REPUBLIQUEALGERIENNEDEMOCRATIQUEETPOPULAIRE
MINISTEREDEL'ENSEIGNEMENTSUPERIEURETDELARECHERCH ESCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Analyse Mathématiques et numérique

Thème

Continuité des équations intégrales de type Fredholm dans les espaces d'Orlicz

---

Présentée par :
TALEB Chefiqa

Soutenu publiquement le: xx/xx/2021.

Devant le jury composé de:

Président:	*NADIR Mostefa*	Prof,	Université de M'sila
Encadreur:	*GAGUI Bachir*	M.C.A,	Université de M'sila
Examinateur:	*GASMI Abdelkader*	Prof,	Université de M'sila

Année universitaire 2020/2021

Remerciements

Avant tout je remercie **Allah**, le tout puissant d'avoir, éclairé notre vie, renforcé notre courage et notre volonté pour finir ce travail..

Je tiens à remercier particulièrement mon encadreur **Dr. Bachir GAGUI**, pour toute l'aide qu'il nous a apporté et sa patience ses conseils et pour avoir guidé ce travail avec beaucoup d'intérêt.

Je tiens à remercier aussi **Dr Mostefa NADIR**, d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.je tiens à remercier **Dr Abdelkader GASMI**, pour avoir accepté d'examiner notre mémoire.

Je remercie s'adressent également à tout les enseignants du département de mathématiques pour leurs dévouement et leurs générosité.

Je tiens ici à exprimer nos sentiments respectueux à nos chers parents à qui nous dédions ce travail pour leur grand soutien.

Un grand merci à ma famille, à ma proche et à mes collègues pour leurs encouragements et pour leurs amitiés.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à:

Mes chers parents qui étaient toujours attentifs affectueux et compréhensifs qui m'ont soutenu durant les la borienses années de mes études,à qui je témoigne toute ma gratitude.

Mes frères et mes soeurs.

Toute ma famille chacun par son nom.

Tous mes camarades de promo et tous mes amis.

Résumé

Dans ce mémoire on a traité une notion topologique importante dans l'analyse fonctionnelle ,notamment la propriété de la continuité des opérateurs intégraux de type Fredholm dans les espaces fonctionnelles de type Orlicz L_Φ

Mots clés : La continuité,équation intégrale,équation intégrale de Fredholm,espace d'Orlicz.

Notations

(Ω, Σ, μ)	Espace mesuré de mesure μ.
$L^p(\Omega)$	L'espace de Lebesgue.
$L^{p'}(\Omega)$	L'espace dual de Lebesgue.
p_*	$ess \inf_\Omega p(x)$.
p^*	$ess \sup_\Omega p(x)$.
Ω	ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.
$\|\Omega\|$	mesure de l'ensemble Ω.
$\Phi(x)$	Fonction d'Orlicz.
$\Phi^*(x)$	La fonction complémentaire de Φ.
$L_\Phi(\Omega)$	L'espace d'Orlicz.
$\widetilde{L}_\Phi(\Omega)$	La classe d'Orlicz.
$\\|f\\|_\Phi^o$	La norme d'Orlicz.
$\\|f\\|_\Phi^L$	La norme de Luxemburg.
$\\|f\\|_\Phi^A$	La norme d'Amemya.
$a(\Phi)$	$\sup \{x \geq 0 : \Phi(x) = 0\}$.
A	Opérateur intégral.

Table des matières

Introduction

L'équation intégrale de Fredholm est une équation intégrale étudiée par Erik Ivar Fredholm (1866-1927) était un mathématicien suédois qui a établi la théorie d'équation intégrales et son document 1903 à Acta Mathématica a joué un rôle majeur dans l'établissement de la théorie des opérateurs Fredholm est surtout connu pour son travail sur les équations intégrales et la théorie spectrale.

les opérateurs intégraux constituent des objets fondamentaux en analyse fonctionnelle ,où ils permettent notamment de transformer les équations fonctionnelles en une version plus simple afin de les résoudre facilement.

ils interviennent dans plusieurs domaines tels que les équations aux dérivées partielles ,les phénomènes de diffusion et les équations intégrales. En ce qui concerne notre sujet ⟨⟨continuité des équations intégrales de type Fredholm dans les espaces d'Orlicz⟩⟩ on s'intéresse à l'étude du problème de la continuité dans différents espaces ,en particulier l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ et puis dans l'espace d'Orlicz.

Notre travail est reparti en deux chapitres:

Dans le premier chapitre,est consacré à un rappel général de les espaces de Lebesgue et les espaces de Lebesgue généralisée. Puis,nous présentons les espaces d'Orlicz et leurs propriétés fondamentales.

Dans Le deuxième chapitre,nous rappelons quelques définitions sur les équations intégrales linéaires de type Fredholm et étudier la condition de la continuité dans l'espace d'Orlicz.

Enfin, nous espérons avoir introduit avec succès ce thème des équations intégrales ce qui est très important dans les domaines scientifiques,et l'analyse théorique, les domaines de l'ingénierie mathématique,...etc.

Nous espérons que ce mémoire sera utile pour les étudiants qui sont prêts à faire des recherches dans ce domaine.

Chapitre 1

Espace d'Orlicz

Dans ce chapitre ,nous présentons quelques définitions et théorème de base sur les espaces fonctionnels,notamment les espaces des fonctions,ce sont

les espaces de Lebesgue ,Lebesgue généralisé et l'espace d'Orlicz.

1.1 Rappels et notions fondamentales

Définition 1.1.1 (Espace vectoriel normé)

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,on appelle norme sur l'espace E toute application notée $\| \cdot \|$définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}_+$,vérifiant pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \Bbbk$

(i) $\| x \| = 0$ *si seulement si* $x = 0$.

(ii) $\| \lambda x \| = | \lambda | \| x \|$

(iii) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

toute espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Définition 1.1.2 (Suite de Cauchy)

Soit x_n une suite d'éléments d'un espace normé $(E, \|\|)$,on dit que la suite x_n est de Cauchy si,on la relation suivante

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \quad \forall p, q \geq N_\varepsilon, \quad on\ a \| x_p - x_q \| < \varepsilon$$

Lemme 1.1.1 [5]

Soit x_n une suite de cauchy dans un espace normé $(E, \|\|)$ contient une sous suite x_{nk} convergente vers x alors la suite x_n et aussi convergente vers le même élément x.

Définition 1.1.3 (Espace complet)

Un espace vectoriel normé $(E, \|\|)$ est dite complet ,si toute suite de Cauchy d'éléments de E est une suite convergente dans E.

Définition 1.1.4 (Espace de Banach)

On appelle espace de Banach toute espace vectoriel normé et complet.

Définition 1.1.5

Soit A un opérateur intégral, on dit que l'opérateur A est continu dans l'espace fonctionnel X, si la suite $\{u_n\}$ convergente vers une fonction u, on obtient la suite $\{A(u_n)\}$ converge vers $A(u)$.

Définition 1.1.6

On dit que la fonction Φ est convexe, s'elle est vérifiée l'inégalité suivante

$$\Phi(\alpha u + (1-\alpha)v) \leq \alpha\Phi(u) + (1-\alpha)\Phi(v)$$

pour tous $(0 \leq \alpha \leq 1)$.

1.2 Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Définition 1.2.1

Soient Ω un espace mesuré et $1 \leq p \leq \infty$,on note par $L^p(\Omega)$ les classes de toute les fonctions mesurables f définies dans Ω, où

$$\int_\Omega | f(x) |^p \, dx < \infty$$

la fonctionnelle $\| \cdot \|_p$définie par

$$\| f \|_p = \left[\int_\Omega | f(x) |^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

et une norme dans $L^p(\Omega)$, pour $1 \leq p < \infty$.

1.3 Espace $L^{p(x)}$

1.3.1 Définitions et propriétés

Définition 1.3.1

Soit Ω *un ensemble de* $\mathbb{R}^n$ *,on note par*

$$P(\Omega) = \{\textit{tous les fonctions mesurables } p : \Omega \to [1, \infty]\}$$

les élément de $P(\Omega)$ *sont appelés exposants variables sur* Ω *.*

On pose $P_\Omega^* = ess_{x\in\Omega} \sup p(x)$ *et* $P_{*\Omega} = ess_{x\in\Omega} \inf p(x)$

Définition 1.3.2

Soit $p \in P(\Omega)$ *et*

$$\rho_{L^{p(x)}(\Omega)}(f) = \int_\Omega | f(x) |^{p(x)} \, dx,$$

on définit l'espace de Lebesgue avec exposant variable $L^{p(x)}(\Omega)$ *par*

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ f \textit{ mesurable} : \lim_{\lambda \to 0} \rho_{L^{p(x)}(\Omega)}(\lambda f) = 0 \right\}$$

muni de la norme

$$\| f \|_{L^{p(x)}} = \inf \lambda > 0 : \rho_{L^{p(x)}} \left(\frac{f}{\lambda} \right) \le 1$$

Remarque 1.3.1

Si la fonction $p(x) = p = cst$*,donc la norme coïncide avec la norme usuelle de l'espace* $L^p(\Omega)$ *,autrement dit*

$$L^{p(x)}(\Omega) = L^p(\Omega)$$

1.3.2 Inégalités auxiliaires

Théorème 1.3.1 (Inégalité de Hölder)

Soit $p \in P(\Omega)$*, pour toute fonction* f *dans* $L^{p(x)}(\Omega)$ *et pour toute* $g \in L^{p'(x)}(\Omega)$ *,on a l'inégalité suivante*

$$\int_\Omega | f(x) g(x) | \, dx \le r_p \| f \|_p \| g \|_{p'}$$

avec la constante r_p *définie par :* $r_p = c_p + \frac{1}{p_*} - \frac{1}{p^*}$

Preuve. pour la preuve voir [3] ■

Remarque 1.3.2

Si $\mid \Omega \mid= 0$, *alors l'espace* $L^{p(x)}(\Omega)$ *c'est l'espace d'Orlicz .*

1.4 Espace d'Orlicz

Les espaces d'Orlicz ont été présentés la première fois en 1931 par le mathématicien polonais W. Orlicz et plus tard a été baptisé du nom de lui .

dans cette section on expose cet espaces et leurs propriétés fondamentales.

1.4.1 Définitions et exemples

Définition 1.4.1

On appelle fonction d'Orlicz une fonction $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ *telle que*

1.Φ *pair ,convexe et continue et* $\Phi(0) = 0$

2.$\Phi(x) > 0$ *pour tout* $x > 0$

3.$\lim_{x\rightarrow 0} \frac{\Phi(x)}{x}$ *et* $\lim_{x\rightarrow\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = \infty$

la fonction Φ *et dite* $N - fonction$

Exemple 1.4.1

Les fonctions suivantes,

$\Psi(x) = \exp(\mid x \mid) - 1$ *et* $\Phi_p(x) = \frac{|x|^p}{p}$,$1 \leq p < \infty$

sont des fonctions d'Orlicz.

Définition 1.4.2 (définition équivalente)

Soit Φ *une fonction*

Φ *est une N-fonction si elle admet la représentation intégrale suivante :*

$$\Phi(x) = \int_0^{|x|} p(t)\, dt$$

où la fonction p *définie sur* $[0, +\infty[$ *a valeurs dans* $\mathbb{R}$ *vérifie les conditions suivantes:*

1) $p(0) = 0$

2) $p(t) > 0$ *si* $t > 0$ *et* $\lim_{t\to\infty} p(t) = +\infty$

3) p *est continue adroite pour* $t \geq 0$

4) p *est croissante sur* $\mathbb{R}^+$

1.4.2 Fonction complémentaire d'une fonction d'Orlicz

Définition 1.4.3

Soit Φ *une fonction d'Orlicz ,alors la fonction* $\Phi^* : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ *définie par:*

$$\Phi^*(x) = \sup_{x\geq 0} \{xy - \Phi(y)\}, \forall y \in \mathbb{R}$$

s'appelle la fonction complémentaire ou la fonction conjuguée de Φ.

Théorème 1.4.1

Soit Φ *une fonction de Young* $(N - fonction)$ *et* Φ^* *la fonction conjuguée ,alors* Φ^* *aussi est une fonction de Young .*

Preuve. Nous allons démontre que Φ^*est une $N - fonction$.

1) Φ^*est paire,si elle vérifie la condition:

$$\Phi^*(-x) = \Phi^*(x)$$

On a

$$\Phi^*(-x) = \sup_{x\geq 0} \{(-xy) - \Phi(y)\}$$

on peut écrire

$$\sup(-xy) = \sup(xy)$$

alors

$$\begin{aligned} \Phi^*(-x) &= \sup_{x\geq 0} \{xy - \Phi(y)\}, \forall y \in \mathbb{R} \\ \Phi^*(-x) &= \Phi^*(x) \end{aligned}$$

Donc Φ^* est paire.

Φ^* est convexe ,si $\forall x, z \in \mathbb{R}^+, \forall \lambda \in [0, 1]$

$$\Phi^*[(1-\lambda)x + \lambda z] \leq (1-\lambda)\Phi^*(x) + \lambda\Phi^*(z)$$

On a

$$\begin{aligned}\Phi^*\left[(1-\lambda)x+\lambda z\right] &= \sup_{x\geq 0}\left\{\left[(1-\lambda)x+\lambda z\right]y-\Phi(y)\right\}, \forall y\in\mathbb{R}\\ &= \sup_{x\geq 0}\left\{\left[(1-\lambda)x+\lambda z\right]y-\Phi(y-\lambda y+\lambda y)\right\}, \forall y\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

on a Φ est convexe,alors

$$\begin{aligned}\Phi^*\left[(1-\lambda)x+\lambda z\right] &\leq \sup_{x\geq 0}\left\{\left[(1-\lambda)x+\lambda z\right]y-(1-\lambda)\Phi(y)-\lambda\Phi(y)\right\}\\ &\leq \sup_{x\geq 0}\left\{(1-\lambda)\left[xy-\Phi(y)\right]+\lambda\left[zy-\Phi(y)\right]\right\}\end{aligned}$$

de plus

$$\Phi^*\left[(1-\lambda)x+\lambda z\right]\leq(1-\lambda)\sup_{x\geq 0}\left[xy-\Phi(y)\right]+\lambda\sup_{x\geq 0}\left[zy-\Phi(y)\right]$$

alors

$$\Phi^*\left[(1-\lambda)x+\lambda z\right]\leq(1-\lambda)\Phi^*(x)+\lambda\Phi^*(z)$$

donc Φ^*est convexe.

pour tout x ,la relation $xy-\Phi(y)=0$,si $y=0$ i.e $\Phi^*(x)\geq 0$ donc il est trivial que $\Phi^*(0)=0$.

On a Φ est continue (par la définition) alors Φ^* est continue.

2) pour démontre que $\Phi^*>0$,pour tout $x>0$,on a dans les conditions de N-fonction,la fonction Φ est positive d'où $\Phi(x)>0$,de plus le 'sup' est positive,d'où

$$\sup_{x\geq 0}\left\{xy-\Phi(y)\right\}$$

est positive ,Donc

$$\sup_{x\geq 0}\left\{xy-\Phi(y)\right\}>0, \text{pour tout } y>0$$

alors Φ^* est positive.

3)on a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\Phi^*(x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sup_{x\geq 0}\left\{xy-\Phi(y)\right\}}{x}, y\in\mathbb{R}\\ &= \lim_{x\to 0}\sup_{x\geq 0}\left\{y-\frac{\Phi(y)}{x}\right\}, y\in\mathbb{R}\\ &= \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\sup_{x\geq 0}\left\{y-\frac{\Phi(y)}{y}\cdot\frac{y}{x}\right\}, y\in\mathbb{R}\\ &= \lim_{x\to 0}\sup_{x\geq 0}\lim_{y\to 0}\left\{y-\frac{\Phi(y)}{y}\cdot\frac{y}{x}\right\}, y\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

on a

$$\lim_{y \to 0} \frac{\Phi(y)}{y} = 0$$

Donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{\Phi^*(x)}{x} = 0$$

on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{\Phi^*(x)}{x} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sup_{x \geq 0} \{xy - \Phi(y)\}}{x}, y \in \mathbb{R} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \sup_{x \geq 0} \left\{ y - \frac{\Phi(y)}{y} \cdot \frac{y}{x} \right\}, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

et on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\Phi(y)}{y} = +\infty$$

alors

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\Phi^*(x)}{x} = +\infty$$

■

Inégalité de Young

Proposition 1.4.1

Le couple (Φ, Φ^*) satisfait à l'inégalité suivant dite inégalité de Young ,

$$xy \geq \Phi(x) + \Phi^*(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Remarque 1.4.1

On déduit d'après l'inégalité de Young

$$\Phi^*(y) \geq xy - \Phi(x)$$

et par conséquent on a

$$\Phi^*(y) = \max_{x \geq 0} \{xy - \Phi(x)\}$$

cette formule est une définition de N-fonction complémentaire de Φ.

Inégalité de Jensen

Définition 1.4.4

Soit Φ une N-fonction

(i) Soit $u_1, u_2, ..., u_n \in \mathbb{R}$ et $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ des nombres positifs ,alors

$$\Phi\left(\frac{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}\right) \leq \frac{\alpha_1 \Phi(u_1) + \alpha_2 \Phi(u_2) + ... + \alpha_n \Phi(u_n)}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n} \tag{1.4.1}$$

(ii) Soit $\alpha = \alpha(x)$ définie et positive sur Ω,alors

$$\Phi\left(\frac{\int_\Omega u(x)\,\alpha(x)\,dx}{\int_\Omega \alpha(x)\,dx}\right) \leq \frac{\int_\Omega \Phi(u(x))\,\alpha(x)\,dx}{\int_\Omega \alpha(x)\,dx} \tag{1.4.2}$$

Remarque 1.4.2

L'inégalité (1.4.1) *est appelée inégalité de Jensen et l'inégalité* (1.4.2) *est appelée inégalité intégrale de Jensen.*

1.4.3 La condition Δ_2

La condition Δ_2 est une condition de croissance sur les fonctions d'Orlicz , elle joue un rôle très important dans l'étude de la géométrie des espaces d'Orlicz .

Définition 1.4.5

Une fonction d'Orlicz $\Phi(x)$ satisfait la condition Δ_2, s'il existe $k > 0$ et $x_0 \geq 0$ tel que ,

$$\Phi(2x) \leq k\Phi(x) \qquad \forall x \geq x_0$$

Exemple 1.4.2

La N-fonction $\Phi(x) = a \mid x \mid^\alpha, (\alpha > 1)$ peut donner d'exemple simple de fonction satisfaisant la condition Δ_2 pour toutes les valeurs de x dans la mesure où

$$\Phi(2x) = a2^\alpha \mid x \mid^\alpha = 2^\alpha \Phi(x)$$

1.4.4 Classe d'Orlicz

Définition 1.4.6

Soit l'espace mesuré (Ω, Σ, μ)*, soit* Φ *une N-fonction on appelle classe d'Orlicz l'ensemble des fonctions* $f \in M(\Omega, \Sigma, \mu)$ *vérifiant*

$$\int_{\Omega} \Phi(|\, f(x)\,|)\, d\mu < \infty$$

est noté par $\widetilde{L}_{\Phi}(\Omega, \Sigma, \mu)$

Remarque 1.4.3

$\widetilde{L}_{\Phi}(\mu)$ *n'est pas un espace vectoriel.*

Exemple 1.4.3

On considère $\Omega =]0,1[$ *et* $\Phi(t) = e^t$*, alors la fonction* $u(x) = \frac{-1}{2} \ln x$ *appartient à* $\widetilde{L}_{\Phi}$*mais la fonction* $v(x) = 2u(x) = -\ln x$ *n'appartient pas*

1.4.5 Espace d'Orlicz

Soit (Ω, Σ, μ) un espace mesuré de mesure μ .On note par $M(\Omega)$ l'ensemble des fonctions μ-mesurables sur Ω.dont les valeurs dans $[0, \infty]$

Dans toute la suit (Φ, Φ^*) désignera un couple complémentaire de fonctions d'Orlicz.

Définition 1.4.7

Soit Φ *une fonction d'Orlicz .La fonctionnelle,*

$$\rho_{\Phi} : M(\Omega) \longrightarrow [0, \infty]$$
$$f \longmapsto \rho_{\Phi}(f) = \int_{\Omega} \Phi(f(x))\, d\mu$$

est une modulaire convexe sur $M(\Omega)$ *dite modulaire d'Orlicz, c'est-à-dire* $\rho_{\Phi}(f)$ *vérifie,*

1)$\rho_{\Phi}(f) = 0 \iff f \in [0, a(\Phi)]$

2)$\rho_{\Phi}(-f) = \rho_{\Phi}(f)$

3)$\rho_{\Phi}(\alpha f + \beta g) \leq \alpha \rho_{\Phi}(f) + \beta \rho_{\Phi}(g)$ *où* $\alpha, \beta \in [0,1]$ *et* $\alpha + \beta = 1.$

Définition 1.4.8

Soit $\widetilde{L}_{\Phi}(\mu)$ *l'ensemble des classe d'Orlicz ,on définit l'espace d'Orlicz* $L_{\Phi}(\mu)$ *par :*

$$L_{\Phi}(\mu) = \left\{ f \in M(\Omega, \Sigma, \mu) \text{ telle que } \exists \lambda > 0 : \lambda f \in \widetilde{L}_{\Phi}(\mu) \right\}$$
$$= \left\{ f \in M(\Omega, \Sigma, \mu) \text{ telle que } \int_{\Omega} \Phi(\lambda f(x))\, d\mu < \infty \text{ pour } \lambda > 0 \right\}$$

Remarque 1.4.4

$\widetilde{L}_{\Phi}(\mu) \subset L_{\Phi}(\mu)$ *et* $L^{\infty}(\mu) \subset L_{\Phi}(\mu)$

Proposition 1.4.2

$L_{\Phi}(\mu)$ *est un espace vectoriel.*

Preuve. pour la preuve voir [2] ■

Lemme 1.4.1

Soit Φ *une fonction de Young et soit* $f \in L_{\Phi}$ *,telle que* $\| f \|_{\Phi} \neq 0$ *alors*

$$\int_{\Omega} \left(\frac{| f(x) |}{\| f(x) \|} \right) dx \leq 1$$

1.4.6 Normes sur l'espace d'Orlicz

Dans les espaces d'Orlicz $L_{\Phi}(\Omega)$,on définie trois normes ,qui sont appelées la norme d'Orlicz,norme de Luxemburg et la norme d'Amemiya .Ces normes sont définies comme suit:

La norme d'Orlicz

Définition 1.4.9

Soit (Ω, Σ, μ) *un espace mesuré , et soit* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable et* (Φ, Φ^*) *un couple complémentaire de N-fonction,alors*

$$\| f \|_{o} = \| f \|_{\Phi}^{o} = \sup \left\{ \int_{\Omega} | fg | \, d\mu : \int_{\Omega} \Phi^* (g) \, d\mu \leq 1 \right\}$$

est une norme sur l'espace L_{Φ} *dite norme d'Orlicz .*

La norme de Luxemburg

l'ensemble L_{Φ} peut être transformé en espace de Banach à l'aide des normes distinctes de la norme présentée ci-dessus.

Définition 1.4.10

Soient Φ une fonction de Young et f une fonction mesurable définie sur Ω alors,

$$\| f \|_L = \| f \|_\Phi^L = \inf \left\{ k > 0 : \int_\Omega \Phi \left(\frac{| f(x) |}{k} \right) dx \leq 1 \right\}$$

est appelé la norme de Luxemburg de f.

Remarque 1.4.5

on peut noté par

$$\| f \| = \inf k$$

où le minimum est sur tout $k > 0$,tel que

$$\rho \left(\frac{f}{k} ; \Phi \right) = \int_\Omega \Phi \left[\frac{f(x)}{k} \right] dx \leq 1$$

La norme de Amemiya

Définition 1.4.11

Soient Φ une fonction de Young et f une fonction mesurable définie sur Ω, alors

$$\| f \|_A = \| f \|_\Phi^A = \inf_{k>0} \frac{1}{k} \left(1 + \int_\Omega \Phi \left[k f(x) \right] dx \right)$$

est appelé la norme de Amemiya de f

1.4.7 Equivalence des deux normes

Proposition 1.4.3

La norme d'Orlicz est équivalente à la norme de Luxemburg Plus précisément,

$$\| f \|_\Phi^L \leq \| f \|_\Phi^o \leq 2 \| f \|_\Phi^L$$

Preuve. pour la preuve voir [2]. ■

Remarque 1.4.6

Les deux normes sont équivalentes alors $\left(L_\Phi (\Omega), \| f \|_\Phi^L \right)$ et $\left(L_\Phi (\Omega), \| f \|_\Phi^o \right)$ ont les mêmes propriétés topologiques .

Inégalité de Hölder

Soient $f \in L_\Phi$ et $g \in L_{\Phi^*}$ deux fonctions mesurables sur un espace mesuré (Ω, Σ, μ) avec Φ et Φ^* deux N-fonctions conjuguées, alors $f \cdot g \in L^1$ et

$$\int_\Omega \mid f(x)\, g(x) \mid dx \leq 2 \parallel f \parallel_\Phi \parallel g \parallel_{\Phi^*} \tag{1.4.3}$$

Preuve.

1) Si un des deux termes du produit du membre de droite est nul ou infini celle-ci étant automatiquement satisfaite .

2) pour $\parallel f \parallel_\Phi \neq 0$ et $\parallel g \parallel_{\Phi^*} \neq 0$

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{\mid f(x) \mid}{\parallel f(x) \parallel_\Phi}\right) dx \leq 1$$

et

$$\int_\Omega \Phi^*\left(\frac{\mid g(x) \mid}{\parallel g(x) \parallel_{\Phi^*}}\right) dx \leq 1$$

on utilise l'inégalité de young

$$xy \leq \Phi(x) + \Phi^*(y)$$

on pose

$$x = \frac{\mid f(x) \mid}{\parallel f(x) \parallel_\Phi}, y = \frac{\mid g(x) \mid}{\parallel g(x) \parallel_{\Phi^*}}$$

$$\frac{\mid f(x)\, g(x) \mid}{\parallel f(x) \parallel_\Phi \parallel g(x) \parallel_{\Phi^*}} \leq \Phi\left(\frac{\mid f(x) \mid}{\parallel f(x) \parallel_\Phi}\right) + \Phi^*\left(\frac{\mid g(x) \mid}{\parallel g(x) \parallel_{\Phi^*}}\right)$$

en intégrant sur Ω

$$\int_\Omega \frac{\mid f(x)\, g(x) \mid}{\parallel f(x) \parallel_\Phi \parallel g(x) \parallel_{\Phi^*}} dx \leq \int_\Omega \Phi\left(\frac{\mid f(x) \mid}{\parallel f(x) \parallel_\Phi}\right) dx + \int_\Omega \Phi^*\left(\frac{\mid g(x) \mid}{\parallel g(x) \parallel_{\Phi^*}}\right) dx$$

$$\int_\Omega \mid f(x)\, g(x) \mid dx \leq \parallel f(x) \parallel_\Phi \parallel g(x) \parallel_{\Phi^*} \left[\int_\Omega \Phi\left(\frac{\mid f(x) \mid}{\parallel f(x) \parallel_\Phi}\right) dx + \int_\Omega \Phi^*\left(\frac{\mid g(x) \mid}{\parallel g(x) \parallel_{\Phi^*}}\right) dx\right]$$

$$\int_\Omega \mid f(x)\, g(x) \mid dx \leq 2 \parallel f(x) \parallel_\Phi \parallel g(x) \parallel_{\Phi^*}$$

■

Remarque 1.4.7

pour chaque fonction $f(x) \in L_{\Phi}$*,nous avons*

$$\parallel f \parallel_{\Phi} = \sup_{\rho(g,\Phi^*)} \mid (f, g) \mid \leq \rho(f; \Phi) + 1 \tag{1.4.4}$$

avec

$$\rho(f; \Phi) = \int_{\Omega} \Phi(f(x)) \, d\mu \leq 1$$

L'inégalité (1.4.4) *aussi s'appelle inégalité de Hölder.*

1.5 Quelques propriétés des espaces d'Orlicz

1.5.1 La complétude

Théorème 1.5.1 *[2]*

L'espace d'Orlicz $L_{\Phi}(\Omega)$ *muni l'une de ces normes et un espace de Banach.*

Preuve. On va donné la démonstration dans le cas de la norme d'Orlicz .

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de cauchy dans $L_{\Phi}(\Omega)$.donc,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0 \text{ on a} \parallel f_n - f_m \parallel_{\Phi}^{o} < \varepsilon \tag{1.5.1}$$

Ceci signifie que pour toute fonction $g \in L_{\Phi^*}(\Omega)$ avec $\rho_{\Phi^*} \leq 1$,on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0 \int_{\Omega} \mid f_n(x) - f_m(x) \mid\mid g(x) \mid d\mu < \varepsilon,$$

Il en résulte que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure. Donc elle contient une sous suite $(f_{nk}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge presque partout vers une limite notée $f(x)$.

Soit $\varepsilon > 0$, en vertu de (1.5.1) on peut trouvé un k_{ε} telle que pour tout k,$k+p > k_{\varepsilon}$,on a

$$\int_{\Omega} \mid f_{nk+p}(x) - f_{nk}(x) \mid\mid g(x) \mid d\mu < \varepsilon, \tag{1.5.2}$$

pour toute fonction $g \in L_{\Phi^*}(\Omega)$ qui satisfait $\rho_{\Phi^*}(g) \leq 1$.

Par passage à la limite quand $p \longrightarrow \infty$ dans (1.5.2), on obtient

$$\int_{\Omega} \mid f_n(x) - f_{nk}(x) \mid\mid g(x) \mid d\mu < \varepsilon \tag{1.5.3}$$

Il résulte de l'inégalité (1.5.3) que $f_0 - f_{nk} \in L_\Phi(\Omega)$, $f \in L_\Phi(\Omega)$ et $\| f - f_{nk} \| < \varepsilon$.C'est-à-dire

la sous suite $(f_{nk}(x))_k$,converge en norme vers f. Alors, la suite de Cauchy $(f_n)_{n\geq 1}$ possède une sous suite convergente donc elle converge aussi vers la même limite f.

D'où $L_\Phi(\Omega)$ est complet Par conséquent $L_\Phi(\Omega)$ est un Banach. ■

Proposition 1.5.1

1.Les espaces $L_\Phi(\Omega)$ sont réflexifs si et seulement si Φ et Φ^* vérifient la condition de croissance Δ_2.

2.$L_\Phi(\Omega)$ est un espace séparable si et seulement si vérifie la condition Δ_2.

Chapitre 2

La Continuité de l'opérateur de type Fredholm dans l'espace d'Orlicz

Dans ce dernier chapitre, on définit les équations intégrales de type Fredholm puis on étudie la continuité de cet opérateur intégrale dans l'espace d'Orlicz.

2.1 Equations intégrales linéaires

Définition 2.1.1

On appelle équation intégrale linéaire une équation ,à une inconnue $\varphi(x)$ de la forme

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\Omega} k(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x)$$

où $k(x,t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramètre numérique non nul ,réel ou complexe. x et t deux variables réels .

Définition 2.1.2 (Opérateur intégrale linéaire)

Un opérateur intégral linéaire A est un opérateur qui admet une forme

$$(A\varphi)\,x = \int\limits_{\Omega} k(x,t)\varphi(t)dt$$

où Ω est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ $(\Omega = [a,b]$ ou $\Omega = [a,x])$ et la fonction k étant appelée noyau de l'opérateur A.

Si k est une fonction continue de $[a,b]\times[a,b]$, l'opérateur A est appelé opérateur intégral à noyau continue k.

2.2 Equations intégrales linéaires types

Définition 2.2.1

1)On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)\,\varphi(t)\,dt=f(x) \tag{2.2.1}$$

2)On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce, une équation de la forme

$$\lambda\int_a^b k(x,t)\,\varphi(t)\,dt=0$$

Définition 2.2.2

1)On appelle équation intégrale de Volterra de seconde espèce, une équation de la forme

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^x k(x,t)\,\varphi(t)\,dt=f(x) \tag{2.2.2}$$

2)On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce une équation de la forme

$$\lambda\int_a^x k(x,t)\,\varphi(t)\,dt=0$$

Remarque 2.2.1

L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm.

Remarque 2.2.2

i) Si $f(x)=0$,dans l'équation (2.2.1) (2.2.2) est dite homogène.

ii) Si $f(x)\neq 0$ l'équation (2.2.1) (2.2.2) est dite non homogène.

2.3 Opérateurs intégrales dans $L_p(\Omega)$

Théorème 2.3.1

Soit A un opérateur intégrale de norme finie

$$\|A\|_p < \infty$$

Alors l'opérateur intégrale A est un opérateur linéaire continu de $L_p(G_2)$ dans $L_p(G_1)$ .De plus ,on a

$$\|A\varphi\|_p \leq \|A\|_p \|\varphi\|_p$$

Preuve. •premier cas $1 < p < \infty$

par utilisation de l'inégalité de Hölder , on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{G_1} |A\varphi(x)|^p \, dx &= \int_{G_1} \left(\int_{G_2} |k(x,y)| \, |\varphi(y)| \, dy \right)^p dx \\
&\leq \int_{G_1} \left(\left(\int_{G_2} |k(x,y)|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{G_2} |\varphi(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p dx \\
&= \|\varphi\|_p^q \int_{G_2} \left(\int_{G_2} |k(x,y)|^q \, dy \right)^{\frac{p}{q}} dx \\
&= \|A\|_p^q \|\varphi\|_p^q
\end{aligned}$$

D'où la continuité de l'opérateur intégrale $A\varphi(x) = \int_{G_2} k(x,y)\varphi(y)\,dy$ de $L_p(G_2)$ dans $L_p(G_1)$ .De plus, on a

$$\left(\int_{G_1} |A\varphi(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\|A\|_p^p \|\varphi\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ou encore

$$\|A\varphi\|_p \leq \|A\|_p \|\varphi\|_p$$

•Deuxième cas $p = 1$

$$\begin{aligned}
\int_{G_1} |A\varphi(x)| \, dx &= \int_{G_1} \left(\int_{G_2} |k(x,y)| \, |\varphi(y)| \, dy \right) dx \\
&\leq \int_{G_1} ess \sup_y |k(x,y)| \, dx \int_{G_2} |\varphi(y)| \, dy \\
&\leq \|\varphi\|_1 \int_{G_1} ess \sup_y |k(x,y)| \, dx \\
&\leq \|A\|_1 \|\varphi\|_1
\end{aligned}$$

■

2.4 Opérateurs linéaires dans $L_\Phi(\Omega)$

On suppose que $\Phi(u)$ et $\Phi^*(v)$ deux N-fonctions complémentaires. soit $v(x)$ une fonction fixe dans $L_{\Phi^*}(\Omega)$, d'après l'inégalité de Hölder (1.4.3) que la fonctionnelle linéaire

$$l(u) = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx, \ \ u(x) \in L_\Phi(\Omega) \tag{2.4.1}$$

est défini sur l'espace entier $L_\Phi(\Omega)$.

L'inégalité

$$\| l \| \leq \| v \|_{\Phi^*} \leq 2 \| l \| \tag{2.4.2}$$

est vérifiée, avec la note que $\| l \|$ la norme du fonctionnel $l(u)$

$$\| l \| = \sup_{\|u\|_\Phi \leq 1} | l(u) | \ .$$

L'inégalité gauche dans (2.4.2), depuis l'inégalité de Hölder

$$| l(u) | = | (u, v) | \leq \| u \|_\Phi \| v \|_{\Phi^*},$$

l'inégalité droite dans (2.4.2), d'après (1.4.4)

$$\| v \|_{\Phi^*} = \sup_{\rho(u;\Phi)} | (u, v) | \leq \sup_{\|u\|_\Phi \leq 2} | (u, v) | = 2 \| l \| \ .$$

Nous rappelons que, pour chaque fonction $u(x) \in L_\Phi(\Omega)$, on a

$$\| u \|_\Phi = \alpha^{\frac{1}{\alpha}} \beta^{\frac{1}{\beta}} \left\{ \int_\Omega \Phi[u(x)]\, dx \right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

avec $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, donc

$$\begin{aligned}
\| \ \ l \| &= \sup_{\|u\|_\Phi \leq 1} \left| \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx \right| = \sup_{\alpha^{\frac{1}{\alpha}} \beta^{\frac{1}{\beta}} \left\{ \int_\Omega \Phi[u(x)] dx \right\}^{\frac{1}{\beta}} \leq 1} \left| \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx \right| \\
&= \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\alpha}} \beta^{\frac{1}{\beta}}} \sup_{\int_\Omega \Phi[u(x)] dx \leq 1} \left| \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx \right| \\
&= \frac{\| v \|_{\Phi^*}}{\alpha^{\frac{1}{\alpha}} \beta^{\frac{1}{\beta}}}
\end{aligned}$$

Théorème 2.4.1

On suppose que la N-fonction Φ ne satisfaite pas la condition Δ_2, alors (2.4.1) n'est pas en général une fonctionnelle linéaire sur l'espace $L_\Phi(\Omega)$.

Preuve. pour la preuve voir [3] ■

2.5 Condition de continuité des opérateurs intégraux linéaires

Dans cette partie on s'intéresse aux opérateurs intégraux de la forme

$$A\varphi(x) = \int_a^b k(x,y)\,\varphi(y)\,dy \tag{2.5.1}$$

Le problème fondamental dans cette section consistent a l'étude des conditions où l'opérateur (2.5.1) est continu considéré comme un opérateur de L_{Φ_1}dans L_{Φ_2},i.e. qu'il satisfait la condition

$$\| A\varphi \|_{\Phi_2} \leq \| A \| \| \varphi \|_{\Phi_1}$$

où $\| A \|$ est un certain nombre.

Nous rechercherons naturellement des conditions pour la continuité de A dans les diverses caractéristiques du noyau $k(x,y)$, le noyau appartient à un certain espace d'Orlicz, c'est-à-dire

l'intégrale est finie

$$\int_a^b \int_c^d \Phi[\lambda k(x,y)]\,dxdy \qquad \text{pour certain } \lambda > 0$$

Théorème 2.5.1

Soit $\Phi(u)$ une N-fonction telle que, pour tout $u(x) \in L_{\Phi_1}, v(x) \in L_{\Phi_2^*}$,on a

$$w(x,y) = u(x)\,v(x) \in L_\Phi \tag{2.5.2}$$

avec

$$\| w(x,y) \| \leq c \| u \|_{\Phi_1} \| v \|_{\Phi_2^*}$$

où C est une constante.

On suppose le noyau $k(x,y)$ de l'opérateur intégral linéaire (2.5.2) *appartient à l'espace $L_{\Phi^*}, \Phi^*(v)$ est la N-fonction complémentaire de la N-fonction $\Phi(u)$. Alors l'opérateur* (2.5.2) *appartient à l'espace $L_{\Phi_1} \to L_{\Phi_2}$ est continue.*

Preuve. pour la preuve voir [4] ■

Théorème 2.5.2 *[8]*

pour chaque $k(x,y) \in L_{\Phi^*}([c,d] \times [a,b])$ *,pour qu'un opérateur intégral* A *tel que défini dans* (2.5.1) *qui transforme* $L_{M_1}[a,b]$ *en* $L_{M_2}[c,d]$ *soit continu,*

il est nécessaire et suffisant qu'il existe des nombres positifs α, β *tels que*

$$\Phi(\alpha uv) \leq M_1(u) N_2(v), \qquad u, v \geq \beta$$

où Φ *et* Φ^**,*M_1 *et* N_1 *,*M_2 *et* N_2 *sont trois paires de fonctions complémentaires.*

Preuve. **Nécessaire** si ce n'est pas le cas,il existe des suites croissantes $\{a_n\}, \{b_n\}$ telles que $a_n \to \infty, b_n \to \infty$,et

$$\Phi\left(\frac{a_n b_n}{4^n}\right) > M_1(a_n) N_2(b_n), \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

notez que lorsque $u > 0$ nous avons

$$\Phi^{-1}(u) \Phi^{*(-1)}(u) > u$$

En effet, il est facile de voir que

$$\Phi(v) = v\left(\frac{\Phi(v)}{v}\right) > \Phi^*\left(\frac{\Phi(v)}{v}\right)$$

encore $\Phi(v) = u$,alors nous obtenons l'inégalité ci-dessus, d'où nous avons

$$\begin{aligned} \Phi^{*(-1)}(M_1(a_n) N_2(b_n)) &> \frac{M_1(a_n) N_2(b_n)}{\Phi^{-1}(M_1(a_n) N_2(b_n))} \\ &> \frac{4^n M_1(a_n) N_2(b_n)}{a_n b_n} \end{aligned}$$

$$\Phi^*\left(\frac{4^n M_1(a_n) N_2(b_n)}{a_n b_n}\right) < M_1(a_n) N_2(b_n), \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

sans perte de généralité nous pouvons supposer

$$M_1(a_1)(b-a) > 1, N_2(b_1)(d-c) > 1.$$

Encore ,prendre une suite $\{F_n\}$ d'intervalles non superposés en $[a,b]$ et une suite $\{G_n\}$ d'intervalles non superposés en $[c,d]$ tels que

$$mesF_n = \frac{1}{2^n M_1(a_n)}, mesG_n = \frac{1}{2^n N_2(b_n)}, n = 1, 2, \ldots .$$

définir une fonction sur $[c,d]\times[a,b]$ comme suit :

$$k_0(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^nM_1(a_n)N_2(b_n)}{a_nb_n}\cdot\chi_{G_n\times F_n}(x,y)$$

où χ ci-dessus indique la fonction caractéristique de $G_n\times F_n$.

Alors depuis

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_c^d\Phi^*(k_0(x,y))\,dxdy &= \sum_{n=1}^{\infty}\Phi^*\left(\frac{4^nM_1(a_n)N_2(b_n)}{a_nb_n}\right)mes(G_n\times F_n)\\ &< \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Donc $k_0(x,y)\in L_{\Phi^*}([c,d]\times[a,b])$.,poser

$$\varphi_0(y)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\chi_{F_n}(y)\,,t_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\chi_{G_n}(x)\,.$$

Alors il est facile de voir que

$$\int_a^bM_1(\varphi_0(y))\,dy=1,\int_c^dN_2(t_0(x))\,dx=1.$$

c'est à dire que ,$\varphi_0(y)\in L_{M_1}[a,b]\,,t_0(x)\in L_{N_2}[c,d]\,.$

Maintenant,nous allons montrer que l'opérateur intégrale A_0 comme donné par (2.5.1) avec $k(x,y)$ remplacé par $k_0(x,y)$ n'est pas un opérateur continu de $L_{M_1}[a,b]$ à $L_{M_2}[c,d]\,,$

Donc une contradiction .en effet,il ressort du théorème que $\|\ \varphi_0\ \|^o_{M_1}\leq 2.$

par conséquent

$$\begin{aligned}&\|\ \ A_0\ \|=\sup\ \left\{\|\ A_0(\varphi_0)\ \|^o_{M_2};\|\ \varphi\ \|^o_{M_1}\leq 1\right\}\\ \geq\ &\frac{1}{2}\ \|\ A_0(\varphi_0)\ \|^o_{M_2}\\ \geq\ &\frac{1}{2}\int_c^dA_0(\varphi_0)(x)\,t_0(x)\,dx\\ \geq\ &\frac{1}{2}\int_a^b\int_c^dk_0(x,y)\,\varphi_0(y)\,t_0(x)\,dxdy\\ \geq\ &\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}1=\infty\end{aligned}$$

Suffisance. Comme le montre le théorème.(2.5.1),il suffit de montrer qu'il y un nombre l tel que

$$\|\ \varphi(y)\,t(x)\ \|^o_{\Phi}\leq l\ \|\ \varphi(y)\ \|^o_{M_1}\|\ t(x)\ \|^o_{N_2}$$

pour $\varphi(y) \in L_{M_1}[a,b]$ et $t(x) \in L_{N_2}[c,d]$ .En fait,nous pouvons supposer

$$\| t \|_{N_2} > 0$$

Donc, nous avons fixé

$$\begin{aligned}
F_1 &= \left\{ y \in [a,b] : \frac{|\varphi(y)|}{\|\varphi\|_{M_1}^o} < \beta \right\}, F_2 = [a,b] \backslash F_1 \\
G_1 &= \left\{ x \in [c,d] : \frac{|t(x)|}{\|t\|_{N_2}^o} < \beta \right\}, G_2 = [c,d] \backslash G_1
\end{aligned}$$

puis par l'hypothèse , théorème de Fubini et théorème (2.5.2),nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\| \frac{\alpha\varphi(y)\,t(x)}{\|\varphi\|_{M_1}^o \| t \|_{N_2}^o} \|_{\Phi}^o \leq 1 + \left\{ \int\int_{G_1\times F_1} + \int\int_{G_1\times F_2} + \int\int_{G_2\times F_1} + \int\int_{G_2\times F_2} \right\} \\
&\quad \Phi\left(\frac{\alpha\varphi(y)\,t(x)}{\|\varphi\|_{M_1}^o \| t \|_{N_2}^o} \right) dxdy \\
&\leq 1 + \Phi\left(\alpha\beta^2\right) mesG_1 mesF_1 \\
&\quad + N_2(\beta)\, mesG_1 \int_{F_2} M_1\left(\frac{|\varphi(y)|}{\|\varphi\|_{M_1}^o} \right) dy \\
&\quad + M_1(\beta)\, mesF_1 \int_{G_2} N_2\left(\frac{|t(x)|}{\|t\|_{N_2}^o} \right) dx \\
&\quad + \int_{G_2} N_2\left(\frac{|t(x)|}{\|t\|_{N_2}^o} \right) dx \int_{F_2} M_1\left(\frac{|\varphi(y)|}{\|\varphi\|_{M_1}^o} \right) dy \\
&\leq 2 + \Phi\left(\alpha\beta^2\right)(d-c)(b-a) + N_2(\beta)(d-c) \\
&\quad + M_1(\beta)(b-a)
\end{aligned}$$

D'où le résultat qui suit par simplification

$$\alpha l = 2 + \Phi\left(\alpha\beta^2\right)(d-c)(b-a) + N_2(\beta)(d-c) + M_1(\beta)(b-a).$$

■

Conclusion

L'objectif de ce mémoire,est d'étudier la continuité de les équations intégrales linéaires de type Fredholm de seconde espèce dans les espaces d'Orlicz dont la forme générale est la suivante

$$A\varphi\left(x\right)=\int_{a}^{b}k\left(x,y\right)\varphi\left(y\right)dy$$

Dans cette étude ,on a trouvé des difficultés pour appliquer les conditions de la continuité qui sont étudies dans l'espace de Lebesgue .

On peut expliquer cette différence dans les deux espaces .Dans l'espace de Lebesgue on applique directement la condition de la continuité,mais dans l'espace d'Orlicz on utilise les suite pour démonter la continuité avec la norme d'Orlicz.

Bibliographie

[1] R.A.Adams, Journal of Functional Analysis 24, 241-257 (1977).

[2] F.BOULAHIA, Espaces d'Orlicz,cours $2^{\text{ème}}$année master mathématiques, université de Bejaia.

[3] B. GAGUI, Sur les équation intégrales dans les espaces d'Orlicz, thèse doctorat, université de M'sila, 2015.

[4] M.A. Krasnoselskii and YA.B. Rutickii, Convex functions and Orlicz spaces, P. Nordhoff Ltd. Groningen, 1961.

[5] M.NADIR, cours d'analyse fonctionnelle,université de M'sila, Algérie 2004.

[6] M. Nadir and B. Gagui, two Points for the adaptive Method For the numerical Solution of Volterra Integral Equations, International Journal Mathematical Manscripts, Vol 1 (2007), pp. 133-140.

[7] M. Nadir and B. Gagui, A numerical approximation for solutions of Hammerstein integral equations in Lp spaces,Sao Paulo Journal of Mathematical Sciences Vol 8 (2014), pp. 23-31.

[8] W. Orlicz, Linear functionnal analysis, Series in real analysis Vol.4, World scientific Co.Pte.Ltd, 1992.

ملخص

قمنا في هذه المذكرة بدراسة خاصية طوبولوجية مهمة في التحليل الدالي، المتمثلة في خاصية استمرارية المؤثرات التكاملية من نوع فريدهولم في فضاءات دالية من نوع اورليز.

الكلمات المفتاحية: الاستمرارية، معادلات تكاملية، معادلات تكاملية من نوع فريدهولم، فضاء اورليز.

Résumé

Dans ce mémoire on a traité une notion topologique importante dans l'analyse fonctionnelle, nottament la propriété de la continuité des opérateurs intégraux de type Fredholm dans les espaces fonctionnels de type Orlicz.

Mots clés : continuité, équation intégrale, équation intégrale de Fredholm, espace d'Orlicz.

Abstract

In this memory,we study an important topological notion in functional analysis ,notably the preperty of the continuity of integral operators of Fredholm type in functional spaces of Orlicz type.

Keywords : continuity, intégrale equation, Fredholm's integral equation, Orlicz space.