UNIVERSITÉ DE M'SILA

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES

Département de Mathématiques

Mémoire de Fin D'etude

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine :Mathématiques et Informatique

Filière :Mathématiques

Spécialité :ANALYSE FONCTIONNELLE

Par

AICHAOUI Fatima

SUJET

Probléme aux limite pour Equation Elliptique

Soutenue publiquement le : 10/06/2015, devent le jury composé de:

A.MERZOUGUI	MCA	Université de M'sila	Président
A.MEMOU	MCB	Université de M'sila	Rapporteur
A.LAKEHAL	MAA	Université de M'sila	Examinateur

Promotion:2014/2015

Remerciements

*En premier lieu nous remercions **ALLAH** pour m'avoir guidé et donner la force pour la finalisation de ce mémoire. nous remercions également nos mères d'avoir nous réservé un climat favorable qui nous a aidé de poursuivre nos études et atteindre l'objectif souhaité.*

*Nous remercions aussi nos professeurs pour leur sérieux et efforts déployés à nos profit ,ainsi leur contribution au bon déroulement de notre formation notamment notre rapporteur **MEMOu Ameur** qui nous a réservé une partie de son temps en nous orientant pour réaliser notre projet de fin de cycle Master **LMD** conformément aux modalités prévues à cet effet .*

Nous remercions notre examinateur et président de mémoire

*Nous remercions vivement Messieurs **MIHOUBI .C** le chef de Département de mathématiques ainsi que **Gagui.B** et* **Saadi.A.**

Finalement ,nous ne manquerons pas de remercier nos collègues pour l'échange d'idées scientifiques qu'on faisait de temps en temps afin d'enrichir nos connaissances dans le domaine de notre spécialité.

Merci

Notations :

$Lip(E,F)$: L'espace de toutes les fonctions Lipschitziennes bornées

$L^p(\Omega)$: L'espace des fonctions mesurable sur Ω

$L^\infty(\Omega)$: L'espace des fonctions essentiellement bornnées sur Ω

$L^1_{loc}(\mathbb{R})$: L'espace des fonctions localement intégrable sur $\mathbb{R}$

$\mathcal{L}(E,F)$: L'espace des opérateurs linéaires continues de E dans F

$K(E,F)$: L'espace des opérateurs linéaires compacts de E dans F

$C^{k,\,\alpha}(\bar{\Omega})$: L'espace de Hölder (l'espace des fonction $k-$fois continument différentiables et leur dérivées partielles sont continues Höldériennes d'exposant α)

$D(\Omega)$ ou $C_0^\infty(\Omega)$: L'espace des fonctions $C^\infty(\Omega)$ a support compact

$D'(\Omega)$: L'espace des formes linéaires continues sur $D(\Omega)$ ou l'espace des distributions

$W^{m,p}(\Omega), H^m(\Omega)$: L'espace de **Sobolev**

∂^α: La dérivée d'ordre α

$\langle\ ,\ \rangle$: Produit dualité

$(\ ,\ )$: Produit scalaire

∇u: gradient de u

$Supp f$: support de la fonction f

δ: La masse de dirac

T^*: L'adjoint de l'opérateur T

$B_E(0;1) = \{x \in E; \|x\| < 1\}$: La boule unité ouverte

$\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$: Laplacien

$u^+ = max\,\{u, 0\}$

$u^- = max\,\{-u, 0\}$

$Lu = 0$ si u est une solution

$Lu \leq 0$ si u est une sous solution

$Lu \geq 0$ si u est une sur solution

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire de Master option analyse fonctionnelle, on va étudier les problémes aus limite pour les equations elliptiques avec les conditions aux limites de Dirichlet. On supposant les données initiales qui vérifiaient les hypothèses, et les théorèmes très important et quelques résultats qui elles permettent de prouver l'éxistence et l'unicité, c'est pour ça on fait deux chapitre.

Dans le premier chapitre, nous allons commencer par donner certain rappels sur l'analyse fonctionnelle, les espaces de Banach, de Hilbert et de Lebesgue et de Hölder, ainsi que leurs quelque les théorème plus importantes et Quelque propriété.

Dans la deuxième chapitre, on intéresse beaucoup aux espaces de Sobolev que jouent un rôle très important dans l'étude des problèmes liés aux équations aux dérivées partielles.

Chapitre 1

Analyse fonctionnelle

1.1 Quelques définitions

Définition 1.1.1 *(espace vectoriel)*

On note$(E, +, \cdot)$ l'ensemble E muni d'une loi interne " $+$ " et d'une loi externe " $\cdot$ ". On dit que E est une espace vectoriel sur un corps K lorsque:

- $(E; +)$ forme un groupe commutatif;
- $\forall \lambda \in \Bbbk$, $\forall (x, y) \in E^2$, $\lambda \cdot (x + y) = (\lambda \cdot x) + (\lambda \cdot y)$, (la loi $\cdot$ est distributive par rapport à la loi $+$);
- $\forall (\lambda, \mu) \in \Bbbk^2$, $\forall x \in E$, $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$;
- $\forall (\lambda, \mu) \in \Bbbk^2$, $\forall x \in E$, $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda(\mu \cdot x)$;
- $\forall x \in E$, $1_{\Bbbk} \cdot x = x$.

Définition 1.1.2 *(norme)*

On appelle norme sur $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, toute application qui associea chaque vecteur $x \in E$ le réel $\|x\|$ vérifiant, pour tout x, $y \in E$ et $\lambda \in \Bbbk$, les propriétés suivants:

1. $\|x\|_\infty = \sup\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$;

2. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$;

3.$\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ (la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$)

L'ensemble $C([a;b])$ des fonctions continues sur $[a;b]$, sur les quelles on peut définir de nombre normes, la plus classique étant la norme dite norme uniforme définie par:

$$\|x\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| .$$

Définition 1.1.3 *(Espace complet)*

Un espace métrique est dit complet si toute suite de Cauchy admet une (unique) limite dans l'espace, où toute suite cauchy est un suite convergente (on rappel sur les suite de cauchy,une suite $(x_n)_{n>0}$ d'élément de E est dite cauchy si: $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n, m > N$ tel que $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$).

Définition 1.1.4 *(Espace de Banach)*

On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé et complet .

Définition 1.1.5

Un produit scalaire sur $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est définit par une forme $\psi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie positive, bilinéaire et symétrique. on note $\psi(x, y) = (x, y)$.

1 Bilinéaire:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2, y) &= (x_1, y) + (x_2, y),\ (x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2) \\ (\alpha x, y) &= \alpha(x, y) \text{ et } (x, \lambda y) = \lambda(x, y),\ \forall\alpha, \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2 Symétrique:

$$(x, y) = (y, x).$$

3 Définie positive:

$$(x,x) \geq 0 \text{ et } ((x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0_E).$$

* Si E est un espace vectoriel complexe, alors les propriétés de linéarité et de symétrie sont remplacées par la sésquilinéarité et l'hermicité, respectivement:

1 Sésquilinéarité:

$$(\alpha x, y) = \alpha(x,y) \text{ et } (x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x,y)\ \forall \alpha, \lambda \in \mathbb{C}.$$

2 Hermicitté

$$\overline{(x,y)} = (x,y).$$

Définition 1.1.6 *(Espace de Hilbert)*

Dans la suite, H désigne un espace de Hilbert réel munit de produit scalaire ainsi que la norme associée notée respectivement par $(.,.)_H$ et $\|.\|_H$. on note aussi par H' l'espace dual de H et par $\langle .,. \rangle_{H' \times H}$ crochet de dualité entre H' et H.

1.2 les espaces de Hölder

Définition 1.2.1 *(Espace $C^k(\Omega)$ et $C^k\left(\bar{\Omega}\right)$)*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

L'espace des fonctions $k-$foit continument différentiable dans Ω et $\bar{\Omega}$ respectivement sont

$$\begin{aligned} C^k(\Omega) &= \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\ f\ ,\ \partial^\alpha f \text{ est continue sur } \Omega,\ |\alpha| \leq k\}. \\ C^k(\bar{\Omega}) &= \left\{f : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}\ f\ ,\ \partial^\alpha f \text{ est continue sur } \bar{\Omega},\ |\alpha| \leq k\right\}. \end{aligned}$$

ainsi

$$C^\infty(\Omega) := \underset{k\geq 0}{\cap} C^k(\Omega),\ C^\infty(\bar{\Omega}) := \underset{k\geq 0}{\cap} C^k(\bar{\Omega})$$

et

$$\|f\|_{C^k} = \max_{0\leq m\leq k}(\sup_{x\in\Omega}|\nabla^m f(x)|)$$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{N}$

L'espace de Hölder $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ est constituée des fonctions $C^k(\Omega)$ associée de la norme

$$\|f\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha f\|_{C(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha f]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} < \infty$$

Donc l'espace $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ est constitué de fonctions qui sont $k-$fois continument différentiables et leur dérivées partielles sont continues Höldériennes d'exposant α

Le cas $0 \leq \alpha \leq 1$

- Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est dite Höldérérienne d'exposant α si

$$|f(x) - g(x)| \leq C\,|x-y|^\alpha \;\; x,\; y \in \Omega$$

- Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est bornée et continue, on écrit

$$\|f\|_C = \sup_{x\in\Omega}|f(x)|$$

- La semi norme d'ordre α de la fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est

$$[f]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \left\{ \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \right\}$$

et la norme d'ordre α par

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} = \|f\|_{C(\bar{\Omega})} + [f]_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})}$$

1.3 Les espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.3.1

Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$. On appelle l'espace de lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tel que } f \text{ mesurable et } |f|^p \text{ intégrable } \}$$

de plus, pour toute fonction $f \in L^p$, on pose:

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

si $p = \infty$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable, alors on définit $\|.\|_{L^\infty}$:

$$\|f\|_{L^\infty} = supess(f) = inf \{\alpha > 0\text{: } |f(x)| \leq \alpha \text{ } p. \text{ } p\}.$$

Théorème 1.3.1

On a les trois propriétès suivante**:**

1. L^p est un espace vectoriel et $\|.\|_{L^p}$ est une norme pour tout $1 \leq p < \infty$.

2. L^p est un espace de banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

3. L^p est séparable pour tout $1 \leq p < \infty$

Lemme 1.3.1 ***:*** *(Inégalité de* ***Hölder****)*

pour f, g mesurable et p, $q \in [1, +\infty[$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

pour $r = 1$, $p = 2$ et $q = 2$ on a

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

est dite inégalité de **Cauchy Schwartz**.

Lemme 1.3.2 *(Inégalité de Young* ***)***

Soit $1 < p$, $q < \infty$ et a, $b > 0$ tel que: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

1.4 Notions des distributions

Définition 1.4.1

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit f une fonction deΩ dans $\mathbb{C}$. On appelle support de f l'ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ qui est l'adhèrence de

$$\{x \in \Omega\colon\ f(x) \neq 0\} \subset \mathbb{R}^n,$$

c'est aussi le complémentaire du plus grand ouvert sur le quel il est intéressant d'ètudier f.

Définition 1.4.2

On note $D(\Omega)$ l'espace des fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω .

$$D(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega)\colon\ supp(f) \text{ borné}, supp(f) \subset\subset \Omega\}.$$

$D(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, i.e:

$$\forall f \in L^2(\Omega), \forall \varepsilon > 0, \exists \varphi \in D(\Omega),\ \|f - \varphi\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon.$$

$f \in L^2(\Omega)$ étant donnée, il existe une suite $(\varphi_n) \in D(\Omega)$ telle que $\varphi_n \to f$ quand $n \to \infty$ au sens de la convergence dans $L^2(\Omega)$, i.e: telle que

$$\|f - \varphi_n\|_{L^2 n \to \infty} \longrightarrow 0.$$

Convergence dans $D(\Omega)$

Définition 1.4.3 *Soit* $\alpha = (\alpha_1 , ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, *on note* $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, *et* $\partial^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_i^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}(x)$.
On munit $D(\Omega)$ *de la convergence suivante:*

la suite $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $D(\Omega)$ converge vers $\varphi \in D(\Omega)$, et on note $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ dans $D(\Omega)$, si et seulement si:

1. Les supports des φ_m restent dans un compact fixe.i.e,

$$\exists K \text{ compact} \subset \Omega \text{ tq } \forall \varphi_m \in D(\Omega)\text{: } supp(\varphi_m) \subset K,$$

(il existe un voisinage ouvert $O \subset \Omega$ du bord de Ω à avoir $O = \Omega - K$, tel que toutes les φ_m sont nulles dans tout O).

2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^m$ (i,e pour chaque ordre) on a $\partial^\alpha \varphi_m \longrightarrow \partial^\alpha \varphi$ uniformément dans Ω, i.e:

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^m, \forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \forall m > M, \|\partial^\alpha \varphi - \partial^\alpha \varphi_m\|_\infty < \varepsilon.$$

(convergence uniforme à tout ordre .On rappelle que $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in \Omega} |f(x)|$).

1.4.1 Espace de distribution $D^{'}(\Omega)$

On définit alors l'espace dual $D'(\Omega) = L(D(\Omega), \mathbb{k})$, i.e. l'espace des formes linéaires continues sur $D(\Omega)$ vers $\mathbb{k}$.

$D'(\Omega)$ est appelé espace des distributions si $T \in D'(\Omega)$ tel que $T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{k}$ ($\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$) vérifie :

1. La linéarité: $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ et tous φ, $\psi \in D(\Omega)$

$T(\alpha\varphi + \psi) = \alpha T(\varphi) + T(\psi)$.

2. La continuité au sens de $D'(\Omega)$:

$$\begin{aligned} |\langle T,\ \varphi\rangle| &= \left| \int\limits_\Omega T(x)\varphi(x)dx \right| \leq \int\limits_\Omega |T(x)|\, |\varphi(x)|\, dx \\ &\leq C \sup_{x\in\Omega} |\varphi(x)| \leq C \|\varphi\|_\infty , \end{aligned}$$

pour $T \in D'(\Omega)$ (fonctionnelle linéaire continue), on utilise la notation du crochet de dualité:

$$T(\varphi) = \langle T, \varphi\rangle_{D'(\Omega)\times D(\Omega)} = \langle T, \varphi\rangle .$$

Définition 1.4.4 *: (L^1_{loc}: localement intégrable)*

$L^1_{loc} = \left\{ f \text{ mesurable }, \int_K |f(x)|\, dx < +\infty, K \subset \mathbb{R} \text{ compact} \right\}.$

Définition 1.4.5

Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}), \Omega \subset \mathbb{R}$, un ouvert pour tout $\varphi \in D(\Omega)$, on pose.$T_f(\varphi) = \langle T_f \ , \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$ est dite Distribution régulière.

1.4.2 Dérivations des distributions

Soit Ω un ouvert de$\mathbb{R}^n$

Définition 1.4.6 *Soit $T \in D'(\Omega)$, la dérivée de T, notée par T' est une distribution définie par:*

$$\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle, \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Plus généralement pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$

$$\left\langle T^{(\alpha)}, \varphi \right\rangle = (-1)^\alpha \left\langle T, \varphi^{(\alpha)} \right\rangle, \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Définition 1.4.7 : *(L'ordre des distribution)*

On dit que T est d'ordre m si T est d'ordre $\leq m$ n'est pas d'ordre $\leq m-1$ et aussi soit $T \in D'(\Omega)$, i.e $|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{\alpha=0}^{m} \left\| \varphi^{(\alpha)} \right\|_\infty$.

Alors la forme linéaire définie par

$$\varphi \longmapsto |\langle T', \varphi \rangle| = - \langle T, \varphi' \rangle, \forall \varphi \in D(\Omega)$$

Si la distribution T est d'ordre $\leq m$ sur un compact $K \subset \Omega$, alors cette distribution est d'ordre $\leq m+1$ sur K.

i.e, pour tout $\varphi \in D(\Omega)$,on a

$$\begin{aligned} |\langle T', \ \varphi \rangle| &= |\langle T, \ \varphi' \rangle| \leq C \sum_{\alpha=0}^{m} \left\| (\varphi')^{(\alpha)} \right\|_\infty \\ &\leq C \sum_{\alpha=0}^{m} \left\| \varphi^{(\alpha+1)} \right\|_\infty \leq C \sum_{\alpha=0}^{m+1} \left\| \varphi^{(\alpha)} \right\|_\infty \end{aligned}$$

1.5 Opérateur compact et l'adjoint

1.5.1 Opérateur compact

Définition 1.5.1

Soit E, F deux espaces vectoriel normés complets (Banach).

Soit $T \in \mathcal{L}(E,\ F)$, on dit que T est un opérateur compact si seulement si $T(B_E)$ est relativement compact. On note $K(E,\ F)$ l'ensemble des operateurs compacts de E dans F et $K(E)$ l'ensemble des endomorphismes compact de E.

Lemme 1.5.1 *$K(E,\ F)$ est un sous espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E,\ F)$.*

Proposition 1.5.1

Soit E et F deus espaces de Banach et $T \in K(E,\ F)$ alors si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E convergeant faiblement vers x alors $T(x_n)$ converge fortement dans F vers $T(x)$.

Proposition 1.5.2 *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $T \in \mathcal{L}(E{,}F)$*

On dit que T est un compact si et seulement si l'une des trois propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) Toute image d'un borné de E est relativement compact dans F,

(ii) $T(B_E(0;\ 1))$ est relativement compact dans F,

(iii) Toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, on peut extraire une sous suite telle que $(T(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans F quand $k \longrightarrow +\infty$.

1.5.2 Adjoint d'opérateur linéaire borné

Définition 1.5.2 *Soient E et F deux espaces vectoriele normés*

On note T^* l'adjoint d'opérateur linéaire borné entre E^* et F^*, supposons que $T \in \mathcal{L}(E,\ F)$ est un opérateur linéaire borné.

pour chaque $y^* \in F^*$ on définit l'adjoint d'opérateur linéaire par la forme suivante:

$$T^* : F^* \to E^* \text{ par } T^*(y^*(x)) = y^*(T(x)).$$

on en utilisant la notation suivante:

$$\langle T(x), y^* \rangle = \langle x, T^*(y^*) \rangle \, , \forall x \in E, \, y^* \in F^*.$$

et donc $T^* \in \mathcal{L}(F^*, \, E^*)$.

Théorème 1.5.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$ alors T est linéaire et $\|T\| = \|T^*\|$.*

Proposition 1.5.3 *Soit E, F et G des espaces normés alors*

(i) Pour tout $T_1, \, T_2 \in \mathcal{L}(E, \, F)$ et tout , $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $(T_1 + \lambda T_2)^* = T_1^* + \lambda T_2^*$

(ii) Pour tout $S \in \mathcal{L}(E, \, F)$ et $T \in \mathcal{L}(F, \, G)$ alors $TS \in \mathcal{L}(E, \, G)$, $(ST)^* \in \mathcal{L}(G^*, E^*)$ et $(TS)^* = S^* T^*$.

1.6 Les spaces de Sobolev

1.6.1 Espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.6.1

Soit Ω un ouvert, quelconque de $\mathbb{R}^n$

pour $m \geq 0$, on note par $W^{m, \, p}(\Omega)$ l'espace de **Sobolev** définie par:

$$W^{m, \, p}(\Omega) = \{ f \in L^p(\Omega), \, D^\alpha f \in L^p(\Omega), \, \forall \alpha\text{:} \; |\alpha| \leq m, \, 1 \leq p < \infty \}$$

on $D^\alpha f$ est prise au sens des distributions, ou le munit de la norme suivant:

$$\|u\|_{W^{m, \, p}} = (\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{Lp}^p)^{\frac{1}{p}},$$

Définition 1.6.2 *:(L'espace de **Sobolev** $W_{loc}^{m,p}(\Omega)$)*

L'espace de **Sobolev** $W^{m,p}_{loc}(\Omega)$ est défini par

$$W^{m,p}_{loc}(\Omega) = \{u \in L^p(W),\ D^\alpha u \in L^p(W),\ \forall\alpha\colon\ |\alpha| \leq m,\ 1 \leq p < \infty : \text{ pour tout } W \subset\subset \Omega,\ \}$$

et de la norme associée

$$\|u\|_{W^{m,\ p}_{loc}(\Omega)} = \|u\|_{W^{m,\ p}(\Omega)}$$

Une suite u_n converge vers u dans $W^{m,p}_{loc}(\Omega)$ si pour tout $W \subset\subset \Omega\ (\overline{W} \subset \Omega)$, $\|u_n - u\|_{W^{m,\ p}(\Omega)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
l'espace $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{m,\ p}(\Omega)$, $\forall p$, i.e:

$$\forall u \in W^{m,p}_{loc}(\Omega),\ \exists(v_n) :\ v_n \in D(\mathbb{R}^n)\ tq\ v_n \longrightarrow u \text{ dans } W^{m,p}(\Omega).$$

1.6.2 Espace de Sobolev $H^m(\Omega)$

Définition 1.6.3 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, pour $p = 2$, on note $W^{m,\ 2}$ par l'espace $H^m(\Omega)$définie par*

$$H^m = \left\{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ \forall\alpha \in \mathbb{N}^n\ :\ |\alpha| \leq m\right\}.$$

est munit de produit scalaire:

$$\begin{aligned}\forall u, v \ \in\ H^m(\Omega) :\ (u, v)_{H^m} &= \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2} \\ &= \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx\end{aligned}$$

et de la norme associée

$$\begin{aligned}\|u\|_{H^m} &= (\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2})^{\frac{1}{2}} \\ &= (\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2\, dx)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

1.6.3 Espace de Sobolev $H_0^m(\Omega)$

Définition 1.6.4

On définit alors $H_0^m(\Omega)$ est l'adhérence de $D(\Omega)$dans ($H^m(\Omega)$, $\|.\|_{H^m}$) (l'adhérence dans $H^m(\Omega)$) muni de sa norme $\|.\|_{H^m(\Omega)}$:

$$H_0^m(\Omega) = \overline{\{\varphi \in D(\Omega)\}}^{H^m(\Omega)}$$

Où

$$H_0^m(\Omega) = \Big\{ v \in H^m(\Omega) : \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \varphi \in D(\Omega), \ \ \|v - \varphi\|_{H^m(\Omega)} < \varepsilon \Big\}$$

on verra que $H_0^m(\Omega)$ est le sous-espace fermé de $H^m(\Omega)$ définit par

$$H_0^m(\Omega) = \left\{ v \in H^m(\Omega) : \partial^{m-1} \ v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\},$$

est munit de produit scalaire:

$$\forall u, \ v \in H_0^m(\Omega) : \ (u, \ v)_{H_0^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, \ D^\alpha v)_{L^2}$$

et de la norme associée

$$\|\cdot\|_{H_0^m(\Omega)} = \|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$$

Corollaire 1.6.1 *$(H^m(\Omega), \|.\|_{H^m(\Omega)})$ et $(H_0^m(\Omega), \|.\|_{H_0^m(\Omega)})$ sont des espaces de **Hilbert**.*

Définition 1.6.5 *(Ouvert régulier)*

On dit que un ouvert est de classe C^m, m entier ≥ 1, si pour tout $x \in \Gamma = \partial\Omega$ il exixte un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^N$ et une pplication $H : Q \longrightarrow U$ bijective telle que $H \in C^m(\bar{\Omega})$, $H^{-1} \in C^m(\bar{U})$, $H(Q_+) = U + \Omega$, $H(Q_0) = U \cap \Gamma$, on dit que Ω est de classe C^∞ si Ω est de classe C^m pour tout m.

1.6.4 Théorèmes

Théorème 1.6.1 *(Injection* ***Sobolev*** *)*

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^n$ et soit m un entier on a les injections continues suivantes:

(i) Si $n > 2m$, alors $H^m(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$, avec $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{2} + \frac{m}{n}$.

(ii) Si $n = 2m$, alors $H^m(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [2,\infty[$.

(iii) Si $n < 2m$, alors $H^m(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$.

Théorème 1.6.2 ***(Riesz-Fréchet):***

Soit V un espace de **Hilbert.**et $a(u,v)$ est un forme bilinéaire continue, alors

$$\begin{array}{rcl} \exists\ Au & : & V \to \mathbb{R},\ \text{avec } A \text{ est un opérateur linéaire de } V \text{ dans } \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & (Au, v), \end{array}$$

Tel que

$$a(u,v) = (Au, v),\ \forall v \in V$$

Théorème 1.6.3 *:(Inégalité de sobolev)*

Soit Ω un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ de frontière de classe C^1. Supposons $u \in W^{m,p}(\Omega)$

*Si $m < \frac{n}{p}$, alors $u \in L^q(\Omega)$ où $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$

en plus, on a l'estimation

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\, \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$$

avec C dépend seulement de m, n, p et Ω

*Si $m > \frac{n}{p}$, alors $u \in C^{m-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\ \alpha}(\Omega)$

où

$$\alpha = \begin{cases} \left[\frac{n}{p}\right] + 1 - \frac{n}{p} \text{ si un entier} \\ \text{n'importe quel nombre positif} < 1 \text{ si } \frac{n}{p} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

de plus on a l'estimation

$$\|u\|_{C^{m-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\,\alpha}(\Omega)} \leq C\,\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}\,.$$

Théorème 1.6.4 ***(Lax Milgram):***

(i) V un espace de **Hilbert** muni de son produit scalaire $(.,.)$ et de sa norme associée $\|\cdot\|_V$,

(ii) $a(.,.)$ une forme bilinéaire, continue et V-coercive,

(iii) $F(.)$ est forme linéaire et continue sur V.

Alors, il exsite une solution unique $u \in V$ telle que $a(u,\,v) = \langle F, v\rangle$, pour tout $v \in V$.

1.7 Problèmes elliptiques

Définition 1.7.1 *Soit* $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n^2}$ *est une matrice elliptique si*

$$\forall x \in \Omega, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n, \quad (A(x)\cdot\zeta)\cdot\zeta \geq 0,$$

(i.e. toute les valeurs propre de A sont positives avec notant $(\zeta_i)_{i=1,\ldots,n}$ les coordonnées de ζ)

Définition 1.7.2 *On définie l'opèrateur elliptique L par la forme suivante:*

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij}(x)D_ju) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)D_iu + c(x)u,$$

si pour $x \in \Omega$, tout $\zeta \in \mathbb{R}^n$, on dit que L est uniformément elliptique s'il existe constante $\alpha > 0$ telle que

$$(A(x)\cdot\zeta)\cdot\zeta \geq \alpha\,|\zeta|^2$$

i.e. si, notant $(\zeta_i)_{i=1,\ldots,n}$ les coordonnées de ζ, on écrire

$$\exists\alpha > 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall\zeta \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i,\,j} a_{ij}(x)\zeta_j\zeta_i \geq \alpha\sum_i \zeta_i^2.$$

l'elliplicité veut dire que chaque point $x \in \Omega$, la matrice $A(x)$ est définie positive et que sa plus petite valeur propre est majorée par α.

Chapitre 2

La régularité des Solutions générales pour l'équation elliptique

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on traite les opérateurs linéaires elliptiques, dont sa partie principale est sous la forme de divergence. Nous considérons les opérateurs L suivants:

2.2 La régularité des solutions générales

Supposant que les coefficients a^{ij}, b^i, c^i, et d $(i,\ j = 1,\ ...,\ n)$ sont des fonctions mesurables sur un domaine de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.Soit u une fonction faiblement différentiable et que les fonctions $a^{ij}D_j u + b_i u$, $c^i D_i u + du$, $i = 1, ..., n$ sont localement intégrables.

Définition 2.2.1 *On dit que u est faiblement satisfait $Lu = 0(\geq 0, \leq 0)$ respectivement en Ω si*

$$\pounds(u,v) = \int\limits_{\Omega} \left\{ (a^{ij}D_j u + b^i u)D_i v - (c^i D_i u + du)v \right\} dx = 0(\leq 0, \geq 0). \tag{2.2.1}$$

Remarque 2.2.1 *Pour toutes les fonctions non négatif $v \in C_0^1(\Omega)$. sachant que les coefficients de L sont localement intégrables. Une fonction $u \in C^2(\Omega)$ satisfaits à $Lu = 0(\geq 0, \leq 0)$ au sens classique ,elle satisfait aussi au sens faibles généralisé.*

soient f^i g, $i = 1, ..., n$ des fonctions localement intégrables dans Ω. alors la fonction faiblement dérivable est dite solution faible de l'équation non homogène

$$Lu = g + D_i f^i. \tag{2.2.2}$$

si

$$\pounds(u, v) = F(v) = \int_\Omega (f^i D_i v - gv)dx \quad \forall v \in C_0^1(\Omega). \tag{2.2.3}$$

Comme au dessus les solutions classique (2.2.2) sont aussi solution généralisé et $C^2(\Omega)$ sont aussi solution classique losque les coefficients de L sont assez régulière

Notre object est d'étudier le problème de Cauchy généralisé pour l'équation (2.2.2). dans le sens où le problème de cauchy bien posé ceçi dépend de coefficient de L. On va supposé que L est strictement elliptique dans Ω, autrement dit, il existe un nombre positif λ telle que

$$a^{ij}(x)\zeta_i\zeta_j \geq \lambda |\zeta|^2, \quad \forall x \in \Omega,\ \zeta \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2.4}$$

On supposons si que les coefficients de L sont bornées

$$\sum \left|a^{ij}(x)\right|^2 \leq A^2, \quad \lambda^{-2} \sum (\left|b^i(x)\right|^2 + \left|c^i(x)\right|^2) + \lambda^{-1} |d(x)| \leq v^2. \tag{2.2.5}$$

Définition 2.2.2

Une fonction $u \in W^{1,2}(\Omega)$ est dite solution gènèralisè de Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = g + D_i f^i, \\ u = \varphi \text{ dans } \partial\Omega \end{cases}$$

si u est solution gènèralisè (2.2.2), $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ et $u - \varphi \in W^{1,2}(\Omega)$.

Les fonctions $v \in C_0^1(\Omega)$ apparant (2.2.1) et (2.2.3) est dite fonction de test, donc la condition (2.2.5) on a

$$\begin{aligned} |\pounds(u, v)| &\leq \int_\Omega \left\{ \left|a^{ij} D_j u D_i v\right| + \left|b^i u D_i v\right| + \left|c^i v D_i u\right| + |duv| \right\} dx \\ &\leq C \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \quad \text{(par l'inégalité de } \textbf{Schwartz}\text{).} \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Donc pour fixé $u \in W^{1,2}(\Omega)$, la application $v \longrightarrow \pounds(u,v)$ est un fonction linéaire bornée sur $W_0^{1,2}(\Omega)$. Par conséquent sont satitisfait la relations (2.2.1). Pour $v \in C_0^1(\Omega)$ implique leur validité pour $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

par conséquent est satisfait la relation (2.2.1), pour $v \in C_0^1(\Omega)$ implique que pour $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Corollaire 2.2.1

L'estimation (2.2.6) est également significative du point de vue de la théorie de l'existence pour (2.2.2), car il montre que l'opérateur L définit à travers (2.2.1) une forme bilinéaire bornée sur chacun l'espace de **Hilbert** $W^{1,2}(\Omega)$, $W_0^{1,2}(\Omega)$.Pour fixe $u \in W^{1,2}(\Omega)$, Lu peut être défini comme élément de l'espace dual de $W_0^{1,2}(\Omega)$ par définissant $Lu(v) = \pounds(u,\, v)$, $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, En vertu du théorème de représentation de **Riesz**, $W_0^{1,2}(\Omega)$.peut être identifié avec son dual, et par conséquent l'opérateur L induit une application $W^{1,2}(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,2}(\Omega)$. Comme nous montrerons actuellement, la possibilité de résoudre le problème de Dirichlet pour l'équation (2.2.2) est facilement réduite à l'inversibilité de cette application.

Corollaire 2.2.2

L'autre approche du problème de Dirichlet linéaire décrit ci dessus n'est en aucun cas la contribution seulement importante du présente chapitre l'estimation dévloppée mis point dans les sections sont essentillees pour le dévloppement de faits de la théorie des équations quasi-linéaire. Aux fins d'application, le lecteur ont besoin seulement considére $C^1(\bar{\Omega})$ sous solution ou sur solution de l'équation (2.2.2) et en outre prendre $b^i = c^i = d = 0$ dans (2.1.1) qui est $v = 0$ dans (2.2.5).

2.2.1 Le principe du Maximum faible

Définition 2.2.3

Le principe du maximum faible classique, a une extension naturelle aux opérateurs sous forme de divergence. A fin de formuler, Nous avons besoin d'une notion l'inégalité pour les fonctions bornées dans l'espace de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$, à savoir,nous disons que $u \in W^{1,2}(\Omega)$

satisfait $u \leq 0$ sur $\partial\Omega$, si sa partie positive $u^+ = max\{u,\ 0\} \in W_0^{1,2}(\Omega)$.si u est continue au voisinage de $\partial\Omega$, puis u satisfait $u \leq 0$ sur $\partial\Omega$ s'inégalité dé tient dans le ponctuelle classique du terme usuel. Autres définitions de l'inégalité des $\partial\Omega$ suivre naturellement.

Par exemple:

$$\begin{cases} u \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ si} - u \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ u \leq v \in W^{1,2}(\Omega) \text{ sur } \partial\Omega \text{ si } u - v \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega; \end{cases}$$

avec $\underset{\partial\Omega}{sup} u = inf\{k : u \leq k \text{ sur } \partial\Omega,\ k \in \mathbb{R}\}$; $\quad \underset{\partial\Omega}{inf} u = -\underset{\partial\Omega}{sup}(-u)$.

Définition 2.2.4

Le principe du maximum faible classique, nous a imposé la condition que le coefficient de u en (2.1.1) est non positive. La quantité correspondante (2.2.1) est $D_i b^i + d$, mais de puis les dérivés $D_j b^i$ besoin n'existe pas des fonctions, non-positivité de ce terme doit être interprétée dans un sens généralisé, autrement dit, nous supposons

$$\int_\Omega (dv - b^i D_i v) dx \leq 0 \quad \forall v \geq 0,\ v \in C_0^1(\Omega). \tag{2.2.7}$$

Étant donné que b^i et d sont bornées. inégalité (2.2.7) continues pour tous les non négative $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Nous pouvons maintenant affirmer le principe du maximum faible suivant

Théorème 2.2.1

Soit $u \in W^{1,2}(\Omega)$satisfait $Lu \geq 0 (\leq 0)$ dans Ω.Donc

$$\underset{\Omega}{sup} u \leq \underset{\partial\Omega}{sup} u^+ \quad (\underset{\Omega}{inf} u \geq \underset{\partial\Omega}{inf} u^-)$$

Preuve.

Si $u \in W^{1,2}(\Omega)$, $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ nous avons $uv \in W_0^{1,2}(\Omega)$ et $Duv{=}vDu + uDv$ Nous pouvons alors écrire l'inégalité $\pounds(u, v) \leq 0$ sous la forme

$$\int_\Omega \left\{a^{ij} D_j u D_i v - (b^i + c^i) v D_i u\right\} dx \leq \int_\Omega \left\{duv - b^i D_i(uv)\right\} dx \leq 0$$

pour tout $v \geq 0$ tel que $uv \geq 0$. (par (2.2.7)). Donc. par les coefficients bornées (2.2.5), nous avons

$$\int_{\Omega} a^{ij} D_j u D_i v dx \leq 2\lambda v \int_{\Omega} v \, |Du| \, dx \tag{2.2.8}$$

pour tout $v \geq 0$ tel que $uv \geq 0$. Dans le cas spécial $b^i + c^i = 0$, la preuve est immédiate en prenant $v = max\{u - l, 0\}$ où $l = supu^+$. Pour le cas général, nous choisissons k à satisfait $l \leq k < supu$, et nous posons $v = (u - k)^+$. (Si tel que k n'exist pas nous avons donée), nous avons $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ et

$$Dv = \begin{cases} Du & \text{pour } u > k \quad (i.e. \text{ pour } v \neq 0), \\ 0 & \text{pour } u \leq k \quad (i.e. \text{ pour } v = 0), \end{cases}$$

Par conséquent, nous obtenons de (2.2.9)

$$\int_{\Omega} a^{ij} D_j u D_i v dx \leq 2\lambda v \int_{\Gamma} v \, |Du| \, dx, \qquad \Gamma = suppDv \subset suppv,$$

Et alors L strictement elliptique (voir 2.2.4)

$$\int_{\Omega} |Dv|^2 \, dx \leq 2v \int_{\Omega} v \, |Dv| \, dx \leq 2v \, \|v\|_{2;\Gamma}$$

Appliquons maintenant l'inegalité de Sobolev, pour $n \geq 3$, d'obtenir

$$\|v\|_{2n/(n-2)} \leq C \, \|v\|_{2;\Gamma} \leq C \, |supp \ Dv|^{\frac{1}{n}} \, \|v\|_{2n/(n-2)}$$

posons $C = C(n, \, v)$, tel que

$$|supp \ Dv| \geq C^{\frac{1}{n}}.$$

Dans le cas $n = 2$, une inégalité de la même forme avec $C = C(n, \, v, \, |\Omega|)$ suit également de l'inégalité de Sobolev en remplaçant $2n/(n-2)$ par n'importe quel nombre supérieur à 2. Étant donné que ces inégalités sont indépendent de k ils doivent quand k tend vers $\sup\limits_{\Omega} u$.

Autrement dit, la fonction u doit atteindre sa supremum dans Ω sur un ensemble de mesure positive, où, au moment $Du = 0$. Cette contradiction précedant

inégalité implique que $\sup\limits_{\Omega} u \leq l$.

La solution généralisé unique du problème de Dirichlet pour l'équation(2.2.2)

est une conséquence immédiate du théorème (2.2.2) ■

Corollaire 2.2.3

Soit $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ satisfaire $Lu = 0$ dans Ω. puis $u = 0$ dans Ω.Pour les conditions alternatives d'inégalité (2.2.7).

2.2.2 Possibilité de résoudre le problème de Dirichlet

L'objectif principal de cette section est le résultat d'existence suivant.

Théorème 2.2.2

Soit l'opérateur L satisfait les conditions (2.2.4), (2.2.5) et (2.2.7). $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ et $g, f^i \in L^2(\Omega)$, $i = 1, ..., n$, alors le problème de Dirichlet généralisé,

$$\begin{cases} Lu = g + D_i f^i \text{ dans } \Omega, \\ \quad u = \varphi \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une solution unique.

Preuve. Comme un sous-produit d'une alternative de Fredholm pour l'opérateur L. Soient-nous d'abord réduire le problème de Dirichlet pour le cas des valeurs limite zéro. on pose $w = u - \varphi$. Nous obtenons de (2.2.2)

$$\begin{aligned} L_w &= L_u - L_\varphi \\ &= g - c^i D_i \varphi - d\varphi + D_i(f^i - a^{ij} D_j \varphi - b^i \varphi) \\ &= \hat{g} + D_i \hat{f}^i \end{aligned}$$

Avec $\hat{f}^i = (f^i - a^{ij} D_j \varphi - b^i \varphi)$ et $\hat{g} = g - c^i D_i \varphi - d\varphi$

Et notre forme conditions sur L et φ, nous avons clairement $\hat{g}$, $\hat{f}^i \in L^2(\Omega)$, $i = 1, ..., n$ et $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Il suffit donc de prouver le théorème de (2.2.3) pour le cas $\varphi \equiv 0$.

Nous devons écrire, $H = W_0^{1,2}(\Omega)$, $g = (g,\ f^1, ...,\ f^n)$ et $F(v) = -\int\limits_\Omega (gv - f^i D_i v) dx$ pour $v \in H$. on a

$$|F(v)| \leq \|g\|_2 \, \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}$$

Nous avons $F \in H^*$. Si la forme bilinéaire $\pounds$ définie par (2.2.1) étaient coercives sur H et bornée, on conclut que le problème de Dirichlet pour l'operateur L. admet une solution unique. $\blacksquare$

Lemme 2.2.1 *Si l'opérateur L satisfait aux conditions* (2.2.4) *et* (2.2.5), *alors*

$$\pounds(u,\ u) \geq \frac{\lambda}{2}\int\limits_{\Omega} |Du|^2\, dx - \lambda v^2 \int\limits_{\Omega} u^2 dx.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \pounds(u,\ u) &= \int\limits_{\Omega} (a^{ij} D_i u D_j u + (b^i - c^i) u D_i u - du^2) dx \\ &\geq \int\limits_{\Omega} (\lambda |Du|^2 - \frac{\lambda}{2} |Du|^2 - \lambda v^2 u^2) dx \quad \text{par l'inégalité de } \textbf{Schwartz,} \\ &= \frac{\lambda}{2}\int\limits_{\Omega} |Du|^2\, dx - \lambda v^2 \int\limits_{\Omega} u^2 dx. \end{aligned}$$

■

Pour $\sigma \in \mathbb{R}$, soient les opérateurs L_σ déftnie par $L_\sigma u = Lu - \sigma u$. du lemme (2.2.1), on déduit que les opérateurs $\pounds_\sigma$ sont coercives si σ est assez grand ou $|\Omega|$ est suffisamment petit. On défînit une application: $I : H \longrightarrow H^*$ par:

$$Iu(v) = \int\limits_{\Omega} uvdx, \quad v \in H. \tag{2.2.9}$$

alors on a le

Lemme 2.2.2 *L'application I est compact.*

Preuve.

Nous pouvons ecrire $I = I_1 I_2$ avec I_2 est une injection de H dans $L^2(\Omega)$ et $I_1 : L^2(\Omega) \longrightarrow H^*$ est donné par (2.2.11), comme I_2 est compact (aussi si $p = n = 2$) , et I_1 est clairement continue, on déduit que I est compact. ■

Théorème 2.2.3 *On choisi σ_0 telle que la forme $\pounds_{\sigma_0}$ est bornée et coercive sur H l'espace de Hilbert. l'équation $Lu = F$ pour $u \in H$, $F \in H^*$ est alors équivalent à l'équation*

$$L_{\sigma_0} u + \sigma_0 I u = F$$

comme l'application $L_{\sigma_0}^{-1}$ est injective et continue de H^* vers H alors l'équation $L_{\sigma_0}u + \sigma_0 Iu = F$ est équivalente à

$$u + \sigma_0 L_{\sigma_0}^{-1} Iu = L_{\sigma_0}^{-1} F. \tag{2.2.10}$$

l'application $T = -\sigma_0 L_{\sigma_0}^{-1} I$ est compact par le lemme (2.2.2), donc en utilisant l'alternative de Fredhom alors l'existence d'une fonction $u \in H$ satisfait l'équation (2.2.9) est une conséquence de l'unicité dans H de la solution triviale de l'équation $L_u = 0$. le Théorème (2.2.3) result par corollaire (2.2.1).

Définition 2.2.5 *Soit L^* l'adjoint de l'opérateur L par*

$$L^*u = D_i(a^{ij}D_j u - c^i u) - b^i D_i u + dx.$$

Comme $\pounds^*(u, v) = \pounds(v, u)$ pour $u, v \in H = W_0^{1,2}(\Omega)$, il s'ensuit que L^* l'adjoint de L dans H espace de Hilbert. En remplaçant L par L_σ dans l'argument qui précède, on voit que l'équation $L_\sigma u = F$ sera équivalente à l'équation $u + (\sigma_0 - \sigma)L_{\sigma_0}^{-1} I = L_{\sigma_0}^{-1} F$ et que l'adjoint $T_{\sigma_0}^*$ de l'application compacte $T_\sigma = (\sigma_0 - \sigma)L_{\sigma_0}^{-1} I$ est donné par $T_\sigma^* = (\sigma_0 - \sigma)(L_{\sigma_0}^*)^{-1} I$. alors on a le

Théorème 2.2.4

Soit l'opérateur L satisfait aux conditions (2.2.4) et (2.2.5). Alors il existe un ensemble discrete dénomblable $\Sigma \subset \mathbb{R}$ tel que si $\sigma \neq \Sigma$, les problèmes de Dirichlet, $L_\sigma u$,.

$$\begin{cases} L_\sigma^* u = g + D_i f^i, \\ u = \varphi \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une solution unique pour g, $f^i \in L^2(\Omega)$ et $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$. si $\sigma \in \Sigma$, alors les sous espaces des solutions des problémes homogenes $L_\sigma u$,et $L_\sigma^* u = 0$,sous la condition $u = 0$ sur $\partial\Omega$

sont de dimensions finies et le probléme suivant:

$$\begin{cases} L_\sigma u = g + D_i f^i, \\ u = \varphi \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

est résoluble si seulment si

$$\int_{\Omega} \left\{(g - c^i D_i\varphi - d\varphi + \sigma\varphi)v - (f^i - a^{ij}D_j\varphi - b^i\varphi)D_i v\right\} dx = 0$$

pour tout v satisfait $L_\sigma^* v = 0$, $v = 0$ sur $\partial\Omega$. En outre si la condition (2.2.7) est vérifiée alors $\Sigma \subset (-\infty, 0)$.

L'opérateur $G_\sigma : H^* \longrightarrow H$ donnée par $G_\sigma = L_\sigma^{-1}$ pour $\sigma \notin \Sigma$ est appelé l'opérateur de Green pour le problème de Dirichlet pour L_σ. G_σ est un opérateur linéaire borné sur H^*, par conséquent, nous avons le.

Corollaire 2.2.4 *Soit $u \in W^{1,2}(\Omega)$ satisfaire* $\begin{cases} L_\sigma u = g + D_i f^i \\ u = \varphi \quad sur\ \partial\Omega \end{cases}$ *, avec $\sigma \neq \Sigma$. Alors il existe une constante C dépend uniquement de L, σ et Ω tel que:*

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C(\|g\|_2 + \|\varphi\|_{W^{1,2}(\Omega)}).$$

Il déduit de théorème (2.2.3) que le théoréme (2.2.2) reste valable si nous remplaçons b^i par $-c^i$ dans la condition (2.2.7).

2.2.3 Différentiabilité des Solutions faibles

Théorème 2.2.5 *Soit $u \in W^{1,2}(\Omega)$ une solution faible de l'équation $Lu = f$ dans Ω où L est strictement elliptique dans Ω, les coefficients a^{ij}, b^i i, $j = 1, ..., n$ sont bornées ey lipschitzienne et uniformément continue dans Ω,les coefficients c^i, d, $i = 1, ..., n$ sont essentielles bornées dans Ω et $f \in L^2(\Omega)$. Alors pour sous-domaine $\Omega' \subset\subset \Omega$, nous avons $u \in W^{2,2}(\Omega)$*

et

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq C(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}) \tag{2.2.11}$$

pour $C = C(n, \lambda, K, d')$, où λ est donné par (2.2.5),
$K = max\left\{\|a^{ij},\ b^i\|_{C^{0,1}(\bar{\Omega})},\ \ \|c^i,\ d\|_{L^\infty(\Omega)}\right\}$, et $d' = dist(\Omega', \partial\Omega)$.
En outre u satisfait l'équation suivant:

$$Lu = a^{ij}D_{ij}u + (D_ja^{ij} + b^i + c^i)D_iu + (D_ib^i + d)u = f \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

Preuve.

De l'intégral (2.2.3) nous avons

$$\int_\Omega a^{ij}D_juD_ivdx = \int_\Omega gvdx \quad \forall v \in C_0^1(\Omega) \tag{2.2.12}$$

où $g \in L^2(\Omega)$ est donnée par

$$g = (b^i + c^i)D_iu + (D_ib^i + d)u - f. \tag{2.2.13}$$

pour $|2h| < dist(suppv, \partial\Omega)$, on remplacant v par la différencduqoutient $\Delta^{-h}v = \Delta_k^{-h}v$ pour certains k, $1 \leq k \leq n$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Delta^h(a^{ij}D_ju)D_ivdx &= -\int_\Omega a^{ij}D_juD_i\Delta^{-h}vdx \\ &= -\int_\Omega g\Delta^{-h}vdx.\end{aligned}$$

comme

$$\Delta^h(a^{ij}D_ju)(x) = a^{ij}(x + he_k)\Delta^hD_ju(x) + \Delta^ha^{ij}(x)D_ju(x).$$

alors on a

$$\int_\Omega a^{ij}(x + he_k)D_j\Delta^huD_iv(x)dx = -\int_\Omega (\bar{g}.Dv + g\Delta^{-h}v)dx$$

Oú $\bar{g} = (\bar{g}^1, ..., \bar{g}^n)$ et $\bar{g}^i = \Delta^ha^{ij}D_ju$. En utilisant (2.2.19) on aura l'estimation suivante:

$$\begin{aligned}\int_\Omega a^{ij}(x + he_k)D_j\Delta^huD_iv(x)dx &\leq (\|\bar{g}\|_2 + \|g\|_2)\|Dv\|_2 \\ &\leq (C(n)K\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_2)\|Dv\|_2.\end{aligned}$$

nous prenons une fonction $\eta \in C_0^1(\Omega)$, satisfaisant $0 \leq \eta \leq 1$ et nous posons $v = \eta^2 \Delta^h u$, en utilisant (2.2.4) et l'inégalité de Schwarz, Nous obtenons alors:

$$\begin{aligned}
\lambda \int\limits_{\Omega} \left|\eta D\Delta^h u\right|^2 dx &\leq \int\limits_{\Omega} \eta^2 a^{ij}(x+he_k)\Delta^h D_i u \Delta^h D_j u dx \\
&= \int\limits_{\Omega} a^{ij}(x+he_k) D_j \Delta^h u (D_i v - 2\Delta^h u \eta D_i \eta) dx \\
&\leq (C(n)K \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_2)(\left\|\eta D\Delta^h u\right\|_2 + 2\left\|\Delta^h u D\eta\right\|_2) \\
&\quad + C(n)K \left\|\eta D\Delta^h u\right\|_2 \left\|\Delta^h u D\eta\right\|_2.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit alors (avec l'aide de l'inégalité de Young) que

$$\begin{aligned}
\left\|\eta D\Delta^h u\right\|_2 &\leq C(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_2 + \left\|\Delta^h u D\eta\right\|_2) \\
&\leq C(1 + \sup_{\Omega} |D\eta|)(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_2).
\end{aligned}$$

Où $C = C(n, \lambda, K)$. La fonction η peut maintenant être choisi comme une fonction de $cut-off$ tels que $\eta = 1$ sur $\Omega' \subset\subset \Omega$ et $|D\eta| \leq \frac{2}{d'}$ où $d = dist\ (\partial\Omega,\ \Omega')$. nous obtenons $Du \in W^{1,2}(\Omega')$ pour tout

$\Omega' \subset\subset \Omega$, afin que $u \in W^2(\Omega)$ et l'estimation (2.2.11), finalment nous avons $Lu \in L^2_{loc}(\Omega)$ et l'identite de l'intégral (2.2.3) soit clairment implique que $Lu = f$ presque partout dans Ω. ■

Remarque 2.2.2 *Nous notons ici (voir problème* (2.2.1)*) que dans l'estimation* (2.2.11), *la quantité de* $\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ *peut être remplacé par* $\|u\|_{L^2(\Omega)}$.

Le résultat génerale d'existence des solutions du problème de Dirichlet pour des équations elliptiques de la forme

$$Lu = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_i u + c(x)u = f \tag{2.2.14}$$

sont déduites du théorèmes (2.2.2) et (2.2.7)

Théorème 2.2.6 *Soit l'opérateur* L *est strictement elliptique dans* Ω *dont ses coefficients* $a^{ij} \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$, b^i, $c \in\in L^\infty(\Omega)$, $c \leq 0$. *pour* $f \in L^2(\Omega)$ *et* $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$, *il existe une unique fonction* $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}_{loc}(\Omega)$, *satisfait*

$$\begin{cases} Lu = f \text{ dans } \Omega \\ \quad\quad \text{et} \\ u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \end{cases}$$

Corollaire 2.2.5 *La differentiabilité de solutions faibles résult du théorème de* (2.2.5). *Car, supposons que les conditions de régularité sur les coefficients ,en supposant* $a^{ij}, b^i \in C^{1,1}(\bar{\Omega})$, c^i, $d \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$ *avec* $f \in W^{1,2}(\Omega)$.*On remplacant* v *par* $D_k v$ *pour certain* k, $1 \leq k \leq n$, *dans l'identité* (2.2.18), *on obtient par l'intégration par parties*

$$\int\limits_{\Omega} a^{ij} D_{jk} u D_i v dx = \int\limits_{\Omega} D_k \hat{g} v dx \quad \forall v \in C_0^1(\Omega).$$

et alors $u \in W_{loc}^{2,2}(\Omega)$ nous avons $D_k \hat{g} \in L^2(\Omega)$, $D_k u \in W^{2,2}(\Omega)$, nous pouvons alors conclure l'extension suivante du théorème de (2.2.5).

Théorème 2.2.7 *Soit* $u \in W(\Omega)$ *est une solution faible de l'équation* $Lu = f$ *dans* Ω *où* L *est strictement elliptique dans* Ω, *les coefficients* a^{ij}, $b^i \in C^{k,\,1}(\bar{\Omega})$, *et* c^i, $d \in C^{k-1,\,1}(\bar{\Omega})$ *et la fonction* $f \in W^{k,2}(\Omega)$, $k \geq 1$ *Alors, pour sous-domaine* $\Omega' \subset\subset \Omega$ $(\bar{\Omega}' \subset \Omega)$, *nous avons* $u \in W^{k+2,2}(\Omega')$ *et*

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega')} \leq C(\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|f\|_{W^{k,2}(\Omega)})$$

pour $C = C(n,\, \lambda,\, K,\, d',\, k)$, où $K = max \left\{ \|a^{ij},\; b^i\|_{C^{k,1}(\bar{\Omega})},\;\; \|c^i,\; d\|_{C^{k-1,1}(\Omega)} \right\}$.

Corollaire 2.2.6 *Soit* $u \in W^{1,2}(\Omega)$ *est une solution faible du l'équation strictement elliptique* $Lu = f$ *dans* Ω *et supposons que les fonctions* a^{ij}, b^i, c^i, d, $f \in C^{\infty}(\Omega)$ *Alors aussi* $u \in C^{\infty}(\Omega)$.

2.2.4 Globale régularité

Théorème 2.2.8 *Supposons que, outre les hypothèses du théorème de* (2.2.5), *qui* $\partial\Omega$ *est de classe* C^2 *et qu'il existe* $u \in W^{2,2}(\Omega)$ *pour les quels* $u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. *Ensuite, nous avons également* $u \in W^{2,2}(\Omega)$ *et*

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq C(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{2,2}(\Omega)})$$

Où $C = C(n,\, \lambda,\, K,\, \partial\Omega)$.

Théorème 2.2.9 *Soit l'opérateur L (donée par* (2.2.15)*) est elliptiqque strictement dans* Ω *et dont des coefficient de* $C^\infty(\bar{\Omega})$ *avec* $c \leq 0$ *dans* Ω*. Alors si* $\partial\Omega \in C^\infty$*, il existe une unique solution* $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ *du le pdobléme de Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu = f \\ u = \varphi, \;\; sur\; \partial\Omega \end{cases}$$

pour les fonction $f,\, \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

2.2.5 Bornitude Global des Solutions faibles

Définition 2.2.6 *Nous avons dérivé ici résultats affirmant les minorations globale de* $W^{1,2}(\Omega)$ *solutions de l'équation* (2.2.2) *qui sont bornées sur* $\partial\Omega$*. Une caractéristique intéressante des techniques fonction de test à utiliser, c'est qu'ils dépendent non pas tant sur L de l'opérateur linéaire mais sur une structure non linéaire satisfaite par L. Pour être plus explicite. nous écrivons* (2.2.2) *sous la forme*

$$D_i A^i(x,\; u,\; Du) + B(x,\; u,\; Du) = 0 \tag{2.2.15}$$

où

$$\begin{aligned} A^i(x,\; z,\; p) &= a^{ij}(x)p_j + b^i(x)z - f^i(x), \\ B(x,\; z,\; p) &= c^i(x)p_i + d(x)z - g(x) \end{aligned}$$

pour $(x,\, z,\, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Une fonction faiblement dérivable u est alors appelé une sous solution faible (solution, sur solution.) de l'équation (2.2.16) dans Ω si les fonctions $A^i(x,\, u,\, Du)$ et $A^i(x,\, u,\, Du)$ sont localement integrable et

$$\int_\Omega D_i v A^i(x,\ u,\ Du) - vB(x,\ u,\ Du)dx \leq 0(\geq 0,\ \ = 0) \tag{2.2.16}$$

pour tous $v \geq 0, \in C_0^1(\Omega)$.

Écrire $\mathbf{b} = (b^1,\ ...,\ b^n)$, $\mathbf{c} = (c^1,\ ...,\ c^n)$, $\mathbf{f} = (f^1,\ ...,\ f^n)$ et on utilise la condition (2.2.4) et l'inégalité de Schwarz, nous avons l'estimation

$$\begin{aligned} p_i A^i(x,\ z,\ p) &\geq \frac{\lambda}{2}|p|^2 - \frac{1}{\lambda}(|\mathbf{b}z| + |\mathbf{f}|^2) \\ |B(x,\ z,\ p)| &\leq |\mathbf{c}|\,|p| + |dz| + |g|\,. \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

Équation (2.2.2) est dite accordement pour satisfaire les inégalités structurelles (2.2.20). Pour nos besoins ci-dessous, nous pouvons encore simplifier la forme de ces inégalités en écrivant

$$\bar{z} = |z| + k,\quad \bar{b} = \lambda^{-2}(|\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}| + k^{-2}|\mathbf{f}|^2) + \lambda^{-1}(|d| + k^{-1}|g|) \tag{2.2.18}$$

pour certains $k > 0$. On obtient alors, pour tout $0 < \varepsilon < 1$,

$$\begin{aligned} p_i A^i(x,\ z,\ p) &\geq \frac{\lambda}{2}(|p|^2 - 2\bar{b}\bar{z}^2), \\ |\bar{z}B(x,\ z,\ p)| &\leq \frac{\lambda}{2}(\varepsilon|p|^2 + \frac{\bar{b}}{\varepsilon}\bar{z}^2). \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Nous prouvons maintenant :

Théorème 2.2.10 *Soit l'opérateur L satisfaire aux conditions* (2.2.4) *et* (2.2.5) *et suppose que $f^i \in L^q(\Omega)$, $i = 1, ..., n, g \in L^{\frac{q}{2}}(\Omega)$ pour certains $q > n$. Alors si $u \in W^{1,2}(\Omega)$ est un sous solution (sur solution) de l'équation* (2.2.2) *dans Ω satisfait $\leq 0(\geq 0)$ sur $\partial\Omega$, alors*

$$\sup_\Omega u(-u) \leq C(\left\|u^+(u^-)\right\|_2 + k) \tag{2.2.20}$$

Où $k = \lambda^{-1}(\|\mathbf{f}\|_q + \|g\|_{\frac{q}{2}})$ et $C = C(n,\ v,\ q,\ |\Omega|)$.

Théorème 2.2.11 *Soit l'opérateur L satisfait aux conditions* (2.2.4) *et* (2.2.5) *et on suppose que $f^i \in L^q(\Omega)$, $i = 1, ..., n, g \in L^{\frac{q}{2}}(\Omega)$ pour certains $q > n$. Alors si u est un $W^{1,2}(\Omega)$ sous solution (sur solution) de l'équation* (2.2.2) *dans Ω satisfait $\leq 0 (\geq 0)$ sur $\partial\Omega$, alors*

$$\sup_{\Omega} u(-u) \leq \sup_{\partial\Omega} u^+(u^-) + Ck \tag{2.2.21}$$

Où $k = \lambda^{-1}(\|\mathbf{f}\|_q + \|g\|_{\frac{q}{2}})$ et $C = C(n,\ v,\ q,\ |\Omega|)$.

Preuve. On suppose que u est un sous solution de l'équation (2.2.2). Et par l'équation (2.2.7), $l = \sup_{\partial\Omega} u^+$ est un sur solution et sans perte de généralité dans $l = 0$. Procéder comme en la preuve du théorème (2.2.2). Nous avons

$$\int_{\Omega} (a^{ij} D_j u D_i v - (b^i + c^i) v D_i u) dx \leq \int_{\Omega} (f^i D_i v - gv) dx \tag{2.2.22}$$

pour tout $v \in W^{1,2}(\Omega)$ non négative telle que $uv \leq 0$. L'inégalité faible (2.2.22)clairement satisfait à une condition de la structure (2.2.18) avec $b^i = d = 0$ et avec c remplacé par $\mathbf{b} + \mathbf{c}$. Supposons que $k > 0$ et $M = \sup_{\Omega} u^+$. Dans (2.2.22) nous choisissons ensuite $v = \frac{u^+}{M+k-u^+} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ la fonction test

en utilisé (2.2.18), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \frac{|Du^+|^2 \, dx}{(M + k - u^+)^2} &\leq \frac{1}{M + k} \int_{\Omega} (\frac{|\mathbf{b} + \mathbf{c}| \, u^+ \, |Du^+|}{(M + k - u^+)} \\ &+ \frac{u^+ \, |g|}{(M + k - u^+)^2} + \frac{(M + k) \, |\mathbf{f}|^2}{2\lambda(M + k - u^+)^2}) dx. \end{aligned}$$

En conséquence. par la définition de k, alors

$$\int_{\Omega} \frac{|Du^+|^2 \, dx}{(M + k - u^+)^2} \leq C + \frac{2}{\lambda} \int_{\Omega} (\frac{|\mathbf{b} + \mathbf{c}| \, u^+ \, |Du^+|}{(M + k - u^+)} dx, \quad C = C(|\Omega|).$$

Soit maintenent définie

$$w = log \frac{M + k}{M + k - u^+},$$

alors que de l'inégalité de **Schwartz**, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |Dw|^2 \, dx &\leq C(1 + \lambda^{-2} \int_{\Omega} |\mathbf{b} + \mathbf{c}| \, dx) \\ &\leq C(v,\ |\Omega|), \end{aligned}$$

et donc, par l'inégalite de **Sobolev**

$$\|w\|_2 \leq C(n,\ v,\ |\Omega|). \tag{2.2.23}$$

Le preuve est complété par choisir que w est aussi une sous solution d'une équation de la forme (2.2.2). Soit $\eta \in C_0^1(\Omega)$ satisfait à $\eta \geq 0$, $\eta u \geq 0$ dans Ω, nous remplaçons dans (2.2.22) la fonction de test

$$v = \frac{\eta}{M + k - u^+}$$

alors nous obtenons

$$\int_\Omega (a^{ij} D_j w D_i \eta + \eta a^{ij} D_i w D_j w - (b^i + c^i)\eta D_i w) dx \leq \int_\Omega \left(\frac{-\eta g}{(M + k - u^+)} + \frac{(D_i \eta + \eta D_i w) f^i}{(M + k - u^+)}\right) dx.$$

En outre

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (a^{ij} D_j w D_i \eta + \eta a^{ij} D_i w D_j w - (b^i + c^i)\eta D_i w) dx + \lambda \int_\Omega \eta \left|Dw\right|^2 dx \\ \leq\ &\int_\Omega \left\{ \left(\frac{|g|}{k} + \frac{|\mathbf{f}|^2}{2\lambda k^2} \right) \eta + \frac{f^i D_i \eta}{(M + k - u^+)} \right\} dx + \frac{\lambda}{2} \int_\Omega \eta \left|Dw\right|^2 dx \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\int_\Omega (a^{ij} D_j w D_i \eta + \eta a^{ij} D_i w D_j w - (b^i + c^i)\eta D_i w) dx \leq \int_\Omega (\hat{g}\eta + \hat{f}^i D_i \eta) dx$$

où $\hat{g} = |g| \diagup k + |\mathbf{f}|^2 \diagup 2\lambda k^2$, $\hat{f}^i = f^i \diagup (M + k - u^+)$ et $\|\hat{g}\|_{\frac{q}{2}} \leq 2\lambda$, $\left\|\hat{\mathbf{f}}\right\|_q \leq \lambda$.
donc nous pouvons appliquer la théoréme (2.2.14) pour obtenir

$$\begin{aligned} \sup_\Omega w &\leq C(1 + \|w\|_2), \quad C = (n,\ v,\ q,\ |\Omega|) \\ &\leq C \quad \text{par } (2.2.23) \end{aligned}$$

En outre $(M + k)/k \leq C$ et à partir de l'estimation désiré (2.2.21). il suit que Le résultat pour sursolutions est obtenu par replacment de u par $-u$. ■

2.2.6 Propriétés local de Solutions faibles

Nous détournons notre attention maintenant de forme global au comportement local. Qui dés note la matrice $[a(x)]$ par $a(x)$, $x \in \Omega$, nous ajoutons une inégalité structurelle supplémentaire à (2.2.18) et (2.2.20), à savoir

$$|\mathbf{A}(x,\ z,\ p)| \leq |\mathbf{a}|\,|p| + |\mathbf{b}z| + |\mathbf{f}|\,.$$

En divisé l'équation (2.2.2) par la constante $\frac{\lambda}{2}$, on peut supposer que $\lambda = 2$ dans les inégalités structurelles. nous avons donc.

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}(x,\ z,\ p)| &\leq |\mathbf{a}|\,|p| + 2(\bar{b})^{\frac{1}{2}}\bar{z} \\ p \cdot \mathbf{A}(x,\ z,\ p) &\geq |p|^2 - 2\bar{b}\bar{z}^2 \\ |\bar{z}B(x,\ z,\ p)| &\leq \varepsilon\,|p|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\bar{b}\bar{z}^2 \end{aligned} \tag{2.2.24}$$

pour tout $0 < \varepsilon \leq 1$, où $\bar{z}$ et $\bar{b}$ sont défini par (2.2.19) avec $\lambda = 2.$. Pour la dévelopment des résultats local. Nous definissons la quantité k par

$$k = k(R) = \lambda^{-1}(R^d\,\|\mathbf{f}\|_q + R^{2\delta}\,\|g\|_{\frac{q}{2}})$$

où $R > 0$ et $\delta = 1 - \frac{n}{q}$.

Théorème 2.2.12 *(Inégalité de Harnack)*

Soit u une solution locale de l'équation $Lu = 0$ positive dans Ω.Alors pour chaque compact G tel que $G \subset \Omega$, il existe une constante positive K, indépendante de u, telle que $\max\limits_{G} u \leq K \min\limits_{G}$, la constante K dépend de c_i, b_i, d, G, Ω.

Théorème 2.2.13 *Soit l'opérateur L satisfaire les conditions* (2.2.4), (2.2.5) *et suppose que*

$f^i \in L^q(\Omega), i = 1, ..., n$, $g \in L^{\frac{q}{2}}(\Omega)$ pour certains $q > n$. Ensuite, si u est un $W^{1,2}(\Omega)$ sous solution (sur solution) d'équation (2.2.2) dans Ω, nous avons pour tout boule $B_{2R}(y) \subset \Omega$ et $p > 1$

$$\sup_{B_R(y)} u(-u) \leq C(R^{-\frac{n}{p}} \left\| u^+(u^-) \right\|_{L^p(B_{2R}(y))} + k(R)$$

Où $C = C(n, \frac{\mathbf{A}}{\lambda}, vR, q, p)$.

Le résultat essentiel de notre développement des propriétés locales de solutions faibles et la théorie non linéaire de faits sera l'inégalité de Harnack faible suivante pour sur solutions.

Théorème 2.2.14 *Soit l'opérateur L satisfaire les conditions* (2.2.4), (2.2.5) *et suppose que*

$f^i \in L^q(\Omega)$, $g \in L^{\frac{q}{2}}(\Omega)$ pour certains $q > n$. Ensuite, si u est un $W^{1,2}(\Omega)$ sur solutions d'équation (2.2.2) dans Ω, non négative dans une boule $B_{4R}(y) \subset \Omega$ $1 \leq p < \frac{n}{n-2}$, nous avons

$$R^{\frac{-n}{p}} \left\| u \right\|_{L^p(B_{2R}(y))} \leq C(\inf_{B_R(y)} u + k(R))$$

Où $C = C(n, \frac{\mathbf{A}}{\lambda}, vR, q, p)$.

Nous supposons que initialement $R = l$ et $k > 0$. Le cas général est par la suite récupéré grâce à une simple transformation de coordonnées:$x \longrightarrow x \diagup R$ et en soit k tend vers 0. Nous devons définir pour $\beta \neq 0$ et non négatif $\eta \in C_0^1(\Omega)$, la fonction test

$$v = \eta^2 \bar{u}^\beta \quad (\bar{u} = u + k)$$

par les règles de chaine et de production. v est une fonction de test valide dans (2.2.17) et aussi

$$Dv = 2\eta D\eta \bar{u}^{\beta - 1} Du$$

afin que par la sous solution dans (2.2.17), nous obtenons

$$\beta \int_\Omega \eta^2 \bar{u}^{\beta-1} Du \cdot \mathbf{A}(x,\ u,\ Du) dx + 2 \int_\Omega \eta D\eta \cdot \mathbf{A}(x,\ u,\ Du) \bar{u}^\beta dx \qquad (2.2.25)$$

$$- \int_\Omega \eta^2 \bar{u}^\beta \cdot B(x,\ u,\ Du) dx$$

$\leq$ 0 si u est une sous solution,

$\geq$ 0 si u est une sur solution

En utilisant les inégalités structurelles (2.2.24), nous pouvons estimer. pour tout $0 < \varepsilon \leq 1$,

$$\begin{aligned}
\eta^2\bar{u}^{\beta-1}Du \cdot \mathbf{A}(x,\ u,\ Du) &\geq \eta^2\bar{u}^{\beta-1}\left|Du\right|^2 - 2\bar{b}\eta^2\bar{u}^{\beta+1} \\
\left|\eta D\eta\mathbf{A}(x,\ u,\ Du)\bar{u}^{\beta}\right| &\leq \left|\mathbf{a}\right|\left|\eta\right|\left|D\eta\right|\bar{u}^{\beta}\left|Du\right| + 2\bar{b}^{\frac{1}{2}}\eta\left|D\eta\right|\bar{u}^{\beta+1} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}\eta^2\bar{u}^{\beta-1}\left|Du\right|^2 + (1 + \frac{\left|\mathbf{a}\right|^2}{2\varepsilon}\left|Du\right|^2\bar{u}^{\beta+1} \\
&\quad +\bar{b}\eta^2\bar{u}^{\beta+1} \\
\left|\eta^2\bar{u}^{\beta} \cdot B(x,\ u,\ Du)\right| &\leq \varepsilon\eta^2\bar{u}^{\beta-1}\left|Du\right|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\eta^2\bar{u}^{\beta+1}.
\end{aligned} \tag{2.2.26}$$

On suppose que $\beta > 0$ si u est une sous solution et $\beta < 0$ si u est une sur solution. En choisi $\varepsilon = min\{1,\ \left|\beta\right| \diagup 4\}$, on obtient alors (2.2.25) et (2.2.26)

$$\int\limits_{\Omega}\eta^2\bar{u}^{\beta-1}\left|Du\right|^2 dx \leq C(\left|\beta\right|)\int\limits_{\Omega}(\bar{b}\eta^2 + (1 + \left|\mathbf{a}\right|^2)\left|D\eta\right|^2)\bar{u}^{\beta+1}dx. \tag{2.2.27}$$

où $C(\left|\beta\right|)$ est bornée si $\left|\beta\right|$ est bornée loin de zéro. Il convient maintenant d'introduire la fonction de w définie par

$$w = \begin{cases} \bar{u}^{\beta-1\diagup 2} & \text{si } \beta \neq -1 \\ log\bar{u} & \text{si } \beta = -1. \end{cases}$$

Soit $\gamma = \beta + 1$ nous pouvons écrire (2.2.27)

$$\int\limits_{\Omega}\left|\eta Dw\right|^2 dx \leq \begin{cases} C(\left|\beta\right|)\gamma^2\int\limits_{\Omega}(\bar{b}\eta^2 + (1 + \left|\mathbf{a}\right|^2)\left|D\eta\right|^2)w^2dx & \text{si } \beta \neq -1 \\ C\int\limits_{\Omega}(\bar{b}\eta^2 + (1 + \left|\mathbf{a}\right|^2)\left|D\eta\right|^2)dx & \text{si } \beta = -1. \end{cases} \tag{2.2.28}$$

Le processus d'itération désiré peut maintenant être bornitude à partir la première partie de (2.2.28). Pour de l'inégalité de Sobolev, nous avons

$$\left\|\eta w\right\|^2_{2\hat{n}\diagup(\hat{n}-2)} \leq C\int\limits_{\Omega}(\left|\eta Dw\right|^2 + \left|wD\eta\right|^2)dx$$

où $\hat{n} = n$ pour $n > 2$, $2 < \hat{2} < q$ et $C = C(\hat{n})$. en utilisant l'inégalité de Hôlder suivie de l'inégalité de l'interpolation. nous obtenons, pour tout que $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \bar{b}(\eta w)^2 dx &\leq \left\|\bar{b}\right\|_{\frac{q}{2}} \|\eta w\|^2_{\frac{2q}{(q-2)}} \\ &\leq \left\|\bar{b}\right\|_{\frac{q}{2}} (\varepsilon \|\eta w\|_{\frac{2\hat{n}}{(\hat{n}-2)}} + \varepsilon^{-\sigma} \left\|\bar{b}\right\|_{\frac{q}{2}} \|\eta w\|_2)^2\end{aligned}$$

où $\sigma = \frac{\hat{n}}{\hat{n}-2}$. Donc, par remplacement dans (2.2.28) et par un choix approprié de ε, on obtient

$$\|\eta w\|_{\frac{2\hat{n}}{(\hat{n}-2)}} \leq C(1 + |\gamma|)^{\sigma+1} \|(\eta + |D\eta|)w\| \qquad (2.2.29)$$

où $C = C(\hat{n},\ \mathbf{A},\ v,\ q,\ |\beta|)$ est bornée quand $|\beta|$ est bornée loin de zéro. Il congsine maintenant que la fonction cut-off η soit plus précisément. Soient r_1, r_2 tels que $1 \leq r_1 < r_2 \leq 3$ et on pose

$$\begin{cases} \eta \equiv 1 \text{ dans } B_{r_1} \\ \eta \equiv 0 \text{ dans } \Omega - B_{r_2} \end{cases}$$

, avec $|D\eta| \leq \frac{2}{r_2 - r_1}$. écrire $\chi = \frac{\hat{n}}{\hat{n}-2}$, nous avons à partir de (2.2.29)

$$\|w\|_{L^{2\chi}(B_{r_1})} \leq \frac{C(1 + |\gamma|)^{\sigma+1}}{r_2 - r_1} \|w\|_{L^2(B_{r_2})}.$$

.

Conclusion

Bibliographie

[1] **COHENA**, Approximation variatinnelles des équations dérivées partielles, notes du cours deuxiéme Master, JUSSIEN.

[2] **F. Bethuel** , Equations elliptiques linéaires et non linéaires, université Pierre et MarieCurie, 2001-2002.

[3] **F. poupaud**, Analyse fonctionnelle pour la licence.

[4] **G. Carlier**, analyse fonctionnelle, ENS, 2008-2009.

[5] **G. Leborgue**, Approximations vartionnelles de problémes aux limites elliptique et eléments finis, ISIMA, septembre, 2003.

[6] **G. Stampacchia,** Annalsas de l'institut fourier, 1965.

[7] **H. Brezis**, Analyse fonctionnelle, théorie et application, MASSON, Paris,1983.

[8] **H. Raphaéle**, analyse numérique des équations aux dérivée partielles, Master de mathématique, décembre 2008.

[9] **M. Chipot**, Elliptic equations : An introductory course, Birkhäuser Advanced texts,1979.

[10] **M. Willem**, analyse fonctionnelle elémentaire.