



---

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF - M'SILA  
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE  
DÉPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES

---



N° d'ordre : .....

# THÈSE

*Présentée pour l'obtention du diplôme  
de Doctorat en sciences*

**Spécialité**

*Mathématiques*

**Option**

*Mathématiques Appliquées*

**Par**

KEHALI Salima

**Thème**

---

## **SUR UNE CLASSIFICATION TOPOLOGIQUE DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS**

---

Soutenue le 26/02/2024 devant le jury composé de :

DJERAD Abdelkader	MCA	Université de M'sila	Président
KHIRANI Amina	MCA	Université de M'sila	Encadreur
DALI-Bouyahaoui Dhahira	MCA	Université de USTHB	Co-encadreur
GAGUI Bachir	MCA	Université de M'sila	Examineur
MEROUANI Abdelbaki	Prof	Université de Setif	Examineur
YAGOUB Ameer	MCA	Université de Laghouat	Examineur
BOUNAB Noura	MCB	Université de M'sila	Invité

# *Remerciements*

Je souhaite tout d'abord exprimer ma gratitude envers Mon Dieu, qui m'a donné la force de rédiger ce modeste travail. Je remercie également les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer ma thèse. Un grand merci à Amina Khairani, ma directrice de thèse, pour sa présence et ses précieux conseils tout au long de ce projet. Je tiens à rendre hommage à ma mère, à mes frères et à mon mari, dont le soutien indéfectible m'a été d'une grande aide. J'adresse également mes remerciements à tous les professeurs du Département de Mathématiques, ainsi qu'à mes collègues et amis, sans oublier toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à l'élaboration de cette thèse.

---

*Dédicaces*

Je dédie ce modeste travail :

À l'âme pure de mon père Aissa kehali , que Dieu lui fasse miséricorde,  
À l'âme pure de deuxième mon père cherif Lazreg , que Dieu lui fasse miséricorde,  
A mon cher mari Amir qui m'a soutenu tout au long de mon parcours académique

A ma très chère maman

À mon fils et à mon âme Houssam

A mes soeurs,mes frères et à Ayman en particulier.

-A toute la famille.

-A toute mes amies.

En fin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Rappels et notions fondamentales</b>	<b>5</b>
1.1 Notions de base pour les systèmes différentiels . . . . .	5
1.1.1 Champs de vecteurs . . . . .	5
1.1.2 Plan et portrait de phase . . . . .	6
1.1.3 Système dynamique . . . . .	6
1.2 Notions de base pour les équations intégrales . . . . .	7
1.2.1 Contraction dans l'espace de Banach-Picard . . . . .	7
1.2.2 Théorème de point fixe de Banach . . . . .	7
1.2.3 Polynômes Orthogonaux . . . . .	9
1.2.4 Méthode de Collocation . . . . .	11
<b>2 Définition et classification topologique des systèmes différentiels</b>	<b>13</b>
2.1 Généralités sur les systèmes différentiels . . . . .	13
2.1.1 Problème à valeur initiale (Problème de Cauchy) . . . . .	14
2.1.2 Existence et unicité des solutions des problèmes à valeur initiale . . .	14
2.1.3 Transformation d'une équation différentielle à un système différentiel d'ordre 1 . . . . .	15
2.2 Classification topologique des systèmes différentiels . . . . .	17
2.2.1 Notions de stabilité et point d'équilibre . . . . .	17
2.2.2 Stabilité des systèmes différentiels linéaires . . . . .	18
2.2.3 Stabilité des systèmes différentiels non linéaires . . . . .	22

<b>3 Liaison entre les systèmes différentiels et les équations intégrales</b>	<b>32</b>
3.1 Introduction générale aux équations intégrales . . . . .	32
3.1.1 Définition des équations intégrales . . . . .	32
3.1.2 Classification des équations intégrales . . . . .	33
3.1.3 Existence et unicité de la solution des équations intégrales de Volterra-Fredholm . . . . .	34
3.2 Liaison entre les systèmes différentiels et les équations intégrales . . . . .	35
3.2.1 Réduction d'un problème avec conditions initiales à une équation de Volterra . . . . .	36
3.2.2 Réduction d'un problème aux limites de second type à une équation de Fredholm . . . . .	37
<b>4 Résolution numérique des systèmes différentiels par la méthode de collocation en utilisant les polynômes d'Hermite</b>	<b>39</b>
4.1 Description de la méthode . . . . .	39
4.2 Résolution numérique des équations intégrales de Volterra-Fredholm par les polynômes d'Hermite . . . . .	40
4.3 Résolution des systèmes différentiels par les polynômes d'Hermite . . . . .	51
4.3.1 Résolution des systèmes différentiels 1D . . . . .	51
4.3.2 Résolution des systèmes différentiels 2D . . . . .	56
<b>Conclusion générale</b>	<b>69</b>
<b>ANNEXE</b>	<b>70</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>79</b>

# Introduction

La classification topologique des systèmes différentiels est une branche majeure des mathématiques appliquées et de la théorie des systèmes dynamiques. Elle offre la possibilité d'analyser et de classifier les comportements qualitatifs des solutions aux équations différentielles selon la structure topologique de leur espace des phases. Cette méthode est utilisée dans divers secteurs, de la physique théorique à la biologie, sans oublier l'ingénierie. L'analyse des systèmes différentiels, qu'ils soient linéaires ou non, autonomes ou pas, s'appuie sur des instruments mathématiques raffinés comme la théorie de la stabilité de Lyapunov, la théorie des bifurcations et les techniques numériques sophistiquées pour résoudre les équations intégrales et différentielles.

L'état de l'art dans ce domaine a été marqué par des contributions majeures, notamment les travaux de Henri Poincaré (1881) sur les systèmes dynamiques Arnold (1989) sur les systèmes Hamiltoniens, de Kuznetsov (2004) sur la théorie des bifurcations, et de Lyapunov (1892) sur la stabilité des systèmes dynamiques. Ces travaux ont jeté les bases théoriques nécessaires pour aborder des problèmes complexes, tels que la classification des points fixes, l'analyse des cycles limites, et l'étude des systèmes.

Dans les années 1960, René Thom a révolutionné le domaine avec sa théorie des catastrophes, qui classe les systèmes en fonction des singularités dans leurs espaces de paramètres. Parallèlement, Stephen Smale a apporté des contributions majeures à la compréhension des systèmes dynamiques structurellement stables, en introduisant des concepts tels que les ensembles hyperboliques et les attracteurs étranges.

La classification des systèmes différentiels linéaires est bien établie et repose sur des outils algébriques et géométriques. Les travaux de Arnold (1989) ont montré que les systèmes linéaires peuvent être classés en fonction de leurs valeurs propres, conduisant à des com-

portements typiques tels que les nœuds, les cols, les foyers, et les centres. Cette classification est essentielle pour comprendre la dynamique locale autour des points d'équilibre.

Pour les systèmes non linéaires, la classification devient plus complexe et nécessite des outils supplémentaires. La théorie des bifurcations, développée par Kuznetsov (2004), permet d'étudier les changements qualitatifs dans les solutions lorsque les paramètres du système varient. Les bifurcations les plus courantes incluent :

- Bifurcation de fourche : Apparition ou disparition de points fixes.
- Bifurcation de Hopf : Naissance de cycles limites.
- Bifurcation de selles-nœuds : Collision et annihilation de points fixes.

Ces phénomènes sont cruciaux pour comprendre la transition entre régimes dynamiques, tels que la stabilité et le chaos.

La théorie de Lyapunov reste un outil central pour l'analyse de la stabilité des systèmes différentiels. Les fonctions de Lyapunov permettent de déterminer la stabilité asymptotique des points d'équilibre sans résoudre explicitement les équations différentielles. Des extensions modernes, telles que la théorie de Lyapunov-Krasovskii pour les systèmes à retard, ont élargi le champ d'application de celle-ci.

Avec l'avènement des ordinateurs, les méthodes numériques sont devenues essentielles pour la classification des systèmes différentiels. Des techniques telles que la méthode de collocation, les éléments finis, et les méthodes spectrales permettent de résoudre des systèmes complexes qui ne peuvent être abordés analytiquement. Les travaux de Boyd (2001) sur les méthodes spectrales et de Atkinson (1997) sur les équations intégrales ont ouvert des nouvelles voies pour l'analyse numérique des systèmes différentiels.

Dans le cadre de notre thèse de doctorat, nous avons concentré nos efforts sur l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques, en prenant en compte les systèmes linéaires et non linéaires, qu'ils soient autonomes ou non. Pour les systèmes linéaires autonomes, nous adoptons une approche classique basée sur les valeurs propres de la matrice du système. En fait, la stabilité de ce type de système peut être déterminée en examinant les valeurs propres associées à la matrice, permettant de décrire la dynamique du système en termes de ses comportements asymptotiques.

Pour les systèmes non linéaires, nous avons choisi d'utiliser la méthode de Lyapunov, qui est un outil puissant pour l'analyse de la stabilité en l'absence de solutions claires. Le théorème de Lyapunov permet d'étudier la stabilité d'un point d'équilibre sans nécessiter la résolution de l'ensemble du système, en s'appuyant sur une fonction de Lyapunov qui évalue l'énergie ou l'erreur du système dynamique autour de cet équilibre.

Nous avons ensuite étendu notre étude aux équations intégrales, où nous avons établi un lien entre les équations différentielles et les équations intégrales à travers les équations différentielles. Cette approche nous a permis d'explorer une représentation alternative des systèmes dynamiques, offrant la possibilité de suivre leur évolution dans le temps à travers une formulation intégrée, qui peut, dans certain cas, offrir des avantages numériques. Le but de cette transformation est d'atteindre une solution approximative en utilisant la méthode de sommation et les polynômes d'Hermite. Des résultats bons et satisfaisants ont été obtenus en comparant les résultats de la théorie du point melleu.

Notre travail se divise en quatre chapitres.

Le premier chapitre présente les concepts fondamentaux nécessaires à la compréhension des systèmes différentiels. Nous y définissons les notions clés telles que les espaces des phases, les points fixes. Nous discutons également des propriétés générales des systèmes différentiels et les équations intégrales.

Le deuxième chapitre est consacré à la notion de stabilité, un concept central dans l'étude des systèmes dynamiques. Nous y présentons les définitions et propriétés de la stabilité, en nous appuyant sur la classification des systèmes différentiels linéaires et de leur autonomie. Une attention particulière est accordée à la théorie de Lyapunov, qui fournit un cadre puissant pour l'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires, qu'ils soient autonomes ou non. Nous illustrons ces concepts par des exemples concrets et des applications.

Nous explorons les liens profonds entre les équations intégrales et les systèmes différentiels. Nous montrons comment certaines équations différentielles peuvent être transformées en équations intégrales de type Volterra ou Fredholm, ouvrant ainsi la voie à des méthodes de résolution alternatives. Nous discutons également des avantages et des limites de cette approche, en nous appuyant sur des résultats théoriques et numériques, dans le troisième chapitre.

Le quatrième chapitre présente notre contribution originale à ce domaine. Nous proposons une méthode innovante pour transformer des systèmes différentiels 1D et 2D en équations intégrales, que nous résolvons ensuite par la méthode de collocation en utilisant les polynômes de Hermite. Les résultats obtenus sont comparés aux solutions exactes ou approximatives, démontrant une précision remarquable. Cette approche ouvre de nouvelles perspectives pour la résolution numérique de systèmes différentiels complexes.

Notre travail a été couronné par une conclusion présentant notre étude et nos résultats, ouvrant ainsi de nouvelles perspectives pour l'élargissement de cette recherche à l'avenir.

# Chapitre 1

## Rappels et notions fondamentales

Dans ce chapitre on rappelle quelques notions fondamentales pour l'étude des systèmes différentiels ainsi que les équations intégrales.

### 1.1 Notions de base pour les systèmes différentiels

Soit le système différentiel planaire :

$$\begin{cases} \nu_1' = \frac{\partial \nu_1}{\partial s} = L_1(\nu_1(s), \nu_2(s)), \\ \nu_2' = \frac{\partial \nu_2}{\partial s} = L_2(\nu_1(s), \nu_2(s)). \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $L_1$  et  $L_2$  sont des polynômes à coefficients réels. Le système (1.1) est de degré  $d$ , où  $d = \max(\deg L_1, \deg L_2)$ .

Si  $L_1$  et  $L_2$  ne dépendent pas de  $s$  explicitement, alors le système (1.1) est autonome.

#### 1.1.1 Champs de vecteurs

**Définition 1.1.1** On appelle champ de vecteurs, une région du plan simplement connexe dans laquelle il existe en tout point  $M$  un vecteur  $\overrightarrow{\frac{dM}{ds}}$ . C'est -à-dire une application

$$M(\nu_1, \nu_2) \longrightarrow \overrightarrow{\frac{dM}{ds}} = \begin{pmatrix} L_1(\nu_1, \nu_2) \\ L_2(\nu_1, \nu_2) \end{pmatrix}$$

où  $L_1, L_2$  sont de classe  $C^1$  sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

**Remarque 1.1.1** *Le champ de vecteur associé au système (1.1) est noté  $F = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}$ . On peut l'écrire aussi sous la forme suivante:*

$$F = L_1 \frac{\partial}{\partial \nu_1} + L_2 \frac{\partial}{\partial \nu_2}$$

### 1.1.2 Plan et portrait de phase

**Définition 1.1.2** [21], [3] *Un portrait de phase d'un champ de vecteurs est l'ensemble des orbites ou trajectoires dans l'espace de phase. En particulier, pour les systèmes autonomes d'équations différentielles ordinaires de deux variables, Les solutions  $(\nu_1(s), \nu_2(s))$  du système (1.1) représentent dans le plan  $(\nu_1, \nu_2)$  des courbes appelées orbites.*

### 1.1.3 Système dynamique

**Définition 1.1.3** . *Un système dynamique sur  $\mathbb{R}^n$  est une application  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que*

1.  $g(\cdot, \nu) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue.
2.  $g(s, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue.
3.  $g(0, \nu) = \nu$ .
4.  $g(s + t, \nu) = g(s, g(t, \nu)) \quad \forall s, t \in \mathbb{R} \text{ et } \forall \nu \in \mathbb{R}^n$ .

**Proposition 1.1.1** .*Les systèmes dynamiques sont engendrés par des systèmes différentiels.*

**Exemple 1.1.1** *Soit le système différentiel*

$$\frac{d\nu}{ds} = A\nu \quad , \nu(0) = \nu_0 \tag{1.2}$$

où  $A$  est une matrice constante,  $\nu \in \mathbb{R}^n$ . La solution de (1.2) est donnée par

$$\nu(s) = e^{As}\nu_0$$

Le système (1.2) engendre un système dynamique

$$g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\nu(s, \nu) = e^{As}\nu.$$

## 1.2 Notions de base pour les équations intégrales

### 1.2.1 Contraction dans l'espace de Banach-Picard

La contraction est une propriété topologique très importante dans la théorie du point fixe.

**Définition 1.2.1** Soit  $E$  un espace de Banach et  $L$  une application de  $E$  dans  $E$ , On appelle  $L$  une application contractante si

$$\exists k \in [0, 1[; \forall \nu, s \in E, \quad \|L(\nu) - L(s)\| \leq k \|\nu - s\|$$

### 1.2.2 Théorème de point fixe de Banach

**Définition 1.2.2** Soit  $E$  un espace de Banach et  $L : E \rightarrow E$ . Un point fixe de  $L$  est un élément  $\nu \in E$  tel que  $L(\nu) = \nu$ .

**Théorème 1.2.1** (points fixe de Banach-Picard 1922)

Soit  $E$  un espace de Banach et  $L : E \rightarrow E$  une application contractante avec une constante de contraction  $k$ . Alors,  $L$  a un unique point fixe  $\nu \in E$ . De plus, nous avons la propriété suivante.

Si  $\nu_1 = L(\nu_0)$  et pour  $n \geq 1$ ,  $\nu_n = L(\nu_{n-1})$

alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n = \nu$$

et

$$\|\nu_n - \nu\| \leq \frac{k^n}{(1-k)} \|\nu_1 - \nu_0\|, \quad n \geq 1$$

$\nu$  étant le point fixe de  $L$ .

**Preuve. Existence :** Soit  $z \in E$  un point arbitraire dans  $E$ . Considérons la suite  $(\nu_n)_{n \geq 1}$  donnée par :

$$\begin{cases} \nu_n = L(\nu_{n-1}) & n \geq 1 \\ \nu_0 = z \end{cases}$$

On doit prouver que  $(\nu_n)$  est une suite de Cauchy dans  $E$ .

Pour  $m \leq n$

$$\|\nu_m - \nu_n\| \leq \|\nu_m - \nu_{m+1}\| + \|\nu_{m+1} - \nu_{m+2}\| + \dots + \|\nu_{n-1} - \nu_n\|$$

Puisque  $L$  est une contraction, on a

$$\|\nu_p - \nu_{p+1}\| = \|L(\nu_{p-1}) - L(\nu_p)\| \leq k \|\nu_{p-1} - \nu_p\| \quad \text{pour } p \geq 1$$

Par itération on a

$$\begin{aligned} \|\nu_m - \nu_n\| &\leq (k^m + k^{m+1} + \dots + k^{n-1}) \|\nu_0 - \nu_1\| \\ &\leq (1 + k + \dots + k^{n-1}) \|\nu_0 - \nu_1\| \\ &\leq \frac{k^n}{(1-k)} \|\nu_0 - \nu_1\| \end{aligned}$$

On déduit que  $(\nu_n)_n$  est de Cauchy dans  $E$  qui est complet, donc  $(\nu_n)_n$  converge vers  $\nu$  dans  $E$ .

Par ailleurs puisque  $L$  est continue, on a

On en déduit que la suite  $(\nu_n)_n$  est de Cauchy dans  $E$ , qui est complet, ce qui implique que converge vers un point  $\nu$  dans  $E$ . De plus, étant donné que  $L$  est continue, nous avons :

$$\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} L(\nu_{n-1}) = L(\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_{n-1}) = L(\nu)$$

Donc  $\nu$  est un point fixe de  $L$  ( i.e  $L(\nu) = \nu$  ).

**Unicité:** Supposons qu'il y ait deux points  $\nu, y \in E$  tel que  $\nu \neq y$ ,  $\nu = L(\nu)$  et  $y = L(y)$ .

Alors on a

$$\|\nu - y\| = \|L(\nu) - L(y)\|$$

donc

$$\frac{\|L(\nu) - L(y)\|}{\|\nu - y\|} = 1$$

D'autre part on a

$$\frac{\|L(\nu), L(y)\|}{\|\nu - y\|} \leq k < 1$$

Ce qui contradiction d'ou l'unicité existe. ■

### 1.2.3 Polynômes Orthogonaux

[7] Les polynômes orthogonaux sont une famille de polynômes qui satisfont une condition d'orthogonalité par rapport à un produit scalaire défini dans l'espace de Hilbert  $L^2_\omega([a, b])$  où l'orthogonalité est induite par une fonction poids  $\omega(\nu)$ . Ils jouent un rôle fondamental en analyse numérique, en approximation de fonctions et en résolution d'équations intégrales.

#### Définition générale

Une suite de polynômes  $\{P_n(\nu)\}$  est dite orthogonale dans l'espace  $L^2_\omega([a, b])$  par rapport à une fonction poids  $\omega(\nu)$  si elle satisfait la relation d'orthogonalité :

$$\int_a^b P_n(\nu)P_m(\nu)\omega(\nu)d\nu = 0 \quad \text{pour } n \neq m, \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

où :

- $\omega(\nu)$  est une fonction poids qui définit l'orthogonalité,
- $P_n(\nu)$  est un polynôme de degré  $n$ ,
- L'intégrale est finie et bien définie sur  $L^2_\omega([a, b])$ .

Chaque famille de polynômes orthogonaux est associée à un choix spécifique d'intervalle et de poids.

Cette Définition est particulièrement utilisée dans des contextes comme l'analyse numérique, la théorie des séries et la résolution d'équations différentielles. Les exemples classiques de polynômes orthogonaux incluent les polynômes de Legendre, de Chebyshev, de Laguerre et

d'Hermite, chacun ayant des applications spécifiques dans divers domaines des mathématiques et de la physique.

### Exemple: Polynômes d'Hermite

Les polynômes d'Hermite est une famille de polynômes orthogonaux, souvent utilisés en analyse mathématique, notamment dans le contexte des séries de Fourier, des équations différentielles et des probabilités, en particulier dans le cadre de la mécanique quantique et des processus stochastiques.[25], [10].

Les polynômes d'Hermite ils sont définis comme suit :

$$Ht_n(\nu) = (-1)^n e^{\frac{\nu^2}{2}} \frac{d^n}{d\nu^n} e^{-\frac{\nu^2}{2}}, n = 0, 1, 2, \dots, \nu \in \mathbb{R} \quad (\text{forme dite probabiliste})$$

$$\widehat{Ht}_n(\nu) = (-1)^n e^{\nu^2} \frac{d^n}{d\nu^n} e^{-\nu^2} \quad (\text{forme dite physique})$$

Les deux définitions sont associées à l'échelle suivante.

$$\widehat{Ht}_n(\nu) = 2^{\frac{n}{2}} H_n(\nu\sqrt{2})$$

Ils peuvent aussi être écrits en utilisant un développement polynomial. :

$$Ht_n(\nu) = \sum_{\kappa=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^\kappa \frac{n!}{2^\kappa \kappa! (n-2\kappa)!} \nu^{n-2\kappa}$$

$$\widehat{Ht}_n(\nu) = \sum_{\kappa=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^\kappa \frac{n!}{\kappa! (n-2\kappa)!} (2\nu)^{n-2\kappa}$$

où  $E(\frac{n}{2})$  désigne la partie entière de  $\frac{n}{2}$ .

Les premiers polynômes d'Hermite sont :

$$\begin{aligned} Ht_0(\nu) &= 1, & \widehat{Ht}_0(\nu) &= 1 \\ Ht_1(\nu) &= \nu, & \widehat{Ht}_1(\nu) &= 2\nu \\ Ht_2(\nu) &= \nu^2 - 1, & \widehat{Ht}_2(\nu) &= 4\nu^2 - 2 \\ Ht_3(\nu) &= \nu^3 - 3\nu, & \widehat{Ht}_3(\nu) &= 8\nu^3 - 12\nu \\ Ht_4(\tau) &= \nu^4 - 6\nu + 3, & \widehat{Ht}_4(\nu) &= 16\nu^4 - 48\nu^2 + 12 \\ Ht_5(\nu) &= \nu^5 - 10\nu^3 + 15\nu, & \widehat{Ht}_5(\nu) &= 32\nu^5 - 160\nu^3 + 120\nu \end{aligned}$$

Il existe une orthogonalité parmi les polynômes  $Ht_n(\nu)$  par rapport à la fonction de poids  $S(\nu) = e^{-\frac{\nu^2}{2}}$ , sous la condition suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Ht_n(\nu)Ht_m(\nu)S(\nu)d\nu = n!\sqrt{2\pi}\delta_{n,m}$$

$\delta_{n,m}$  désigne le delta de Kronecker. Posons :

$$\omega_n(\nu) = \frac{1}{\sqrt{n!\sqrt{2\pi}}} \times Ht_n(\nu)$$

Donc

$$\langle \omega_n, \omega_m \rangle = \frac{1}{n!\sqrt{2\pi}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} Ht_n(\nu)Ht_m(\nu)S(\nu)d\nu = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

### 1.2.4 Méthode de Collocation

[1],[26] Généralement, le principe de la méthode de collocation appliqué à la résolution approchée de l'équation integrale ou équation différentielle.

Soit l'équation opérateur suivante

$$A(\varrho(\nu)) = L(\nu), \quad \nu \in G \subset \mathbb{R} \tag{1.3}$$

- $A$  un opérateur inversible.
- $L$  est une fonction de  $C(G)$  donnée.
- $\varrho$  est la fonction inconnue que nous cherchons.

la méthode consiste à chercher une solution approchée dans un sous espace de dimension finie, en exigeant que l'équation (1.3) soit vérifiée seulement sur un nombre fini de points appelés points de collocation.

En pratique, nous choisissons une suite de sous espaces  $X_n \subset X$ ,  $n \geq 1$  de dimension finie, généralement des sous espaces de  $C(G)$  ou de  $L^2(G)$ . Soit  $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  une base de  $X_n$ . On cherche une fonction  $\varrho_n \in X_n$ , de la forme

$$\varrho_n(s) = \sum_{j=1}^n a_j \omega_j(s), \quad \nu \in G$$

Pour déterminer les coefficients  $(a_j)$ , on substituant, cette fonction dans l'équation (1.3), et on exigeant que l'équation soit exacte dans le sens où le résidu soit nul sur un système de noeuds  $x_1, \dots, x_n \in G$ , (i.e, aux points de collocation).

$$\begin{aligned} r_n(\nu) &= A\varrho_n(\nu) - L(\nu) \\ &= \sum_{j=1}^n a_j A\omega_j(\nu) - L(\nu), \quad \nu \in G \end{aligned}$$

Ce qui conduit systématiquement à la résolution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^n A\omega_j(\nu_i) a_j = L(\nu_i), \quad i = 1, \dots, n$$

de la forme  $\Phi_n X = L_n$ . Évidemment, ce système admet une solution unique si le det  $\Phi_n$  est non nul, ce qui dépend d'ailleurs du choix des points de collocation.

1. Choix des fonctions de base: Les fonctions de base  $\omega_j(s)$  sont souvent des polynômes ou des fonctions orthogonales. Par exemple, on peut utiliser des polynômes de Lagrange, de Legendre ou des fonctions splines.
2. Points de collocation : On choisit des points  $\{\nu_i\}$  dans  $G$ . Ces points peuvent être choisis équidistants ou en utilisant des points spéciaux (par exemple, les points de Gauss-Legendre, les points de Tchebychev,...).

# Chapitre 2

## Définition et classification topologique des systèmes différentiels

Dans ce chapitre, nous introduirons le concept de stabilité et vise à présenter des définitions et des propriétés, y compris la classification des systèmes différentiels linéaires. Nous détaillons également la théorie de Lyapunov et examinerons son application aux systèmes non linéaires, autonomes et non autonomes.

### 2.1 Généralités sur les systèmes différentiels

**Définition 2.1.1** (*écriture vectorielle d'un système différentiel*) On rappelle qu'une équation différentielle (linéaire ou non linéaire) dans un espace vectoriel  $E$  est de la forme

$$\nu'(s) = L(s, \nu) \tag{2.1}$$

où  $L$  un opérateur de  $E$  dans  $E$ .

On s'intéressera plus particulièrement aux systèmes différentiels, dans le cas où  $E = \mathbb{R}^n$ , l'équation ci-dessus étant écrite avec les notations usuelles

$$\vec{v}' = \vec{L}(s, \vec{v}) : \vec{v}'(s) = \vec{L}(s, \vec{v}(s)) \Leftrightarrow \begin{cases} \nu'_1 = L_1(s, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n), \\ \nu'_2 = L_2(s, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \nu'_n = L_n(s, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \end{cases}$$

avec  $\nu \in S \subset \mathbb{R}^n$ ,  $s \in J \subset \mathbb{R}$ ; où  $S$  est l'espace d'état.  $J \subset \mathbb{R}$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ , et où  $L_1, L_2, \dots$  et  $L_n$  sont des fonctions continues de  $\theta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ .

### 2.1.1 Problème à valeur initiale (Problème de Cauchy)

**Définition 2.1.2** Soient  $\theta$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et  $L : \theta \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue.

1. Pour  $(s_0, \nu_0)$  donné, un problème à valeur initiale associé à l'équation (2.1) est donné sous la forme

$$\nu' = L(s, \nu), \quad \nu(s_0) = \nu_0 \tag{2.2}$$

2. La fonction  $\nu(s)$  est dite solution de l'équation (2.1) sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  si elle est définie et continûment dérivable sur  $I$ , si  $(s, \nu(s)) \in \theta$  pour tout  $s \in I$  et si  $\nu(s)$  satisfait la relation (2.1) sur  $I$ .
3. Soit  $(s_0, \nu_0) \in \theta$  donné, la fonction  $\nu(s)$  est dite solution du problème à valeur initiale (2.2) s'il existe un intervalle  $I$  contenant  $s_0$  tel que  $\nu(s)$  est une solution de l'équation (2.1) sur  $I$  et vérifie  $\nu(s_0) = \nu_0$ .

### 2.1.2 Existence et unicité des solutions des problèmes à valeur initiale

**Théorème 2.1.1 (Existence)** [8] Soit  $\theta$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  Si  $L : \theta \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue alors pour tout  $(s_0, \nu_0) \in \theta$ , le problème (2.2) admet au moins une solution.

**Définition 2.1.3** Soient  $\theta$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et  $L = L(s, \nu) : \theta \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  $L$  est dite localement lipschitzienne en  $\nu$  si pour tout fermé et borné (compact)  $K$  dans  $\theta$ , il existe une constante  $k > 0$  telle que

$$|L(s, \nu_1) - L(s, \nu_2)| \leq k |\nu_1 - \nu_2|$$

pour tout  $(s, \nu_1)$  et  $(s, \nu_2)$  dans  $K$ .

**Définition 2.1.4** Pour  $(s_0, \nu_0) \in \theta$  donné, une solution du problème à valeur initiale (2.2) est dite unique si, pour toute autre solution définie sur un domaine contenant  $(s_0, \nu_0)$ , les deux solutions coïncident sur l'ensemble de leur domaine de définition commun.

**Théorème 2.1.2 (Unicité)** Soit  $\theta$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Si  $L : \theta \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue et localement lipschitzienne en  $\nu$ , alors pour tout  $(s_0, \nu_0) \in \theta$ , le problème (2.2) admet une solution unique.

**Définition 2.1.5 (Systèmes autonomes)** On appelle équation différentielle autonome une équation différentielle pour laquelle  $L$  ne dépend pas explicitement du temps :  $L(s, \nu) = L(\nu)$ . C'est donc une équation différentielle de type

$$\nu' = L(\nu) \tag{2.3}$$

**Remarque 2.1.1** Un système autonome est un système dynamique dont l'évolution dépend uniquement de son état actuel, sans dépendance explicite du temps. Un système non autonome est un système dynamique dont l'équation différentielle dépend directement du temps. Cela signifie que l'évolution du système dépend explicitement du temps initial.

### 2.1.3 Transformation d'une équation différentielle à un système différentiel d'ordre 1

La forme générale d'une équation différentielle d'ordre  $m$  :

$$y^{(m)}(s) = L(s, y(s), y^{(1)}(s), y^{(2)}(s), \dots, y^{(m-1)}(s)) \tag{2.4}$$

où  $y^{(i)}(s)$  désigne la  $i^e$  dérivée de  $y(s)$ . Pour assurer l'unicité de la solution, on ajoute les  $m$  conditions initiales :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(s_0) = c_1 \\ y^{(1)}(s_0) = c_2 \\ y^{(2)}(s_0) = c_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y^{(m-2)}(s_0) = c_{m-1} \\ y^{(m-1)}(s_0) = c_m, \end{array} \right. \quad (2.5)$$

ces conditions portent sur la fonction  $y(s)$  et ses  $(m - 1)$  premières dérivées à  $s = s_0$ .

**Théorème 2.1.3** [11] *L'équation différentielle d'ordre  $m$  (2.4) avec les  $m$  conditions initiales (2.5) est équivalente au système de  $m$  équations d'ordre 1 suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} y'_1(s) = z_2(s), & y_1(s_0) = c_1 \\ y'_2(s) = z_3(s), & y_2(s_0) = c_2 \\ y'_3(s) = z_4(s), & y_3(s_0) = c_3 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ y'_{m-1}(s) = z_m(s), & y_{m-1}(s_0) = c_{m-1} \\ y'_m(s) = L(s, y_1(s), y_2(s), \dots, y_m(s)), & y_m(s_0) = c_m \end{array} \right. \quad (2.6)$$

**Preuve.** [11] ■

**Exemple 2.1.1** *Soit l'équation différentielle d'ordre 2 :*

$$y^{(2)}(s) = -y^{(1)}(s) + (y(s))^2 + s^2 - 5$$

avec les conditions initiales  $y(0) = 1$  et  $y^{(1)}(0) = 2$ . On pose:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(s) = y(s) \\ y_2(s) = y^{(1)}(s), \end{array} \right.$$

pour transformer l'équation différentielle d'ordre 2 en un système de 2 équations différentielles du premier ordre :

$$\begin{cases} y_1'(s) = y_2(s) , & y_1(0) = 1 \\ y_2'(s) = -y_2(s) + (y_1(s))^2 + s^2 - 5, & y_2(0) = 2 \end{cases}$$

## 2.2 Classification topologique des systèmes différentiels

La classification topologique des systèmes différentiels se concentre sur les propriétés qualitatives des solutions et leur comportement, sans tenir compte des détails quantitatifs, tels que l'invariance topologique, comportement asymptotique, types de comportements dynamiques, ect. Dans le travail présenté ci dessous on a choisir le critère de stabilité pour classifier les système différentiels linéaires et non linéaires.

Les systèmes différentiels linéaires suscitent un intérêt particulier, car leur théorie est souvent utilisée pour analyser localement des systèmes non linéaires. L'objectif de la théorie de la stabilité est de tirer des conclusions sur le comportement d'un système sans avoir besoin de calculer explicitement ses trajectoires. La contribution majeure à ce domaine a été apportée par A. M. Lyapunov, dont les travaux, reconnus à partir des années, ont introduit de nombreux concepts et définitions fondamentales relatifs à la stabilité des systèmes représentés par des équations différentielles arbitraires. Il a également fourni les principaux résultats théoriques dans ce domaine. Dans cette partie, nous présenterons une version simplifiée et abrégée de ses travaux.

### 2.2.1 Notions de stabilité et point d'équilibre

#### Notions de stabilité

La stabilité est une question fondamentale de la théorie qualitative.

Elle se pose de la manière suivante : si le système est perturbé et s'éloigne de son état d'équilibre, reviendra-t-il à cet équilibre ? Ou bien une légère perturbation, même minime, peut-elle entraîner des conséquences significatives et s'amplifier avec le temps ?

Soit le système différentiel autonome

$$\begin{cases} \nu'(s) = L(\nu(s)), \nu \in \theta \subset \mathbb{R}^n \\ \nu(s_0) = \nu_0, s_0 \in J \subset \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.7)$$

### Point d'équilibre

**Définition 2.2.1** [12] *Un point  $P \in \theta$  est dit point d'équilibre (ou point critique, point singulier ou point stationnaire) de l'équation (2.7) si et seulement si  $L(P) = 0$ .*

**Exemple 2.2.1** *Considérons le système suivant :*

$$\begin{cases} \nu'_1 = \nu_2 \\ \nu'_2 = -\nu_2 - \sin \nu_1 \end{cases}$$

*Les points  $(0, 0)$  et  $(\pi, 0)$  sont des points d'équilibres.*

### Stabilité d'un point d'équilibre

1. Un point critique  $P$  est dit **stable** si, pour tout  $R > 0$ , il existe  $r > 0$  tel que, si une trajectoire se trouve dans la boule  $B(P, r)$  à un instant  $s_0$ , elle reste dans la boule  $B(P, R)$  pour tout  $s > s_0$ .
2. Un point critique  $P$  est dit **instable** s'il n'est pas stable
3. Un point critique  $P$  est dit **asymptotiquement stable** s'il est stable et, de plus, s'il existe  $\rho > 0$  tel que toute trajectoire qui se trouve dans la boule  $B(P, \rho)$  à l'instant  $s_0$  converge vers  $P$  lorsque  $s \rightarrow +\infty$ .

## 2.2.2 Stabilité des systèmes différentiels linéaires

La stabilité concerne l'analyse de la sensibilité des solutions par rapport aux conditions initiales. Sur le plan physique, imaginons que l'on lance simultanément deux pierres : nous souhaitons savoir si elles s'éloignent l'une de l'autre au fil du temps. En termes d'équations différentielles, la question se pose de savoir si deux solutions d'une même équation demeurent suffisamment proches lorsque leurs conditions initiales le sont également.

### Cas des systèmes autonomes

**Définition 2.2.2 (Stabilité)** Le point d'équilibre  $P = 0$  est dite stable au sens de Lyapunov si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $\delta = \delta(s_0, \varepsilon)$  tel que, pour toute condition initiale  $\nu_0$  satisfaisant  $\|\nu_0\| < \delta$  (c'est-à-dire  $\nu_0 \in B(0, \delta)$ ) la solution du système (2.7) vérifie :

1.  $\nu(s)$  est définie pour tout  $s \geq s_0$
2. Pour tout  $s \geq s_0$ ;  $\|\nu_0\| < \varepsilon$  ( i.e  $\nu_0 \in B(0, \varepsilon)$ )

**Définition 2.2.3 (Stabilité asymptotique)** Le point d'équilibre  $P = 0$  est dite asymptotiquement stable si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. Elle est stable en sens de Lyapunov
2.  $\lim_{s \rightarrow \infty} \|\nu(s)\| = 0$ , ( $0$  : point d'équilibre)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall s_0 : \|\nu_0\| < \delta \Rightarrow \|\nu(s)\| < \varepsilon$$

**Remarque 2.2.1** on dit que le point d'équilibre  $P$  est instable si elle n'est pas stable.

### Cas des systèmes non autonomes

#### Stabilité

**Définition 2.2.4** Considérons  $(T_s, T_L) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  tels que  $T_s < T_L$ ,  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^n$ , on dit que  $K$  est  $(J, T_s, T_L, D_0, D)$  pratiquement stable pour le système non autonome:

$$\begin{cases} \nu'(s) = L(s, \nu(s)) & , \nu \in \theta \subset \mathbb{R}^n \\ \nu(s_0) = \nu_0, \nu_0 \in j \subset \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.8)$$

Si  $\forall \nu_0 \in D_0$  et  $s_0 \in J$ , on a:

1.  $\nu(s, s_0, \nu_0)$  est définie sur  $[s_0, s_0 + T_L]$
2.  $\forall s \in [s_0, s_0 + T_L]$  ,  $\nu(s, s_0, \nu_0) \in D$
3.  $\forall s \in [s_0 + T_s, s_0 + T_L]$  ,  $\nu(s, s_0, \nu_0) \in K$  .

**Définition 2.2.5** *Le système (2.8) est considéré stable au sens de Lyapunov par rapport au point d'équilibre  $\nu_\eta$  si pour des conditions initiales  $\nu(s_0)$  suffisamment proches du point d'équilibre, on a*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \|\nu(s_0) - \nu_\eta\| \leq \delta \Rightarrow \|\nu(s, \nu(s_0)) - \nu_\eta\| \leq \varepsilon, \forall s \geq s_0$$

telle que :  $\nu(s_0) \in B(\nu_\eta, \delta)$  et  $\nu(s, \nu(s_0)) \in B(\nu_\eta, \varepsilon)$

**Définition 2.2.6 (Stabilité d'un compact)** *Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^n$ , on dit que  $K$  est stable pour le système (2.8) si pour tout  $\varepsilon > 0$ , et  $s_0 \in J$ , il existe  $\delta(\varepsilon, s_0) > 0$  tel que:*

$$(\nu_0 \in B_{\delta((\nu_\eta, \varepsilon))}(K)) \begin{cases} \nu(s, s_0, \nu_0) \text{ est définie pour } s \geq s_0 \\ \nu(s, s_0, \nu_0) \in B_\varepsilon(K) \quad s \geq s_0 \end{cases}$$

**Exemple 2.2.2** *On considère le système :  $\nu'(s) = (3s \sin(s) - 2s)\nu$ ,  $s \in \mathbb{R}$ .*

*Ce système admet une solution sous la forme :*

$$\nu(s, s_0, \nu_0) = \nu_0 \exp\left(\int_{s_0}^s (3z \sin(z) - 2z) dz\right) = \nu_0 \exp(3 \sin(s) - 3s \cos(s) - s^2 - 3 \sin(s_0) - 3s_0 \cos(s_0) + s_0^2)$$

*Donc, le terme en exponentielle est borné pour tout  $s \geq s_0$  par une constante  $c(s_0)$  qui dépend seulement de  $s_0$ . Ainsi, on a:*

$$|\nu(s, s_0, \nu_0)| \leq |\nu_0| c(s_0) \quad \forall s \geq s_0$$

*Pour tout  $\varepsilon > 0$ , si l'on choisit  $\delta = \frac{\varepsilon}{c(s_0)}$ , d'où 0 est stable.*

**Définition 2.2.7 (Instabilité de  $K$ )** *Si  $K$  n'est pas stable pour le système (2.8), on dit que  $K$  est instable pour le système (2.8).*

### Stabilité asymptotique

**Définition 2.2.8** *Le point d'équilibre  $\nu_\eta$  est asymptotiquement stable si*

$$\forall \delta > 0 : \|\nu(s_0) - \nu_\eta\| \leq \delta \Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} \|\nu(s, \nu(s_0)) - \nu_\eta\| = 0$$

**Définition 2.2.9 (Stabilité d'attraction)** Le bassin d'attraction  $D_0$  de  $\nu_\eta = 0$  pour l'équation différentielle  $\nu' = L(\nu)$ ,  $\nu \in \mathbb{R}^n$ , l'ensemble des  $\nu_0(\nu(s = s_0))$ ,  $\exists \delta > 0$  telle que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|\nu(s, \nu_0)\| = 0, \forall \nu_0 \|\nu(s, \nu_0)\| < \delta$$

**Définition 2.2.10 (Attractivité de  $K$ )** Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$ , on dit que  $K$  est attractif pour le système (2.8) si pour tout  $s_0 \in J$ , il existe  $\delta(s_0) > 0$  tel que :

$$(\nu_0 \in B_{\delta(s_0)}(K)) \left\{ \begin{array}{l} \nu(s, s_0, \nu_0) \text{ est définie pour } s \geq s_0 \\ \lim_{s \rightarrow \infty} \nu(s, s_0, \nu_0, K) = 0 \end{array} \right.$$

**Définition 2.2.11 (Stabilité asymptotique)** Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$ , on dit que  $K$  est **asymptotiquement stable** pour le système (2.8) si :

1.  $K$  est stable pour le système (2.8)
2.  $K$  est attractif pour le système (2.8)

**Définition 2.2.12 (stabilité globale asymptotique de  $K$ )** Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$ , on dit que  $K$  est globalement asymptotiquement stable pour le système (2.8) si :

1.  $K$  est **stable** pour le système (2.8)
2.  $\forall s_0 \in J$ , et  $\nu_0 \in \theta$ ,  $\nu(s, s_0, \nu_0)$  est définie  $\forall s \geq s_0$ ;  $\lim_{s \rightarrow \infty} d(\nu(s, s_0, \nu_0), K) = 0$

**Exemple 2.2.3** On considère le système

$$\nu' = -\frac{\nu}{2+s}, s \geq 0$$

Il admet des solutions de la forme :  $\nu(s, s_0, \nu_0) = \nu_0 \exp\left(\int_{s_0}^s \frac{-1}{2+z} dz\right) = \nu_0 \frac{2+s_0}{2+s}$  que 0 est globalement asymptotiquement stable.

**Définition 2.2.13 (Stabilité exponentielle)** Le point d'équilibre  $\nu_\eta$  est exponentiellement stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta, a, b > 0 : \|\nu(s_0) - \nu_\eta\| \leq \delta \Rightarrow \|\nu(s, \nu(s_0)) - \nu_\eta\| \leq a \|\nu(s_0) - \nu_\eta\| e^{-bs}, \forall s \geq s_0$$

**Exemple 2.2.4** *Considérons l'équation décrit par*

$$\nu' = -(1 + \sin(\nu^3))\nu$$

*Il est clair que  $P = 0$  est un point d'équilibre. La solution de l'équation est donnée par*

$$\nu(s) = \nu(0)e^{\int_0^s -(1+\sin(\nu^3))ds}$$

*on a*

$$\forall s \geq 0, |\nu(s)| < k |\nu(0)| e^{-s}.$$

*D'où la stabilité exponentielle du système.*

**Remarque 2.2.2** *Stabilité exponentielle  $\Rightarrow$  Stabilité asymptotique.*

**Définition 2.2.14** *Le point d'équilibre  $\nu_\eta$  est instable si ne satisfait pas la première condition de la définition (2.2.2)*

### Stabilité uniforme

**Définition 2.2.15** [13] *Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$ , on dit que  $K$  est uniformément stable pour le système (2.8) si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta(\varepsilon) > 0$  tel que :*

$$\forall s_0 \in J, (\nu \in B_{\delta(\varepsilon)}(K)) \Rightarrow \begin{cases} \nu(s, s_0, \nu_0) \text{ est définie pour } s \geq s_0 \\ \nu(s, s_0, \nu_0) \in B_\varepsilon(K) \quad s \geq s_0. \end{cases}$$

### 2.2.3 Stabilité des systèmes différentiels non linéaires

Les méthodes basées sur la linéarisation, qu'elle soit statique ou dynamique, constituent des approches classiques pour stabiliser les systèmes non linéaires. Toutefois, leur application se limite à une classe restreinte de systèmes physiques, généralement ceux décrits par des équations différentielles ordinaires non linéaires satisfaisant des conditions spécifiques. Ces méthodes offrent des résultats variables en pratique, et leur portée reste intrinsèquement limitée.

En revanche, la méthode de Lyapunov s'impose comme une stratégie plus puissante et générale pour analyser la stabilité des systèmes non linéaires. Plutôt que de viser la

résolution explicite des équations, elle privilégie une approche globale et temporelle, centrée sur l'évaluation de la stabilité et des propriétés dynamiques des solutions. L'un des atouts majeurs de cette méthode réside dans sa capacité à fournir une analyse globale, indépendamment des calculs explicites des trajectoires. Bien que le choix d'une fonction de Lyapunov appropriée puisse constituer un défi technique, cette approche demeure souvent incontournable pour l'étude des systèmes complexes ou de grande dimension, où les outils conventionnels échouent.

**Définition 2.2.16** *On considère le système autonome défini par*

$$\begin{cases} \nu' = F(\nu) \\ F(\nu_0) = 0 \end{cases} \quad \nu, \nu_0 \in \mathbb{R}^n \quad (2.9)$$

où  $F$  est un champ de vecteur globalement lipchitzien sur  $\mathbb{R}^n$ . On désigne par  $F_s(\nu)$  la solution de (2.9) issue du point  $\nu$  à l'instant  $s = 0$  soit

$$\frac{dF_s(\nu)}{ds} \Big|_{s=0} = F(\nu) \quad \text{et} \quad F_0(\nu) = \nu$$

**Définition 2.2.17** *On dira que  $\nu_0$  est un point d'équilibre localement attractif pour le système (2.9) s'il existe un voisinage  $\theta \subset \mathbb{R}^n$  de  $\nu_0$  tel que  $\forall \nu \in \theta$ ,  $F_s(\nu)$  existe pour tout  $s \geq 0$  et  $\lim_{s \rightarrow \infty} F_s(\nu) = \nu_0$ . Si  $\theta = \mathbb{R}^n$ ,  $\nu_0$  est globalement attractif.*

**Définition 2.2.18** *On dira que  $\nu_0$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable (resp. globalement asymptotiquement stable) s'il est stable et localement attractif (resp. stable et globalement attractif).*

### Méthode de Lyapunov (méthode indirecte)

La méthode indirecte de Lyapunov est utilisée pour étudier la stabilité des systèmes non linéaires en analysant leur système linéarisé équivalent. En d'autres termes, lorsqu'on a un système non linéaire, on peut le simplifier et le transformer en un système linéaire (appelé "système linéarisé"), ce qui permet d'analyser sa stabilité de manière plus accessible.

Dans cette méthode, le système non linéaire

$$\nu' = L(\nu), \nu \in \mathbb{R}^n \quad (2.10)$$

,est linéarisé autour d'un point donné  $P$  (souvent  $P = 0$ ) en utilisant une technique appelée "développement en série" (par exemple, la série de Taylor). Cette approche permet de comprendre le comportement local du système autour de ce point et de déterminer s'il est stable ou non. Cette méthode est particulièrement efficace dans les cas où l'analyse directe du système non linéaire est complexe.

$$\nu' = \frac{dL}{d\nu} \Big|_{\nu=0} \nu + R(\nu)$$

Où  $R(\nu)$  contient les termes en  $\nu$  d'ordre supérieur ou égale à 2. Le système linéarisé que l'on utilise est alors

$$\nu' = \frac{dL}{d\nu} \Big|_{\nu=0} \nu = A\nu, \nu \in \mathbb{R}^n \quad (2.11)$$

Soit  $L(\nu) = \begin{pmatrix} L_1(\nu) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ L_n(\nu) \end{pmatrix}$  un champ de vecteur de classe  $C^2$  sur  $\theta$ , et soit  $\nu_0$  un zéro de

$L$  (point critique). Le linéarisé de  $\nu' = L(\nu)$  au point  $\nu_0$  l'équation différentielle linéaire  $\nu' = A\nu$ , où  $A$  représente la matrice jacobienne telle que

$$A = \begin{pmatrix} \frac{dL_1}{d\nu_1} \Big|_{\nu_0} & \frac{dL_1}{d\nu_2} \Big|_{\nu_0} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{dL_1}{d\nu_n} \Big|_{\nu_0} \\ \frac{dL_2}{d\nu_1} \Big|_{\nu_0} & \frac{dL_2}{d\nu_2} \Big|_{\nu_0} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{dL_2}{d\nu_n} \Big|_{\nu_0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dL_n}{d\nu_1} \Big|_{\nu_0} & \frac{dL_n}{d\nu_2} \Big|_{\nu_0} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{dL_n}{d\nu_n} \Big|_{\nu_0} \end{pmatrix}$$

où  $A = \left( \frac{\partial L_i}{\partial \nu_j}(\nu_0) \right) = DL(\nu_0)$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ).

**Remarque 2.2.3** La linéarisation d'un système différentiel nous amène à l'étude de la nature des points d'équilibres .

**Exemple 2.2.5** Soit le système suivant

$$\begin{cases} \nu_1' = \nu_1(1 - \nu_1^2 - \nu_2^2) = L_1(\nu_1, \nu_2) \\ \nu_2' = -\nu_2(1 - \nu_1^2 - \nu_2^2) = L_2(\nu_1, \nu_2) \end{cases}$$

Le point d'équilibre est :  $P = (0, 0)$ , l'linéarisé en  $(0, 0)$  est

$$\nu' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \nu.$$

### Classification et nature des points d'équilibre : Cas des systèmes linéaires

Soit le système (2.11)

$$\nu' = A\nu$$

où  $\nu \in \mathbb{R}^n$ ,  $A$  une matrice constante inversible, et  $\rho_1, \dots, \rho_n$  sont les valeurs propres de la matrice  $A$ .

1. La solution  $\nu = \nu_0$  est appelée de **selle** si les valeurs propres  $\rho_1, \dots, \rho_n$  sont réelles, non nulles, et présentent des signes opposés.
2. La solution  $\nu = \nu_0$  est appelée **nœud** lorsque les valeurs propres  $\rho_1, \dots, \rho_n$  sont réelles, non nulles, et possèdent toutes le même signe.
3. La solution  $\nu = \nu_0$  est désignée comme **foyer** si les valeurs propres  $\rho_1, \dots, \rho_n$  sont des complexes conjugués avec  $Im(\rho_i) \neq 0, i = 1, \dots, n$ .
4. La solution  $\nu = \nu_0$  est appelée **centre** si les valeurs propres  $\rho_1, \dots, \rho_n$  sont des complexes conjugués avec  $Re(\rho_i) = 0$  et  $Im(\rho_i) \neq 0, i = 1, \dots, n$ .

### Classification et nature des points d'équilibre : Cas des systèmes non linéaires

On considère le système non-linéaire autonome

$$\nu' = L(\nu)$$

où  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  et  $L = (L_1, \dots, L_n)$  et le système linéarisé associé

$$\nu' = A\nu$$

le point d'équilibre  $\nu_0$  est appelé :

1. **Puits** si toutes les valeurs propres de la matrice  $A = DL(\nu_0)$  ont des parties réelle négatives.
2. **Source** si toutes les valeurs propres de la matrice  $A = DL(\nu_0)$  ont des parties réelle positives.
3. **Selle** s'il est hyperbolique et si la matrice  $A = DL(\nu_0)$  a au moins une valeur propre avec la partie réelle négative et au moins une valeur propre avec la partie réelle positive

### Stabilité des points d'équilibre basée sur les valeurs propres de la matrice jacobienne

**Théorème 2.2.1** Soit  $\nu_0$  un point critique pour le système (2.10).

1. Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne  $DL(\nu_0)$  ont des parties réelles négatives, alors le point critique  $\nu_0$  est asymptotiquement stable.
2. S'il existe au moins une valeur propre de  $DL(\nu_0)$  avec une partie réelle positive, alors le point critique  $\nu_0$  est instable.
3. Si  $DL(\nu_0)$  a des valeurs propres avec des parties réelles négatives et d'autres avec des parties réelles nulles, alors on ne peut rien dire sur la stabilité du point critique.

**Exemple 2.2.6** Considérons le système différentiel linéaire homogène et autonome.

$$\nu' = A\nu$$

où  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est une matrice constante inversible, et  $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{R}^2$ . Soient  $\rho_1, \rho_2$  les valeurs propres de la matrice  $A$  qui sont les racines du polynôme caractéristique

$$p(\rho) = \rho^2 - (a + d)\rho + ad - bc.$$

:

1.  $\nu = \nu_0$  est un **nœud** ssi  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont réels de même signe ( $\rho_1\rho_2 > 0$ ) : **asymptotiquement stable** ssi  $\rho_1 < 0$  et  $\rho_2 < 0$ , **instable** sinon. (En particulier vrai si  $\rho_1 = \rho_2$ )
2.  $\nu = \nu_0$  est un point **selle** (instable) ssi  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont réels de signe opposé ( $\rho_1\rho_2 < 0$ ).
3.  $\nu = \nu_0$  est un point **foyer** ssi  $\rho_1 = \overline{\rho_2}$  ( $Im\rho_1 \neq 0$ ) est non réel, stable si  $Re(\rho_1) < 0$  et instable si  $Re(\rho_1) > 0$
4.  $\nu = \nu_0$  est un **centre** ssi:  $\rho_1 = \overline{\rho_2}$  est un imaginaire pur, c'est-à-dire ( $Re(\rho_1) = Re(\rho_2) = 0$ )

### Seconde méthode de Lyapunov (méthode direct)

La seconde méthode est plus complexe à mettre en œuvre, mais en contrepartie, elle offre une portée beaucoup plus large. Elle repose sur la définition d'une fonction spécifique, connue sous le nom de fonction de Lyapunov.

### Cas des systèmes autonomes

#### Dérivée d'un système dynamique (fonctions de Lyapunov) [13]

La détermination de la fonction de Lyapunov demeure l'étape la plus complexe dans l'analyse de la stabilité.

**Définition 2.2.19** Soit  $\zeta : \theta \rightarrow \mathbb{R}$  ayant des dérivées partielles sur  $\theta$ . On définit la dérivée totale  $\dot{\zeta}$  pour le système (2.9) par :

$$\dot{\zeta}(\nu) = \sum_{i=0}^n \frac{\partial^i \zeta}{\partial^i \nu_i} L_i(\nu) \quad \text{tel que } (L_1, \dots, L_n) \in F, (F \text{ champ de vecteurs})$$

**Définition 2.2.20** Une fonction  $\zeta : \theta \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur un voisinage  $\theta$  de  $\nu_0$  définie positive et différentiable sur  $\theta - \{\nu_0\}$  telle que :

- $\zeta(\nu_0) = 0$  et  $\zeta(\nu) > 0$  si  $\nu \neq \nu_0$
- $\dot{\zeta}(\nu) = F.\zeta(\nu) \leq 0, \forall \nu \in \theta$  où

$$F.\zeta(\nu) = \frac{d}{ds} \zeta F_s \big|_{s=0} = \langle \nabla F(\nu), F(\nu) \rangle$$

Elle est appelée fonction de Lyapunov large pour le système (2.9) en  $\nu_0$ . De plus, si la fonction satisfait la condition suivante :

- $\dot{\zeta}(\nu) < 0$ ,  $\forall \nu \in \theta - \{\nu_0\}$  alors  $\zeta$  est appelée fonction de Lyapunov stricte pour (2.9).

**Définition 2.2.21 (Fonction définie négative)** Une fonction scalaire dépendante du temps,  $\zeta(\nu, s)$  définie négative si :

- $\zeta(\nu_0) = 0$  et  $\zeta(\nu) < 0$  si  $\nu \neq \nu_0$  c'est à dire -  $\zeta(\nu)$  est définie positive.

### Théorèmes de stabilité de Lyapunov [13]

**Définition 2.2.22 (Fonction radialement non bornée)** Une fonction  $\zeta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est radialement non bornée si :

$$\lim_{\|\nu\| \rightarrow \infty} \zeta(\nu) = +\infty$$

**Théorème 2.2.2 (Théorème stabilité locale) [13]** Soit 0 un point d'équilibre de (2.10), s'il existe un voisinage  $\varpi$  de 0 et une fonction  $\zeta : \varpi \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue, ayant des dérivées partielles continues, telle que :

1.  $\zeta$  sont définie positive
2. La dérivée total  $\zeta'$  soit négative alors 0 est stable. De plus si la dérivée total  $\zeta'$  est définie négative, alors 0 asymptotiquement stable.

**Théorème 2.2.3 (Théorème stabilité globale) [13]** Soit 0 un point d'équilibre de (2.10), s'il existe un voisinage  $\varpi$  de 0 et une fonction  $\zeta : \varpi \rightarrow \mathbb{R}^+$  continue, ayant des dérivées partielles continues, telle que :

1.  $\zeta(\nu)$  est définie positive
2.  $\zeta'(\nu)$  est définie négative
3.  $\zeta(\nu) \xrightarrow{\|\nu\| \rightarrow \infty} \infty$  (est radialement non bornée).

Alors le point d'équilibre ( $P = 0$ ) est globalement asymptotiquement stable.

**Théorème 2.2.4** [13] (*Théorème d'instabilité*) Soit 0 un point d'équilibre, s'il existe un voisinage  $\varpi$  de 0 et une fonction:

$$w : \varpi \rightarrow \mathbb{R}^+$$

continue, ayant des dérivées partielles continuées, telle que :

1.  $\forall \nu \in \varpi - \{0\} \quad w(\nu) > w(0)$
2. La dérivée totale  $w'$  soit définie positive.

Alors 0 est instable.

### Cas des systèmes non autonomes

Soient les systèmes non autonomes décrits par:

$$\nu' = L(s, \nu) \quad , \quad \nu \in \mathbb{R}^n \tag{2.12}$$

La difficulté de l'étude de ces systèmes est que les solutions dépendants de l'instant initial  $s_0$

$$\|\nu(s)\| \leq k \|\nu(s_0)\| e^{-\alpha(s-s_0)} \quad ; \quad \forall s \geq s_0$$

**Définition 2.2.23** (*Fonction décroissante*) Une fonction  $\zeta : J \times \theta \rightarrow \mathbb{R}$  est décroissante si :

$$\lim_{\|\nu\| \rightarrow 0} \zeta(\nu, s) = 0 \text{ , uniformément en } s$$

c'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall \nu \in \theta, (\|\nu\| < \delta) \Rightarrow (\forall s \in J, \zeta(\nu, s) < \varepsilon)$$

### Théorème des stabilités [20]

**Définition 2.2.24** La dérivée temporelle de  $\zeta(\nu, s)$  est :

$$\zeta'(\nu, s) = \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} \nu' + \frac{\partial \zeta}{\partial s} = \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} L(\nu, s) + \frac{\partial \zeta}{\partial s}$$

**Théorème 2.2.5 (Stabilité uniforme)** [20] Soit  $0$  un point d'équilibre de (2.12), s'il existe un voisinage  $\varpi$  de  $0$  et une fonction

$$\zeta : J \times \varpi \rightarrow \mathbb{R}_+$$

continue, ayant des dérivées partielles continues, telle que :

- $\zeta$  est définie positive
- $\zeta'$  est semi-définie négative

Alors  $0$  est stable au sens de Lyapunov. Si de plus  $\zeta$  est décroissante, alors  $0$  est uniformément stable.

**Théorème 2.2.6 (Stabilité asymptotique uniforme)** [20] Soit  $0$  un point d'équilibre de (2.12), s'il existe un voisinage  $\varpi$  de  $0$  et une fonction

$$\zeta : J \times \varpi \rightarrow \mathbb{R}_+$$

continue, ayant des dérivées partielles continues, telle que :

- $\zeta$  est définie positive
- $\zeta'$  est définie négative
- $\zeta$  est décroissante

Alors  $0$  est uniformément asymptotiquement stable.

**Définition 2.2.25 (Fonction définie positive localement)** Une fonction scalaire dépendante du temps,  $\zeta(\nu, s)$  est localement (semi) définie positive si :

1.  $\zeta(0, s) = 0$
2. Il existe une fonction scalaire invariante (semi) définie positive  $\zeta_0$  telle que  $\forall \nu \in \mathbb{R}^n, \forall s > s_0, \quad \zeta(\nu, s) \geq \zeta_0(\nu)$ .

**Définition 2.2.26 (Fonction définie positive globalement)** Une fonction scalaire est globalement définie positive si :

$$-\zeta(0, s) = 0$$

– Il existe une fonction scalaire invariante (semi) définie positive  $\zeta_0$  telle que :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}^n, \quad \forall s > s_0, \quad \zeta(\nu, s) \geq \zeta_0(\nu)$$

**Théorème 2.2.7 (Stabilité asymptotique uniforme globale)** [12] *Soit 0 un point d'équilibre de (2.12), s'il existe un voisinage  $\varpi$  de 0 et une fonction  $\zeta : J \times \varpi \rightarrow \mathbb{R}_+$  continue, ayant des dérivées partielles continues, telle que :*

- $\zeta$  est définie positive
- $\zeta'$  est définie négative
- $\zeta$  est radialement non bornée

*Alors 0 est globalement uniformément asymptotiquement stable.*

# Chapitre 3

## Liaison entre les systèmes différentiels et les équations intégrales

Dans cette partie, nous avons étudié la relation entre les équations intégrales et les systèmes différentiels, notamment celles pouvant être converties en équations de Volterra ou de Fredholm.

### 3.1 Introduction générale aux équations intégrales

Les équations intégrales constituent la fondation de nombreux modèles mathématiques dans divers domaines scientifiques, tels que l'ingénierie et la chimie. ainsi que divers domaines des mathématiques appliquées sont en lien avec les équations intégrales, comme l'ont démontré les études de Wazwaz [23] et de Semenova et al.[19].

#### 3.1.1 Définition des équations intégrales

**Définition 3.1.1** *On appelle équation intégrale, une équation fonctionnelle de la forme :*

$$\varrho(\nu) - \lambda \int_{\Omega} h(\nu, s)\varrho(s)ds = L(\nu)$$

*où  $L(x)$ ,  $h(\nu, s)$  sont des fonctions données, la fonction  $\varrho(\nu)$  qui figure à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral est l'inconnu à déterminer;  $\lambda$  est un paramètre réel ou complexe différent de zéro. La fonction  $h(\nu, s)$  est appelée noyau de l'équation intégral.*

### 3.1.2 Classification des équations intégrales

Il existe plusieurs classes d'équations intégrales. Plusieurs critères peuvent être considérés pour classer les équations intégrales, tels que les bornes de l'intégration et le noyau de l'équation. Dans la suite nous allons citer les trois grandes classes de ces équations.

#### Equations intégrales de Fredholm

**Définition 3.1.2** *On désigne par équation intégrale de Fredholm de première espèce une équation de la forme suivante :*

$$\lambda \int_a^b h(\nu, s)\varrho(s)ds = L(\nu)$$

tandis que  $L$  et  $h$  sont des fonctions données, avec des bornes d'intégration constantes. C'est là la principale caractéristique d'une équation de Fredholm.

**Définition 3.1.3** : *On appelle équation intégrale de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme*

$$\varrho(\nu) - \int_a^b h(\nu, s)\varrho(s)ds = L(\nu)$$

où  $\varrho(\nu)$  est la fonction inconnue,  $h(\nu, s)$  et  $L(\nu)$  des fonctions données.

#### Equations intégrales de Volterra

Les équations de Volterra constituent des cas particuliers des équations intégrales de Fredholm, obtenues en choisissant un noyau  $h$  tel que  $h(\nu, s) = 0$  pour  $\nu < s$ .

**Définition 3.1.4** *On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce une équation à une inconnue  $\varrho(\nu)$  de la forme suivante :*

$$\int_a^\nu h(\nu, s)\varrho(s)ds = L(\nu)$$

**Définition 3.1.5** *On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce une équation à inconnue  $\varrho(\nu)$  de la forme :*

$$\varrho(\nu) - \int_a^\nu h(\nu, s)\varrho(s)ds = L(\nu)$$

## Equations intégrales de Volterra-Fredholm

**Définition 3.1.6** Nous définissons les équations intégrales linéaires de Volterra-Fredholm de deuxième espèce de la manière suivante [22, 06, 17] :

$$\varrho(\nu) - \lambda_1 \int_a^\nu h_1(\nu, s)\varrho(s)ds - \lambda_2 \int_a^b h_2(\nu, s)\varrho(s)ds = L(\nu) \quad (3.1)$$

On appelle équation intégrale mixte une équation de la forme:

$$\varrho(\nu) - \lambda \int_a^\nu \int_a^b h(\nu, s)\varrho(s)d\nu ds = L(\nu)$$

où les fonctions  $h_1$ ,  $h_2$  et  $L$  sont connues et  $\varrho(\nu)$  la fonction inconnue.  $\lambda$  est un facteur inconnu

**Remarque 3.1.1** 1. Si  $h_1 = 0$  on obtient l'équation intégrale de Fredholm

2. Si  $h_2 = 0$  on obtient l'équation intégrale de Volterra

Dans ce qui se suit, on s'intéresse aux équations intégrales de Volterra-Fredholm parce qu'elle contient les trois classes.

### 3.1.3 Existence et unicité de la solution des équations intégrales de Volterra-Fredholm

Dans le théorème ci-dessous démontre l'existence et l'unicité de la solution des équations intégrales de Volterra-Fredholm, sous certaines conditions.

**Théorème 3.1.1** On suppose que  $L \in C[a, b]$ ,  $h_1 \in C(D_1)$  et  $h_2 \in C(D_2)$

où  $D_1 = \{(\nu, s) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq \nu \leq s \leq b\}$  et  $D_2 = [a, b] \times [a, b]$

posant  $N_1 = \max_{(\nu, s) \in D_1} |h_1(\nu, s)|$  et  $N_2 = \max_{(\nu, s) \in D_2} |h_2(\nu, s)|$

Sous les conditions de continuité ci-dessus, s'il existe  $c > 0$  tel que

$$\frac{1}{\rho} [N_1 + N_2 e^{c(b-a)}] < 1$$

Alors, l'équation (3.1) a une solution unique  $\varrho \in C([a, b])$  et cette solution peut être obtenue par la méthode des approximations successives, en partant de n'importe quel élément de  $C[a, b]$ .

**Preuve.** Considérons l'opérateur  $\zeta : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$  défini par

$$\begin{aligned} \zeta \varrho(\nu) &= L(\nu) + \int_a^s h_1(\nu, s) \varrho(s) ds + \int_a^b h_2(\nu, s) \varrho(s) ds \\ |\zeta \varrho(\nu) - \zeta \psi(\nu)| &= \left| \int_a^s h_1(\nu, s) (\varrho(s) - \psi(s)) ds + \int_a^b h_2(\nu, s) (\varrho(s) - \psi(s)) ds \right| \\ &\leq \int_a^s |h_1(\nu, s)| |\varrho(s) - \psi(s)| ds + \int_a^b |h_2(\nu, s)| |\varrho(s) - \psi(s)| ds \\ &\leq N_1 \int_a^s |\varrho(s) - \psi(s)| \exp -(s-a) \exp (\nu-a) ds + \\ &\quad N_2 \int_a^b |\varrho(s) - \psi(s)| \exp -(s-a) \exp (s-a) ds \\ &\leq \left[ \frac{N_1}{c} \exp (-c(\nu-a) - 1) + \frac{N_2}{c} \exp (c(b-a) - 1) \right] \|\varrho - \psi\| \\ &\leq \left[ \frac{N_1}{c} \exp (-c(\nu-a)) + \frac{N_2}{c} \exp c(\nu-a+b-\nu) \right] \|\varrho - \psi\| \\ &\leq \frac{\exp c(\nu-a)}{c} [N_1 + N_2 \exp c(b-\nu)] \|\varrho - \psi\| \\ &\leq \frac{\exp c(\nu-a)}{c} [N_1 + N_2 \exp c(b-a)] \|\varrho - \psi\| \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\|\zeta \varrho - \zeta \psi\| \exp (-c(\nu-a)) \leq \frac{1}{c} [N_1 + N_2 \exp c(b-a)] \|\varrho - \psi\| \text{ pour tout } s \in [a, b]$$

Alors

$$\|\zeta \varrho - \zeta \psi\| \leq \frac{1}{c} [N_1 + N_2 \exp c(b-a)] \|\varrho - \psi\|$$

où l'opérateur  $\zeta$  est Lipschitz avec la constante

$$k = \frac{1}{c} N_1 + N_2 \exp c(b-a)$$

La condition supposée garantit que  $\zeta$  est une contraction. D'où le resultat. ■

## 3.2 Liaison entre les systèmes différentiels et les équations intégrales

Pour convertir une équation différentielle à une équation intégrale on a besoin du lemme suivant

**Lemme 3.2.1** *Pout toute fonction  $\mu(\nu)$ ,*

$$\int_a^\nu \int_a^z \mu(s) ds dz = \int_a^\nu (\nu - s) \mu(s) ds \quad (3.1)$$

*En général on a*

$$\int_a^\nu \int_a^{\nu_1} \dots \int_a^{\nu_{n-1}} \mu(\nu_n) d\nu_n d\nu_{n-1} \dots d\nu_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^\nu (\nu - \nu_1)^{n-1} \mu(\nu) d\nu_1$$

**Preuve.** Soit  $g(z) = \int_a^z \mu(s) ds$

$$\begin{aligned} \int_a^\nu \int_a^z \mu(s) ds dz &= \int_a^\nu g(z) dz = \int_a^\nu 1 \cdot g(z) dz \\ &= [zg(z)]_a^\nu - \int_a^\nu zg'(z) dz \quad (\text{intégration par parties}) \\ &= \nu g(\nu) - ag(a) - \int_a^\nu z\mu(z) dz \\ &= \nu \int_a^\nu \mu(s) ds - 0 - \int_a^\nu s\mu(s) ds = \int_a^\nu (\nu - s)\mu(s) ds. \end{aligned}$$

■

### 3.2.1 Réduction d'un problème avec conditions initiales à une équation de Volterra

Soit le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \nu_1' = \nu_2 \\ \nu_2' = \alpha(s)\nu_2(s) + \beta(s)\nu_1(s) + \gamma(s) = g(s, u(s)) \end{cases}$$

On pose  $\nu_1(s) = u$  ,  $\nu_2(s) = u'$

$$\begin{cases} \nu_1' = u' = \nu_2 \\ \nu_2' = u'' = a(\nu)u'(\nu) + b(\nu)u(\nu) + \gamma(\nu) = g(\nu, u(\nu)) \end{cases}$$

On considère le problème de Cauchy de second ordre suivant :

$$\begin{cases} \mu''(\nu) = g(\nu, \mu(\nu)) \\ \mu(0) = \mu_0, \mu'(0) = \mu'_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

L'intégration des deux cotés de l'équation différentielle de zéro à  $\nu$ , conduit à

$$\mu'(\nu) = \mu'_0 + \int_0^\nu g(s, \mu(s)) ds \quad 0 \leq \nu \leq 1$$

En intégrant une deuxième fois l'équation, on obtient l'expression suivante :

$$\mu(\nu) = \mu_0 + \mu'_0 \nu + \int_0^\nu \int_0^z g(s, \mu(s)) ds dz$$

En utilisant la relation (3.1), nous obtenons :

$$\mu(\nu) = \mu_0 + \mu'_0 \nu + \int_0^\nu (\nu - s) g(s, \mu(s)) ds, \quad 0 \leq \nu \leq 1 \quad (3.3)$$

C'est l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

### 3.2.2 Réduction d'un problème aux limites de second type à une équation de Fredholm

On considère le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} \mu''(\nu) = g(\nu, \mu(\nu)), & 0 < \nu < 1 \\ \mu(0) = \mu_0, \mu(1) = \mu_1 \end{cases} \quad (3.4)$$

De la même manière, on intègre les deux cotés de zéro à  $\nu$ , conduit à :

$$\mu'(\nu) = c + \int_0^\nu g(\nu, \mu(\nu)) d\nu \quad 0 \leq \nu \leq 1$$

et

$$\mu(\nu) = \mu_0 + c\nu + \int_0^\nu (\nu - s) g(s, \mu(s)) ds \quad 0 \leq \nu \leq 1 \quad (3.5)$$

Pour déterminer la constante  $c$ , on prend  $\nu = 1$  et on utilise la condition  $\mu(1) = \mu_1$ , qui donne :

$$c = \mu_1 - \mu_0 - \int_0^1 (1-s)g(s, \mu(s))ds \quad 0 \leq \nu \leq 1$$

Ainsi, l'équation (3.5) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \mu(\nu) &= \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0)\nu + \int_0^\nu (\nu - s)g(s, \mu(s))ds - \nu \int_0^1 (1-s)g(s, \mu(s))ds \\ \mu(\nu) &= \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0)\nu + \int_0^\nu s(1-\nu)g(s, \mu(s))ds - \int_\nu^1 \nu(1-s)g(s, \mu(s))ds \end{aligned}$$

qui s'écrit encore comme une équation intégrale de Fredholm sous la formulation suivante

:

$$\mu(\nu) = \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0)\nu - \int_0^1 k(\nu, s)g(s, \mu(s))ds$$

où

$$k(\nu, s) = \begin{cases} s(1-\nu), & s \leq \nu \\ \nu(1-s), & s \geq \nu. \end{cases}$$

# Chapitre 4

## Résolution numérique des systèmes différentiels par la méthode de collocation en utilisant les polynômes d'Hermite

Ce chapitre est consacré à la résolution numérique des systèmes différentiels  $1D$  et  $2D$ , premièrement on va détailler la méthode, puis on va la tester pour des différents cas de systèmes différentiels linéaires, des systèmes stables et instables, afin de prouver l'efficacité de la méthode.

### 4.1 Description de la méthode

Ce travail est structuré en trois étapes:

- Dans la première étape on va convertir le système différentiel à une équation différentielle

Soit le système différentiel de deux variables suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\nu_1}{ds} = \nu_2(s) \\ \frac{d\nu_2}{ds} = \alpha(s)\nu_2(s) + \beta(s)\nu_1(s) + \gamma(s) = g(s, \mu(s)) \end{cases}$$

On pose  $\nu_1 = \mu$ ,  $\nu_2 = \mu'$

$$\begin{cases} \frac{d\nu_1}{ds} = \mu'(\nu) \\ \frac{d\nu_2}{ds} = \mu''(\nu) = a(\nu)\mu'(\nu) + b(\nu)\mu(\nu) + \gamma(\nu) = g(\nu, \mu(\nu)) \end{cases}$$

D'après ce que nous avons fait précédemment, ce problème se transforme en problèmes avec conditions initiales (problème de Cauchy)

- Dans la deuxième étape, on va transformer la relation obtenue à une équation intégrale.
- La dernière étape est la partie la plus importante de l'étude, où on va approcher la solution de cette équation par la méthode de collocation en utilisant les polynômes de Hermite, la solution obtenue représente l'approximation de la fonction  $\nu_1$ , sa dérivée représente l'approximation de la fonction  $\nu_2$ .

Commençons d'abord par décrivant la dernière étape.

Dans ce qui suit on désigne par l'erreur

$$\text{Erreur} = |\text{solution exacte} - \text{solution approchée}|$$

## 4.2 Résolution numérique des équations intégrales de Volterra-Fredholm par les polyômes d'Hermite

Dans cette partie, nous utilisons les polynômes d'Hermite pour résoudre l'équation intégrale de Volterra-Fredholm et la méthode de collocation, qui est une technique numérique permet d'approximer les solutions des équations intégrales de Volterra-Fredholm linéaires de seconde espèce à l'aide de polynômes d'Hermite. On Considère l'équation intégrale de Volterra-Fredholm suivante :

$$\varrho(\nu) = L(\nu) + \int_a^\nu h_1(\nu, s)\varrho(s)ds + \int_a^b h_2(\nu, s)\varrho(s)ds \quad (4.1)$$

Nous appliquons maintenant la méthode de collocation à l'équation (4.1), en approximant la fonction inconnue  $\varrho(\nu)$  sous la forme d'une somme finie comme suit :

$$\varrho_N(\nu) = \sum_{k=0}^N a_k Ht_k(\nu) \quad (4.2)$$

où  $Ht_k$  sont les polynômes de Hermite de degré  $k$ ,  $a_k$  sont des paramètres inconnus.

Après avoir substitué l'expression (4.2) dans l'équation (4.1), on obtient :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k Ht_k - \int_{-1}^{\nu} k_1(\nu, s) \sum_{k=0}^N a_k Ht_k(s) - \int_1^1 k_2(\nu, s) \sum_{k=0}^N a_k Ht_k(s) ds = L(\nu) \quad (4.3)$$

Pour calculer les coefficients  $a_k$  on exige que l'équation (4.3) soit vérifiée sur un nombre fini de points sur l'intervalle  $[-1, 1]$  appelés points de collocation. Les points de collocation équidistants sont pris comme suit pour cette technique.

$$\nu_j = -1 + \frac{2j}{N}, j = 0, \dots, N$$

ou au sens où le résidu qui est défini comme suit:

$$Z_N(\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Ht_k - \int_{-1}^{\nu} k_1(\nu, s) \sum_{k=0}^N a_k Ht_k ds - \int_1^1 k_2(\nu, s) \sum_{k=0}^N a_k Ht_k(\nu) ds - L(\nu) \quad (4.4)$$

soit nul aux points de collocation.

$$Z_N(\nu) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (4.5)$$

Nous posons :

$$E_0(\nu_0) = Ht_0(\nu_0) - \int_{-1}^{\nu_0} k_1(\nu_0, s) Ht_0(s) ds - \int_{-1}^1 k_2(\nu_0, s) Ht_0(s) ds, \dots, E_n(\nu_0) = Ht_n(\nu_0) - \int_{-1}^{\nu_0} k_1(\nu_0, s) Ht_n(s) ds - \int_{-1}^1 k_2(\nu_0, s) Ht_n(s) ds$$

$$E_0(\nu_1) = Ht_0(\nu_1) - \int_{-1}^{\nu_1} k_1(\nu_1, s) Ht_0(s) ds - \int_{-1}^1 k_2(\nu_1, s) Ht_0(s) ds, \dots, E_n(\nu_1) = Ht_n(\nu_1) - \int_{-1}^{\nu_1} k_1(\nu_1, s) Ht_n(s) ds - \int_{-1}^1 k_2(\nu_1, s) Ht_n(s) ds$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 E_0(\nu_n) &= Ht_0(\nu_n) - \int_{-1}^{\nu_n} k_1(\nu_n, s)Ht_0(s)ds - \int_{-1}^1 k_2(\nu_n, s)Ht_0(s)ds, \dots, E_n(\nu_n) = Ht_n(\nu_n) - \\
 & \int_{-1}^{\nu_n} k_1(\nu_n, s)Ht_n(s)ds - \int_{-1}^1 k_2(\nu_n, s)Ht_n(s)ds
 \end{aligned}$$

d'où La matrice conjuguée de (4.3) s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} E_0(\nu_0) & E_1(\nu_0) & & E_n(\nu_0) \\ E_0(\nu_1) & E_1(\nu_1) & & E_n(\nu_1) \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ E_0(\nu_n) & E_1(\nu_n) & & E_n(\nu_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(\nu_0) \\ L(\nu_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ L(\nu_n) \end{pmatrix}$$

tels que :

$$E_j(\nu_i) = Ht_j(\nu_i) - \int_{-1}^{\nu_i} k_1(\nu_i, s)Ht_i(s)ds - \int_{-1}^1 k_2(\nu_i, s)Ht_j(s)ds, \quad j = 0, 1, \dots, N$$

**Exemple 4.2.1** Soit l'équation intégrale linéaire de Volterra suivante :

$$\varrho(\nu) = \nu + 1/20\nu^5 + \nu^3 - \int_0^\nu (\nu - s)\varrho(s)ds \tag{4.6}$$

$$\varrho(\nu) - (\nu + 1/20\nu^5 + \nu^3 - \int_0^\nu (\nu - s)\varrho(s)ds) = 0$$

nous obtenons :  $\varrho(\nu) = \nu^3 + \sin \nu$

On sait que les polynômes d'Hermite  $Ht_n(\nu)$  est définie par:

$$Ht_n(\nu) = (-1)^n e^{\frac{\nu^2}{2}} \frac{d^n}{d\nu^n} e^{-\frac{\nu^2}{2}}$$

pour  $n = 2$ , on a  $Ht_0(\nu) = 1$ ,  $Ht_1(\nu) = \nu$ ,  $Ht_2(\nu) = \nu^2 - 1$ ,

Résoudre l'équation obtenue par la méthode de collocation en utilisant les polynomes d'Hermite [15] pour  $n = 2$ .

On pose:

$$\varrho_2(\nu) = \sum_{k=0}^2 a_k H_k \quad (4.7)$$

Substituant (4.7) dans l'équation integrale (4.6)

$$a_0 H_0(\nu) + a_1 H_1(\nu) + a_2 H_2(\nu) - \int_0^{\nu} (\nu - s)(a_0 H_0(s) + a_1 H_1(s) + a_2 H_2(s)) ds = (\nu + 1/20\nu^5 + \nu^3)$$

Utilisant les points de collocation  $\nu_0 = 0$ ,  $\nu_1 = 0.5$ ,  $\nu_2 = 1$ ,

$$\text{pour } \nu = 0 : a_0 H_0(0) + a_1 H_1(0) + a_2 H_2(0) - \int_0^0 (0 - s)(a_0 H_0(s) + a_1 H_1(s) + a_2 H_2(s)) ds = (0 + 1/20(0)^5 + 0^3)$$

$$\text{pour } \nu = 0.5 : a_0 H_0(0.5) + a_1 H_1(0.5) + a_2 H_2(0.5) - \int_0^{0.5} (0.5 - s)(a_0 H_0(s) + a_1 H_1(s) + a_2 H_2(s)) ds = (0.5 + 1/20(0.5)^5 + 0.5^3)$$

$$\text{pour } \nu = 1 : a_0 H_0(1) + a_1 H_1(1) + a_2 H_2(1) - \int_0^1 (1 - s)(a_0 H_0(s) + a_1 H_1(s) + a_2 H_2(s)) ds = (1 + 1/20(1)^5 + 1^3)$$

donc on obtient le système différentiel

$$\begin{cases} \frac{835}{1322} a_0 - \frac{866}{1939} a_2 = 0 \\ \frac{1667}{2346} a_0 + \frac{628}{1909} a_1 - \frac{923}{2376} a_2 = \frac{401}{640} \\ \frac{829}{875} a_0 + \frac{829}{1125} a_1 - \frac{471}{2531} a_2 = \frac{41}{20} \end{cases}$$

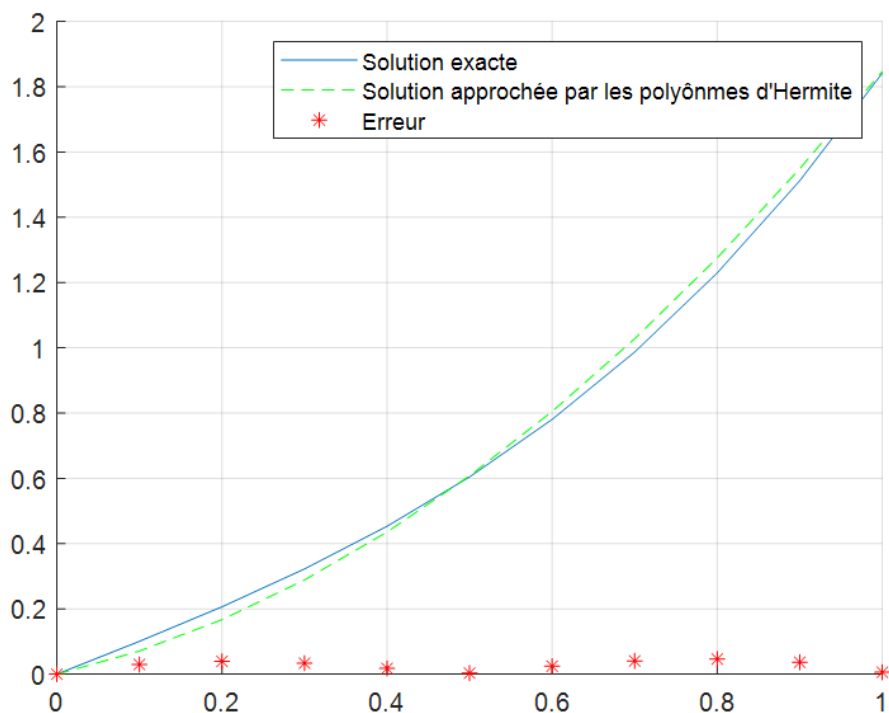
qui admet l'unique solution  $(a_0, a_1, a_2) = (\frac{4507}{2253}, \frac{905}{979}, \frac{4849}{1714})$

d'où la solution approchée s'écrit comme suit :

$$\varrho_2(\nu) = \frac{4507}{2253} H_0 + \frac{905}{979} H_1 + \frac{4849}{1714} H_2$$

$$\varrho_2(\nu) = \frac{4507}{2253} + \frac{905}{979} \nu + \frac{4849}{1714} (\nu^2 - 1) = \frac{4849}{1714} \nu^2 + \frac{905}{979} \nu - \frac{1199}{1447}$$

Dans la figure suivante on présente une comparaison entre la solution obtenue et la solution exacte.



**Exemple 4.2.2** Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm de deuxième espèce [15]

$$\varrho(\nu) - \int_0^{\nu} (2\nu^2 s + 1)\varrho(s) ds - \int_0^1 \nu(s + 1)\varrho(s) ds = L(\nu)$$

Si nous prenons la fonction  $L(\nu)$  sous la forme suivante :

$$L(\nu) = -\frac{2}{5}\nu^7 - \frac{5}{4}\nu^7 + \nu^3 - \frac{59}{20}\nu^7 + 1$$

Alors nous obtenons :

$$\varrho(\nu) = \nu^3 + 1$$

Nous appliquons la méthode de collocation en utilisant les polynômes de Hermite pour approcher la solution exacte, les résultats numériques obtenus par  $n = 3$  avec une comparaison avec les résultats obtenus en utilisant les polynômes de Lucas [09] sont présentés dans le tableau suivant

valeur de $\nu$	Sol Exacte	Erreur( $N = 3$ )	Erreur[09] $N = 3$
0.062	$1.512e + 00$	$1.332e - 15$	$2.331e - 14$
0.0187	$1.008e + 00$	$4.440e - 15$	$2.353e - 14$
0.3125	$1.0270e + 00$	$4.440e - 15$	$2.442e - 14$
0.437	$1.064e + 00$	$8.881e - 15$	$2.531e - 14$
0.562	$1.125e + 00$	$1.332e - 15$	$2.686e - 14$
0.687	$1.216e + 00$	$1.110e - 15$	$2.864e - 14$
0.8125	$1.343e + 00$	$1.998e - 15$	$3.086e - 14$
0.937	$1.512e + 00$	$1.332e - 15$	$3.332e - 14$

Tableau 1. Comparaison des erreurs avec Lucas pour  $N = 3$

**Exemple 4.2.3** *Considérons l'équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm de deuxième espèce*[18] :

$$\varrho(\nu) - \int_{-1}^{\nu} \nu s \varrho(s) ds - \int_{-1}^1 2 \cosh(\nu + s) \varrho(s) ds = L(\nu)$$

Si nous prenons la fonction  $L(\nu)$  sous la forme suivante

$$L(\nu) = \frac{7036874417766}{32558635635638554} \cosh(\nu) - \frac{7036874417766}{32558635635638554} (\cosh(\nu)(\sin(2)+2)) + \frac{7036874417766}{32558635635638554} \nu$$

Alors nous obtenons :

$$\varrho(\nu) = \frac{\cosh \nu}{\sinh 2\nu + 1}$$

Nous appliquons la méthode de collocation par les polynômes d'Hermite pour approcher la solution, les résultats obtenus pour  $N = 6$ ,  $N = 8$ ,  $N = 10$  sont présentés dans le tableau suivant

valeur de $\nu$	Erreur( $N = 6$ )	Erreur( $N = 8$ )	Erreur( $N = 10$ )
$-1.00e + 00$	$9.446e - 08$	$3.734e - 10$	$1.734e - 09$
$-0.80e + 00$	$6.385e - 08$	$6.463e - 12$	$5.400e - 10$
$-0.60e + 00$	$8.547e - 08$	$3.328e - 10$	$3.596e - 12$
$-0.40e + 00$	$6.593e - 08$	$3.952e - 10$	$4.938e - 10$
$-0.02e + 00$	$4.540e - 08$	$3.044e - 10$	$8.341e - 10$
$0.00e + 00$	$4.602e - 08$	$3.779e - 10$	$9.604e - 10$
$0.20e + 00$	$3.639e - 08$	$3.689e - 10$	$8.495e - 10$
$0.40e + 00$	$5.372e - 08$	$1.267e - 10$	$5.224e - 10$
$0.60e + 00$	$7.563e - 08$	$2.595e - 10$	$4.128e - 11$
$0.80e + 00$	$7.806e - 08$	$4.792e - 11$	$4.997e - 11$
$1.00e + 00$	$3.862e - 08$	$3.173e - 10$	$9.877e - 10$

Tableau 2. Comparaison des erreurs pour l'exemple 2

**Exemple 4.2.4** *Considérons les équations intégrales de Volterra-Fredholm linéaires de deuxième espèce [15]*

$$\varrho(\nu) - \int_{-1}^{\nu} \cos(\nu - s)\varrho(s)ds - \int_{-1}^1 \sin(\nu - s)\varrho(s)ds = L(\nu)$$

Si nous prenons la fonction  $L(\nu)$  sous la forme suivante :

$$L(\nu) = e^{\frac{\nu}{2}} + e^{-1}(\cos(\nu+1) - \sin(\nu-s)) + e^{-1}(\cos(\nu+1) - \sin(\nu-s)) - e^{-1}(\cos(\nu-1) - \sin(\nu-1))/2$$

Alors nous obtenons :

$$\varrho(\nu) = e^{\nu}$$

Nous appliquons la méthode de collocation d'Hermite pour approcher la solution, les résultats obtenus pour  $N = 4$ ,  $N = 8$  sont présentés dans le tableau suivant

valeur de $\nu$	Solution exacte	Erreur( $N = 4$ )	Erreur( $N = 8$ )
$-1.00e + 00$	$3,678e - 01$	$7.491e - 09$	$2.261e - 09$
$-0.80e + 00$	$4,493e - 01$	$7.659e - 09$	$1.063e - 09$
$-0.60e + 00$	$,448e - 01$	$9.710e - 09$	$2.052e - 10$
$-0.40e + 00$	$6,703e - 01$	$2.464e - 09$	$1.304e - 09$
$-0.02e + 00$	$8,187e - 01$	$1.478e - 10$	$2.038e - 09$
$0.00e + 00$	$1.000e + 00$	$3.714e - 09$	$2.284e - 09$
$0.20e + 00$	$1.221e + 00$	$7.483e - 09$	$2.002e - 09$
$0.40e + 00$	$1.491e + 00$	$5.295e - 09$	$1.245e - 09$
$0.60e + 00$	$1.822e + 00$	$1.936e - 08$	$1.486e - 10$
$0.80e + 00$	$2,225e + 00$	$1.019e - 11$	$1.085e - 09$
$1.00e + 00$	$2.178e + 00$	$1.884e - 08$	$2.217e - 09$

Tableau 3. Comparaison des erreurs pour  $N = 8$  pour l'Exemple 3

**Exemple 4.2.5** Considérons le équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm de deuxième espèce[15]

$$\varrho(\nu) - \int_0^{\nu} s\varrho(s)ds - \int_0^1 s\varrho(s)ds = L(\nu)$$

Si nous prenons la fonction  $L(\nu)$  sous la forme suivante :

$$L(\nu) = 3\nu + 4\nu - \nu^3 + \nu^4 - 2$$

Alors nous obtenons :

$$\varrho(\nu) = 3\nu + 4\nu^2$$

Dans le tableau suivant nous présentons les résultats obtenus par la méthode pour  $N = 3$  et une comparaison entre la méthode et la méthode d'Adomian

valeur de $\nu$	Solution exacte	Erreur( $N = 3$ )	Erreur[16]
0.00e + 00	3.400e - 01	7.491e - 15	2.000e - 07
0.20e + 00	7.600e - 01	7.660e - 15	2.000e - 07
0.30e + 00	1.260e - 01	7.993e - 15	4.000e - 07
0.40e + 00	1.840e - 01	7,993e - 15	6.000e - 07
0.50e + 00	2.500e + 00	8,881e - 15	2.200e - 06
0.60e + 00	3.240e - 01	1.065e - 14	2.400e - 06
0.70e + 00	4.060e - 01	9.770e - 15	5.200e - 06
0.80e + 00	4.960e + 00	1.154e - 14	1.170e - 05
0.90e + 00	5.940e + 00	1.243e - 14	2.690e - 05
1.00e + 00	7.000e + 00	1.421e - 14	6.250e - 05

Tableau 4. Comparaison des erreurs pour l'Exemple 5 avec Adomian

**Exemple 4.2.6** *Considérons les équations intégrales de Volterra-Fredholm linéaires de deuxième espèce[15] :*

$$\varrho(\nu) - \int_{-1}^{\nu} e^{-(\nu+s)} \varrho(s) ds - \int_{-1}^1 \varrho(s) ds = L(\nu)$$

*Si nous prenons la fonction  $L(\nu)$  sous la forme suivante*

$$L(\nu) = e^{-\nu} + e^{-\frac{3\nu}{2}} + e^{-1} - e^1 - e^{\frac{2-\nu}{2}}$$

*Alors nous obtenons :*

$$\varrho(\nu) = e^{-\nu}$$

Nous appliquons la méthode de collocation par les polynômes de Hermite pour approcher la solution

valeur de $\nu$	Sol.Exacte	Erreur( $N = 8$ )	Erreur( $N = 10$ )
$-1.00e + 00$	$2.718e + 00$	$3.734e - 08$	$0.091e - 09$
$-0.80e + 00$	$2.225e + 00$	$2.599e - 08$	$2.626e - 10$
$-0.60e + 00$	$1.822e + 00$	$5.330e - 08$	$3.236e - 12$
$-0.40e + 00$	$1.498e + 00$	$2.079e - 08$	$7.851e - 10$
$-0.02e + 00$	$4.540e + 00$	$1.444e - 08$	$1.094e - 10$
$0.00e + 00$	$1.000e + 00$	$2.117e - 08$	$1.233e - 10$
$0.20e + 00$	$8.187e - 01$	$2.580e - 08$	$1.180e - 10$
$0.40e + 00$	$6.703e - 01$	$3.429e - 08$	$9.598e - 10$
$0.60e + 00$	$5.488e - 01$	$2.795e - 08$	$5.484e - 11$
$0.80e + 00$	$4.493e - 01$	$4.769e - 08$	$2.573e - 11$
$1.00e + 00$	$3.679e - 01$	$3.748e - 08$	$7.215.e - 09$

Tableau 5: Comparaison des erreurs pour  $N = 8, N = 10$

**Exemple 4.2.7** *Considérons les équations intégrales de Volterra-Fredholm linéaires de deuxième espèce*[15]

$$\varrho(\nu) - \int_0^\nu (\nu - s)\varrho(s)ds - \int_0^1 \nu\varrho(s)ds = L(\nu)$$

*Si nous prenons la fonction  $L(\nu)$  sous la forme suivante :*

$$L(\nu) = -2 - 2\nu + e^\nu$$

*Alors nous obtenons :*

$$\varrho(\nu) = \nu e^\nu$$

4.2. Résolution numérique des équations intégrales de Volterra-Fredholm par les polyômes d'Hermite

---

Nous appliquons la méthode de collocation d'Hermite pour  $N = 4$ , puis  $N = 8$  pour approcher la solution, où on a obtenu les résultats suivants

valeur de $\nu$	Solution exacte	Sol.App( $N = 4$ )	Sol.App( $N = 8$ )
00e + 00	0	5.773e - 15	-6.328e - 09
0.10e + 00	1.102e - 01	1.102e - 01	1.105e - 01
0.20e + 00	2.441e - 01	2.441e - 01	2.442e - 01
0.30e + 00	4.050e - 01	4.050e - 01	4.049e - 01
0.40e + 00	5.967e - 01	5.968e - 01	5.9673e - 09
0.50e + 00	8.243e + 00	8.243e - 09	8.243e - 01
0.60e + 00	1.221e + 00	1.093e - 09	1.002e + 00
0.70e + 00	1.491e + 00	1.409e - 09	1.093e + 00
0.80e + 00	1.780e + 00	1.780e - 08	1.409e + 00
0.90e + 00	2.213e + 00	2.213e - 11	1.085e + 00
1.00e + 00	2.718e + 00	2.718e + 00	2.217e + 00

Tableau 6 . comparaison entre les solutions exactes et approximatives pour  $N = 4$ ,  $N = 8$

valeur de $\nu$	Erreur( $N = 4$ )	Erreur( $N = 8$ )	Erreur[16]
0.10e + 00	2.519e - 01	5.190e - 09	1.261e - 03
0.20e + 00	1.030e - 01	2.852e - 09	2.417e - 03
0.30e + 00	5.676e - 01	1.312e - 09	3.678e - 03
0.40e + 00	7.658e - 01	7.425e - 10	5.003e - 03
0.50e + 00	2.319e - 05	2.631e - 09	6.415e - 03
0.60e + 00	1.270e - 05	7.471e - 09	7.939e - 03
0.70e + 00	1.098e - 05	6.390e - 09	9.600e - 03
0, 80e + 00	6.635e - 05	7.674e - 08	1.142e - 02
0.90e + 00	2.440e - 04	9.734e - 11	1.345e - 02
1.00e + 00	5.197e - 05	1.041e - 08	2.571e - 02

Tableau 7 . Comparaison des erreurs pour l'exemple 6 avec la méthode d'Adomian

## 4.3 Résolution des systèmes différentiels par les polynômes d'Hermite

Cette partie traite de la résolution numérique des systèmes différentiels en les convertissant en équations intégrales telles que les équations de Volterra et de Fredholm à l'aide d'équations différentielles, ce qui facilite leur résolution. Dans notre travail, nous avons utilisé les polynômes d'Hermite et la méthode de collocation, nous avons également pris plusieurs exemples de systèmes différentiels à 1D et 2D, pour démontrer l'efficacité de la méthode on a fait une comparaison avec la solution exacte et la solution approximative obtenue, les résultats sont présentés dans des tableaux et des figures

### 4.3.1 Résolution des systèmes différentiels 1D

**Exemple 4.3.1** Soit l'équation différentielle suivante:

$$\begin{cases} \mu'(\nu) = 2\nu(1 + \mu(\nu)) \\ \mu(0) = 0 \end{cases}$$

Le système est instable en sens de Lyapunov en  $P = -1$  ( $P$  : point d'équilibre)

Le système peut être transformé à une équation intégrale linéaire de Volterra de la forme

$$\mu(\nu) = \int_0^\nu 2s(1 + \mu(s))ds$$

telle que la solution exacte est donnée par :

$$\mu(\nu) = e^{\nu^2} - 1$$

Approchons la solution de l'équation donnée par la méthode présentée pour  $N = 10$ , dans le tableau et la figure ci dessous on trouve les résultats obtenus avec une comparaison avec la méthode du point milieu.

4.3. Résolution des systèmes différentiels par les polynômes d'Hermite

$\nu$	Solution Exacte	Sol.App $N = 10$	M. point milieu
$0.00e + 00$	0	$2.910534249167540e - 07$	0
$0.10e + 00$	$1.005016708416795e - 02$	$1.188468643498197e - 07$	$5.016708416794718e - 05$
$0.20e + 00$	$4.081077419238821e - 02$	$6.202798519261421e - 08$	$2.077741923882034e - 04$
$0.30e + 00$	$9.417428370521042e - 02$	$2.442640336663970e - 07$	$5.005307052104030e - 04$
$0.40e + 00$	$1.735108709918103e - 01$	$4.207301123049234e - 07$	$9.832404005102324e - 04$
$0.50e + 00$	$2.840254166877414e - 01$	$5.824080759886385e - 07$	$1.749199873095630e - 03$
$0.60e + 00$	$4.333294145603404e - 01$	$7.200255041084347e - 07$	$2.950294703602974e - 03$
$0.70e + 00$	$6.323162199553789e - 01$	$8.230756012306273e - 07$	$4.830857382383091e - 03$
$0.80e + 00$	$8.964808793049517e - 01$	$8.820711709933704e - 07$	$7.784116038989541e - 03$
$0.90e + 00$	$1.247907986676472e + 00$	$8.843619045961759e - 07$	$1.244649767487860e - 02$
$1.00e + 00$	$1.718281828459046e + 00$	$8.382465450651466e - 07$	$1.985626508522254e - 02$

Tableau 1. Comparaison des erreurs obtenues par la méthode proposée et la méthode du point milieu

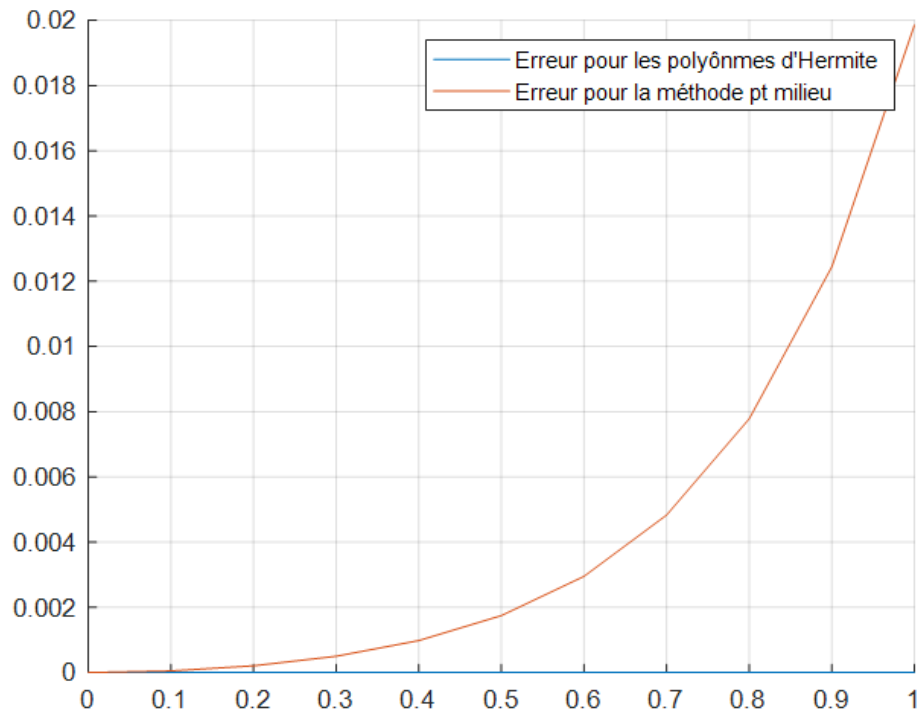


Figure 1. Comparaison pour l'exemple 1 entre la méthode proposée et la méthode de point milieu.

**Exemple 4.3.2** Soit l'équation suivante :

$$\begin{cases} \mu'(\nu) = \kappa\mu(\nu) - (\kappa + 1)e^{-\nu} & ;\kappa = 12 \\ \mu(0) = 1 \end{cases}$$

Le système est asymptotique stable.

l'équation se transforme à une équation intégrale linéaire de Volterra de la forme :

$$\mu(\nu) = -12 + 13e^{-\nu} + \int_0^{\nu} 12\mu(s)ds$$

où la solution exacte est donnée par  $\mu(\nu) = e^{-\nu}$

Approchons la solution du problème donné par le méthode de collocation en utilisant lers polynômes d'Hermite pour  $N = 8$  on obtient les résultats suivants

$\nu$	Solution Exacte	Erreur $N = 8$
0	1.0000000000000000e + 00	2.955e - 08
0.1	9.048374180359595e - 01	2.370e - 08
0.2	8.187307530779818e - 01	1.698e - 08
0.3	7.408182206817178e - 01	9.509e - 09
0.4	6.703200460356393e - 01	1.427e - 09
0.5	6.065306597126334e - 01	7.117e - 09
0.6	5.488116360940265e - 01	1.602e - 08
0.7	4.965853037914095e - 01	2.541e - 08
0.8	4.493289641172216e - 01	3.607e - 08
0.9	4.065696597405991e - 01	5.131e - 08
1	3.678794411714423e - 01	8.248e - 08

Tableau 2. Les erreurs pour  $N = 8$

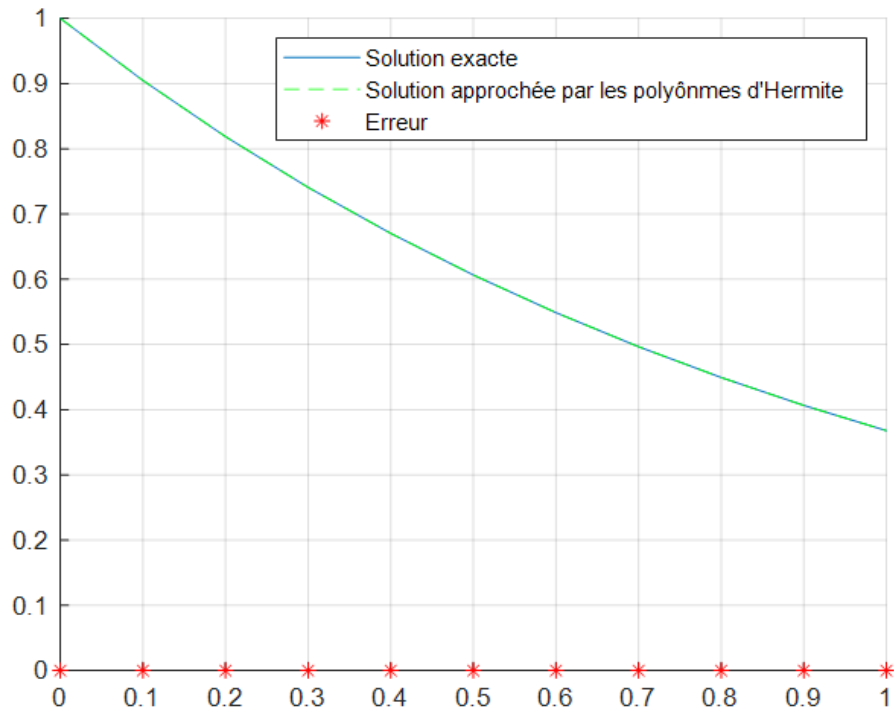


Figure 2. Comparaison de la solution exacte et approchée par les polynômes d'Hermite

### 4.3.2 Résolution des systèmes différentiels 2D

Soit le système différentiel suivante: 
$$\begin{cases} \nu_1' = \nu_2 \\ \nu_2' = 6\nu + \nu^3 - \nu_1 \end{cases}$$

Le point d'équilibre  $P$  de ce système en  $\nu = 0$  est  $(0, 0)$

Le jacobien est la matrice  $A$  suivante:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \nu_1'}{\partial \nu_1} & \frac{\partial \nu_1'}{\partial \nu_2} \\ \frac{\partial \nu_2'}{\partial \nu_1} & \frac{\partial \nu_2'}{\partial \nu_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour  $(\nu_1, \nu_2) = (0, 0)$ , Les valeurs propres de  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  sont  $\rho_1 = +i$  et  $\rho_2 = -i$  qui sont des valeurs propres imaginaires. Ce point  $(0, 0)$  est un centre stable.

On transforme ce système en une équation différentielle puis une équation intégrale de volterra comme nous l'avons mentionné précédemment

on pose:  $\nu_1 = \mu$ ,  $\nu_2 = \mu'$ . Pour transformer le système différentiel précédent à une équation différentielle, on pose  $\nu_1 = \mu$ ,  $\nu_2 = \mu'$

$$\begin{cases} \mu''(\nu) = 6\nu + \nu^3 - \mu(\nu) \\ \mu(0) = 0, \mu'(0) = 1 \end{cases}$$

qui est équivalente à l'équation intégrale linéaire de Volterra suivante :

$$\mu(\nu) = \nu + 1/20\nu^5 + \nu^3 - \int_0^\nu (\nu - s)\mu(s)ds \quad (*)$$

qui admet la solution exacte  $\mu(\nu) = \nu^3 + \sin(\nu)$ , d'où  $\nu_1 = \nu^3 + \sin(\nu)$ ,  $\nu_2 = 3\nu^2 + \cos(\nu)$

On a vu dans la section précédente que la solution approchée de cette équation intégrale (\*) par la méthode proposée pour  $N = 2$  est donnée par

$$\varrho_2(\nu) = \frac{4849}{1714}\nu^2 + \frac{905}{979}\nu - \frac{1199}{1447}$$

d'où

$$\begin{cases} \nu_1 = \varrho_2(\nu) = \frac{4849}{1714}\nu^2 + \frac{905}{979}\nu - \frac{1199}{1447} \\ \nu_2 = \nu_1' = \frac{4849}{857}\nu + \frac{905}{979} \end{cases}$$

Les solutions approximées obtenues pour  $N = 8$  sont présentées dans les deux tableaux ci dessous

4.3. Résolution des systèmes différentiels par les polynômes d'Hermite

$\nu$	Solution exacte $\nu_1$	Solution approchée $\nu_1$
0	$9.999971428316847e - 01$	0
$1.0000000000000000e - 01$	$1.025002065333520e + 00$	$1.025004165278026e + 00$
$2.0000000000000000e - 01$	$1.100065288971095e + 00$	$1.100066577841242e + 00$
$3.0000000000000000e - 01$	$1.225336070867299e + 00$	$1.225336489125606e + 00$
$4.0000000000000000e - 01$	$1.401061509935388e + 00$	$1.401060994002885e + 00$
$5.0000000000000000e - 01$	$1.627584076553155e + 00$	$1.627582561890373e + 00$
$6.0000000000000000e - 01$	$1.905338189355674e + 00$	$1.905335614909678e + 00$
$7.0000000000000000e - 01$	$2.234845873362038e + 00$	$2.234842187284488e + 00$
$8.0000000000000000e - 01$	$2.616711542862373e + 00$	$2.616706709347166e + 00$
$9.0000000000000000e - 01$	$3.051615961223754e + 00$	$3.051609968270665e + 00$
$1.0000000000000000e + 00$	$3.540309438027863e + 00$	$3.540302305868140e + 00$

Tableau 3.La solution exacte et solution approchée de  $\nu_1$

$\nu$	Solution exacte $\nu_2$	solution approchée $\nu_2$
0	0	$-2.655448320656350e - 06$
$1.0000000000000000e - 01$	$1.008334166468282e - 01$	$1.008305129192615e - 01$
$2.0000000000000000e - 01$	$2.066693307950612e - 01$	$2.066662571529410e - 01$
$3.0000000000000000e - 01$	$3.225202066613396e - 01$	$3.225170471461746e - 01$
$4.0000000000000000e - 01$	$4.534183423086505e - 01$	$4.534151871375974e - 01$
$5.0000000000000000e - 01$	$6.044255386042030e - 01$	$6.044224844318072e - 01$
$6.0000000000000000e - 01$	$7.806424733950353e - 01$	$7.806396231980105e - 01$
$7.0000000000000000e - 01$	$9.872176872376910e - 01$	$9.872151496903947e - 01$
$8.0000000000000000e - 01$	$1.229356090899523e + 00$	$1.229353979120203e + 00$
$9.0000000000000000e - 01$	$1.512326909627483e + 00$	$1.512325339192655e + 00$
$1.0000000000000000e + 00$	$1.841470984807897e + 00$	$1.841470070954504e + 00$

Tableau 4.La solution exacte et solution approchée de  $\nu_2$

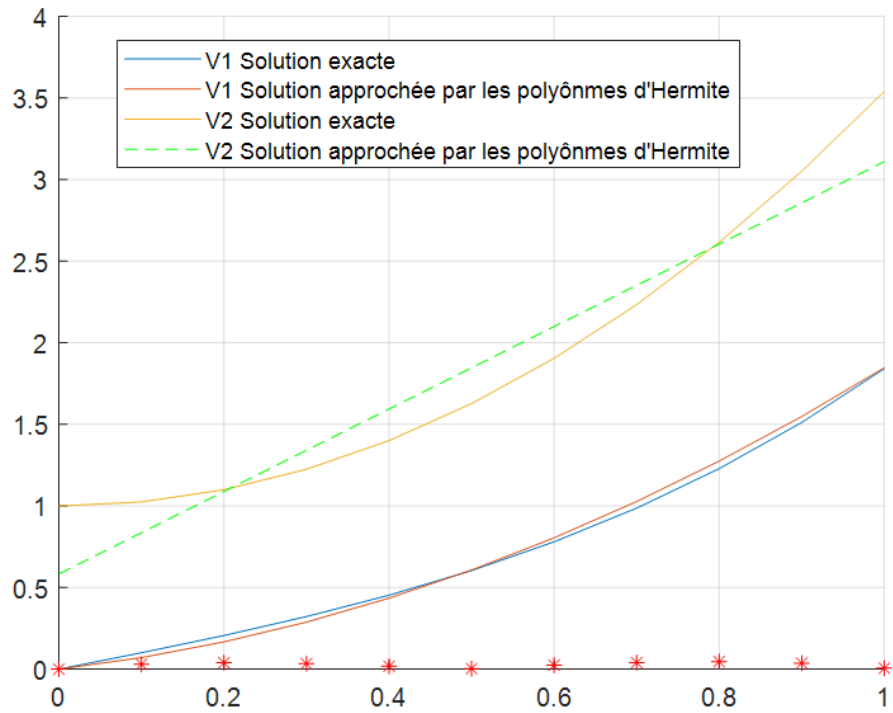


Figure 3. Comparaison entre les solutions exactes et approchées de  $\nu_1$  et  $\nu_2$  pour  $N = 2$

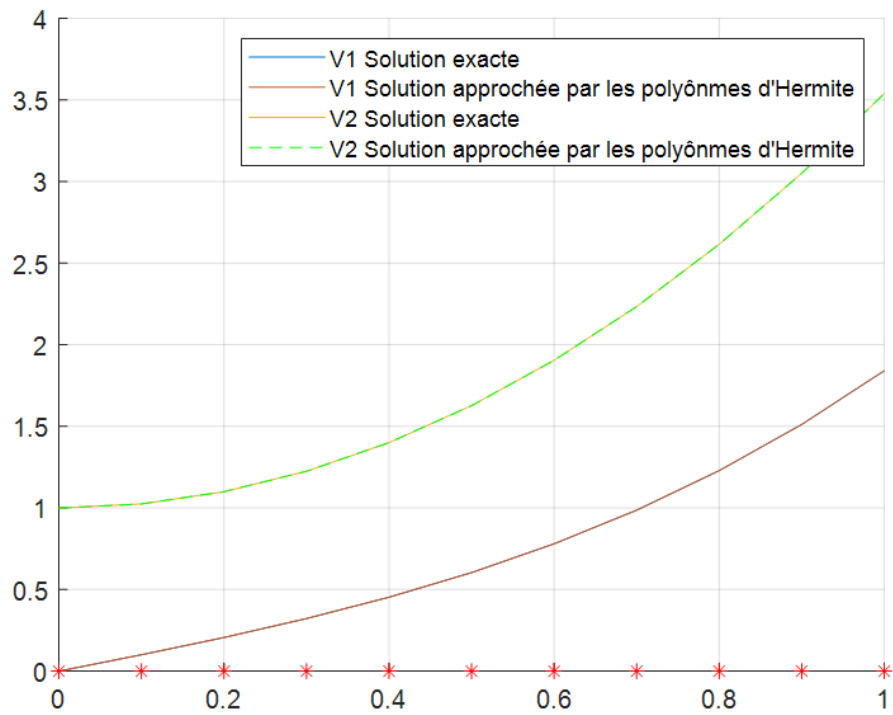


Figure 3. Comparaison entre les solutions exactes et approchées de  $\nu_1$  et  $\nu_2$  pour  $N = 5$

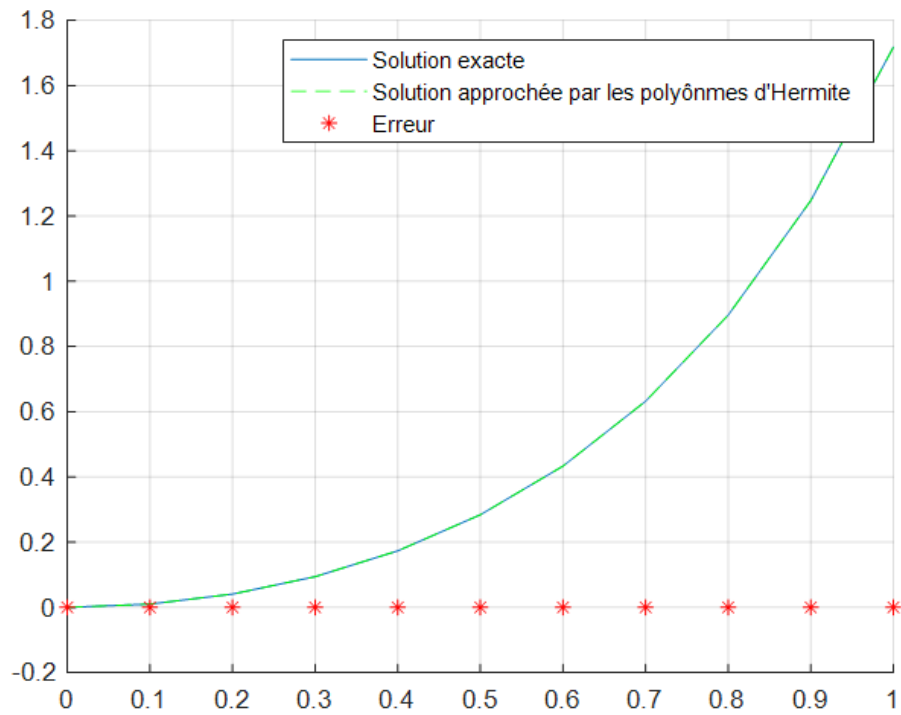


Figure 6. Comparaison de la solution exacte et approchée par les polynômes d'Hermite

**Exemple 4.3.3** Soit le système différentiel suivant

$$\begin{cases} \nu_1' = \nu_2 \\ \nu_2' = \nu_1 + 2 - \nu^2 \end{cases}$$

Les points d'équilibre de ce système sont deux  $(2, 0)$   $(-1, 0)$ . Le jacobien  $A$  est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \nu_1'}{\partial \nu_1} & \frac{\partial \nu_1'}{\partial \nu_2} \\ \frac{\partial \nu_2'}{\partial \nu_1} & \frac{\partial \nu_2'}{\partial \nu_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour  $(\nu_1, \nu_2) = (2, 0)$ , Les valeurs propres de  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  sont  $\rho = 1$  et  $\rho = -1$  qui sont des valeurs propres imaginaires. Cela signifie que le point  $(2, 0)$  est un point critique de type selle (instable)

Pour  $(\nu_1, \nu_2) = (-1, 0)$ , Les valeurs propres de  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  sont  $\rho = 1$  et  $\rho = -1$  qui sont réelles et opposées. Cela signifie que  $(-1, 0)$  est un point de selle (instable)

On transforme ce système en une équation différentielle puis une équation intégrale de Volterra comme nous l'avons mentionné précédemment

Ce qui se transforme en équation différentielle. On pose  $\nu_1 = \mu$ ,  $\nu_2 = \mu'$

$$\begin{cases} \mu''(\nu) = 2 - \nu^2 + \mu \\ \mu(0) = 0, \mu'(0) = 0 \end{cases}$$

est transformé à une équation intégrale linéaire de Volterra de la forme

$$\mu(\nu) = -\frac{\nu^4}{12} + \nu^2 + \int_0^\nu (\nu - s)\mu(s)ds$$

Solution exacte:  $\mu(\nu) = \nu^2$ , où  $\nu_1 = \nu^2$ ,  $\nu_2 = 2\nu$

### 4.3. Résolution des systèmes différentiels par les polynômes d'Hermite

---

Dans le tableau suivant on trouve la différence entre la solution exacte et la solution approchée de l'équation intégrale pour  $N = 4$

$\nu$	solution exacte	Erreur ( $N = 4$ )
0	0	$3.486100297322992e - 14$
0.1	$1.0000000000000000e - 02$	$3.163441730791305e - 14$
0.2	$4.0000000000000001e - 02$	$2.783884234247580e - 14$
0.3	$9.0000000000000002e - 02$	$2.381428387820961e - 14$
0.4	$1.6000000000000000e - 01$	$1.965094753586527e - 14$
0.5	$2.5000000000000000e - 01$	$1.509903313490213e - 14$
0.6	$3.6000000000000000e - 01$	$1.010302952408892e - 14$
0.7	$4.899999999999999e - 01$	$5.384581669432009e - 15$
0.8	$6.4000000000000001e - 01$	$5.551115123125783e - 16$
0.9	$8.1000000000000001e - 01$	$4.218847493575595e - 15$
1.00	$1.0000000000000000e + 00$	$8.881784197001252e - 15$

Tableau 6. Les erreurs pour le polynôme d'Hermite pour  $N = 4$

4.3. Résolution des systèmes différentiels par les polynômes d'Hermite

Dans les tableaux 7 et 8, on a fait une comparaison entre les solutions exactes du système différentiel et les solutions approchées obtenues par la méthode proposée pour  $N = 4$

$\nu$	Solution $\nu_1$	Solution approchée $\nu_1$
0	$8.963138925326454e - 08$	0
$1.0000000000000000e - 01$	$2.000006364054484e - 01$	$2.0000000000000000e - 01$
$2.0000000000000000e - 01$	$4.000012874662567e - 01$	$4.0000000000000000e - 01$
$3.0000000000000000e - 01$	$6.000018379450665e - 01$	$6.0000000000000001e - 01$
$4.0000000000000000e - 01$	$8.000022666886603e - 01$	$8.0000000000000000e - 01$
$5.0000000000000000e - 01$	$1.000002557568631e + 00$	$1.0000000000000000e + 00$
$6.0000000000000000e - 01$	$1.200002699948332e + 00$	$1.2000000000000000e + 00$
$7.0000000000000000e - 01$	$1.400002689033556e + 00$	$1.4000000000000000e + 00$
$8.0000000000000000e - 01$	$1.600002526096910e + 00$	$1.6000000000000000e + 00$
$9.0000000000000000e - 01$	$1.800002218567005e + 00$	$1.8000000000000000e + 00$
$1.0000000000000000e + 00$	$2.000001779974716e + 00$	$2.0000000000000000e + 00$

Tableau 7. La solution exacte et solution approchée de  $\nu_1$

$\nu$	Solution $\nu_2$	solution approchée $\nu_2$
0	0	$-1.302475455822183e - 06$
$1.0000000000000000e - 01$	$1.0000000000000000e - 02$	$9.998725370814254e - 03$
$2.0000000000000000e - 01$	$4.0000000000000001e - 02$	$3.999882230221363e - 02$
$3.0000000000000000e - 01$	$9.0000000000000002e - 02$	$8.999897950637270e - 02$
$4.0000000000000000e - 01$	$1.6000000000000000e - 01$	$1.599991858277890e - 01$
$5.0000000000000000e - 01$	$2.5000000000000000e - 01$	$2.499994282425331e - 01$
$6.0000000000000000e - 01$	$3.6000000000000000e - 01$	$3.599996923849982e - 01$
$7.0000000000000000e - 01$	$4.8999999999999999e - 01$	$4.899999631156247e - 01$
$8.0000000000000000e - 01$	$6.4000000000000001e - 01$	$6.400002251174548e - 01$
$9.0000000000000000e - 01$	$8.1000000000000001e - 01$	$8.100004635084314e - 01$
$1.0000000000000000e + 00$	$1.0000000000000000e + 00$	$1.000000664455535e + 00$

Tableau 8. La solution exacte et solution approchée de  $\nu_2$

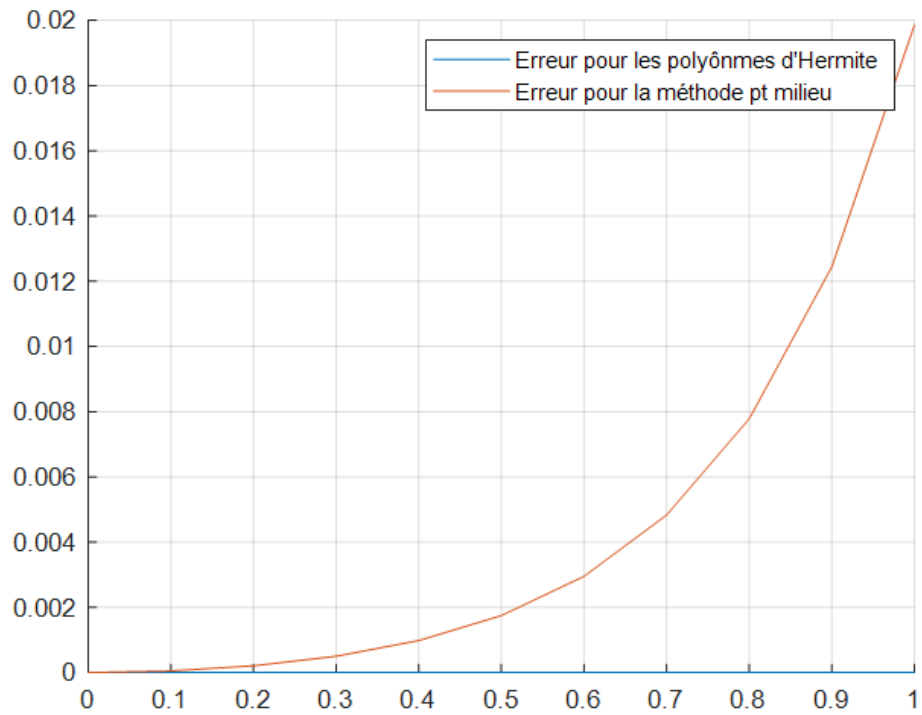


Figure 7. Comparaison de la solution exacte et approchée par les polynomes d'Hermite

**Exemple 4.3.4**

$$\begin{cases} \nu'_1 = 2\nu_2 \\ \nu'_2 = -2\nu_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de  $A$  ( $A$ : la matrice de jacobien) sont  $\rho = 2i$  et  $\rho = -2i$  sont complexes et  $\alpha = 0$ , alors on parle d'un centre.

On transforme ce système en une équation différentielle puis une équation intégrale de Volterra comme nous l'avons mentionné précédemment

On pose:  $\nu_1 = \mu$ ,  $\nu_2 = \mu'$

$$\begin{cases} \mu''(\nu) + 2\mu'(\nu) = 0 \\ \mu(0) = 2, \mu'(0) = -2 \end{cases}$$

est transformé à une équation intégrale linéaire de Volterra de la forme

$$\mu(\nu) = 2\nu + 2 - 2 \int_0^\nu \mu(s) ds$$

la solution exacte est donnée par  $\mu(\nu) = 1 + e^{-2\nu}$ .

4.3. Résolution des systèmes différentiels par les polynômes d'Hermite

---

Dans les deux derniers tableaux, on a fait une comparaison entre les solutions exactes et les solutions approchées obtenues par la méthode proposée pour  $N = 5$

$\nu$	Solution $\nu_1$	Solution approchée $\nu_1$
0	$-2.000007523118899e + 00$	$-2.000000000000000e + 00$
$1.000000000000000e - 01$	$-1.637467183648214e + 00$	$-1.637461506155964e + 00$
$2.000000000000000e - 01$	$-1.340643482594251e + 00$	$-1.340640092071279e + 00$
$3.000000000000000e - 01$	$-1.097624034820743e + 00$	$-1.097623272188053e + 00$
$4.000000000000000e - 01$	$-8.986558294126414e - 01$	$-8.986579282344431e - 01$
$5.000000000000000e - 01$	$-7.357538146823561e - 01$	$-7.357588823428847e - 01$
$6.000000000000000e - 01$	$-6.023804210169725e - 01$	$-6.023884238244042e - 01$
$7.000000000000000e - 01$	$-4.931831789463637e - 01$	$-4.931939278832130e - 01$
$8.000000000000000e - 01$	$-4.037798956928036e - 01$	$-4.037930359893108e - 01$
$9.000000000000000e - 01$	$-3.305827750430286e - 01$	$-3.305977764431731e - 01$
$1.000000000000000e + 00$	$-2.706544026623980e - 01$	$-2.706705664732254e - 01$

Tableau 9. La solution exacte et solution approchée de  $\nu_1$

$\nu$	Solution $\nu_2$	solution approchée $\nu_2$
0	2.0000000000000000e + 00	1.999998095484802e + 00
1.0000000000000000e - 01	1.818730753077982e + 00	1.818728184271748e + 00
2.0000000000000000e - 01	1.670320046035639e + 00	1.670317020600952e + 00
3.0000000000000000e - 01	1.548811636094027e + 00	1.548808400572682e + 00
4.0000000000000000e - 01	1.449328964117222e + 00	1.449325793961683e + 00
5.0000000000000000e - 01	1.367879441171442e + 00	1.367876629009860e + 00
6.0000000000000000e - 01	1.301194211912202e + 00	1.301192054182491e + 00
7.0000000000000000e - 01	1.246596963941607e + 00	1.246595746051796e + 00
8.0000000000000000e - 01	1.201896517994655e + 00	1.201896498237211e + 00
9.0000000000000000e - 01	1.165298888221586e + 00	1.165300280723949e + 00
1.0000000000000000e + 00	1.135335283236613e + 00	1.135338240331221e + 00

Tableau 10. La solution exacte et solution approchée de  $\nu_2$

## Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons étudié la classification topologique des systèmes différentiels linéaires et non linéaires et nous sommes concentrés sur l'aspect le plus important, qui est l'étude de l'invariance au sens de Lyapunov, qui concerne son comportement asymptotique c'est-à-dire, l'évolution des solutions au fil du temps tend vers l'infini. Ensuite, nous avons montré la relation entre les systèmes différentiels et les équations intégrales à travers les équations différentielles. Dans notre recherche, nous avons abordé quatre axes principaux. Dans le premier axe, nous avons présenté en détail les définitions ainsi que les propriétés fondamentales des systèmes différentiels et des équations intégrales, et dans le deuxième axe, nous avons présenté des données sur les systèmes différentiels linéaires et non linéaires. Deux approches pour les systèmes différentiels non linéaires sont présentées. Nous présentons deux méthodes d'analyse. La première consiste à comparer un système non linéaire avec un système linéaire. Bien que cette méthode soit simple, elle s'est révélée inefficace. En d'autres termes, la méthode linéaire est une méthode approchée et n'est donc valable que localement autour du point d'équilibre en question et ne peut certainement pas être utilisée pour déduire un comportement global. De plus, la dynamique des systèmes non linéaires sont plus riches que les systèmes linéaires, ces derniers étant liés à la fonction de Lyapunov. Dans le troisième axe, nous discutons de la relation entre les équations intégrales et le système différentiel, y compris les équations différentielles. Dans le quatrième axe, nous avons proposé une méthode numérique pour résoudre les systèmes différentiels linéaires passant par les équations intégrales linéaires à travers les équations différentielles en utilisant les polynômes d'Hermite et la méthode de collocation, puis on a appliqué la méthode proposée sur plusieurs exemples, les solutions obtenues ont été comparées avec les solutions exactes, ce qui nous a donné des résultats très précis.

Nos futures recherches porteront également sur les systèmes différentiels et sur les équations intégrales non linéaires

# ANNEXE

## NOTIONS SUR LES OPÉRATEURS

### Opérateur intégral linéaire

**Définition 4.3.1** *Un opérateur integral linéaire  $\xi$  est un opérateur qui admet une formulation de la forme suivante :*

$$(\xi \varrho)(\nu) = \int_a^b h(\nu, s) \varrho(s) ds$$

*La fonction  $h$  est appelée noyau de l'opérateur  $\xi$ .*

**Remarque 4.3.1** *Si  $h$  est une fonction continue sur  $[a, b] \times [a, b]$  continue, l'opérateur  $\xi$  est appelé opérateur intégral à noyau continue  $h$ .*

### Opérateur compacts

**Définition 4.3.2** *(opérateur complètement continu)*

*L'opérateur  $\xi$  est dite complètement continu s'il est continu et compact.*

**Théorème 4.3.1** (Arzela – Ascoli)[04]

*Une condition nécessaire et suffisante q'une famille des fonctions continues sur l'intervalle compact  $[a, b]$  est compacte dans  $C([a, b])$  est que cette famille est uniformément borné et équicontinue.*

**Théorème 4.3.2** *L'opérateur intégral  $\xi$  de  $C[a, b]$  dans  $C[a, b]$  à noyau continu est un opérateur compact.*

**Opérateur contractant**

**Définition 4.3.3** Soient  $H$  est un espace de Hilbert et  $\xi$  un opérateur ,  $\xi : H \rightarrow H$  , on dit que  $\xi$  un opérateur de contraction s'il existe une constante  $L$  telle que  $0 \leq L < 1$  et

$$\forall \varrho_1, \varrho_2 \in H, \quad \|\xi\varrho_1 - \xi\varrho_2\| \leq L \|\varrho_1 - \varrho_2\|$$

**Classification topologique basée sur la théorie des points fixes****Les théorèmes de points fixe dans les espaces fonctionnels**

**Définition 4.3.4** (*Point fixe*)

Soit  $(E, d)$  un espace métrique et  $L : E \rightarrow E$ . Un point fixe de  $L$  est un élément  $\nu \in E$  telque  $L(\nu) = \nu$

**1.Théorème (du points fixe de Banach)** Soit  $E$  un espace de Banach  $B(\nu_0, r) = \{\nu \in E : \|\nu - \nu_0\| < r\}$  et  $L : B(\nu_0, r) \rightarrow E$  une contraction de constante  $k$  vérifiant :

$$\|L(\nu_0), \nu_0\| \geq (1 - k)r.$$

Alors  $L$  admet un unique point fixe dans  $B(\nu_0, r)$  .

**Preuve.** Voir [02 – 05 – 24] ■

**Théorème du point fixe de Schauder** Le théorème de Schauder sur les points fixes est un résultat en topologie qui affirme qu'une fonction continue, définie sur un ensemble convexe et compact, a au moins un point fixe, bien que l'unicité de ce point ne soit pas assurée.

**Théorème 4.3.3** Soit  $Z$  un sous ensemble non vide , compact convexe dans un espace de Banach  $E$  et supposons  $L : Z \rightarrow Z$  est une application continu. Alors ,  $L$  possède un point fixe.

**Preuve.** [18] ■

**Théorème du point fixe de Schaefer**

**Théorème 4.3.4** [22] *Soit  $E$  un espace de Banach et soit  $\xi : E \rightarrow E$  un opérateur complètement continu. Alors, soit :*

(i) *L'équation d'opérateur  $\varrho = \rho \xi \varrho$  admet une solution pour  $\rho = 1$ .*

*ou*

(ii) *L'ensemble  $E = \{\rho \in E; \varrho = \rho \xi \varrho, \rho \in ]0, 1[ \}$  est non borné.*

**Equations Intégrales aux Opérateurs contractants****Théorème 4.3.5 (du points fixe de Banach-Picard)**

*Considérons  $R$  comme un sous-ensemble borné et fermé, et  $K : [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue qui satisfait la condition de Lipschitz.*

$$|K(\nu, s, \varsigma_1) - K(\nu, s, \varsigma_2)| \leq L |\varsigma_1 - \varsigma_2|$$

*pout tout  $(\nu, s) \in [0, T] \times [0, T]$  et  $\varsigma_1, \varsigma_2 \in \mathbb{R}$ . Alors, pour toute fonction  $L \in C([0, T])$ , l'équation*

$$\varrho(\nu) = L(\nu) + \int_0^\nu K(\nu, s, \varrho(s)) ds, \quad \nu \in [0, T]$$

*admet une solution unique  $\varrho \in C[0, T]$ . De plus, pout tout  $\varrho_0 \in C[0, T]$  la suite de fonctions  $\{\varrho_n\}$  définie par*

$$\varrho_{n+1}(\nu) = L(\nu) + \int_0^\nu K(s, \nu, \varrho_n(s)) ds, \quad \nu \in [0, T]$$

*La suite converge uniformément sur  $C[0, T]$  vers la solution unique  $\varrho$ .*

**Preuve.** Considérons  $E$  l'espace de Banach de toutes les fonctions continues à valeurs réelles sur  $R$  muni de la norme.

$$|\phi| = \max_{\nu \in [0, T]} |\phi(\nu)| \exp(-g\nu)$$

cette norme est équivalente à la norme  $\sup \|y\|$ , puisque

$$\exp(-g\nu) \|y\| \leq |y| \leq \|y\|$$

;

de plus, elle est complète.

Définir  $\xi : E \rightarrow E$  par

$$\xi \varrho(s) = L(s) + \int_0^\nu k(s, \nu, \varrho(s)) ds$$

Pour prouver que l'équation intégrale a une solution, il suffit de montrer que  $\xi : E \rightarrow E$  admet un point fixe.

Nous prouvons que, en fait,  $\xi$  est contractante

$$\begin{aligned} |\xi(\varrho_1) - \xi(\varrho_2)| &\leq \max_{0 \leq \nu \leq T} \exp(-g\nu) \int_0^\nu |k(\nu, s, \varrho_1(s)) - k(\nu, s, \varrho_2(s))| ds \\ &\leq L \max_{0 \leq \nu \leq T} \exp(-g\nu) \int_0^\nu |\varrho_1(s) - \varrho_2(s)| ds \\ &\leq L \max_{0 \leq \nu \leq T} \exp(-g\nu) \int_0^\nu \exp(Ls) \exp(-Ls) |\varrho_1(\nu) - \varrho_2(\nu)| ds \\ &\leq L |\varrho_1 - \varrho_2| \max_{0 \leq \nu \leq T} \exp(-g\nu) \int_0^\nu \exp(g\nu) ds \\ &\leq L |\varrho_1 - \varrho_2| \max_{0 \leq \nu \leq T} \exp(-g\nu) \frac{\exp(g\nu) - 1}{g} \\ &\leq (1 - \exp(-g\nu)) |\varrho_1 - \varrho_2| \end{aligned}$$

Parce que  $(1 - \exp(-g\nu)) < 1$ , pour tout  $\nu \in [0, T]$ , la fonction  $\xi$  est contractante, le principe de Banach garantit donc d'abord un point fixe unique. La suite  $(\varrho_n)$  déterminée par l'itération décrite dans l'énoncé du théorème converge uniformément vers le point fixe  $\varrho$  pour la norme  $|y|$ , donc également dans la norme  $\|y\|$ . ■

## Equations Intégrales aux Opérateurs Continus

**2. Théorème du point fixe de Schauder .** Soit l'équation intégrale suivante :

$$\varrho(\nu) = L(\nu) + \int_a^s k(\nu, s, \varrho(s)) ds \quad (a \leq \nu \leq b) \quad (1)$$

Telle que  $K : [a; b] \times [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue vérifie les conditions suivantes:

1.  $K(\nu, s, 0) = 0$  pour tout :  $\nu, s \in [a, b]$

2.  $\frac{\partial K(\nu, s, \varsigma)}{\partial \varsigma} < \left| \frac{1 - \|L\|}{b - a} \right|$

alors pour tout  $L \in C([a; b])$  telle que  $\|L\| < 1$  l'équation (1) admet une solution  $\varrho \in C([a; b])$

**Preuve.** On va montrer que  $\xi(B(0, 1)) \subset B(0, 1)$  i.e. pour si  $\|\varrho\| \leq 1$ ; alors  $\|\xi\varrho\| \leq 1$ :  
En effet:

$$\begin{aligned} \|\xi(\varrho)\| &\leq \left\| L(\nu) + \int_a^\nu K(\nu, s, \varrho(s)) ds \right\| \\ &\leq \|L(\nu)\| + \left\| \int_a^\nu K(s, \nu, \varrho(\nu)) ds \right\| \\ &\leq \|L(\nu)\| + \int_a^\nu |K(s, \nu, \varrho(\nu))| ds \\ &\leq \|L(\nu)\| + \int_a^\nu |K(\nu, s, \varrho(s) - K(\nu, s, 0)| ds \\ &\leq \|L(\nu)\| + \int_a^s \left| (\varrho - 0) \frac{\partial K(\nu, s, \varrho(s))}{\partial \varrho} \right| ds \\ &\leq \|L(\nu)\| + \|\varrho\| \frac{1 - \|L(\nu)\|}{b - a} (b - a) < 1 \end{aligned}$$

D'après le Théorème Schauder  $\xi$  admet un point fixe, d'où l'équation admet une solution

■

**Equations Intégrales aux Opérateurs compacts**

**3. Théorème du point fixe de Schaefer .** Considérons l'équation intégrale de Fredholm non linéaire :

$$\varrho(\nu) = L(\nu) + \int_a^b g(\nu, s, \nu(s)) ds \quad -\infty < a \leq \nu \leq b < +\infty \quad (2)$$

où  $L(\cdot) \in C([a, b])$ . Supposons que la fonction  $g(\nu, s, z)$  vérifie les conditions suivantes :

$$\sup |g(\nu, s, z)| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial g}{\partial s}(\nu, s, z) \right| \leq V_1(s)V_2(s)\phi(|\nu|) \quad , \quad \left| \frac{\partial g}{\partial s}(\nu, s, z) \right| \leq V_1(s)V_2(s)\varphi(|\nu|) \quad (3)$$

où  $V_1(\cdot) \in C([a, b])$ ,  $V_1(\cdot) \in L^1[a, b]$ ,  $\phi(\cdot)$  est une fonction positive et bornée sur  $[0, +\infty[$  et  $\varphi(\cdot)$  est une fonction positive et continue sur  $[0, +\infty[$ . Sous ces hypothèses, l'équation (2) admet une solution dans  $C([a, b])$

**Preuve.** [14] ■

# Bibliographie

- [1] G. Ajileye, L. Adiku, J. T. Auta, O. O. Aduroja, and T. Oyedepo, "Linear and non-linear Fredholm integro-differential equations: Application of collocation method for solution," *Journal of Fractional Calculus and Applications*, vol. 15, no. 2, pp. 1-10, 2024. Available: <https://doi.org/10.21608/jfca.2024.265490.1064>.
- [2] Q. H. Ansari, *Metric Spaces: Including Fixed Point Theory and Set-Valued Maps*, 2010. <https://cir.nii.ac.jp/crid/1130000798347426816>.
- [3] V. I. Arnold, *Graduate Texts in Mathematics: Ordinary Differential Equations*, vol. 182, pp. 159-212, 1998. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4612-0601-9>
- [4] K. Atkinson and W. Han, *Theoretical Numerical Analysis*, vol. 39, pp. xviii+576, 2005. Berlin: Springer.
- [5] S. Banach, "Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales," *Fundamenta Mathematicae*, vol. 3, no. 1, pp. 133-181, 1922. <https://eudml.org/doc/213289>.
- [6] F. Caliò, A. I. Garralda-Guillem, E. Marchetti, and M. R. Galán, "Numerical approaches for systems of Volterra–Fredholm integral equations," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 225, pp. 811-821, 2013. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.10.006>
- [7] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Purdue University, Calumet campus, Gordon and Breach Science Publishers, 2011.

- [8] C. C. Chicone, *Ordinary Differential Equations with Applications*, 2nd ed. New York: Springer, 2006. Available: <https://link.springer.com/book/10.1007/0-387-35794-7>.
- [9] D. Elmaci and N. Baykus Savasaneril, "The Lucas Polynomial solution of linear Volterra-Fredholm integral equations," *Matrix Sci. Math.*, vol. 6, no. 1, pp. 21-25, 2022. <http://doi.org/10.26480/msmk.01.2022.21.25>.
- [10] C. Fang, G. He, and S. Xiang, "Hermite-type collocation methods to solve Volterra integral equations with highly oscillatory Bessel kernels," *Symmetry*, vol. 11, no. 2, p. 11020168, 2019. <https://doi.org/10.3390/sym11020168>.
- [11] A. Fortin, *Analyse numérique pour ingénieurs*, Presses inter Polytechnique, 2008.
- [12] W. Hahn, H. H. Hosenthien, and H. Lehnigk, *Theory and Application of Liapunov's Direct Method*, vol. 3, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1963. Available: <https://academic.oup.com/jlms/article-abstract/s1-39/1/382/919199?redirectedFrom=PDF>.
- [13] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1996. <https://dl.icdst.org/pdfs/files3/d83d2dc7280085b61da330c9a8ff5e13.pdf>.
- [14] A. Karoui, "On the existence of continuous solutions of nonlinear integral equations," *Applied Mathematics Letters*, vol. 18, no. 3, pp. 299-305, 2005.
- [15] S. Kehali and A. Khirani, "Using Hermite polynomials to solve Volterra-Fredholm integral equation of the second kind," *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, vol. 11, no. 8, 2024. Available: <https://doi.org/10.18280/mmep.110824>.
- [16] H. M. Malaikah, "The Adomian decomposition method for solving Volterra-Fredholm integral equation using Maple," *Applied Mathematics*, vol. 11, pp. 779-787, 2020. Available: <https://doi.org/10.4236/am.2020.118049>.
- [17] S. Micula, "Numerical solution of two-dimensional Fredholm–Volterra integral equations of the second kind," *Symmetry*, vol. 13, no. 8, p. 1326, 2021. <https://doi.org/10.3390/sym13081326>.

- [18] R. Precup, *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Springer Science & Business Media, 2002. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-94-015-9986-3>.
- [19] M. Semenova, A. Vasilyeva, G. Lukina, U. Popova, S. Zagolilo, and I. Y. Yakushev, "Mathematical modeling of differential equations as applied to problems of physics and electrical engineering," in *Proc. 3rd Int. Conf. Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA)*, Lipetsk, Russian Federation, 2021, pp. 161-166. <https://doi.org/10.1109/SUMMA53307.2021.9632116>.
- [20] J. J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, vol. 199, no. 1, p. 705, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1991.
- [21] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 3rd ed. CRC Press Taylor and Francis Group, 2018.
- [22] H. Sun and Y. Lu, "Numerical solutions to one-dimensional linear Volterra-Fredholm integral equations based on LS-SVM model," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 451, p. 116013, 2024. Available: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2024.116013>.
- [23] A. M. Wazwaz, "The variational iteration method for solving linear and non-linear Volterra integral and integro-differential equations," *International Journal of Computer Mathematics*, vol. 87, no. 5, pp. 1131-1141, 2010. Available: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-21449-3>.
- [24] S. Willard, *General Topology*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1970. <https://www.amazon.com/General-Topology-Stephen-Willard/dp/0201087073>.
- [25] S. Yalçınbaş, M. Aynigül, and M. Sezer, "A collocation method using Hermite polynomials for approximate solution of pantograph equations," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 348, no. 6, pp. 1128-1139, 2011. Available: <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2011.05.003>.

- [26] Y. H. Youssri and R. M. Hafez, "Chebyshev collocation treatment of Volterra-Fredholm integral equations with error analysis," *Arabian Journal of Mathematics*, vol. 9, pp. 471-480, 2020. Available: <https://doi.org/10.1007/s40065-019-0243-y>.

## Résumé

Le but de ce travail est d'étudier la topologie du système d'équations différentielles linéaires et non linéaires, qui sont de la forme suivante :

$$\begin{cases} v_1'(s) = L_1(s, v_1(s), v_2(s), \dots, v_n(s)) \\ v_2'(s) = L_2(s, v_1(s), v_2(s), \dots, v_n(s)) \\ \vdots \\ v_n'(s) = L_n(s, v_1(s), v_2(s), \dots, v_n(s)) \end{cases}$$

Nous avons adopté le critère de stabilité dans le système différentiel au sens de Lyapunov. Ensuite, nous avons abordé l'étude numérique en nous appuyant sur la relation entre les systèmes différentiels et les équations intégrales, en passant par les équations différentielles. Ainsi, pour chaque exemple, nous avons transformé un système différentiel en une équation différentielle, puis en une équation intégrale équivalente, afin d'arriver à une solution approximative en utilisant la méthode de collocation et les polynômes de Hermite. De bons résultats ont été obtenus

**Mots clés :** système d'équations différentielles, équations intégrales, méthode de regroupement, polynômes d'Hermite

## ملخص

الهدف من هذا العمل هو الدراسة الطوبولوجية لجملة المعادلات التفاضلية الخطية واللاخطية، والتي تكون من الشكل التالي

$$\begin{cases} v_1'(s) = L_1(s, v_1(s), v_2(s), \dots, v_n(s)) \\ v_2'(s) = L_2(s, v_1(s), v_2(s), \dots, v_n(s)) \\ \vdots \\ v_n'(s) = L_n(s, v_1(s), v_2(s), \dots, v_n(s)) \end{cases}$$

حيث اعتمدنا معيار الاستقرار في النظام التفاضلي الخطي والعرض التفصيلي لنظرية لابونوف في الأنظمة غير الخطية المستقلة و الغير المستقلة..

ثم تطرقنا الى الدراسة العددية حيث اعتمدنا على العلاقة بين جملة المعادلات التفاضلية والمعادلات التكاملية مرورا بالمعادلات تفاضلية، بحيث في كل مثال حولنا جملة المعادلات التفاضلية الى معادلة تفاضلية ثم الى المعادلة التكاملية المكافئة ثم لتتوصل الى حل تقريبي باستعمال الطريقة التجميعية و كثيرات حدود هارميت. و قد تم الحصول على نتائج جيدة.

**الكلمات المفتاحية:** جملة المعادلات التفاضلية، المعادلات التكاملية، الطريقة التجميعية، كثيرات حدود هارميت.

## Abstract

The objective of this work is to study the topology of systems of linear and nonlinear differential equations of the following form:

$$\begin{cases} v_1'(s) = L_1(s, v_1(s), v_2(s), \dots, v_n(s)) \\ v_2'(s) = L_2(s, v_1(s), v_2(s), \dots, v_n(s)) \\ \vdots \\ v_n'(s) = L_n(s, v_1(s), v_2(s), \dots, v_n(s)) \end{cases}$$

We have adopted the Lyapunov stability criterion for the differential system. Following this, we explored the numerical study by leveraging the relationship between differential systems and integral equations, passing through differential equations. For each example, we transformed a differential system into a differential equation, and then into an equivalent integral equation, ultimately deriving an approximate solution using the collocation method and Hermite polynomials. Promising results were achieved.

**Keywords:** differential equation systems, integral equations, collocation method, Hermite polynomials