Anharmonic Potential via Laplace Transform**, qui publié en EJTP 13, No. 35 (2016) 207–214, la fonction d'onde normalisée et l'énergie des systèmes  $\Psi_{n,l,m}(\vec{r})$  et l'énergies  $E_{n,l}$ , sont donnée par dans l'espace-temps à  $N$  dimensions [21] :

$$R_{nl}(r) = \frac{C_{n,l}}{n!} r^{l+n} \exp \left( -\sqrt{\frac{\mu a}{2}} r^2 - b \sqrt{\frac{\mu}{2a}} r \right) \dots \text{(II-24)}$$

et

$$E_{n,l} = \sqrt{\frac{a}{2\mu}} (2n + l + N) - \frac{b^2}{4a} \dots \text{(II-25)}$$

**La constante de normalisation  $C_{n,l}$  est donnée par [21] :**

$$C_{n,l} = n! \left\{ \frac{2(2\alpha)^{l+n+\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(l+n+\frac{N}{2}\right)} \exp\left(-\frac{\beta^2}{2\alpha}\right) \right\}^{1/2} \quad (\text{II-26})$$

Avec  $\alpha = \sqrt{\frac{\mu a}{2}}$ ,  $\beta = \frac{\mu b}{2\alpha}$  et  $\beta\gamma = \beta \frac{n+1}{2\alpha} = \frac{\mu c}{2\alpha}$ .

Pour l'espace à trois dimensions  $N = 3$ , la fonction d'onde normalisée et l'énergie des systèmes sont réduits à la forme :

$$\Psi_{n,l,m}(\vec{r}) = \frac{C_{n,l}}{n!} r^{l+n} \exp\left(-\sqrt{\frac{\mu a}{2}} r^2 - b\sqrt{\frac{\mu}{2a}} r\right) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (\text{II-27})$$

et

$$E_{n,l} = \sqrt{\frac{a}{2\mu}} (2n+l+3) - \frac{b^2}{4a} \quad (\text{II-28})$$

La constante de normalisation  $C_{n,l}$  est donnée par :

$$C_{n,l} = n! \left\{ \frac{2(2\alpha)^{l+n+\frac{3}{2}}}{\Gamma(l+n+3/2)} \exp\left(-\frac{\beta^2}{2\alpha}\right) \right\}^{1/2} \quad (\text{II-29})$$

Et  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  sont les Harmonique sphériques à trois dimensions.

### **Chapitre III :**

#### ***Nouveau traitement de l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel anharmonique en l'espace phase non commutatif à trois dimensions dans les symétries de la mécanique quantique généralisée***

#### ***Treatment of 3-dimensional Modified Schrödinger Equation for Anharmonic Potential in noncommutative space phase in the symmetries of generalized quantum mechanics***

### **III.1 Introduction :**

L'objectif de ce chapitre, est l'étude de l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel anharmonique, dans l'espace phase à trois dimensions qui peut être utilisé :

- 3- Pour étudier des atomes hydrogéniques
- 4- Pour étudier les interactions entre les quarks et l'anti quarks dans les mésons.

dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions en utilisant la méthode Bopp's Shift et le théorème de perturbation pour trouver les corrections des énergies correspondant aux états excité n.

### **III.2.L'opérateur d' Hamiltonien pour le potentiel anharmonique dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions (NC : 3D-RSP) :**

Pour étudier l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel anharmonique en l'espace phase non commutatif à trois dimensions, la première étape est l'écriture cette équation dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions [30-53]

$$\hat{H}(\hat{p}_i, \hat{x}_i) * \Psi\left(\vec{\hat{r}}\right) = E_{nc-an} \Psi\left(\vec{\hat{r}}\right) \dots\dots\dots (III-1)$$

Tel que :

- L'opérateur  $\hat{H}(\hat{p}_i, \hat{x}_i)$  noté a l' Hamiltonien dans l'espace- phase non commutatif à trois dimensions,

- $\Psi(\vec{r})$  noté à la fonction d'onde complexe dans l'espace- phase non commutatif à trois dimensions,
- $E_{nc-an}$  noté à la l'énergie produit par l'interaction anharmonique dans l'espace phase non commutatif à trois dimensions,
- Le symbole \* est noté de la produit étoile.

L'opérateur  $\hat{H}(\hat{p}_i, \hat{x}_i)$  peut être traité en trois modèles physiques [36-53] :

$$\begin{aligned} \hat{H}_{nc}(\hat{p}_i, \hat{x}_i) &\equiv \hat{H}\left(\hat{p}_i = p_i + \frac{\bar{\theta}_{ij}}{2} x_j; \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta_{ij}}{2} p_j\right) \text{ for (NC :3D - RSP)} \\ \hat{H}_{nc}(\hat{p}_i, \hat{x}_i) &\equiv \hat{H}\left(\hat{p}_i = p_i; \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta_{ij}}{2} p_j\right) \text{ for (NC :3D - RS) .....(III-2)} \\ \hat{H}_{nc}(\hat{p}_i, \hat{x}_i) &\equiv \hat{H}\left(\hat{p}_i = p_i + \frac{\bar{\theta}_{ij}}{2} x_j; \hat{x}_i = x_i\right) \text{ for (NC :3D - RP)} \end{aligned}$$

- Le premier modèle correspondant  $\hat{H}_{nc}(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \equiv \hat{H}\left(\hat{p}_i = p_i + \frac{\bar{\theta}_{ij}}{2} x_j; \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta_{ij}}{2} p_j\right)$ , cela signifie que la déformation est appliquée sur l'espace et la phase,
- La deuxième modèle correspondant  $\hat{H}\left(\hat{p}_i = p_i; \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta_{ij}}{2} p_j\right)$ , cela signifie que la déformation est appliquée sur l'espace,
- Le troisième modèle correspondant  $\hat{H}\left(\hat{p}_i = p_i + \frac{\bar{\theta}_{ij}}{2} x_j; \hat{x}_i = x_i\right)$ , cela signifie que la déformation est appliquée sur la phase

L'équation de Schrödinger modifiée peut être traité par la méthode de Bopp's shift, cette méthode permet d'utiliser les mécanismes du produit ordinaire avec des translations appliquées à la potentiel anharmonique et le terme cinétique, les deux commutateurs, qu'ils décrivent les déformations de l'espace et la phase deviennent :

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\theta_{\mu\nu} \text{ et } [\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] = i\bar{\theta}_{\mu\nu} \text{ ..... (III-3)}$$

Avec, les deux opérateurs ( $\hat{x}_\mu$  et  $\hat{p}_\mu$ ) sont donnée par [30-53]:

$$\begin{aligned} \hat{x}_\mu &= x_\mu - \frac{\theta_{\mu\nu}}{2} p_\nu \\ \hat{p}_\mu &= p_\mu + \frac{\bar{\theta}_{\mu\nu}}{2} x_\nu \end{aligned} \dots\dots\dots \text{(III-4)}$$

Avec les indices ( $\mu, \nu = 1, 2, 3$ ). L'équation de Schrödinger modifiée, ce réduite a la forme suivant :

$$H_{nc}(\hat{p}_i, \hat{x}_i)\psi(\vec{r}) = E_{nc}\psi(\vec{r}) \dots\dots\dots \text{(III-5)}$$

Avec, L'opérateur d'Hamiltonien  $H_{nc}(\hat{p}_i, \hat{x}_i)$ , qui correspondant le premier modèle prendre la forme :

$$H_{nc}(\hat{p}_\mu, \hat{x}_\mu) = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} + V(\hat{r}) \dots\dots\dots \text{(III-6)}$$

Le potentiel anharmonique dans l'espace (NC : 3D-RSP) prendre la forme suivant :

$$V(\hat{r}) = a\hat{r}^2 + b\hat{r} - \frac{c}{\hat{r}} \dots\dots\dots \text{(III-7)}$$

On a basé, sur les références de notre encadreur Prof. A. Maireche [40-53], nous avons discuté dans le premier chapitre, les deux opérateurs  $\hat{r}^2$  et  $\hat{p}^2$  dans l'espace phase non-commutatif à trois dimensions :

$$\begin{aligned} \hat{r}^2 &= r^2 - \vec{\mathbf{L}}\vec{\Theta} + O(\Theta) \text{ avec } \vec{\mathbf{L}}\vec{\Theta} \equiv L_x\Theta_{12} + L_y\Theta_{23} + L_z\Theta_{13} \\ \hat{p}^2 &= p^2 + \vec{\mathbf{L}}\vec{\bar{\theta}} + O(\bar{\theta}) \text{ avec } \vec{\mathbf{L}}\vec{\bar{\theta}} \equiv L_x\bar{\theta}_{12} + L_y\bar{\theta}_{23} + L_z\bar{\theta}_{13} \end{aligned} \dots \text{(III-8)}$$

Les trois composantes du moment cinétique sont donnée par :

$$\begin{aligned} L_x &= yp_z - zp_y \\ L_y &= xp_z - zp_x \dots\dots\dots \text{(III-9)} \\ L_z &= xp_y - yp_x \end{aligned}$$

L'équation présentée par (III-8) permettre de trouver les trois termes :

$$\begin{cases} \frac{c}{\hat{r}} = \frac{c}{r} + \frac{c}{2r^3} \vec{\mathbf{L}} \vec{\Theta} + O(\theta) \\ b\hat{r} = br - \frac{b}{2r} \vec{\mathbf{L}} \vec{\Theta} + O(\theta) \\ a\hat{r}^2 = ar^2 - a \vec{\mathbf{L}} \vec{\Theta} + O(\theta) \end{cases} \dots\dots\dots(\text{III-10})$$

Ces résultats récents permettent de donner la nouvelle forme du potentiel anharmonique dans l'espace phase non commutatif à trois dimensions :

$$v(\hat{r}) = ar^2 + br - \frac{c}{r} + \left\{ \frac{c}{2r^3} - \frac{b}{2r} - a \right\} \vec{\mathbf{L}} \vec{\Theta} \dots\dots(\text{III-11})$$

Donc, l'équation (III-10) devient :

$$v(\hat{r}) = V(r) + \left\{ \frac{c}{2r^3} - \frac{b}{2r} - a \right\} \vec{\mathbf{L}} \vec{\Theta} \dots\dots\dots(\text{III-12})$$

C'est à dire que le potentiel anharmonique dans l'espace phase non commutatif à trois dimensions est la somme de deux parties principales, le premier  $V(r)$  est le potentiel anharmonique dans l'espace ordinaire à trois dimensions et l'autre partie  $\left\{ \frac{c}{2r^3} - \frac{b}{2r} - a \right\} \vec{\mathbf{L}} \vec{\Theta}$  est la contribution de la déformation produite par la non-commutativité de l'espace. L'opérateur d'Hamiltonien dans l'espace phase non commutatif à trois dimensions est la somme de potentiel anharmonique dans l'espace phase non commutatif à trois dimensions et la partie de terme cinétique dans l'espace phase non commutatif à trois dimensions :

$$H_{nc}(\hat{p}_\mu, \hat{x}_\mu) = H(p_\mu, x_\mu) + H_{\text{pert-an}}(r, \Theta, \bar{\theta}) \dots\dots\dots(\text{III-13})$$

Avec  $H(p_\mu, x_\mu)$  et  $H_{\text{pert-k}}(r, \Theta, \bar{\theta})$  sont données par, respectivement :

$$H(p_\mu, x_\mu) = \frac{p^2}{2m_{00}} + ar^2 + br - \frac{c}{r} \dots\dots\dots(\text{III-14})$$

et

$$H_{\text{pert-an}}(r, \Theta, \bar{\theta}) = \left\{ \frac{c}{2r^3} - \frac{b}{2r} - a \right\} \vec{\mathbf{L}} \vec{\Theta} + \frac{\vec{\mathbf{L}} \vec{\bar{\theta}}}{2\mu} + o(\theta, \bar{\theta}) \dots\dots\dots(\text{III-15})$$

L'opérateur  $H(p_\mu, x_\mu)$  décrit L'Hamiltonien dans l'espace ordinaire à trois dimensions et  $H_{\text{pert-k}}(r, \Theta, \bar{\theta})$  est produit par les deux déformations de l'espace et la phase. On remarque que l'opérateur  $H_{\text{pert-k}}(r, \Theta, \bar{\theta})$  proportionnel avec deux paramètres  $\Theta$  et  $\bar{\theta}$ .

**III.3. L'opérateur Spin-Orbite modifié pour le potentiel anharmonique dans l'espace-phase non commutatif (NC : 3D-RSP) :**

D'après, les formes mathématiques du 2-couplages ( $\vec{\mathbf{L}} \vec{\Theta}$  et  $\vec{\mathbf{L}} \vec{\bar{\theta}}$ ) observé dans les équations (III.8), elle est possible physiquement de remplacé par ( $\gamma \vec{\Theta} \vec{L} \vec{S}$  et  $\gamma \vec{\bar{\theta}} \vec{L} \vec{S}$ ), respectivement :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{L}} \vec{\Theta} &\rightarrow \gamma \vec{\Theta} \vec{L} \vec{S} \\ \vec{\mathbf{L}} \vec{\bar{\theta}} &\rightarrow \gamma \vec{\bar{\theta}} \vec{L} \vec{S} \end{aligned} \dots\dots\dots(\text{III-16})$$

Avec  $\vec{S}$  est le spin de l'électron et  $\gamma$  constante ordinaire de proportionnalité. Ce qui permet de réécrire l'équation (III-15) comme suivant :

$$H_{\text{pert-an}}(r, \Theta, \bar{\theta}) \equiv H_{so}(r, \Theta, \bar{\theta}) = \gamma \left\{ \left( \frac{c}{2r^3} - \frac{b}{2r} - a \right) \Theta + \frac{\bar{\theta}}{2\mu} \right\} \vec{L} \vec{S} \dots\dots(\text{III-17})$$

En mécanique quantique ordinaire, les ensembles des opérateurs  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$ ... qui forment un ensemble complet d'observables complet sont commutent (ECOC). En applique ce règle sur les ensembles d'opérateurs ( $H_{so}(r, \Theta, \bar{\theta}), J^2, L^2, S^2$  et  $J_z$ ), c'est-à-dire [1-2]:

$$[J^2, L^2] = [J^2, S^2] = [J^2, J_z] = 0 \dots\dots\dots(\text{III-18})$$

Et leurs valeurs propres correspondent :  $j(j+1)$ ,  $l(l+1)$ ,  $s(s+1)$  et  $m$  ( $-l \leq m \leq +l$ ) dans le système ( $\hbar = 1$ ), donc

$$\begin{cases} J^2 \Psi = j(j+1) \Psi \\ L^2 \Psi = l(l+1) \Psi \\ S^2 \Psi = s(s+1) \Psi = 3/4 \Psi \\ J_z \Psi = m \Psi \end{cases} \dots\dots\dots(\text{III-19})$$

Avec  $\vec{J}$  est la somme géométrique des moments ( $\vec{L}$  et  $\vec{S}$ ) et  $|l-1/2| \leq j \leq |l+1/2|$ . Ce qui permet de trouver le couplage spin-orbite  $\vec{L}\vec{S}$  de la façon suivante [1-2]:

$$\vec{L}\vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2) \dots \dots \dots \text{(III-20)}$$

Donc ; on a :

$$\vec{L}\vec{S}\Psi = \frac{1}{2}(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2)\Psi \equiv \{j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)\}\Psi \text{ (III-21)}$$

Maintenant, on applique ce resultat sur l'électron, on a deux valeurs : Si  $j = j + \frac{1}{2}$  on dit que l'électron de spin up et si  $j = j - \frac{1}{2}$ , l'électron de spin down. Donc, on a :

$$\vec{L}\vec{S}\Psi = \begin{cases} \frac{1}{2} \left\{ \left( l + \frac{1}{2} \right) \left( l + \frac{1}{2} + 1 \right) + l(l+1) - \frac{3}{4} \right\} \Psi \equiv p_+ \Psi : \text{ Si } j = l + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \left\{ \left( l - \frac{1}{2} \right) \left( l - \frac{1}{2} + 1 \right) + l(l+1) - \frac{3}{4} \right\} \Psi \equiv p_- \Psi : \text{ Si } j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \text{ (III-22)}$$

Ou  $p_+$  et  $p_-$  sont donnée par  $\frac{1}{2} \left\{ \left( l + \frac{1}{2} \right) \left( l + \frac{1}{2} + 1 \right) + l(l+1) - \frac{3}{4} \right\}$  et  $\frac{1}{2} \left\{ \left( l - \frac{1}{2} \right) \left( l - \frac{1}{2} + 1 \right) + l(l+1) - \frac{3}{4} \right\}$ ,

Maintenant, on peut former une matrice d'ordre  $(3 \times 3)$  pour représenter l'opérateur spin-orbite pour le potentiel anharmonique dans l'espace phase non commutatif (NC : 3- RSP) :

$$\left( \hat{H}_{so} \right) \equiv \begin{pmatrix} \left( \hat{H}_{so-an} \right)_{11} & \left( \hat{H}_{so-an} \right)_{12} & \left( \hat{H}_{so-an} \right)_{13} \\ \left( \hat{H}_{so-an} \right)_{21} & \left( \hat{H}_{so-an} \right)_{22} & \left( \hat{H}_{so-an} \right)_{23} \\ \left( \hat{H}_{so-an} \right)_{31} & \left( \hat{H}_{so-an} \right)_{31} & \left( \hat{H}_{so-an} \right)_{33} \end{pmatrix} \dots \dots \dots \text{ (III-23)}$$

Dans la base ECOOC, les trois éléments non nulle de la matrice  $\left( \hat{H}_{so} \right)$  peut être écrié sous la forme:

$$\begin{cases} \left( \hat{H}_{so-an} \right)_{11} = p_+ \gamma \left\{ \left( \frac{c}{2r^3} - \frac{b}{2r} - a \right) \Theta + \frac{\bar{\theta}}{2\mu} \right\} \text{ avec } j = l + 1/2 \Rightarrow \text{spin up} \\ \left( \hat{H}_{so-an} \right)_{22} = p_- \gamma \left\{ \left( \frac{c}{2r^3} - \frac{b}{2r} - a \right) \Theta + \frac{\bar{\theta}}{2\mu} \right\} \text{ avec } j = l - 1/2 \Rightarrow \text{spin down} \dots \text{ (III-24)} \\ \left( \hat{H}_{so-an} \right)_{33} = 0 \end{cases}$$

### III.3. Le spectre énergétique :

### III.3.1 Le spectre exacte produit par l'opérateur spin-orbite pour le potentiel anharmonique en (NC : 3D-RSP) :

Nous avons observé que le potentiel modifié  $H_{\text{pert-an}}(r, \Theta, \bar{\theta})$  est proportionnel au deux paramètres infinitésimale  $(\Theta, \bar{\theta})$  et cela signifie que  $H_{\text{pert-an}}(r, \Theta, \bar{\theta})$  prend une valeur très petite par rapport à la partie principale  $H(p_\mu, x_\mu)$ , donc on peut appliquer le théorème de perturbation pour obtenir les modifications exacte d'énergie  $E_{\text{an-per}}$  au premier ordre en  $(\Theta, \bar{\theta})$ . L'énergie totale dans l'espace-temps non commutatif  $E_{\text{nc-an}}$  est la somme de l'énergie correspondant à l'espace ordinaire  $E$  et les corrections  $E_{\text{nc-per}}$  :

$$E_{\text{nc-an}} = E + E_{\text{nc-per}} \dots \dots \dots \text{(III-25)}$$

Le théorème de perturbation permet d'obtenir les corrections au premier ordre de la façon suivante :

$$E_{\text{nc-per}} = \langle n | H_{\text{pert-an}}(r, \Theta, \bar{\theta}) | n \rangle \dots \dots \dots \text{(III-26)}$$

On peut récrire l'équation (III-26) sous la forme :

$$E_{\text{nc-per}}(\Theta, \bar{\theta}) = \int \Psi_{n,l,m}^*(\vec{r}) H_{\text{pert-an}}(r, \Theta, \bar{\theta}) \Psi_{n,l,m}(\vec{r}) d^3r \dots \text{(III-27)}$$

Ou  $d^3r$  représenté l'élément de volume en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ , qui est donnée par :

$$d\tau = r^2 dr d\Omega \dots \dots \dots \text{(III-28)}$$

Avec l'angle solide  $d\Omega = \sin(\theta) d\theta d\varphi$  et  $\Psi_{n,l,m}(\vec{r})$  la fonction d'onde qui est définie par [21] :

$$\Psi_{n,l,m}(\vec{r}) = \frac{C_{n,l}}{n!} r^{l+n} \exp\left(-\sqrt{\frac{\mu a}{2}} r^2 - b\sqrt{\frac{\mu}{2a}} r\right) Y_l^m(\theta, \varphi) \dots \text{(III-29)}$$

Et  $C_{n,l} = n! \left\{ \frac{2(2\alpha)^{l+n+\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(l+n+\frac{3}{2}\right)} \exp\left(-\frac{\beta^2}{2\alpha}\right) \right\}^{1/2}$ . Donc, on peut écrire l'équation (III-27), de la

forme :

$$E_{nc-per}(\Theta, \bar{\theta}) = \int \Psi_{n,l,m}^*(\vec{r}) \left( \frac{c}{2r^3} - \frac{b}{2r} - a \right) \Theta + \frac{\bar{\theta}}{2\mu} \bar{L}\bar{S} \Psi_{n,l,m}(\vec{r}) r^2 dr \int Y_l^m(\theta, \varphi) Y_l^m(\theta, \varphi) d\Omega \quad (\text{III-30})$$

La fonction d'onde  $\Psi_{n,l,m}(\vec{r})$  normalisée, cela permet d'écrire :

$$\int Y_l^m(\theta, \varphi) Y_l^m(\theta, \varphi) d\Omega = 1 \dots \dots \dots (\text{III-31})$$

Ce qui permet de réduire les corrections trouvées par l'équation (III-31) sous la forme suivant :

$$E_{nc-per} = \int R^*(r) \alpha \left[ \Theta \left( \frac{c}{2r^3} - \frac{b}{2r} - a \right) + \frac{\bar{\theta}}{2\mu} \right] \bar{L}\bar{S} R(r) r^2 dr \dots (\text{III-32})$$

On remplace le terme de couplage spin-orbite  $\left\{ \left( \frac{c}{2r^3} - \frac{b}{2r} - a \right) \Theta + \frac{\bar{\theta}}{2\mu} \right\} \bar{L}\bar{S}$  par :

$$\left\{ \left( \frac{c}{2r^3} - \frac{b}{2r} - a \right) \Theta + \frac{\bar{\theta}}{2\mu} \right\} \bar{L}\bar{S} = \left\{ \left( \frac{c}{2r^3} - \frac{b}{2r} - a \right) \Theta + \frac{\bar{\theta}}{2\mu} \right\} \begin{cases} \frac{1}{2} \left\{ \left( l + \frac{1}{2} \right) \left( l + \frac{1}{2} + 1 \right) + l(l+1) - \frac{3}{4} \right\} \Psi \equiv p_+ \Psi : \text{Si } j = l + \frac{1}{2} \\ \dots \\ \frac{1}{2} \left\{ \left( l - \frac{1}{2} \right) \left( l - \frac{1}{2} + 1 \right) + l(l+1) - \frac{3}{4} \right\} \Psi \equiv p_- \Psi : \text{Si } j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \dots \dots \dots (\text{III-33})$$

Ce qui permet de réécrire les corrections au premier ordre sous la forme :

$$E_{nc-per}(\Theta, \bar{\theta}) = \begin{cases} \alpha p_+ \int R^*(r) \left[ \left( \frac{c}{2r^3} - \frac{b}{2r} - a \right) \Theta + \frac{\bar{\theta}}{2\mu} \right] R(r) r^2 dr \equiv E_{nc-per,u}(\Theta, \bar{\theta}) \text{ Si } j = l + \frac{1}{2} \\ \alpha p_- \int R^*(r) \left[ \left( \frac{c}{2r^3} - \frac{b}{2r} - a \right) \Theta + \frac{\bar{\theta}}{2\mu} \right] R(r) r^2 dr \equiv E_{nc-per,D}(\Theta, \bar{\theta}) \text{ Si } j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{III-34})$$

L'équation (III-34) ont réduit en deux équations séparées :

$$E_{nc-per,u}(\Theta, \bar{\theta}) \equiv \alpha p_+ \int R^*(r) \left[ \left( \frac{c}{2r^3} - \frac{b}{2r} - a \right) \Theta + \frac{\bar{\theta}}{2\mu} \right] R(r) r^2 dr \quad \text{Si } j = l + \frac{1}{2} \dots (\text{III-35})$$

Et

$$E_{nc-per,D}(\Theta, \bar{\theta}) \equiv \alpha p_- \int R^*(r) \left[ \left( \frac{c}{2r^3} - \frac{b}{2r} - a \right) \Theta + \frac{\bar{\theta}}{2\mu} \right] R(r) r^2 dr \quad \text{Si } j = l - \frac{1}{2} \dots (\text{III-36})$$

On remplace la partie radiale de la fonction d'onde  $R(r)$  dans les deux équations (III-35) et (III-36) :

$$E_{nc-per,u}(\Theta, \bar{\theta}) = \frac{|C_{n,l}|^2}{n!^2} p_+ \int_0^{+\infty} r^{2l+2n+2} \exp \left( -2\sqrt{\frac{\mu a}{2}} r^2 - 2b\sqrt{\frac{\mu}{2a}} r \right) \left\{ \Theta \left( \frac{c}{2r^3} - \frac{b}{2r} - a \right) + \frac{\bar{\theta}}{2\mu} \right\} dr \quad (\text{III-37})$$

et

$$E_{nc-per.D}(\Theta, \bar{\theta}) = \frac{|C_{n,l}|^2}{n!^2} p_- \int_0^{+\infty} r^{2l+2n+2} \exp\left(-2\sqrt{\frac{\mu a}{2}} r^2 - 2b\sqrt{\frac{\mu}{2a}} r\right) \left\{ \Theta \left( \frac{c}{2r^3} - \frac{b}{2r} - a \right) + \frac{\bar{\theta}}{2\mu} \right\} dr \quad (\text{III-38})$$

On peut simplifier les 2-équations (III-37) et (III-38) pour trouver :

$$E_{nc-per.u}(\Theta, \bar{\theta}) = \frac{|C_{n,l}|^2}{n!^2} p_+ \left\{ \Theta \sum_{i=1}^3 T_i + \frac{\bar{\theta}}{2\mu} T_4 \right\} \dots \dots \dots (\text{III-39})$$

et

$$E_{nc-per.D}(\Theta, \bar{\theta}) = \frac{|C_{n,l}|^2}{n!^2} p_- \left\{ \Theta \sum_{i=1}^3 T_i + \frac{\bar{\theta}}{2\mu} T_4 \right\} \dots \dots \dots (\text{III-40})$$

**Avec les quatre termes  $T_i (i = \overline{1,4})$  sont donnée par :**

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{c}{2} \int_0^{+\infty} r^{(2l+2n)-1} \exp\left(-2\sqrt{\frac{\mu a}{2}} r^2 - 2b\sqrt{\frac{\mu}{2a}} r\right) dr, \\ T_2 &= -\frac{b}{2} \int_0^{+\infty} r^{(2l+2n+2)-1} \exp\left(-2\sqrt{\frac{\mu a}{2}} r^2 - 2b\sqrt{\frac{\mu}{2a}} r\right) dr, \\ T_3 &= -a \int_0^{+\infty} r^{(2l+2n+3)-1} \exp\left(-2\sqrt{\frac{\mu a}{2}} r^2 - 2b\sqrt{\frac{\mu}{2a}} r\right) dr, \\ T_4 &= \int_0^{+\infty} r^{(2l+2n+3)-1} \exp\left(-2\sqrt{\frac{\mu a}{2}} r^2 - 2b\sqrt{\frac{\mu}{2a}} r\right) dr \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (\text{III-41})$$

Pour obtenir les résultants d'intégrales, ont appliqué l'intégrale spéciale parenté dans l'équation (II.42) suivant [54] :

$$\int_0^{+\infty} x^{\nu-1} \exp(-\beta x^2 - \gamma x) dx = (2\beta)^{-\frac{\nu}{2}} \Gamma(\nu) \exp\left(\frac{\gamma^2}{8\beta}\right) D_{-\nu}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right) \dots \dots (\text{III-42})$$

avec  $D_{-\nu}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right)$  noté de la fonction parabolique cylindrique,  $\Gamma(\nu)$  est la fonction Gamma

et  $(\text{Re}l(\beta) > 0, \text{Re}l(\nu) > 0)$ . Ce qui permet de trouver les résultats suivant :

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \frac{c}{2} (2\beta)^{-(n+l)} \Gamma(2n+2l) \exp\left(\frac{\gamma^2}{8\beta}\right) D_{-(2n+2l-1)}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right) \\
 T_2 &= -\frac{b}{2} (2\beta)^{-(n+l+1)} \Gamma(2n+2l+2) \exp\left(\frac{\gamma^2}{8\beta}\right) D_{-(2n+2l+2)}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right) \dots \dots \text{(III-43)} \\
 T_3 &= -a(2\beta)^{-\frac{2n+2l+3}{2}} \Gamma(2n+2l+3) \exp\left(\frac{\gamma^2}{8\beta}\right) D_{-(2n+2l+2)}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right) \\
 T_4 &= (2\beta)^{-\frac{2n+2l+3}{2}} \Gamma(2n+2l+2) \exp\left(\frac{\gamma^2}{8\beta}\right) D_{-(2n+2l+2)}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right)
 \end{aligned}$$

Avec  $\gamma = 2b\sqrt{\frac{\mu}{2a}}$  et  $\beta = 2\sqrt{\frac{\mu a}{2}}$ . Ce qui permet d'obtenir les corrections  $E_{nc-per}(\Theta, \bar{\theta})$  on fonctions des paramètres  $(\Theta, \bar{\theta})$  et les paramétrées de potentiels a, b et c :

$$E_{nc-peru}(\Theta, \bar{\theta}) \equiv \left\{ \frac{(2\alpha)^{l+n+1/2}}{\Gamma\left(l+n+\frac{3}{2}\right)} \exp\left(-\frac{\beta^2}{2\alpha}\right) \right\} p_+ \{ \Theta T_{nc-s} + \bar{\theta} T_{nc-p} \} \dots \dots \text{(III-44)}$$

et

$$E_{nc-per.D}(\Theta, \bar{\theta}) \equiv \left\{ \frac{(2\alpha)^{l+n+1/2}}{\Gamma\left(l+n+\frac{3}{2}\right)} \exp\left(-\frac{\beta^2}{2\alpha}\right) \right\} p_- \{ \Theta T_{nc-s} + \bar{\theta} T_{nc-p} \} \dots \dots \text{(III-45)}$$

Avec  $T_{nc-s}$  et  $T_{nc-p}$  sont donnée par :

$$\begin{aligned}
 T_{nc-s} &= \sum_{i=1}^3 T_i \\
 &\equiv \frac{c}{2} (2\beta)^{-(n+l)} \Gamma(2n+2l) \exp\left(\frac{\gamma^2}{8\beta}\right) D_{-(2n+2l-1)}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right) - \frac{b}{2} (2\beta)^{-(n+l+1)} \Gamma(2n+2l+2) \exp\left(\frac{\gamma^2}{8\beta}\right) D_{-(2n+2l+2)}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right) \\
 &\quad - a(2\beta)^{-\frac{2n+2l+3}{2}} \Gamma(2n+2l+3) \exp\left(\frac{\gamma^2}{8\beta}\right) D_{-(2n+2l+2)}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right)
 \end{aligned} \tag{III-46}$$

et

$$T_{nc-pk} \equiv (2\beta)^{-\frac{2n+2l+3}{2}} \Gamma(2n+2l+2) \exp\left(\frac{\gamma^2}{8\beta}\right) D_{-(2n+2l+2)}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right) \dots \dots \dots \text{(III-47)}$$

L'énergie  $E_{ncu}(\Theta, \bar{\theta})$  et  $E_{ncD}(\Theta, \bar{\theta})$  de l'état excité n dans l'espace -phase -non commutatif a trois dimensions produit par l'effet de la non-commutativité, est la somme de l'énergie  $E_{n,l}$  qui donnée par (II.28) de l'état excité n dans l'espace-temps-ordinaire et les modifications non commutatif, correspondant aux deux polarisations de l'électron up et down, et qui sont déterminés par les équations (III-44) et (III-45), respectivement :

$$E_{ncu}(\Theta, \bar{\theta}) \equiv \sqrt{\frac{a}{2\mu}}(2n+l+3) - \frac{b^2}{4a} + \left\{ \frac{(2\alpha)^{l+n+1/2}}{\Gamma\left(l+n+\frac{3}{2}\right)} \exp\left(-\frac{\beta^2}{2\alpha}\right) \right\} p_+ \{ \Theta T_{nc-s} + \bar{\theta} T_{nc-p} \} \quad (\text{III-48})$$

Et

$$E_{ncD}(\Theta, \bar{\theta}) \equiv \sqrt{\frac{a}{2\mu}}(2n+l+3) - \frac{b^2}{4a} + \left\{ \frac{(2\alpha)^{l+n+1/2}}{\Gamma\left(l+n+\frac{3}{2}\right)} \exp\left(-\frac{\beta^2}{2\alpha}\right) \right\} p_- \{ \Theta T_{nc-s} + \bar{\theta} T_{nc-p} \} \quad (\text{III-49})$$

Et l'opérateur d'Hamiltonien diagonale  $\hat{H}_{nc}$  correspondant peut être représenté par une matrice carrée d'ordre (3\*3), composée par les éléments suivants :

$$\begin{cases} \left( \hat{H}_{nc-is} \right)_{11} = ar^2 + br - \frac{c}{r} + \frac{p^2}{2\mu} + p_+ \left[ \left( \frac{c}{2r^3} - \frac{b}{2r} - a \right) \Theta + \frac{\bar{\theta}}{2\mu} \right] \text{avec } J = \ell + 1/2 \Rightarrow \text{spin up} \\ \left( \hat{H}_{nc-is} \right)_{22} = ar^2 + br - \frac{c}{r} + \frac{p^2}{2\mu} + p_- \left[ \left( \frac{c}{2r^3} - \frac{b}{2r} - a \right) \Theta + \frac{\bar{\theta}}{2\mu} \right] \text{avec } J = \ell - 1/2 \Rightarrow \text{spin down} \\ \left( \hat{H}_{nc-is} \right)_{33} = ar^2 + br - \frac{c}{r} + \frac{p^2}{2\mu} \end{cases} \quad (\text{III-50})$$

Notez clairement que les nouveaux niveaux d'énergie deviennent dégénérés, chaque niveau d'énergie devient deux niveaux, c'est à cause de l'effet automatique produit par l'influence de spin-orbite interactions.

$$\sum_{i=0}^{n-1} (2l+1) \equiv n^2 \rightarrow 2 \sum_{i=0}^{n-1} (2l+1) \equiv 2n^2$$

# Conclusion générale

A travers ce mémoire de master en filière physique, spécialité théorique :

Promotion 2017-2018

***Nouveau traitement de l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel anharmonique en l'espace phase non commutatif à trois dimensions dans les symétries de la mécanique quantique généralisée***

Le but de ce mémoire est l'étude du système physique comme les atomes hydrogéniques dans le cadre de l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel anharmonique, en géométrie non commutatif à trois dimensions.

En premier chapitre nous avons représenté les formalismes mathématiques et physiques de l'espace-phase non commutatif à trois dimensions, en appliquant ces principes sur les atomes d'Hydrogène sous l'influence le potentiel anharmonique.

Dans le deuxième chapitre, nous avons révisé l'effet du potentiel anharmonique sur système physique comme les atomes hydrogéniques ont basé sur le travail de Prof. *Tapas Das*, intitulé par : Treatment of N-dimensional Schrödinger Equation for Anharmonic Potential via Laplace Transform, qui a publié en EJTP 13, No. 35 (2016) 207–214.

En troisième chapitre nous avons étudié l'effet du non commutativité de l'espace phase a trois dimensions, en appliquant la méthode de Bopp shift de premier ordre dans les paramètres de non commutativité  $\Theta$  and  $\bar{\theta}$ , les modifications sur l'énergie à l'état excité sont établis, nous avons construit Hamiltonien non commutative  $H_{nc}(\hat{p}_\mu, \hat{x}_\mu)$ , on peut conclure que l'application de la non commutativité dans ce travail sur le potentiel anharmonique, inclue l'effet de couplage spin-orbite d'une façon interne.



## Références Bibliographiques

- [01] J. L. Basidevant, *Mécanique Quantique, ellipses*, ISBN 2-7298-8614-1 (1986), Paris, France.
- [02] E. Elbaz, *Quantum, The quantum theory of particles, Fields, and Cosmology*, Springere, ISBN 3-540-62093-1 (1995), New York, USA.
- [03] Shi-Hai Dong and Guo-Hua Sun, The Schrödinger equation with a Coulomb plus inverse-square potential in D dimensions, *Physica Scripta*, Vol. 70, Number 2-3 (2004) 94-97. Doi <http://dx.doi.org/10.1088/0031-8949/70/2-3/004>.
- [04] J J Pena, G Ovando and J Morales, D-dimensional Eckart+deformed Hylleraas potential: Bound state solutions, *Journal of Physics: Conference Series* **574** (2015) 012089, doi:10.1088/1742-6596/574/1/012089
- [05] L. Buragohain and S. A. S .Ahmed, Exactly solvable quantum mechanical systems generated from the anharmonic potentials, *Lat. Am. J. Phys. Educ.* Vol. 4, No. 1, 79-83 (2010).
- [06] A. Niknam, A. A. Rajab and M. Solaimani, Solutions of D-dimensional Schrödinger equation for Woods-Saxon potential with spin-orbit, coulomb and centrifugal terms through a new hybrid numerical fitting Nikiforov-Uvarov method, *J Theor App Phys*, (2015) DOI 10.1007/s40094-015-0201-9.
- [07] Sameer M. Ikhdair<sup>1</sup> and Ramazan Sever, Exact solutions of the radial Schrödinger equation for some physical potentials, *CEJP*. 5(4) (2007) 516–527.
- [08] B. I. Ita, Solutions of the Schrödinger equation with inversely quadratic Hellmann plus Mie-type potential using Nikiforov-Uvarov Method, *International Journal of Recent advances in Physics (IJRAP)*, Vol. 2, No, 4, 2013.

- [09] S. M. Ikhdair and R. Sever, Exact polynomial eigensolutions of the Schrödinger equation for the pseudoharmonic potential, *J. Mol. Struct.-Theochem.* Vol. 806, (2007), pp. 155–158.
- [10] Ahmed, A. S. and Buragohain, L., Generation of new classes of exactly solvable potentials, *Phys.Scr.*80. (2009) 1-6.
- [11] Bose, S. K., Exact solution of non-relativistic Schrödinger equation for certain central physical potentials, *Nouvo Cimento B.* 113 (1996) 299- 328.
- [12] Flesses, G. P. and Watt, A., An exact solution of the Schrödinger equation for a multiterm potential, *J. Phys. A: Math. Gen.* 14, (1981) L315-L318.
- [13] M. Ikhdair and R. Sever, Exact solution of the Klein–Gordon equation for the PT symmetri generalized Woods–Saxon potential by the Nikiforov–Uvarov method, *Ann. Phys. (Leipzig)*, Vol. 16, (2007), pp. 218–232.
- [14] S. H. Dong, Schrödinger equation with the potential  $V(r) = -r^{*4} + r^{*3} - 3r^{*2} + r^{*} - 1$ , *Physica Scripta.* Vol. 64, no. 4 (2001) pp. 273–276.
- [15] B. I. Ita and A. I. Ikeuda, Solutions of the Schrödinger equation with inversely quadratic Yukawa plus inversely quadratic Hellmann potential using Nikiforov-Uvarov Method, *Journal of Atomic and Molecular Physics*, Vol. 2013, Article ID 582610, 4 Pages <http://dx.doi.org/10.1155/2013/582610>
- [16] B. I. Ita, A. I. Ikeuba and A. N. Ikot, Solutions of the Schrödinger Equation with Quantum Mechanical Gravitational Potential Plus Harmonic Oscillator Potential, *Commun. Theor. Phys.* 61 (2014) 149.
- [17] H. Hassanabadi, M. Hamzavi, S. Zarrinkamar and A. A. Rajabi, Exact solutions of N-Dimensional Schrödinger equation for a potential containing coulomb and quadratic terms, *International Journl of the Physical Sciences*, Vol. 6(3), pp. 583-586, 2011.
- [18] Shi-Hai Dong, Guo-Hua San, Quantum Spectrum of Some Anharmonic Central Potentials: Wave Functions Ansatz, *Foundations of Physics Letters*. 16, Issue 4 (2003) pp 357-367.

- [19] D. Agboola, Complete Analytical Solutions of the Mie-Type Potentials in N-Dimensions, ACTA PHYSICA POLONICA A, Vol. 120 (2011) 371-377.
- [20] Shi-Hai Dong, Zhong-Qi Ma, and Giampiero Esposito, Exact solutions of the Schrödinger equation with inverse-power potential, Foundations' of Physics Letters. Vol, 12, N, 5, 1999.
- [21] Tapas Das, Treatment of N-dimensional Schrödinger Equation for Anharmonic Potential via Laplace Transform, EJTP (Electronic Journal of Theoretical Physics) **13**, No. 35 (2016) 207–214.
- [22] W. Heisenberg : "Letter to R. Peierls (1930), in 'Wolfgang Pauli, Scientific Correspondence', Vol. III, p.15, Ed. K. von Meyenn", (Springer Verlag 1985)
- [23] H. Snyder, The Quantization of space-time, Phys. Rev. 71 (1946) 38-41.
- [23] R. J. Szabo, "Quantum field theory on noncommutative spaces", Phys. Rept. 378 207 (2003) hep-th/0109162.
- [24] F. A. Schaposnik "Three lectures on noncommutative field theories", hep-th/0408132. [25] M. Chaichian, P. P. Kulish, K. Nishijima and A. Tureanu, "On a Lorentz-Invariant Interpretation of Noncommutative Space-Time and Its Implications on Noncommutative QFT," Phys. Lett. B 604 98 (2004) hep-th/0408069.
- [26] J. Wess, "Deformed Coordinate Spaces: Derivatives," hep-th/0408080.
- [27] A. Connes and M. A. Rieffel, "Yang-Mills for Noncommutative Two-Tori", Contemp. Math. 62 237 (1987).
- [28] A. Connes and J. Lott, "Particle Models and Noncommutative Geometry", Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) 18 B 29 (1991).
- [29] DeWitt, B., 1962, in Gravitation, edited by L. Witten (Wiley, New York), pp. 266–381
- [30] A. E. F. Djemei and H. Smail, On Quantum Mechanics on Noncommutative Quantum Phase Space, Commun. Theor. Phys. (Beijing, China). 41 (2004) pp.837-844.

- [32] A. Jahan, Noncommutative harmonic oscillator at finite temperature: a path integral approach, *Brazilian Journal of Physics*, vol. 37, no. 4 (2007) 144-146.
- [33] Justin Gabriel encadré par François Gieres, *Diverses Approches de la Mécanique Quantique sur Espace Non-Commutatif*, Master Science de la matière, Université Claude Bernard Lyon I (2013-2014).
- [34] Yang, Zu-Hua et al., DKP Oscillator with spin-0 in Three dimensional Noncommutative Phase-Space, *Int. J. Theor. Phys.* 49 (2010) 644-657.
- [35] Jumakari-Mamat; Sayipjamal Dulat and Hekim Mamatabdulla, Landau-like Atomic Problem on a Non-commutative Phase Space, *Int J Theor Phys*; DOI 10.1007/s10773-016-2922-1 (2016).
- [36] Mémoire de master préparé par : Gharbi Noura et dirigé par Pr. : Maireche Abdelmadjid, L'atome d'Hydrogène sous l'action d'un potentiel Coulombien dans l'espace non commutatif à deux dimensions, promotion : 2013-2014, département de physique, université de M'sila, Algérie.
- [37] Mémoire de master préparé par : Elbahi Fatima et dirigé par Pr. : Maireche Abdelmadjid, L'atome d'Hydrogène sous l'action d'un multi-potentiels dans l'espace non commutatif à deux dimensions, promotion : 2013-2014, département de physique, université de M'sila, Algérie.
- [38] Mémoire de master préparé par : Zellagui Asma et dirigé par Pr. : Maireche Abdelmadjid, Les niveaux d'énergies atomique produit par le Mie-type potentiel dans l'espace non commutatif à deux dimensions : 2014-2015, département de physique, université de M'sila, Algérie.
- [39] Mémoire de master préparé par : Delaldja HANANE et dirigé par Pr. : Maireche Abdelmadjid, Les niveaux d'énergie atomique produit par le Mie-type potentiel dans l'espace non-commutatif à trois dimensions, promotion : 2013-2014, département de physique, université de M'sila, Algérie.
- [40] Mémoire de master préparé par : Khodja MERIEM et dirigé par Pr. : Maireche Abdelmadjid, Les niveaux d'énergies atomique produit par le inverse-carré potentiel dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions, promotion : 2015-2016, département de physique, université de M'sila, Algérie.

- [41] Abdelmadjid Maireche, Deformed Quantum Energy Spectra with Mixed Harmonic Potential for Nonrelativistic Schrödinger equation, *J. Nano- Electron. Phys.* 7 No 2, (2015) 02003.
- [42] Abdelmadjid Maireche, A Study of Schrödinger Equation with Inverse Sextic Potential in 2-dimensional Non-commutative Space, *The African Rev. Phys.* 9:0025, (2014) 185-193.
- [43] Abdelmadjid Maireche Deformed Bound States for Central Fraction Power Potential: Non Relativistic Schrödinger Equation, *The African Rev. Phys.* 10:0014, (2015) 97-103.
- [44] Abdelmadjid. Maireche, Nonrelativistic Atomic Spectrum for Companied Harmonic Oscillator Potential and its Inverse in both NC-2D: RSP, *International Letters of Chemistry, Physics and Astronomy*, Vol. 56, pp. 1-9, Jul. 2015.
- [45] Abdelmadjid Maireche, Atomic Spectrum for Schrödinger Equation with Rational Spherical Type Potential in Non-commutative Space and Phase, *The African Review of Physics*, Vol. 10:0046, 373-381(2015).
- [46] Abdelmadjid Maireche, New exact bound states solutions for (C.F.P.S.) potential in the case of Non-commutative three dimensional non relativistic quantum mechanics, *Med. J. Model. Simul.* 04 (2015) 060-072.
- [47] Abdelmadjid. Maireche, New Exact Solution of the Bound States for the Potential Family  $V(r)=A/r^2-B/r+Cr^k$  ( $k=0,-1,-2$ ) in both Noncommutative Three Dimensional Spaces and Phases: Non Relativistic Quantum Mechanics, *International Letters of Chemistry, Physics and Astronomy*, Vol. 58, pp. 164-176, Sep. 2015.
- [48] Abdelmadjid Maireche, A New Approach to the Non Relativistic Schrödinger equation for an Energy-Depended Potential  $v(r, E_{n,l})=V_0(1+\eta E_{n,l})r^2$  in Both Noncommutative three Dimensional spaces and phases, *International Letters of Chemistry, Physics and Astronomy*, Vol. 60, pp. 11-19, Sep. 2015.
- [49] Maireche A (2017) New Exact Non-relativistic Energy Eigen Values for Modified Inversely Quadratic Hellmann Plus Inversely Quadratic Potential. *J Nanosci Curr Res* 2:115. DOI: 10.4172/2572-0813.1000115.

- [50] Abdelmadjid Maireche, A New Study to the Schrödinger Equation for Modified Potential  $V(r)=ar^2+br^{-4}+cr^{-6}$  in Nonrelativistic Three Dimensional Real Spaces and Phases, *International Letters of Chemistry, Physics and Astronomy*, Vol. 61, pp. 38-48, Nov. 2015.
- [51] Abdelmadjid Maireche, New Bound State Energies for Spherical Quantum Dots in Presence of a Confining Potential Model at Nano and Plank's Scales, *NanoWorld J*, 1(4): (2016) 120-127.
- [52] Abdelmadjid Maireche and Janaoui Imane (2016) A New Nonrelativistic Investigation for Spectra of Heavy Quarkonia with Modified Cornell Potential: Noncommutative Three Dimensional Space and Phase Space Solutions, *J. Nano-Electron. Phys.* 8(3): 03025-1 - 03025-9.
- [53] Maireche A (2016) A New Nonrelativistic Investigation for Interactions in One-Electron Atoms With Modified Inverse-Square Potential: Noncommutative Two and Three Dimensional Space Phase Solutions at Planck's and Nano-Scales. *J Nanomed Res* 4(3): 00090. DOI: 10.15406/jnmr.2016.04.00090
- [54] I. S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, ISBN-13: 978-0-12-373637-6, (2007) USA.

## Abstract

In this work, of master memory, in theoretical physics, (2017/2018), we have studied the Schrödinger equation for anharmonic in noncommutative three-dimensional spaces-phase by applying the Bopp's shift method to first order in the noncommutative parameters ( $\Theta$  and  $\bar{\theta}$ ), instead of using the star product method. We apply perturbation theory to obtain the corrections to the energy levels.

**Keywords:** Star product, noncommutative space, phase, and anharmonic potential.

## ملخص

في هذا العمل الخاص بمذكرة الماستر في الفيزياء النظرية (2018/2017). درسنا معادلة شرودينغر تحت تأثير كمون يسمى anharmonic في الفضاء اللاتبادلي ثنائي البعد بتطبيق مبدأ Bopp بدلا من الحل المباشر الناتج عن الجداء النجمي. إعتدنا الناتج الموافقة للحدين  $\bar{\theta}$  و  $\Theta$ . وجدنا التصحيحات على مستويات الطاقة بتطبيق نظرية الاضطرابات.

الكلمات المفتاحية: الجداء النجمي. الفضاء اللاتبادلي و الكمون المركزي