الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة المسيلة
كلية التكنولوجيا
قسم الهندسة الميكانيكية

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

رقم :............../GM./ 2023

المسيلة : 2023/04/12

مستخلص اللجنة العلمية لقسم الهندسة الميكانيكية
بخصوص تقييم مطبوعة جامعية

بناءا على التقارير الإيجابية الواردة من السادة أعضاء لجنة دراسة وتقييم مطبوعة جامعية , والآتية أسماؤهم :

• الأستاذ حرايز توفيق	أستاذ محاضر أ	جامعة محمد بوضياف - المسيلة
• الأستاذ خيراني أمينة	أستاذ محاضر أ	جامعة محمد بوضياف - المسيلة
• الأستاذ يزيد فارس	أستاذ محاضر أ	جامعة عمار ثليجي - الأغواط

صادق أعضاء اللجنة العلمية على قبول المطبوعة المنجزة من طرف الأستاذة : قشي سمية

أستاذة محاضرة – ب - قسم الهندسة الميكانيكية , كلية التكنولوجيا , جامعة محمد بوضياف بالمسيلة.

- تحت عنوان : MATHEMATIQUES 3

وفق البرنامج المقترح لطلبة السنة الثانية جذع مشترك للتكنولوجيا.

رئيس اللجنة العلمية للقسم

جامعة محمد بوضياف بالمسيلة
رئيس اللجنة العلمية
لقسم الهندسة الميكانيكية
كلية التكنولوجيا

الأستاذ: ... موسى

RÉPUBLIQUE ALÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF -M'SILA-

N° d'ordre: ....

Notes de Cours du Module Série Mathématique 03

Par:

Somia GUECHI

Pour:

Deuxieme année Licence
Domaine : Sciences et Technologies

Courriels:

somia.guechi@univ-msila.dz
guechi.s2711@gmail.com

Année: **2021/2022**

Table des matières

Définition *(La suite)* : Une suite numérique est une application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On note u_n , à la place de $u(n)$, le terme général, et (u_n) ou $\{u_n\}$ la suite.
Une suite est souvent donnée par son terme général, ou par une relation de récurrence permettant de calculer un de proche en proche.

Exemple : Soit la suite $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$, le terme d'ordre 2019 est $u_{2019} = \dfrac{1}{2019^2+1}$.

Définition *(La suite monotone)* : Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On dit que la suite $\{u_n\}$ est décroissante si $u_{n+1} \leq u_n$.
2. On dit que la suite $\{u_n\}$ est strictement décroissante si $u_{n+1} < u_n$.
3. On dit que la suite $\{u_n\}$ est croissante si $u_{n+1} \geq u_n$.
4. On dit que la suite $\{u_n\}$ est strictement croissante si $u_{n+1} > u_n$.
5. On dit que la suite $\{u_n\}$ est stationnaire si $u_{n+1} = u_n \Longleftrightarrow u_{n+1} - u_n = 0$.

Exemple :
Soit la suite $u_n = \dfrac{n+1}{n^2+2}$, $n \geq 2$ est une suite décroissante. En effet : $u_{n+1} = \dfrac{n+2}{n^2+2n+3}$ alors

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-\left(n^2+3n-1\right)}{\left(n^2+2\right)\left(n^2+2n+3\right)} < 0,$$

Donc la suite $\{u_n\}$ est strictement croissante.

Définition *(La suite bornée)* : Soit $\{u_n\}$ une suite réelle.

1. On dit que la suite $\{u_n\}$ est majorée si : $\exists\ M \in \mathbb{R},\ \forall n \geq 1 : u_n \leq M$.
2. On dit que la suite $\{u_n\}$ est minorée si : $\exists\ m \in \mathbb{R},\ \forall n \geq 1 : u_n \geq m$.
3. Si $\exists\ m, M \in \mathbb{R},\ \forall n \geq 1 : m \leq u_n \leq M$, on dit que la suite $\{u_n\}$ est bornée.

Exemple : Soit la suite $u_n = 1 + \dfrac{n}{n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$ est une suite bornée.
En effet :

$$\begin{aligned} 1)\ \forall n &\in \mathbb{N} : \frac{n}{n^2+1} \geq 0 \Longrightarrow 1 + \frac{n}{n^2+1} \geq 1, \\ &\Longrightarrow u_n \geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2)\ \forall n &\in \mathbb{N} : n^2 > n \Longrightarrow n^2+1 > n, \\ &\Longrightarrow \frac{n}{n^2+1} < 1, \\ &\Longrightarrow \frac{n}{n^2+1} + 1 < 2, \end{aligned}$$

la suite $\{u_n\}_{n\geq 1}$ majorée et minorée, donc elle est bornée.

0.1 Convergence

Définition : On dit que la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $l \in \mathbb{R}$ si

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = l,$$

la convergence de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vers l est notée par $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$.

Remarques :

⋇ Une suite qui n'est pas convergente est dit divergente.

⋇ La limite d'une suite, lorsqu'elle existe, est unique.

⋇ Toute suite convergente est bornée.

Théorème :

↬ Toute suite croissante et majorée converge.

↬ Toute suite décroissante et minorée converge.

Exemple :

1. La suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \dfrac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors elle est convergente vers 0.
2. La suite $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = n - 2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, alors elle est divergente.

Chapitre 1

Séries numériques

La notion de série découle directement de celle de suite. Nous introduisons des théorèmes permettant de déterminer la nature et éventuellement la somme d'une série. Et les séries sont un outil important. A la fin du cours, l'étudiant doit être capable de :

- déterminer la nature d'une série par comparaison avec une série connue,
- Etudier la nature des séries en utilisant les divers critères de convergence.

1.1 Généralités

Définition *(Série, somme partielle)* : Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on construit une nouvelle suite $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en posant

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n,$$

ainsi

$$\begin{aligned} S_0 &= u_0, \\ S_1 &= u_0 + u_1, \\ S_2 &= u_0 + u_1 + u_2, \\ &\vdots \\ S_2 &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, \end{aligned}$$

On appelle *suite des somme partielles* la suite $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, et la limite de $\{S_n\}$ est appelée *série* de terme général u_n.

La série de terme général u_n, est notée par :

$$\sum u_n, \quad \sum_{n\geq 0} u_n, \quad \text{ou bien } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

1.2 Convergence

Condition nécessaire de la convergence :

Pour q'une série $\sum u_n$ soit convergente, il faut que, son terme général u_n tend vers zéro quand $n \longrightarrow \infty$,

$$\sum u_n \text{ converge } \Longrightarrow u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

mais cette condition *n'est pas suffisante*.

Exemple :

- La série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge mais $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Les séries $\sum\limits_{n\geq 1} \left(2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et $\sum_{n\geq 1} n^2$ sont divergente, car $u_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$.

Définition : *(La convergence)* **:** Une série de terme général u_n et dit convergente si : la suite des sommes partielles $\{S_n\}$ est convergente. Dans ce cas, la limite de la suite $\{S_n\}$ est appelée *somme de la série* et on note

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n,$$

on a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ converge vers } l \Longleftrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} S_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} (u_0 + u_1 + \cdots + u_n) = l.$$

Remarques :

- Une série qui n'est pas convergente est dite divergente.
- La nature (convergente ou divergente) d'une série n'est pas changée si on modifie un nombre fini de termes de la série.
- Il faut manipuler la notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ avec prudence : elle ne désigne pas une somme au sens usuel du terme, mais *une limite*, celle des sommes partielles.

Exemples :

1. La séries *géométrique* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$, $(q \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq 0)$.

   En effet : Soit $|q| < 1$ alors,

$$\begin{aligned}
u_n &= \alpha q^n, \\
S_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n, \\
&= \alpha + \alpha q + \alpha q^2 + \cdots + \alpha q^n, \\
&= \alpha\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^n\right), \\
&= \begin{cases} \alpha \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, \ q \neq 1 \\ \alpha\,(n+1)\,, \ q = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

alors $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} S_n$ existe si et seulement si $|q|<1$, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha q^n = \lim_{n\longrightarrow\infty} S_n = \frac{\alpha}{1-q}.$$

2. La série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots$ est convergente et à la valeur 1.

En effet : Décomposons la fraction rationnelle $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ en éléments simples, et on pose

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)}\right), \\ &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \cdots \left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right) + \left(\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right), \\ &= 1 - \frac{1}{N+2}, \end{aligned}$$

alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\longrightarrow\infty} S_n = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1-\frac{1}{N+2}\right) = 1,$$

donc la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ est convergente.

Proposition : *(Opérations linéaires sur les séries)*

Soient $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ deux séries convergentes de somme U et V, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et de somme $\lambda U + \mu V$, on a donc

$$\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \lambda U + \mu V.$$

Exemple : Soit la série $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $S_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}.\frac{(-1)^n}{5^n} + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$, est une série convergente.

En effet : On pose

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{5^n} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n,$$

on observe les deux série $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont des séries géométrique, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{5}{6} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \frac{4}{3},$$

donc

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \\ &= \frac{17}{9} < \infty, \end{aligned}$$

donc la série $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

1.3 Séries à termes positifs

Définition : Une série $\sum u_n$ est dite à termes positifs si $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple :
- La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^2+1}{n}$ est une série à termes positifs.
- La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1-n}{\sqrt{n}}$ n'est pas une série à termes positifs.

Proposition : Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, si

$$\sum u_n \text{ converge} \Longleftrightarrow \text{ La suite des somme partielles } \{S_n\} \text{ est majorée.}$$

1.3.1 Règles de comparaison

1. **Règle de comparaison**

   Théorème *:* Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, on suppose que $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors
   - Si $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge,
   - Si $\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum v_n$ diverge,

   Exemple : Soient $\sum u_n = \sum \sin\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ et $\sum v_n = \sum \dfrac{1}{2^n}$, on a

   $$0 \leq \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n} = v_n,$$

   et $\sum v_n$ série géométrique converge, alors $\sum u_n$ est aussi convergente.

2. **Règle de comparaison logarithmique**

Théorème *:* Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs, on suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors

– Si $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge,

– Si $\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum v_n$ diverge,

Exemple : Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{3^n}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{n+3}{3(n+2)} \\ &= \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n+2}\right) \leq \frac{1}{2} = \frac{v_{n+1}}{v_n} \\ \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{1}{2^{n+1}}.2^n = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}, \text{ et } \sum v_n \text{ converge,}$$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{3^n}$ converge.

3. **Critère d'équivalence**

Théorème *:* Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l,\ l \neq 0 \text{ et } l \neq +\infty,$$

alors les deux séries sont de même nature.

Exemple :

– Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \log\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{2^n}$ (série géométrique), on a $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{3}$, et comme $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ est convergente, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ l'est aussi.

– On pose la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ converge, nous allons en déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2}$ converge. En effet :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{(n+1)(n+2)}} = \frac{1}{2} \neq 0 \neq +\infty,$$

donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2}$ est convergente.

4. **Comparaison avec une intégrale**

Théorème *:* Soit $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application *continue*, *décroissante* et *positive*. On pose $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\sum u_n \text{ converge} \Longleftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\, dx \text{ existe.}$$

Exemple :

– Considérons l'application $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ et $f(x) = \frac{1}{x}$, on a

$$\int_1^t \frac{1}{x} dx = \log(t) \text{ et } \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = +\infty,$$

donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ est divergente.

– Considérons l'application $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ et $f(x) = \frac{1}{x^2}$, on a

$$\int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{t} \text{ et } \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = 0 < +\infty,$$

donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

1.3.2 Séries de Riemann

Définition *(Série de Riemann)* **:** Soit α un nombre réel. On appelle série de *Riemann* dont le terme général est de la forme

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}, \; n \geq 1 \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Lorsque la série converge, sa somme est appelée somme de Riemann.

Remarque :

– Les séries de Riemann sont des séries à termes positifs.
– En particulier, la série divergente $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est appelée série *harmonique*.

Proposition :

- La série de *Riemann* converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha \leq 1$.
- La série de *Bertrand* $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$ converge pour $\beta > 1$ et diverge pour $\beta \leq 1$.

Exemple :

1. La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ est convergente.

   En effet : on a $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \simeq \frac{1}{n^2}$, et la série de Riemann $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.
2. La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\alpha = \frac{1}{2} \Longrightarrow$ elle est divergente.
3. La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$, $\alpha = 3 \Longrightarrow$ elle est convergente.

Proposition *(Règle de Riemann)* **:** Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs,

- S'il existe $\alpha > 1$ et $M > 0$ tels que $n^{\alpha}u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$, alors $\sum u_n$ converge.
- S'il existe $\alpha \leq 1$ et $m > 0$ tels que $n^{\alpha}u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}$, alors $\sum u_n$ diverge.

Corollaire :

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, on suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha}u_n = l$, et $l \neq 0$, $l \neq +\infty$. Alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemple : La série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ converge, car :

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = \lim_{n\to+\infty} n^2 \frac{1}{n(n-1)} = 1, \text{ et } \alpha = 2 > 1.$$

1.3.3 Critère de D'Alembert

Corollaire :

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, si

1. $l < 1 \Longrightarrow$ La série $\sum u_n$ converge,
2. $l > 1 \Longrightarrow$ La série $\sum u_n$ diverge,
3. $l = 1 \Longrightarrow$ On ne peut pas conclure.

Exemples :

1. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ est convergente.

   En effet : $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{(n+1)!} . n! \right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$

2. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n}$ diverge.

   En effet : $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 > 1.$

1.3.4 Critère de Cauchy

Corollaire :

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Posons $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, si

1. $l < 1 \Longrightarrow$ La série $\sum u_n$ converge,
2. $l > 1 \Longrightarrow$ La série $\sum u_n$ diverge,
3. $l = 1 \Longrightarrow$ On ne peut pas conclure.

Exemples :

1. La série de la forme $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\sqrt{n^2+1}}$ est convergente. En effet :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{e^{-\sqrt{n^2+1}}} &= \lim_{n\to+\infty} \left(e^{-\sqrt{n^2+1}} \right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(e^{-n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \right)^{\frac{1}{n}} \\
&= e^{-1} < 1,
\end{aligned}$$

   Alors la série converge.

2. Soit la série de terme général $u_n = \begin{cases} b^{\frac{n}{2}} & , n = 2k \\ b^{\frac{n+1}{2}} & , n = 2k+1 \end{cases}$, d'après Cauchy

$$\sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} \left(b^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{1}{2}} & , n = 2k \\ \left(b^{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{n+1}{2n}} & , n = 2k+1 \end{cases},$$

   alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} \sqrt{b} & , n = 2k \\ \sqrt{b} & , n = 2k+1 \end{cases}.$$

Alors la série converge si $\sqrt{b} < 1$, et diverge si $\sqrt{b} > 1$,pour

$$\sqrt{b} = 1 \Longrightarrow u_n = \begin{cases} 1^{\frac{n}{2}} & , n = 2k \\ 1^{\frac{n+1}{2}} & , n = 2k+1 \end{cases},$$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ la série diverge.

1.3.5 Comparaison des règles de Cauchy et de d'Alembert

La règle de Cauchy est plus fort que celle de d'Alembert. Une question se pose maintenant ; peut-on avoir des limites différentes en appliquant les deux critères de d'Alembert et celui de Cauchy ?

Proposition : Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Alors si

1. si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l_1 \neq 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l_2 \neq 0$ alors $l_1 = l_2$,
2. si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, et la réciproque est fausse.

Exemple :

Soit la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = 2+3+2+3+2+\cdots = \begin{cases} 2, \text{ si } n = 2k \\ 3, \text{ si } n = 2k+1 \end{cases}$, alors

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \begin{cases} \frac{3}{2}, \text{ si } n = 2k \\ \frac{2}{3}, \text{ si } n = 2k+1 \end{cases}, \text{ la limite n'existe pas} \\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} &= 1, \text{ la limite existe.} \end{aligned}$$

Corollaire *(Critère de Raab)* : Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On pose

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = l,$$

1. $l > 1 \Longrightarrow$ La série $\sum u_n$ converge,
2. $l < 1 \Longrightarrow$ La série $\sum u_n$ diverge,
3. $l = 1 \Longrightarrow$ On ne peut pas conclure.

1.4 Séries à termes quelconques

Définition : On appelle séries à termes quelconques une série $\sum u_n$ dont les termes peuvent être positifs ou négatifs.

Exemple : Les séries $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sin n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \cos n$ sont à termes quelconques.

Définition *(Série alternée)* **:** On appelle séries alternée $\sum u_n$ toute série vérifiant la relation $u_{n+1}.u_n < 0$ (son terme général change de signe alternativement), et le terme général u_n d'une série alternée sous la forme

$$u_n = (-1)^n v_n \text{ ou } u_n = (-1)^{n+1} v_n \text{ avec } v_n \geq 0,$$

dans le cas général une série alternée sera souvent notée : $\sum (-1)^n u_n$.

Exemple :

1. La série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n}$ est une série harmonique alternée.
2. La série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ est une série alternée.
3. La série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin n$ n'est pas une série alternée, car $\sin n$ oscille entre les valeurs -1 et 1. Et cette série diverge, car $\sin n$ ne tend pas vers 0.

1.4.1 Critère de Leibniz

Théorème : Soit $\sum u_n$ une série alternée. On suppose que

$$\begin{cases} \text{La suite } \{|u_n|\}_n \text{ est décroissante} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} |u_n| = 0. \end{cases}$$

Alors la série $\sum u_n$ est convergente. De plus

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq |u_0| \text{ et } \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq |u_{n+1}|$$

Exemple :

1. Soit la série $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ est une série harmonique alternée.

$$\begin{cases} \text{La suite } \{|u_n|\}_{n \in \mathbb{N}^*} = \left\{ \dfrac{1}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} |u_n| = 0. \end{cases}$$

   D'après Leibniz est convergente.

2. Soit la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

$$\begin{cases} \text{La suite } \{|u_n|\}_{n\in\mathbb{N}^*} = \left\{\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right\}_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante } (u_{n+1} - u_n < 0) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0. \end{cases}$$

D'après Leibniz est convergente.

Définition *(série absolument convergente)* **:** Une séries $\sum u_n$ est dite absolument convergente si $\sum |u_n|$ est convergente.

Remarques :

- Toute série à termes positifs convergente est absolument convergente (si $u_n \geq 0 \Longrightarrow |u_n| = u_n$).
- Toute série de Riemann alternée sous forme $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente pour $\alpha > 0$.

Proposition : Toute série absolument convergente est convergente mais la réciproque est fausse

$$\sum |u_n| \text{ converge} \Longrightarrow \sum u_n \text{ converge.}$$

Exemple :

Soit la série harmonique alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$. On a $\sum_{n\geq 1} |u_n| = \sum_{n\geq 1} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$, mais

$$\begin{cases} \text{La suite } \{|u_n|\}_{n\in\mathbb{N}^*} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0. \end{cases}$$

Donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais n'est pas absolument convergente.

Définition *(série semi-convergente)* **:** Une séries $\sum u_n$ est dite semi-convergente si elle converge et n'est pas absolument convergente ($\sum |u_n|$ diverge).

Exemple :

La série harmonique alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente.

1.5 Exercices Corrigées

Exercice 01 :

Etudier la nature des séries suivantes :

$$1)\ \sum_{n\geq 0}\frac{2+(-1)^n}{2^n}\quad 2)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}\quad 3)\ \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}.$$

Correction Exercice 01 :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{2+(-1)^n}{2^n}=2\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}+\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^n}$

   $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)^n=\frac{1}{2}<1$, La série de terme général $u_n=\dfrac{1}{2^n}$ converge alors $2\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}$ converge.

   $\dfrac{(-1)^n}{2^n}$ est positif, décroissant et tend vers 0, d'après le critère de Leibniz la série converge.

   Donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ est convergente.

2. $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}.\frac{n!}{n^2}\right)=0<1$, La série de terme général $u_n=\dfrac{n!}{n^2}$ converge.

3. $u_n\simeq\dfrac{1}{n^2}$ (série de Riemann $\alpha=2$) donc la série converge.

Exercice 02 :

1. Etudier la nature des séries suivantes :

$$A)\ \sum_{n\geq 0}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2}\quad B)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^7}\quad C)\ \sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right).$$

2. Pour chacune des affirmations suivantes : montrer qu'elle est *fausse* en donnant un contre-exemple :
   - Si $\sum(u_n+v_n)$ converge alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.
   - Si $\sum u_n$ converge alors elle converge absolument.

Correction Exercice 02 :

1. $A)$ $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n=\lim_{n\longrightarrow\infty}e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}=e>1$, La série de terme général u_n diverge.

$B)\dfrac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^7} \sim \dfrac{2^4}{7^3} \times \dfrac{1}{n^{10}}$, Il s'agit du terme général d'une série de Riemann *convergente* avec $\alpha = 10 > 1$.

$C)$ $(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = (-1)^n \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ est positif, décroissant et tend vers 0, d'après le critère de Leibniz la série converge.

2. $A)$ Prendre $u_n = n + \dfrac{1}{n^2}$ et $v_n = -n$ Pour $n \geq 1$.

   La série $\sum (u_n + v_n)$ converge mais les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent ; car : les termes généraux ne tendent pas vers 0.

   $B)$ On a vu dans le cours que la série harmonique alternée $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge mais ne converge pas absolument : $\sum \dfrac{1}{n}$.

1.6 Exercices

1. Etudier la convergence des séries suivantes :

   $1)\sum\limits_{k\geq 1} \dfrac{1}{2k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots$ $\quad 2)\sum\limits_{k\geq 1} \dfrac{1}{2k+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$ $\quad 3)\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2}{n^2+3}$

   $4)\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5}{2\sqrt{n}}$ $\quad 5)\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$ $\quad 6)\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\cos^2(n)}$

   $7)\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{e^n}$ $\quad 8)\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{9}{(3n+1)(3n+2)}$ $\quad 9)\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{-1}{4}\right)^n$

   $10)\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ $\quad 11)\sum\limits_{n\geq 2} \ln\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)$ $\quad 12)\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n \dfrac{n^3}{n!}$

   $13)\sum\limits_{n\geq 2} (-1)^n \ln\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)$

2. En utilisant la définition d'une série numérique, calculer la somme des séries suivantes et en déduire sa nature

   $$1)\ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{q^n},\ \text{pour } q \in \mathbb{R}^* \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

   $$3)\ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} \qquad 4)\ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+3n+2}.$$

Chapitre 2

Séries de Fourier

Définition : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport 0 (c'est-à-dire de la forme $[-a,a]$ ou $]-a,a[$ ou $\mathbb{R}$). Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur cet intervalle. On dit que :

- ♦ f est *paire* si $\forall t \in I : f(-t) = f(t)$, (son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées)
- ♦ f est *impaire* si $\forall t \in I : f(-t) = -f(t)$, (son graphe est symétrique par rapport à l'origine).

Définition : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel, $T > 0$. La fonction f est dite périodique de période T si

$$\forall t \in \mathbb{R} : f(t+T) = f(t)$$

Exemple :

Les fonctions $f(t) = \cos t$ et $g(t) = \sin t$ sont $2\pi-$périodiques.

2.1 Séries trigonométriques

Définition *(série trigonométrique)* : On appelle série trigonométrique une série de fonctions dont le terme général est une fonction trigonométrique

$$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t),$$

avec $t \in \mathbb{R}, \omega > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n, b_n des nombres réels. Et la série de Fourier trigonométrique de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)). \tag{2.1}$$

Et les coefficients a_0, a_n et b_n sont appelés coefficients de Fourier.

Remarque : L'exemple le plus classique de série trigonométrique et *la sérier de Fourier* associée à une fonction périodique intégrable.

Proposition : Si les séries numériques $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes alors la série trigonométrique (2.1) est normalement convergente sur $\mathbb{R}$; donc absolument et uniformément sur $\mathbb{R}$.

2.2 Série de Fourier sous forme complexe

Soit la série de Fourier de la fonction périodique $f(t)$ de période 2π,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right),$$

En appliquant les formules d'Euler

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Alors

$$\cos(n\omega t) = \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} \text{ et } \sin(n\omega t) = \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i}.$$

On trouve

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i}\right), \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega t} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega t}\right), \end{aligned}$$

posons, $c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$ et $c'_n = \dfrac{a_n + ib_n}{2}$ et calculons leurs expressions. Les deux coefficients a_n et b_n étant réels, les coefficients c_n et c'_n sont alors complexes conjugués l'un de l'autre $\overline{c_n} = c'_n$. Calculons c_n

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t)\, dt - \frac{i}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t)\, dt, \\ &= \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \left[\cos(n\omega t) - i \sin(n\omega t)\right] dt, \end{aligned}$$

soit

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-in\omega t}dt \text{ et } c'_n = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{in\omega t}dt.$$

On passe de c_n à c'_n en changeant i en $-i$, ce qui revient, d'aprés l'expression de c_n à changer n en $-n$.

$$\overline{c_n} = c'_n = c_{-n}.$$

Le développement de $f(t)$ est alors

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{in\omega t} + c_{-n}e^{-in\omega t}\right), \\ f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}, \text{ avec } c_n = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-in\omega t}dt. \end{aligned}$$

Cette dernière expression est appelée forme complexe d'une série trigonométrique.
Pour $n = 0$, on obtient

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t).$$

2.3 Série de Fourier de fonction T-périodique

Soit f est une fonction T-périodique $(T > 0)$, continue par morceaux sur $[0, T]$. On note $\omega = \frac{2\pi}{T}$la pulsation, $l = \frac{T}{2}$, et a un réel quelconque. Alors les coefficients de Fourier

1. Forme réelle $(n \in \mathbb{N})$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)\, dt \text{ et } b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin(n\omega t)\, dt,$$

ou

$$a_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+l} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt \text{ et } b_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+l} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right) dt,$$

2. Forme complexe $(n \in \mathbb{Z})$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\, e^{-in\omega t}dt, \text{ ou } c_n = \frac{1}{2l}\int_a^{a+2l} f(t)\, e^{-\frac{in\pi t}{l}}dt$$

Remarque :

♡ Si f est une fonction paire $(f(-t) = f(t))$ alors

$$\begin{cases} b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, l = \dfrac{T}{2} \\ a_n = \dfrac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos\left(\dfrac{n\pi t}{l}\right) dt = \dfrac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos\left(\dfrac{n\pi t}{l}\right) dt, \end{cases}$$

alors la série de Fourier

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right),$$

donc la série de Fourier d'une fonction *paire* ne comporte pas de terme en sinus.

♡ Si f est une fonction impaire $(f(-t) = -f(t))$ alors

$$\begin{cases} a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}, 2l = T \\ b_n = \dfrac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin\left(\dfrac{n\pi t}{l}\right) dt = \dfrac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin\left(\dfrac{n\pi t}{l}\right) dt, \end{cases}$$

alors la série de Fourier

$$S_f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{l}\right),$$

donc la série de Fourier d'une fonction *impaire* ne comporte pas de terme en cosinus.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(t) = (t - \pi)^2, \quad t \in]0, 2\pi[$$

Définition *(Fonction C^1 par morceaux)* : On dit que f est C^1 par morceaux sur le segment $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_p = b$ telle que :

✠ f de classe C^1 dans chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[\ \ (i = 0, ..., p-1)$,

✠ $f(t)$ et $f\prime(t)$ possèdent une limite en chaque extrémité de ces intervalles, notées $f(a_i - 0), f(a_i + 0), f'(a_i - 0)$ et $f'(a_i + 0)$.

Les notations $f(t+0)$ et $f(t-0)$ représentent respectivement les limites à droite et à gauche de f au point t, et

$$f'(a_i - 0) = \lim_{t \to a_i^-} \frac{f(t) - f(a_i - 0)}{t - a_i} \text{ et } f'(a_i + 0) = \lim_{t \to a_i^+} \frac{f(t) - f(a_i + 0)}{t - a_i}$$

Définition *(Somme de Fourier)* : Soit f une fonction T-périodique et C^1 par morceaux sur $[0, T]$. Alors

$$S_f(t_0) = \frac{f(t_0 + 0) + f(t_0 - 0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi t_0}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t_0}{l}\right)\right)$$

est dite la somme de Fourier de f en t_0.

Théorème *(Dirichlet)* : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T = 2\pi$ et C^1 par morceaux sur $[0, T]$. Alors la série de Fourier associée à f est convergente et on a :

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) = \begin{cases} f(t) & \text{si } f \text{ est continue en } t \\ \frac{f(t_0+0)+f(t_0-0)}{2} & \text{si } f \text{ est discontinue en } t \end{cases},$$

De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle où la fonction f est continue.

Remarque :

♡ Si f est continue en un point t_0, alors $S(t_0) = f(t_0)$. Dans ce cas les trois nombres $f(t), f(t+0)$ et $f(t-0)$ sont égaux.

Exemple : Soit $f :]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique, $T = 2\pi$ définie par $f(t) = t$.

1. Les discontinuités de f sont les point de la forme $t_k = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et
$$f(t_k + 0) = -\pi \text{ et } f(t_k - 0) = \pi.$$
2. f et partout dérivable sauf aux point t_k. En ces points nous avons
$$f'(\pi - 0) = \lim_{t\to\pi^-} \frac{f(t) - f(\pi - 0)}{t - \pi} = 1, \text{ et } f'(\pi + 0) = \lim_{t\to\pi^+} \frac{f(t) - f(\pi + 0)}{t - \pi} = 1$$
f vérifie les conditions de Dirichlet, donc sa série de Fourier associée est convergente.

f est impaire et $l = \frac{T}{2} = \pi$, donc

$$\begin{cases} a_0 = a_n = 0, \\ b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(nt)\, dt = \frac{2(-1)^n}{n}, \end{cases}$$

Donc

$$S_f(t) = 2 \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nt) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \neq (2k+1)\pi \\ 0 & \text{si } t = (2k+1)\pi \end{cases}.$$

Exemple : Soit $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique, $T = 2\pi$ définie par $f(t) = |t|$.

1. La fonction f continue sur $\mathbb{R}$.
2. f et partout dérivable sauf aux point $t_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. En ces points nous avons
$$f'(k\pi - 0) = \lim_{t\to k\pi^-} \frac{f(t) - f(k\pi - 0)}{t - k\pi} = 1, \text{ et } f'(k\pi + 0) = \lim_{t\to k\pi^+} \frac{f(t) - f(k\pi + 0)}{t - k\pi} = 1$$
f vérifie les conditions de Dirichlet, donc sa série de Fourier associée est convergente.

f est impaire et $l = \frac{T}{2} = \pi$, donc

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} t dt = \pi, \\ a_n = \dfrac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} t \cos(nt)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ \frac{-4}{\pi(2n+1)^2} & \text{si } n = 2k+1 \end{cases} \\ b_n = 0, \end{cases}$$

Donc

$$S_f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)t) = f(t).$$

2.4 Égalité de Parseval

Si f est continue par morceaux sur un segment de longueur T on a :

$$\frac{1}{T} \int_a^{a+T} (f(t))^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

ou

$$\frac{1}{l} \int_a^{a+2l} (f(t))^2\, dt = \frac{(a_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right), \ l = \frac{T}{2}.$$

2.5 Exercices Corrigées

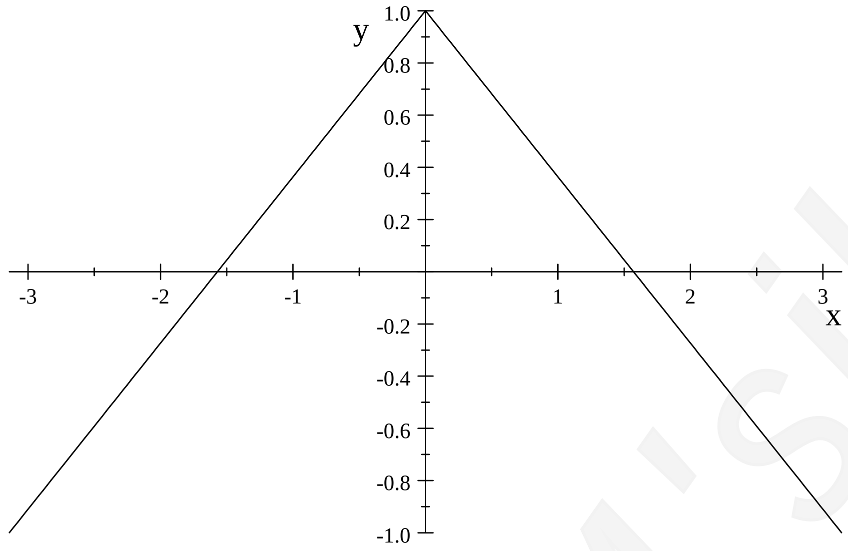
Exercice 01 :

Soit f une fonction *paire* de période 2π définie par :

$$f(t) = 1 - \frac{2t}{\pi}, \quad \text{si } t \in [0, \pi]$$

1. Construire le graphe de f sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$.
2. Déterminer le développement de f en série de Fourier.
3. En déduire les sommes $\sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{1}{(2n+1)^4}$.

Correction Exercice 01 :



1. $T = 2\pi \Longrightarrow L = \pi$ et $\alpha = 0$. et f paire alors

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{L}\int_0^{\alpha+2L} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1 - \frac{2t}{\pi}dt = 0, \\
a_n &= \frac{2}{L}\int_0^{\alpha+2L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{2t}{\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt \\
&= \frac{4\left(1-(-1)^n\right)}{n^2\pi^2}, \\
b_n &= 0 \text{ puisque } f \text{ est paire}
\end{aligned}$$

Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, S_n(t) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(1-(-1)^n\right)}{n^2}\cos nt = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2}.$$

2. En déduire les sommes $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^4}$.

L'égalité $f(0) = 1$ fournit $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

D'autre parte, puisque f est par morceaux sur $\mathbb{R}$ et de période 2π, la formule de Perseval fournit

$$\begin{aligned}
\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) &= \frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L} f^2(t)\,dt \text{ et } f \text{ paire et } a_0 = 0 \\
\text{alors} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 &= \frac{2}{L}\int_0^{\alpha+2L} f^2(t)\,dt
\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{64}{\pi^2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{2}{3}$$
$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^2}{96}.$$

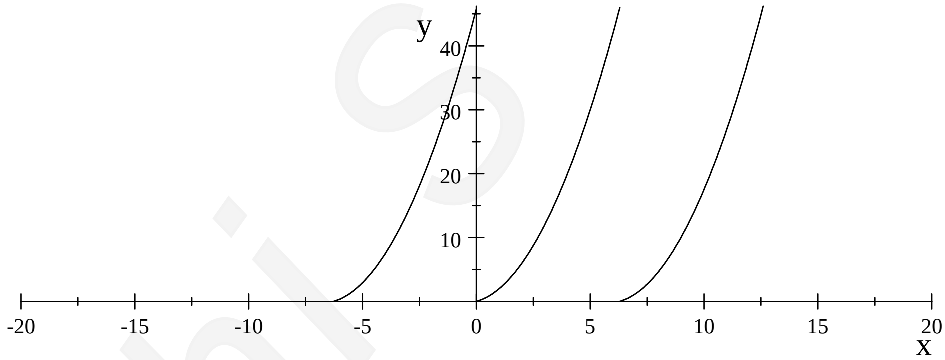
Exercice 02 :

Soit f la fonction de période 2π définie par :

$$f(t) = t^2 + t, \quad \text{si } t \in [0, 2\pi[$$

1. Construire le graphe de f sur l'intervalle $[-2\pi, 4\pi]$.
2. Déterminer le développement de f en série de Fourier.
3. En déduire la somme de la série de Riemann alternée de terme général $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.
4. Calculer de même ; la somme de série de Riemann de terme général $\dfrac{1}{n^2}$.

Correction Exercice 02 :



1.
2. $T = 2\pi \Longrightarrow L = \pi$ et $\alpha = 0$. Alors

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(t)\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t + t^2 dt = \frac{8\pi^2}{3} + 2\pi. \\
a_n &= \frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(t+t^2\right)\cos(nt)\,dt = \frac{4}{n^2}. \\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(t+t^2\right)\sin(nt)\,dt = -\frac{4\pi+2}{n}.
\end{aligned}$$

Donc

$$S_n(t) = \frac{4\pi^2}{3} + \pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos nt - \frac{4\pi + 2}{n} \sin nt \right).$$

3. La fonction S_n prend la même valeur que f en tout point ou cette dernière fonction est continue. En particulier

$$\begin{aligned} S_n(\pi) &= \frac{4\pi^2}{3} + \pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2} \cos n\pi \\ &= f(\pi) = \pi + \pi^2, \end{aligned}$$

d'ou

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

4. Remplaçons cette fois t par 0. Comme f n'est pas continue en ce point,

$$S_n(0) = \frac{f(0+0) + f(0-0)}{2} = 2\pi^2 + \pi.$$

D'autre part,

$$S_n(0) = \frac{4\pi^2}{3} + \pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^2},$$

Finalement,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2.6 Exercices

Calculer les coefficients de Fourier de f et donner sa sérier de Fourier :

1. $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ sur }]0,\pi[\\ -1 \text{ sur }]-\pi,0[\end{cases}$, et en déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.
2. $f(t) = t$ sur $]-\pi,\pi[$, et en déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
3. $f(t) = |t|$ sur $]-\pi,\pi[$, et en déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.
4. $f(t) = \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$ sur $]0,\pi[$, et en déduire la relation $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^2}{8} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
5. $f(t) = e^t$ sur $]0,2\pi[$.
6. Montrer que : $|\sin t| = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nt)}{4n^2-1}$ ou λ est un coefficient à déterminer.

Chapitre 3

Transformation de Fourier

Définition : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable et absolument intégrable (i.e $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|$existe), on définit la transformation de Fourier de f la fonction notée $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$ de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sa transformation inverse $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ par :

$$\hat{f}(\alpha) = \mathcal{F}(f)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\alpha t} dt,$$

et la transformation inverse (ou conjuguée)

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)\, e^{i\alpha t} d\alpha.$$

Exemple : Soit

$$f(t) = e^{-|t|} = \begin{cases} e^{-t} \text{ si } t \geq 0 \\ e^{t} \text{ si } t \leq 0 \end{cases},$$

donc la transformation de Fourier de f est

$$\begin{aligned} \hat{f}(\alpha) &= \mathcal{F}(f)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\alpha t} dt, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{t} e^{-i\alpha t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t} e^{-i\alpha t} dt \right), \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\,(1+\alpha^2)}, \end{aligned}$$

et la transformation inverse de Fourier de f est

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)\, e^{i\alpha t} d\alpha, \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\alpha^2} e^{i\alpha t} d\alpha, \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\alpha^2} (\cos \alpha t + i \sin \alpha t)\, d\alpha \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha t}{1+\alpha^2} d\alpha + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha t}{1+\alpha^2} \\
f(t) &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos \alpha t}{1+\alpha^2} d\alpha = e^{-|t|}.
\end{aligned}$$

Cas particuliers :

1. Si f est une fonction *paire* on sait que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ et la transformation de Fourier s'écrit

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\alpha) &= \mathcal{F}(f)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos \alpha t - i \sin \alpha t)\, dt, \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t) \cos \alpha t dt.
\end{aligned}$$

2. Si f est une fonction *impaire* on sait que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ et la transformation de Fourier s'écrit

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\alpha) &= \mathcal{F}(f)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos \alpha t - i \sin \alpha t)\, dt, \\
&= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t) \sin \alpha t dt.
\end{aligned}$$

3.1 Propriétés de la transformation de Fourier

1. **Linéarité :**

   Soient f et $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ alors

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g).$$

2. **Transformée de Fourier de la translation :**
   Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, et $k\in\mathbb{R}$ alors
   $$\mathcal{F}\left(f\left(t-k\right)\right)\left(\alpha\right)=e^{-i\alpha k}\mathcal{L}\left(f\left(t\right)\right)\left(\alpha\right).$$

3. **Transformée de Fourier de l'homothétie :**
   Soit $k>0$ et soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction, et f_k définie par
   $$f_k\left(t\right)=f\left(kt\right)\ \text{alors}\ \mathcal{F}\left(f_k\left(t\right)\right)\left(\alpha\right)=\frac{1}{k}\mathcal{F}\left(f\left(t\right)\right)\left(\frac{\alpha}{k}\right).$$

4. **Transformée de Fourier du produit de convolution :**
   Soient les fonctions $f,g\in\mathbb{C}$, on a
   $$f*g=\int_0^t f\left(x\right)g\left(t-x\right)dx=\int_0^t f\left(t-x\right)g\left(x\right)dx$$
   alors
   $$\mathcal{F}\left(f*g\right)\left(\alpha\right)=\sqrt{2\pi}\mathcal{F}\left(f\right)\left(\alpha\right)\times\mathcal{F}\left(g\right)\left(\alpha\right).$$

3.2 Exercice

Soit la fonction f définie par
$$f\left(t\right)=\begin{cases}1-t^2 \text{ si } |t|<1\\ \quad 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

1. Trouver la transformation de Fourier de f.
2. Montrer que :
   $$\int_0^{+\infty}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{3\pi}{16}.$$

Chapitre 4

Transformation de Laplace

Une des méthodes les plus efficaces pour résoudre certaines équations différentielles est d'utiliser la transformation de Laplace et il généralise la transformation de Fourier. Cette transformation fut introduite pour la première fois sous une forme proche de celle utilisée par *Laplace* en 1774, dans le cadre de la théorie des probabilités.
La transformation de Laplace est injective et par calcul (ou par usage de tables) il est possible d'inverser la transformation. Le grand avantage de la transformation de Laplace est que la plupart des opérations courantes sur la fonction originale $f(t)$, telle que la dérivation, ou une translation sur la variable t, ont une traduction (plus) simple sur la transformée $F(s)$.

4.1 Fonction C_L

La classe des fonctions réelles C_L est formée des fonctions causales, continues par morceaux et d'ordres exponentielles.

- Une fonction f est causale si elle est nulle pour $t < 0$.

$$f(t) = 0 \text{ si } t < 0.$$

- Une fonction f est continue par morceaux si

$$\begin{cases} f \text{ de classe } C^1 \text{ dans chaque sous intervalle }]a_i, a_{i+1}[\,, \\ f \text{ et } f' \text{ possédont une limite en chaque extrémité de ces intervalles.} \end{cases}$$

- Une fonction f est d'ordre exponentielle si elle est bornée par une exponentielle c'est à dire :

$$\exists M \geq 0, r \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq M e^{rt},\ M \in \mathbb{R} \text{ et } t \geq 0.$$

Exemples :

1. Les fonctions $\cos kt$, t^3, e^t ne sont pas causales.
2. Les fonctions

$$\begin{aligned} E(t) &= \begin{cases} 1 \text{ si } t \leq 0 \\ 0 \text{ si } t \geq 0. \end{cases}, f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ 3 \text{ si } t \geq 0. \end{cases} \\ g(t) &= \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ \sin kt \text{ si } t \geq 0. \end{cases} \text{ et } h(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ e^t \text{ si } t \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

   Sont des fonctions causales.

Définition *(La transformation de Laplace)* **:**
La transformation de Laplace d'une fonction f de C_L $(f : \mathbb{R} \to \mathbb{C})$ est définie par

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt,$$

et s ici est une variable complexe et $F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s)$ est une fonction complexe.

Remarque : Sous les deux conditions

1. f est continue par morceaux,
2. f est d'ordre exponentielle,

il est facile de vérifier que $\mathcal{L}(f(t))(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$ converge pour tout s vérifiant $\operatorname{Re}(s) > r$. On admet le théorème suivant :

Théorème : *(Condition suffisante)*
Si f est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et d'ordre exponentielle alors $\mathcal{L}(f(t))(s)$ existe pour tous les s tel que $\operatorname{Re}(s) > r$.

Exemples :

1. Calculons la transformation de Laplace de la fonction constante $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ A \text{ sinon} \end{cases}$

   et $A \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t))(s) &= \int_0^{+\infty} A e^{-st} dt = \frac{-A}{s} \left[e^{-st} \right]_0^{+\infty} \text{ et } s = x + iy \\ &= \frac{-A}{s} \left[e^{-xt} e^{-yt} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{A}{s} \text{ si } \operatorname{Re}(s) > 0 \end{aligned}$$

   donc $\mathcal{L}(A)(s) = \dfrac{A}{s}$ définie si $\operatorname{Re}(s) > 0$.

2. Calculons la transformation de Laplace de la fonction exponentielle $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ e^{2t} \text{ sinon} \end{cases}$ et $A \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(t))(s) &= \int_0^{+\infty} e^{2t} e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{(2-s)t} dt \\ &= \frac{1}{2-s} \left[e^{(2-s)t} \right]_0^{+\infty} \text{ et } s = x + iy \\ &= \frac{1}{s-2} \text{ si } \operatorname{Re}(s) > 2 \end{aligned}$$

donc $\mathcal{L}(e^{2t})(s) = \dfrac{1}{s-2}$ définie si $\operatorname{Re}(s) > 2$. Plus généralement si $t \geq 0$

$$\mathcal{L}\left(e^{\alpha t}\right)(s) = \frac{1}{s-\alpha} \text{ définie si } \operatorname{Re}(s) > \alpha.$$

4.2 Propriétés de la transformation de Laplace

1. **Linéarité :**
   Soient f et g deux fonctions admettant des transformations de Laplace $\mathcal{L}(f)$ et $\mathcal{L}(g)$ et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ alors
   $$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}(f) + \beta \mathcal{L}(g).$$
2. **Transformée de Laplace de la translation :**
   Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction vérifiant $f(t) = 0$ si $t < 0$ (f une fonction causale) définie par
   $$f_\alpha(t) = f(t - \alpha), \ \alpha > 0 \text{ alors } \mathcal{L}(f_\alpha(t))(s) = e^{-\alpha s} \mathcal{L}(f(t))(s).$$
3. **Transformée de Laplace de l'homothétie :**
   Soit $k > 0$ et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction causale admettant une transformation de Laplace et f_k définie par
   $$f_k(t) = f(kt) \text{ alors } \mathcal{L}(f_k(t))(s) = \frac{1}{k} \mathcal{L}(f(t)) \left(\frac{s}{k} \right).$$
4. **Transformée de Laplace du produit de convolution :**
   Soient les fonctions $f, g \in \mathbb{C}_L$ vérifiant $g(t) = f(t) = 0$ si $t < 0$ alors
   $$f * g = \int_0^t f(x) g(t-x) dx = \int_0^t f(t-x) g(x) dx$$
   alors
   $$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(f)(s) \times \mathcal{L}(g)(s).$$

5. **Transformée de Laplace d'une primitive :**
   Soit $g(t) = \int_0^t f(x)\,dx$ une primitive de f; on a alors $F' = f$ et $g(0) = 0$ alors
$$\mathcal{L}(g)(s) = \mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)\,dx\right)(s) = \frac{F(s)}{s}.$$

4.3 Quelques fonctions élémentaires les plus usuelles

	$f(t)$	$F(s)$	Condition
1	1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
2	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$	$s > \alpha$
3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ n \in \mathbb{N}^*$	$s > 0$
4	$\sin kt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$	$s > 0$
5	$\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$	$s > 0$
6	$\sinh(kt)$	$\frac{k}{s^2-k^2}$	$s > \lvert k\rvert$
7	$\cosh(kt)$	$\frac{s}{s^2-k^2}$	$s > \lvert k\rvert$

4.4 Transformée inverse

Définition : Si $F(s)$ représente la transformée de Laplace d'une fonction f alors $f(t)$ est la transformée inverse de Laplace $F(s)$ et nous notons
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))(t).$$

Exemples :

1. La transformation de Laplace inverse de $\frac{3}{s}$ est $f(t) = 3$, alors
$$\mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s}\right)(t) = 3 = f(t).$$

2. La transformation de Laplace inverse de $\frac{1}{s-\beta}$ est
$$\mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-\beta}\right)(t) = e^{\beta t} = f(t).$$

Remarque :

- ⊙ La fonction $F(s)$ appelée **l'image** de f et $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$ est appelée **originale** de $F(s)$.
- ⊙ Soient f et g deux fonctions admettant des transformations inverse de Laplace $\mathcal{L}^{-1}(f)$ et $\mathcal{L}^{-1}(g)$ et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ alors

$$\mathcal{L}^{-1}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}^{-1}(f) + \beta \mathcal{L}^{-1}(g).$$

4.5 Transformée e Laplace d'une dérivée

Supposons que f une fonction soit :

1. Continue,
2. D'ordre exponentielle pour tout $t \geq 0$,
3. f' est continue par morceaux pour tout $t \geq 0$,
   Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f'(t))(s) &= \int_0^{+\infty} f'(t)\, e^{-st} dt \\ &= \left[f(t)\, e^{-st}\right]_0^{+\infty} - s\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st} dt \\ &= sF(s) - f(0). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f''(t))(s) &= \int_0^{+\infty} f''(t)\, e^{-st} dt \\ &= \left[f'(t)\, e^{-st}\right]_0^{+\infty} - s\int_0^{+\infty} f'(t)\, e^{-st} dt \\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

4.6 Exercices Corrigées

Exercice 01 :

1. Trouver l'image par transformation de Laplace de :

$$A)\ f(t) = 1 + t^2 + \cos\left(\sqrt{2}t\right) + e^{2t}\sin(t) \quad B)\ g(t) = e^{-3t}\left(t^2+1\right)^2.$$

2. Utiliser la transformation de Laplace pour résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} u'(t) - 2u(t) = 2te^{2t}, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Correction Exercice 01 :

1. Trouver l'image par transformation de Laplace de :

$$\begin{aligned}
&A)\ f(t) = 1 + t^2 + \cos\left(\sqrt{2}t\right) + e^{2t}\sin(t) \\
&\Rightarrow F(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^3} + \frac{s}{s^2+2} + \frac{1}{(s-2)^2+1} \\
&B)\ g(t) = e^{-3t}\left(t^2+1\right)^2 \\
&\mathcal{L}\left(\left(t^2+1\right)^2\right) = \mathcal{L}\left(t^4 + 2t^2 + 1\right) = \frac{4!}{s^5} + 2\frac{2!}{s^3} + \frac{1}{s} \text{ pour } s > 0 \\
&\text{et } \mathcal{L}\left(e^{\alpha t} f(t)\right) = F(s-\alpha) \text{ donc} \\
&G(s) = \frac{4!}{(s+3)^5} + \frac{4}{(s+3)^3} + \frac{1}{(s+3)},
\end{aligned}$$

2. $$\begin{cases} u'(t) - 2u(t) = 2te^{2t}, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Par la transformation de Laplace, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(u'(t) - 2u(t)\right) &= \mathcal{L}\left(2te^{2t}\right), \\
(s-2)\,\mathcal{L}(u(t)) &= \frac{2}{(s-2)^2} + 1, \\
\mathcal{L}(u(t)) &= \frac{1}{(s-2)^3} + \frac{1}{(s-2)},
\end{aligned}$$

par la transformation inverse de Laplace, on peut alors conclure que la solution est :

$$u(t) = \left(t^2+1\right)e^{2t}.$$

Exercice 02 :

1. Trouver l'image par transformation de Laplace de :

$$A)\ f(t) = 2t + e^{3t}\cos(3t) + \sin(t)\cos(2t) \quad B)\ g(t) = (1 + 4\cos(3t))^2.$$

2. $A)$ Trouver la décomposition en éléments simples de $\dfrac{2s-2}{s^2-s-2}$.

   $B)$ Trouver la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{(s^2-s-2)(s-1)^2}$.

   $C)$ Utiliser la transformation de Laplace pour résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} u''(t) - u'(t) - 2u(t) = te^{t}, \\ u(0) = 2, \quad u'(0) = 0. \end{cases}$$

Correction Exercice 02 :

1. Trouver l'image par transformation de Laplace de :

$$\begin{aligned}
A)\ f(t) &= 2t + e^{3t}\cos(3t) + \sin(t)\cos(2t)\\
&= 2t + e^{3t}\cos(3t) + \frac{1}{2}(\sin 3t - \sin t)\\
\Rightarrow F(s) &= \frac{2}{s^2} + \frac{s-3}{(s-3)^2+9} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{s^2+9} - \frac{1}{s^2+1}\right)\\
B)\ g(t) &= (1+4\cos(3t))^2\\
&= 9 + 8\cos 3t + 8\cos 6t,\\
\Rightarrow G(s) &= \frac{9}{s} + \frac{8s}{s^2+9} + \frac{8s}{s^2+36}.
\end{aligned}$$

2. $A)$ Trouver la décomposition en éléments simples de $\frac{2s-2}{s^2-s-2}$. (admet deux poles réels $-1, 2$). On pose

$$\begin{aligned}
\frac{2s-2}{s^2-s-2} &= \frac{2s-2}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2}\\
2s-2 &= A(s-2) + B(s+1),
\end{aligned}$$

– $s = -1 \Longrightarrow A = \frac{4}{3}$,
– $s = 2 \Longrightarrow B = \frac{2}{3}$,

Alors

$$\frac{2s-2}{s^2-s-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{s+1} + \frac{2}{s-2}\right).$$

$B)$ Trouver la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{(s^2-s-2)(s-1)^2}$. (admet trois poles réels $-1, 2$ et 1). On pose

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(s^2-s-2)(s-1)^2} &= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{(s-1)^2}\\
1 &= A(s-2)(s-1)^2 + B(s+1)(s-1)^2 + C(s+1)(s-2)(s-1)\\
&\quad + D(s+1)(s-2),
\end{aligned}$$

– $s = -1 \Longrightarrow A = \frac{-1}{12}$,
– $s = 2 \Longrightarrow B = \frac{1}{3}$,
– $s = 1 \Longrightarrow D = \frac{-1}{2}$,

Ce qui détermine trois constantes, pour obtenir, on compare les termes en s^3

$$\begin{aligned}
1 &= A + B + C\\
&\Longrightarrow C = \frac{-1}{4}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\frac{1}{(s^2-s-2)(s-1)^2}=\frac{-1}{12}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{4}{s-2}\right)+\frac{-1}{4}\left(\frac{1}{s-1}+\frac{2}{(s-1)^2}\right).$$

C) Par la transformation de Laplace, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(u''(t)-u'(t)-2u(t)\right) &= \mathcal{L}\left(te^t\right),\\ \left(s^2-s-2\right)\mathcal{L}(u(t)) &= \frac{1}{(s-1)^2}+2s-2,\\ \mathcal{L}(u(t)) &= \frac{1}{(s^2-s-2)(s-1)^2}+\frac{2s-2}{(s^2-s-2)},\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le résultat de la question précédente, on trouve

$$\mathcal{L}(u(t))=\frac{5}{4}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s-2}-\frac{1}{4}\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)^2},$$

par la transformation inverse de Laplace, on peut alors conclure que la solution est :

$$u(t)=\frac{5}{4}e^{-t}+e^{2t}-\frac{2t+1}{4}e^t.$$

4.7 Exercices

1. Trouver l'image par la transformation de Laplace de ($f_1$et f_2 deux fonctions 2-périodiques sur $\mathbb{R}_+$) :

   1) $2e^{-6t}$, 2) $3e^{2t}$, 3) $2t^4$,
   4) $\left(t^2+1\right)^2$, 5) $\alpha\cos 3t+\beta\sin 3t$, 6) $\alpha ch3t+\beta sh3t$,
   7) $e^{-2t}\cos 3t$, 8) $2e^{-5t}(\cos 2t+\sin 2t)$, 9) $e^{-4t}sh8t$,
   10) $e^{-t}\sin^2\frac{t}{2}$, 11) $f_1(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & 0<t<1\\ -1 & 1<t<2\end{cases}$, 12) $f_2(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & 0<t<1\\ -t+2 & 1<t<2\end{cases}$

2. Trouver l'inverse (l'origine) de :

   1) $F(s)=\dfrac{1}{s^2-5}$, 2) $F(s)=\dfrac{s}{s^2-2s-1}$, 3) $F(s)=\dfrac{e^{-s}}{s^2+s+1}$,
   4) $F(s)=\log\left(\dfrac{s+3}{s+2}\right)$.

3. En utilisant la transformée de Laplace, résoudre les équations différentielles suivantes :

$$1)\ \begin{cases} y' = 2y + 8\sin 2t \\ y(0) = -2 \end{cases}, \qquad 2)\ ,\begin{cases} y' = 2y + 2te^{2t} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} y'' + 2y' + y + t = \cos t + e^{-t} \\ y(0) = y'(0) = \alpha \end{cases}, \qquad 4)\ \begin{cases} y'' + 2y' + y + t = \cos t + e^{-t} \\ y(0) = y'(0) = \alpha \end{cases},$$

$$5)\ \begin{cases} y' + v' + y + v = 1 \\ y' + v = e^{t} \\ y(0) = -1,\ v(0) = 2 \end{cases}.$$

Bibliographie

[[1]] G. A. Sedogbo. *Analyse DEUG Sciences* $2^{éme}$ *année.* Éditions BELIN, Paris, 2000.

[[2]] F. Bertrande, D. Fredon, M. Maumy-Bertrande. *Mathématiques analyse en 30 fiches,* Dound, Paris, 2009.

[[3]] E. Laamri, P. Chateaux, G. Eguether. *Tous les Exercices d'Analyse PC-PSI.* Dunod, Paris, 2008.

[[4]] N. Amroun. *Cours de séries numériques.* Universit e Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes,Algérie, 2007.

[[5]] L. Fred. *Transformation de Laplace.* heig-vd, 2011.

[[6]] J. Quinet. *Cours élémentaire de Mathématiques supérieures tome 3.* Dound, Paris, 1967.

Ce document donnent les principales théorèmes, définitions, résultats et des exercices avec les solutions pour le module Mathématique 03 (Math 03). Il s'adresse aux étudiants de deuxième année de Licence des sciences et techniques ; Électronique, Génie Mécanique, Electromécanique, Génie Civil et Hydraulique, ainsi qu'aux étudiants des autres filières. Il est le fruit d'un enseignement de mathématiques pour les ingénieurs dispensé à la faculté de technologie de l'université de Msila, et le contenu du cours :

♡ Série Numériques,

♡ Série de Fourier,

♡ Transformation de Fourier,

♡ Transformation de Laplace.